

TD 1. FONCTIONS : LIMITES, CONTINUITÉ, DÉRIVABILITÉ

I. Généralités : représentations graphiques, calculs et limites

I.1. Exercice

05/09

- a. Rappeler les principales propriétés algébriques des puissances, de la fonction exponentielle et de la fonction logarithme népérien.
- b. Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \frac{3^2 + 3^3}{2^4} \times \left(\frac{2^3}{3}\right)^2 \quad B = \frac{\frac{2}{3} + 1}{5} \quad C = \frac{2^3 \sqrt{2^6 3^2}}{5^3 (\sqrt{2})^4}$$

$$D = \ln\left(\frac{3}{4}\right) + 3 \ln(2) - 2 \ln(3) \quad f(x) = \frac{e^{2x}}{e^{5x}} \sqrt{e^{6x}}.$$

- c. Ecrire chacun des nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont deux entiers avec a le plus grand possible.

$$A = \sqrt{8} \quad B = \sqrt{27} \quad C = \sqrt{5^3 \times 2^2} \quad D = \sqrt{1800} \quad E = \sqrt{75 \times 3 \times 16}.$$

- a. Propriétés algébriques de la fonction exponentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, e^{x+y} = e^x e^y. \quad (1)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} = 1/e^x \quad (1')$$

Propriétés algébriques de la fonction logarithme :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}_+^*, \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y). \quad (2)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(1/x) = -\ln x \quad (2')$$

Propriétés algébriques des fonctions puissance :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall b \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}, a^{b+c} = a^b a^c \quad (3)$$

$$(a^b)^c = a^{bc}. \quad (4)$$

Remarques. — (1') est une conséquence de (1) avec $y = -x$. (2') est une conséquence de (2) avec $y = 1/x$. (3) est une conséquence de (1) et de la définition de a^b , à savoir $a^b = e^{b \ln a}$ (cf. cours). (4) est encore une conséquence de la définition, et du fait que pour tout x dans l'ensemble \mathbb{R} , $\ln(e^x) = x$. Quand b et c sont des entiers naturels, on peut également démontrer (3) et (4) par récurrence avec la définition par produits itérés.

- b. On ne donne pas les détails des calculs ; on doit trouver. $A = 16$, $B = \frac{1}{3}$, $C = \frac{48}{125}$, $D = \ln(2/3)$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1$.

Remarque. — Il est utile de maintenir les termes sous forme de puissances (ou logarithmes) le plus longtemps possible au cours du calcul. Par exemple au cours du calcul de C ,

$$\sqrt{2^6 3^2} = (2^6 3^2)^{1/2} = 2^{6/2} 3^{2/2} = 2^3 3 = 24,$$

tandis qu'écrire $\sqrt{2^6 3^2} = \sqrt{576}$ ne nous aide pas vraiment.

- c. Pour un nombre de la forme $a\sqrt{b}$, la forme « la plus simple possible » sera celle où b est le plus petit entier possible¹. On doit trouver $A = 2\sqrt{2}$, $B = 3\sqrt{3}$, $C = 10\sqrt{5}$, $D = 30\sqrt{2}$, $E = 60\sqrt{1}$. E est plus familièrement connu sous le nom de 60.

I.2. Exercice

- a. Simplifier : $(e^x)^5 e^{-2}$; $\frac{e^x + e^{-x}}{e^{-x}}$.
- b. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$.
- c. On pose $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$. Montrer que $f(2x) = \frac{2f(x)}{1 + f(x)^2}$.

- a. D'après (4) et (1), pour tout x dans \mathbb{R} , $(e^x)^5 e^{-2} = e^{5x-2}$. D'après (1),

$$\frac{e^x + e^{-x}}{e^{-x}} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^{-x}} \frac{e^x}{e^x} = e^{2x} + 1.$$

- b. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \frac{e^{-x}}{e^{-x}} = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}.$$

- c. Calculons : pour tout x dans \mathbb{R} ,

$$\begin{aligned} \frac{2f(x)}{1 + f(x)^2} &= \frac{2 \frac{e^x - 1}{e^x + 1}}{1 + \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2} = \frac{2 \frac{e^x - 1}{e^x + 1} (e^x + 1)^2}{1 + \frac{(e^x - 1)^2}{(e^x + 1)^2}} = \frac{2(e^x + 1)(e^x - 1)}{(e^x + 1)^2 + (e^x - 1)^2} \\ &= \frac{2(e^{2x} - 1)}{e^{2x} + 2e^x + 1 + e^{2x} - 2e^x + 1} \\ &= \frac{2e^{2x} - 1}{2e^{2x} + 1} = f(2x). \end{aligned}$$

(les
parenthèses
ne sont pas
facultatives)

Commentaire : on va de l'expression la plus compliquée vers la plus simple (et pas dans l'autre sens !). Il peut être judicieux de poser $y = e^x$ afin d'alléger les calculs.

Corrigé au
tableau par
Paul (2017)

I.3. Exercice

- a. Soient a et b deux nombres réels tels que $-5 \leq a \leq -1$ et $2 \leq b \leq 4$. Déterminer des encadrements de $a+b$, $a-b$, ab , a^2 , $\frac{a}{b}$, $(a+b)^2$ et $a^2 + 2ab + b^2$.
- b. Même question avec $-2 \leq a \leq 5$ et $-3 \leq b \leq -1$. Que peut-on dire de $\frac{1}{a}$?

- a. On trouve les encadrements suivants

$$-3 \leq a + b \leq 3 ; \quad -9 \leq a - b \leq -3 ; \quad -20 \leq ab \leq -2 ;$$

$$1 \leq a^2 \leq 25 ; \quad -\frac{5}{2} \leq \frac{a}{b} \leq -\frac{1}{4} ; \quad 0 \leq (a + b)^2 \leq 9.$$

Observons que $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$. L'encadrement de $a^2 + 2ab + b^2$, à partir de chacun des termes de la somme traité séparément, donne

$$-37 \leq a^2 + 2ab + b^2 \leq 35.$$

1. Ou, ce qui revient au même, $|a|$ est le plus grand possible, b étant entier.

Ce n'est pas incompatible avec l'encadrement de $(a + b)^2$ par 0 et 9 obtenu précédemment, mais c'est nettement moins précis. Cette perte d'information vient de ce qu'on n'a pas tiré parti de la corrélation entre les différents termes de la somme.

- b. Attention, ici le signe de a n'est pas toujours le même. On le traite par une disjonction de cas. Les résultats sont

$$-5 \leq a + b \leq 4; \quad -1 \leq a - b \leq 8; \quad -15 \leq ab \leq 6; \quad 4 \leq a^2 \leq 25; \quad -5 \leq \frac{a}{b} \leq 2.$$

Pour traiter $1/a$, disjoignons les cas :

- (i) Si $-2 \leq a < 0$ alors $1/a \leq -1/2$.
- (ii) Si $a = 0$ alors $1/a$ n'est pas défini.
- (iii) Si $0 < a \leq 5$ alors $1/a \geq 1/5$.

Il n'y a pas d'encadrement de $1/a$ possible, on peut seulement dire que ce nombre n'appartient pas à l'ensemble $] -1/2, 1/5[$.

Remarque (suggestion de Teng Fei Xia, septembre 2017). — Pour encadrer a/b , il est commode de représenter cette quantité comme la pente de la droite passant par 0 et le point de coordonnées (b, a) . Puisque le point (b, a) est astreint à se situer dans un rectangle, il s'agit d'identifier deux coins donnant des pentes extrémales, voir la figure 1 page 5 pour la résolution de la question b.

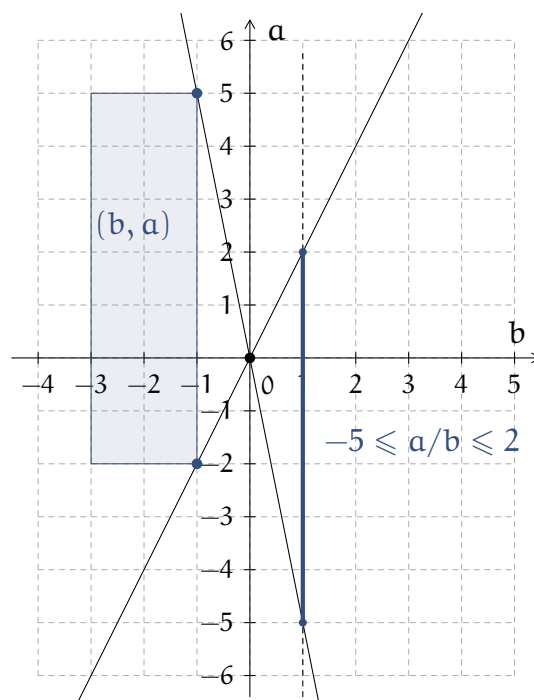
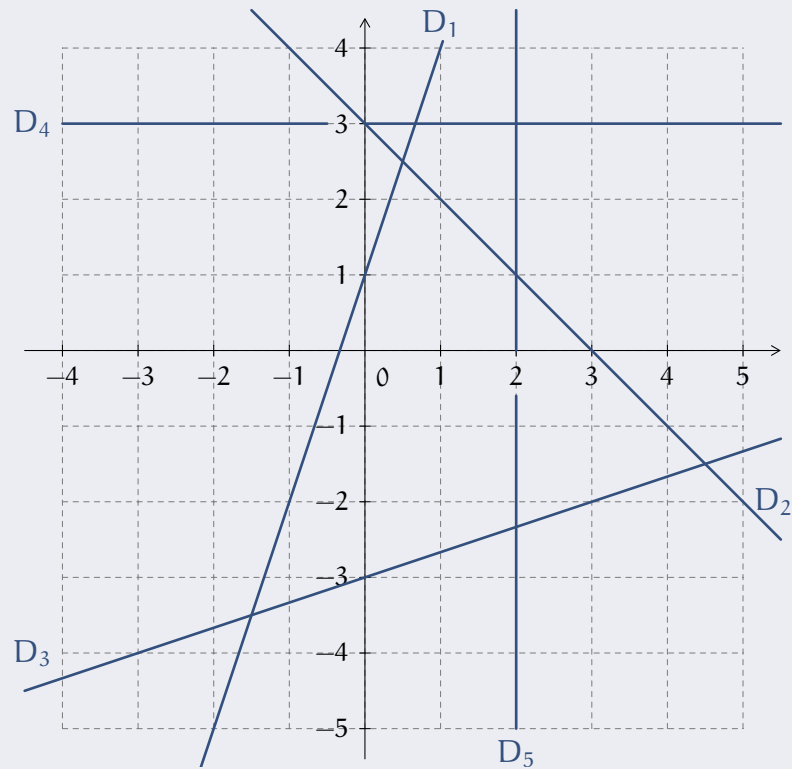


FIGURE 1 – Illustration d'une méthode « visuelle » pour l'encadrement du quotient : exemple de la question b de l'exercice I.3.

On pourra chercher des méthodes visuelles pour encadrer somme et différence (cependant elles ne présentent pas vraiment d'avantage par rapport à la méthode classique).

I.4. Exercice

Déterminer graphiquement une équation de chacune des droites représentées :



On écrit les équations de droites sous la forme $ax + by + c = 0$ où a, b, c sont des entiers relatifs².

$$D_1 : y - 2x - 1 = 0$$

$$D_2 : x + y - 3 = 0$$

$$D_3 : 3y - x + 9 = 0$$

$$D_4 : y - 2 = 0$$

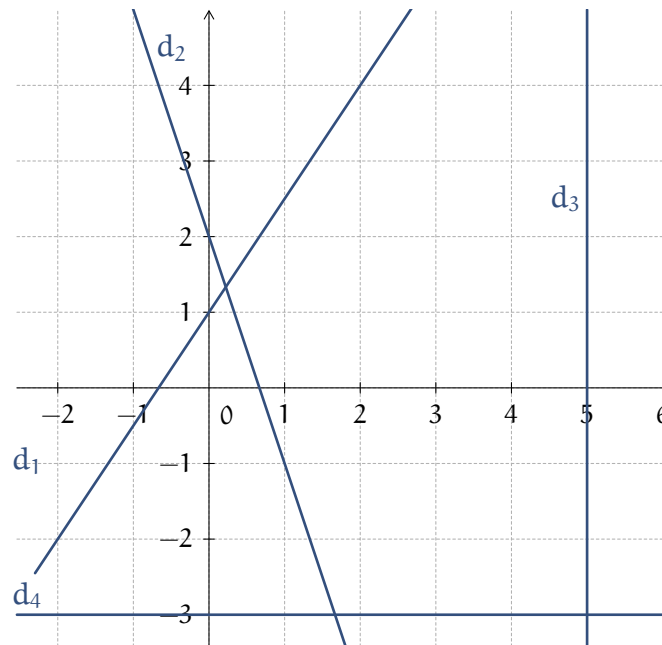
$$D_5 : x - 2 = 0$$

I.5. Exercice

a. Droites demandées :

2. On rappelle que l'ensemble des entiers relatifs, noté \mathbb{Z} , est

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, \dots\}.$$



- b. Le point E de coordonnées x et y est sur la droite (CD) si et seulement si les vecteurs \vec{CE} et \vec{CD} sont **colinéaires**, c'est-à-dire si $(x - x_C)(y_D - y_C) = (y - y_C)(x_D - x_C)$. En remplaçant par les coordonnées de C et D,

$$(CD) : x + y - 1 = 0.$$

Méthode à retenir en vue de l'algèbre linéaire (2nd semestre).

1.6. Exercice : rappels sur le second degré

On considère le trinôme du second degré : $P(x) = ax^2 + bx + c$ où $a \in \mathbb{R}^\times$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$.

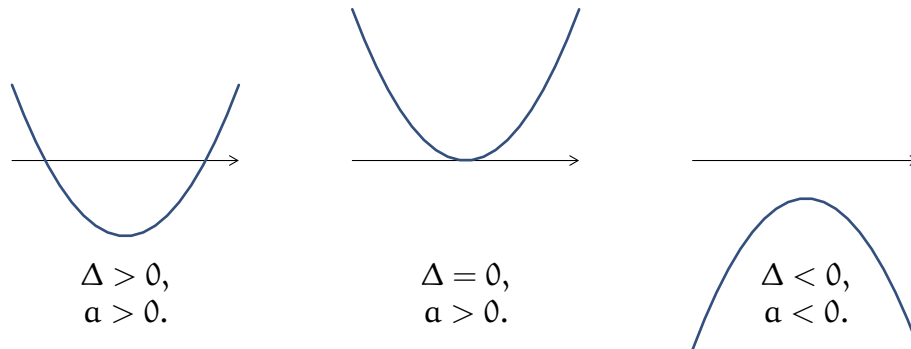
- Rappeler la formule donnant le discriminant.
- Donner en fonction du signe de Δ l'ensemble des racines réelles de P .
- Comment factorise-t-on P ?
- Tracer l'allure de P dans les cas suivants :
 - Si $\Delta > 0$ et $a > 0$
 - Si $\Delta = 0$ et $a > 0$
 - Si $\Delta < 0$ et $a < 0$.

- $\Delta = b^2 - 4ac$
- ◦ Si $\Delta > 0$ alors il y a deux racines réelles ; celles-ci sont

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Si $\Delta = 0$ il y a une racine réelle (dite « double »), $x_1 = -b/(2a)$.
- Si $\Delta < 0$ l'ensemble des racines réelles est vide. Néanmoins il y a toujours des racines complexes (cf. le TD 3).
- Plusieurs méthodes :
 - Ou bien, on identifie P comme un carré (éventuellement, à une constante multiplicative près) à l'aide d'une identité remarquable. On peut arriver à cette méthode en constatant que le discriminant est nul.
 - Ou bien, on met P sous forme canonique (voir l'exercice suivant). Une factorisation est alors possible quand le discriminant est positif.

- Ou bien, on détermine deux racines x_1 et x_2 si elles existent (voir les exercices suivants pour différentes méthodes). La forme factorisée est alors $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Si le discriminant est < 0 on ne peut pas factoriser (sur les réels).
- Allures de la courbe représentative de P dans les cas demandés



I.7. Exercice

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 7x^2 + 28x - 35$.

- a. Déterminer la forme canonique de f .
- b. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
- c. Étudier le signe de $f(x)$.
- d. Donner la forme factorisée de $f(x)$.
- e. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère (vous déterminerez les coordonnées du sommet).

- a. Pour trouver la forme canonique on fait apparaître le début du développement d'un carré. Pour tout x dans \mathbb{R} ,

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 7x^2 + 28x - 35 = 7(x^2 + 4x - 5) = 7([x + 2]^2 - 4 - 5) \\
 &= 7([x + 2]^2 - 9) \\
 &= 7(x + 2)^2 - 63.
 \end{aligned} \tag{5}$$

La dernière ligne est la forme canonique.

- b. D'après (5), pour tout x dans \mathbb{R} ,

$$\begin{aligned}
 f(x) = 0 &\iff (x + 2)^2 - 9 = 0 \\
 &\iff (x + 2 + 3)(x + 2 - 3) \\
 &\iff (x + 5)(x - 1) \\
 &\iff \begin{cases} x = -5, \text{ ou} \\ x = 1 \end{cases} \\
 &\iff x \in \{-5, 1\}.
 \end{aligned}$$

On rappelle que \iff désigne l'équivalence logique, et se lit « si et seulement si » en français. De chaque côté du symbole \iff doit figurer une formule (et non un

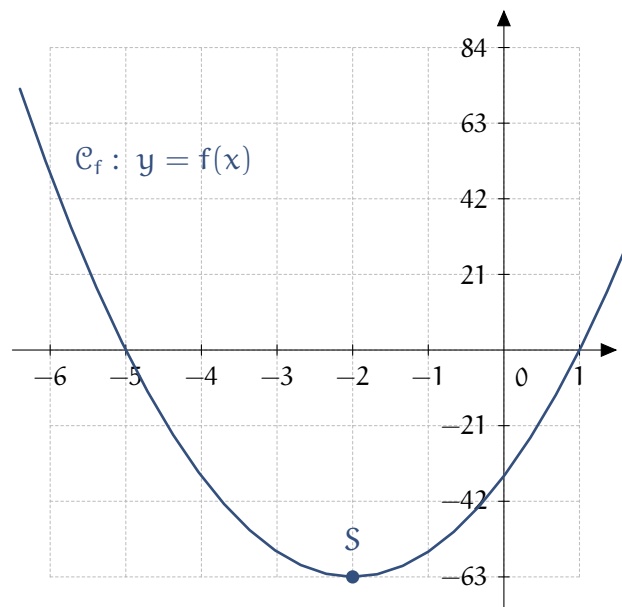
terme) du langage. En particulier \iff ne doit pas être utilisé pour signifier une égalité. Par exemple $2x \iff 3$ pour x réel n'a aucun sens (que ce soit au brouillon ou au propre!).

- c. Dans la question précédente, on a vu que pour tout x dans \mathbb{R} , $f(x) = 7(x+5)(x-1)$. On en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$	-5	1	$+\infty$
7		$+$	$+$	$+$
$x+5$		$-$	0	$+$
$x-1$		$-$	$-$	0
$f(x)$		$+$	0	$-$

On peut aussi utiliser les théorèmes généraux : le coefficient de plus haut degré 7 est positif et il y a deux racines distinctes, donc $f(x)$ est négative entre ses deux racines et positive ailleurs.

- d. On a déjà montré que pour tout x dans \mathbb{R} , $f(x) = 7(x+5)(x-1)$.
e. Graphe de la fonction f . Sommet $S(-2, -63)$.



I.8. Exercice

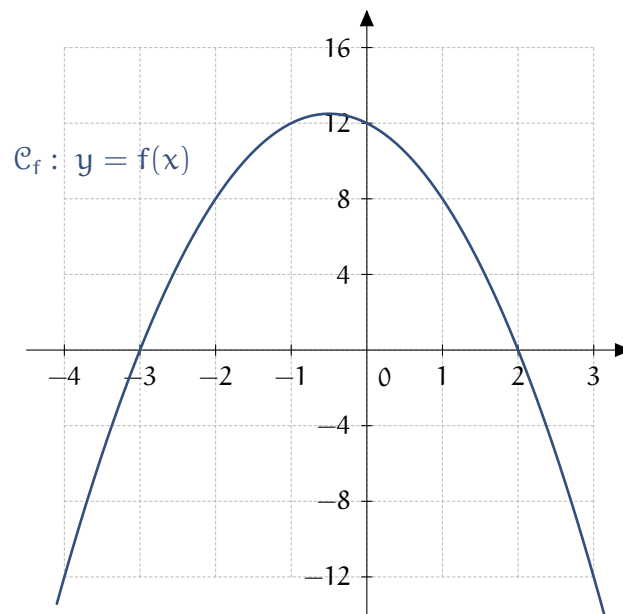
Soient f et g les fonctions définies sur \mathbb{R} par $f(x) = -2x^2 - 2x + 12$ et $g(x) = x^2 - 3x - 4$.

- Déterminer les racines et le signe de $f(x)$ puis tracer sa courbe représentative dans un repère.
- Factoriser $g(x)$ (on pourra relever une racine évidente).

- a. Les racines de f sont 2 et -3 . Le signe est donné dans le tableau suivant :

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$

Voici le graphe de f



- b. -1 est racine évidente³ de g . Puisque le coefficient de plus grand degré est 1, le produit des racines est le terme constant, à savoir -4 . Donc les racines de g sont -1 et 4 , et

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = (x + 1)(x - 4).$$

1.9. Exercice

Factoriser les expressions suivantes :

$$A = x^2 + 6x + 9 \quad B = 4x^2 + 25 + 20x \quad C = 3x^2 - 2\sqrt{15}x + 5$$

$$D = (3x + 2)(2 - x) - 4(3x + 2)^2.$$

Pour chacune des expressions suivantes, trouver une racine évidente et factoriser :

$$f(x) = x^2 - x - 6, \quad g(x) = 3x^2 - 2x - 1, \quad h(x) = 3x^2 - 5x - 2.$$

Voici les formes factorisées :

$$A = (x + 3)^2$$

$$B = (2x + 5)^2$$

$$C = 3(x - \sqrt{5/3})^2$$

$$\begin{aligned} D &= (3x + 2)[2 - x - 4(3x + 2)] \\ &= (3x + 2)(-6 - 13x). \end{aligned}$$

Une racine évidente de f est 3 , et pour tout x dans \mathbb{R} , $f(x) = (x - 3)(x + 2)$.

Une racine évidente de g est 1 , et pour tout x dans \mathbb{R} , $g(x) = (x - 1)(3x + 1)$.

Une racine évidente de h est 2 , et pour tout x dans \mathbb{R} , $h(x) = (x - 2)(3x + 1)$.

3. On ne devrait pas interpréter trop littéralement la tournure « racine évidente » et encore moins en faire un motif de fierté personnelle. Une racine est évidente si elle a été trouvée par une méthode autre que systématique. Deux attitudes inefficaces : appliquer sans réfléchir la formule du Δ , ou perdre du temps à chercher une racine qui, quand bien même on réussirait à l'attraper, n'aurait d'évidente que le nom.

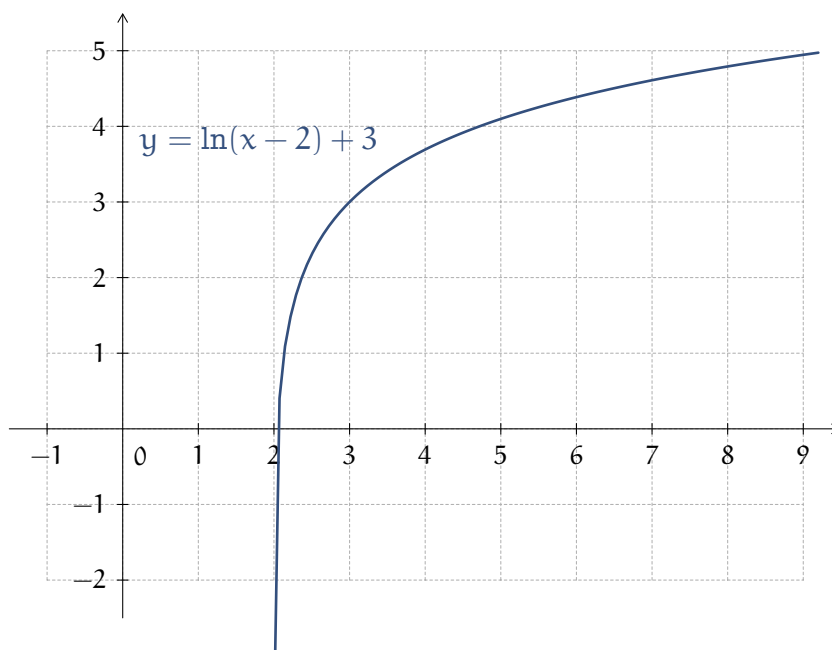
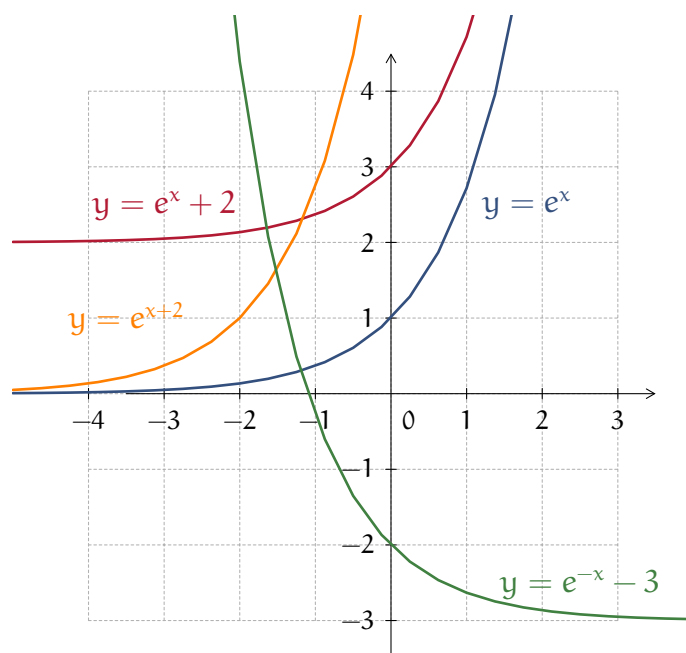
I.10. Exercice

Tracer dans un même repère les courbes représentatives des fonctions

$$f(x) = e^x, \quad f_1(x) = e^x + 2, \quad f_2(x) = e^{x+2}, \quad f_3(x) = e^{-x} - 3.$$

Et dans un autre repère :

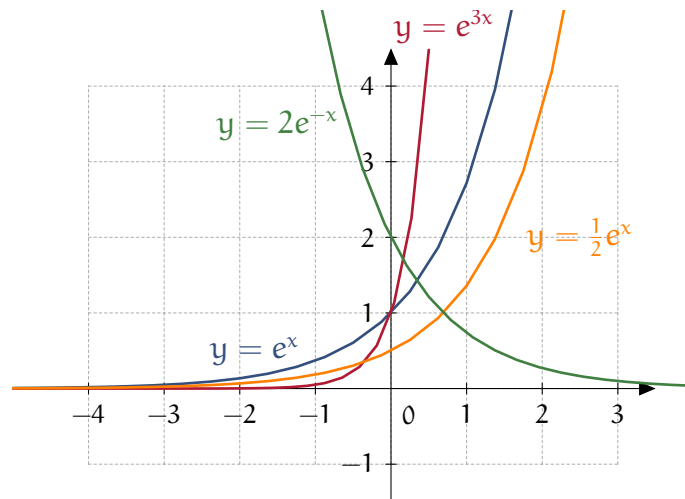
$$g(x) = \ln(x - 2) + 3.$$



I.11. Exercice

Tracer dans un même repère les courbes des fonctions suivantes :

$$f(x) = e^x \quad f_1(x) = e^{3x} \quad f_2(x) = \frac{1}{2}e^x \quad f_3(x) = 2e^{-x}.$$



I.12. Exercice

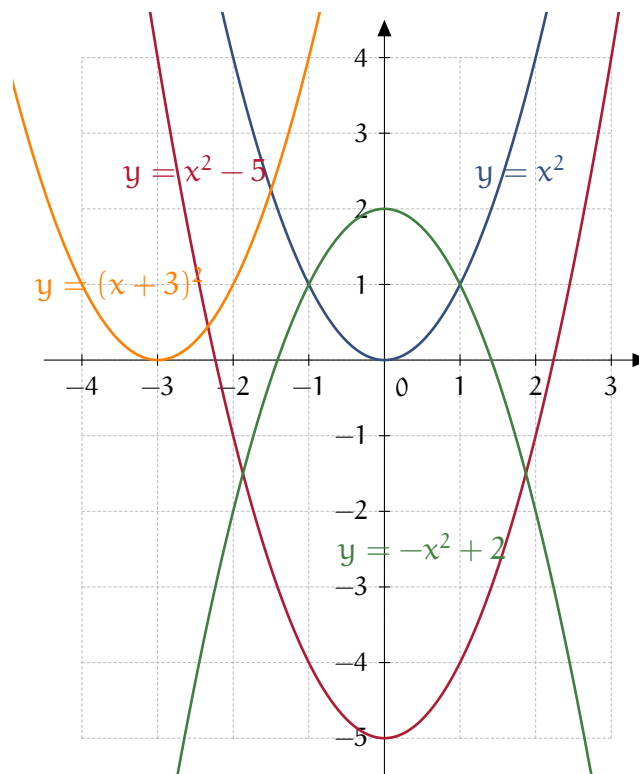
a. Tracer dans un repère les courbes des fonctions suivantes :

$$f(x) = x^2 \quad f_1(x) = x^2 - 5 \quad f_2(x) = (x + 3)^2 \quad f_3(x) = -x^2 + 2.$$

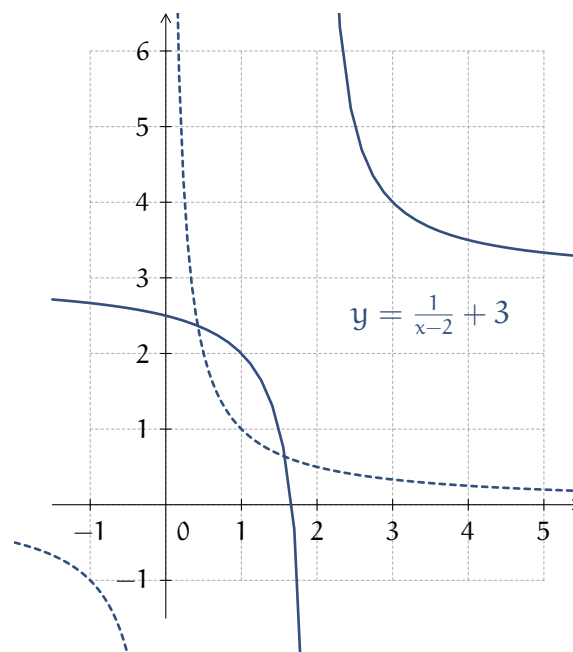
b. Tracer dans un autre repère la courbe de la fonction suivante (on partira du tracé de la courbe d'une fonction de référence) : $g(x) = \frac{1}{x-2} + 3$.

c. Dans un autre repère la courbe de la fonction $h(x) = 3 - \ln(2x)$.

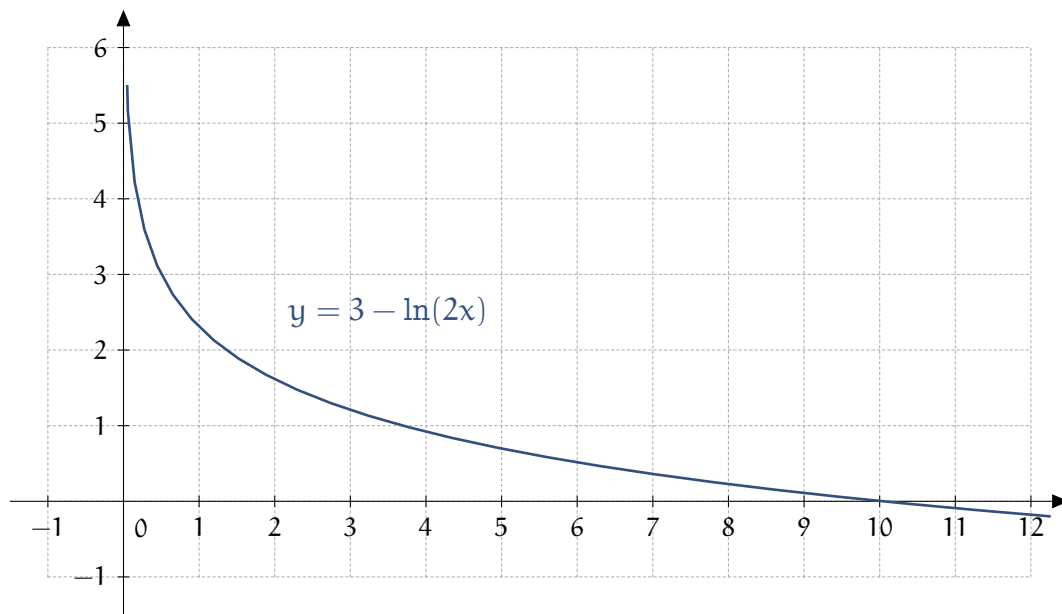
a. Courbes demandées :



b. Courbe demandée (courbe de référence $y = 1/x$ en pointillés) :



c. Courbe demandée :



I.13. Exercice

Déterminer les limites suivantes

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + 3x + 2}{x^5 - 2x^2 + 1} \quad \text{b. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{5x^3 + 2x - 1}}{\sqrt{x^2 + 2}}$$

$$\text{c. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + 1}{x^2 + x - 2} \quad \text{d. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 10x + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

a. Quand cette quantité est bien définie (c'est le cas pour x assez grand),

$$\frac{2x^3 + 3x + 2}{x^5 - 2x^2 + 1} = \frac{x^3(2 + 3/x^2 + 2/x^3)}{x^5(1 - 2/x^3 + 1/x^5)} = x^{-2} \frac{2 + 3/x^2 + 2/x^3}{1 - 2/x^3 + 1/x^5}.$$

Quand $x \rightarrow +\infty$, le numérateur du terme de droite tend vers 2 (par somme de limites) et le dénominateur vers 1. Par quotient,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + 3/x^2 + 2/x^3}{1 - 2/x^3 + 1/x^5} = 2.$$

D'autre part $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-2} = 0$. Par produit,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + 3x + 2}{x^5 - 2x^2 + 1} = 0.$$

b. Quand cette quantité est bien définie (c'est le cas pour x assez grand),

$$\frac{\sqrt{5x^3 + 2x - 1}}{\sqrt{x^2 + 2}} = \frac{x^{3/2} \sqrt{5 + 2/x^2 - 1/x^3}}{x^{2/2} \sqrt{1 + 2/x^2}} = x^{1/2} \frac{\sqrt{5 + 2/x^2 - 1/x^3}}{\sqrt{1 + 2/x^2}}.$$

Quand $x \rightarrow +\infty$, le numérateur du terme de droite tend vers $\sqrt{5}$ et le dénominateur vers $\sqrt{1}$. Par quotient puis produit,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{5x^3 + 2x - 1}}{\sqrt{x^2 + 2}} = +\infty.$$

Autre méthode. – On peut également réécrire

$$\frac{\sqrt{5x^3 + 2x - 1}}{\sqrt{x^2 + 2}} = \sqrt{\frac{5x^3 + 2x - 1}{x^2 + 2}},$$

déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3 + 2x - 1}{x^2 + 2}$ et appliquer le théorème de composition des limites.

c. Pour tout x dans \mathbb{R} , $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x + 1}{x^2 + x - 2} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x + 1}{x^2 + x - 2} = -\infty.$$

La limite quand $x \rightarrow 1$ n'existe pas⁴.

d. On factorise encore par le terme dominant : quand x est grand,

$$\frac{\sqrt{x^2 + 10x + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{x} \frac{\sqrt{1 + 10/x + 1/x^2}}{\sqrt{1 + 1/x^2}}.$$

Donc $\frac{\sqrt{x^2 + 10x + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} = 1$ par quotient. Ou encore, par composition des limites et continuité de la fonction $y \rightarrow \sqrt{y}$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 10x + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 + 10x + 1}{x^2 + 1}} = \lim_{y \rightarrow 1} \sqrt{y} = \sqrt{1} = 1.$$

I.14. Exercice : démonstration du théorème des croissances comparées

Soit φ la fonction définie sur \mathbb{R} par : $\varphi(x) = e^x - x$.

a. Etudier les variations de la fonction φ .

b. En déduire que pour tout $x > 0$, $e^{x/2} > \frac{x}{2}$.

c. En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

d. En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x/2}}{x} = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$.

Avertissement. — Dans cet exercice on se donne pour objectif de **démontrer** le théorème des croissances comparées. On n'a donc pas le droit de l'utiliser dans les questions a,b,c. Dans la question d seule la forme démontrée en c est autorisée.

a. Voici les variations de φ sur \mathbb{R} .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi'(x) = e^x - 1$		$-$	$+$
$\varphi(x)$	$+\infty$	\searrow 1 \nearrow	

La limite quand $x \rightarrow -\infty$ s'obtient par somme. Quand x est positif, le tableau de variation nous dit que $\varphi(x)$ est positif; on a seulement besoin de cela pour la suite de l'exercice⁵.

4. Attention. Ecrire $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, c'est affirmer deux choses : que la limite existe et qu'elle est égale à b . En particulier quand a est réel, il se peut que les limites $\lim_{x \rightarrow a^+}$ et $\lim_{x \rightarrow a^-}$ existent mais ne soient pas égales, auquel cas il n'y a pas de limite en a .

5. On pourrait montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$ mais ce n'est pas nécessaire ici. Ce sera d'ailleurs une conséquence du théorème visé.

A-t-on le droit au théorème des croissances comparées au DS? :'(Oui!

- b. Si $x > 0$, alors $x/2 \geq 0$; d'après la question précédente $\varphi(x/2) \geq 0$, autrement dit $e^{x/2} \geq x/2$.
- c. On observe que $e^x = e^{x/2}e^{x/2}$; d'après la question précédente (et la croissance de la fonction $y \rightarrow y^2$ sur $[0, +\infty[$), on en déduit que

$$\forall x > 0, e^x \geq (x/2)^2 = x^2/4.$$

En particulier, $e^x/x \geq x^2/(4x) = x/4$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} x/4 = +\infty$. Par encadrement,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

- d. D'après la question précédente, par composition des limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x/2}}{x/2} = +\infty$. On en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x/2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1/2) \cdot e^{x/2}}{x/2} = +\infty, \quad (6)$$

par produit. Enfin,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \frac{e^x}{x^2} = \frac{e^{x/2}}{x} \frac{e^{x/2}}{x}.$$

D'après (6) et par produit,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty.$$

I.15. Exercice

Déterminer les limites suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{a. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln(x)}{e^x} & \text{b. } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 3x + 5 \ln(x) - e^x & \text{c. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln(x)}{x + \sin(x)} \\ \text{d. } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(\sin(x)) \sin^2(x) & \text{e. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3xe^x + 1}{5x \ln(x) + 2 \ln(x)} & \text{f. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-3x} + e^{-x}}{e^{-2x} + 3e^{-x}} \end{array}$$

- a. Distribuons :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{x + \ln x}{e^x} = \frac{x}{e^x} + \frac{\ln x}{e^x}.$$

D'après le théorème des croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$. Par composition des limites, on a aussi que $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{e^y} = 0$. Or

$$\frac{\ln x}{e^x} = \frac{\ln x}{x} \frac{x}{e^x}.$$

Ces deux facteurs étant de limite nulle en $+\infty$, leur produit l'est également. Finalement par somme,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln x}{e^x} = 0.$$

Remarque. — Dans la suite, on invoquera directement les croissances comparées pour justifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x/x = 0$.

b. On factorise par le terme dominant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, x^2 + 3x + 5 \ln x - e^x = e^x \left(\frac{x^2}{e^x} + \frac{3x}{e^x} + \frac{5 \ln x}{e^x} - 1 \right).$$

Par croissances comparées, le facteur entre parenthèse a pour limite -1 . Par produit,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 3x + 5 \ln x - e^x = -\infty.$$

c. D'après les prérequis sur les fonctions usuelles, nous savons que

$$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin x \leq 1. \quad (7)$$

Quand x est assez grand, $x + \ln x$ est positif, donc d'après (7) et en distribuant,

$$\frac{x}{x+1} + \frac{\ln x}{x+1} \leq \frac{x + \ln x}{x + \sin x} \leq \frac{x}{x-1} + \frac{\ln x}{x-1}.$$

Or $\frac{\ln x}{x \pm 1} = \frac{\ln x}{x} \frac{x}{x \pm 1}$; d'après le théorème des croissances comparées et par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x \pm 1} = 0 \times 1 = 0$. Par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \pm 1} + \frac{\ln x}{x \pm 1} = 1$. Nous avons encadré $\frac{x + \ln x}{x + \sin x}$ entre deux fonctions de limite 1; d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln x}{x + \sin x} = 1.$$

NB (autre méthode) : En factorisant par le terme que l'on espère dominant (à savoir x), on peut également écrire, pour tout $x > 0$,

$$\frac{x + \ln x}{x + \sin x} = \frac{x}{x} \frac{1 + \ln x/x}{1 + \sin x/x}.$$

Cette méthode est un peu plus directe. Quoi qu'il en soit, on doit invoquer le théorème des croissances comparées pour traiter le numérateur, et le théorème d'encadrement pour le dénominateur.

d. Commençons par montrer que

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} y^2 \ln y = 0. \quad (8)$$

Il s'agit d'une forme indéterminée a priori, mais si l'on pose $t = \ln y$, alors c'est encore $\lim_{t \rightarrow -\infty} t e^{2t}$, soit encore si l'on pose $t = -s$, $\lim_{s \rightarrow +\infty} (-s)/e^s$. D'après le théorème des croissances comparées cette limite est nulle; nous avons donc montré (8). Finalement, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x = 0^+$; par composition,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(\sin(x)) \sin^2(x) = \lim_{y \rightarrow 0^+} y^2 \ln y \stackrel{(8)}{=} 0.$$

e. Factorisons numérateur et dénominateur par le terme dominant :

$$\begin{aligned} \forall x \in]1, +\infty[, \frac{3xe^x + 1}{5x \ln x + 2 \ln x} &= \frac{3xe^x(1 + e^{-x}/(3x))}{3xe^x(5(\ln x)e^{-x} + 2(\ln x)e^{-x}/x)} \\ &= \frac{1 + e^{-x}/(3x)}{5(\ln x)e^{-x} + 2(\ln x)e^{-x}/x}. \end{aligned}$$

Le numérateur a pour limite 1 et le dénominateur 0. Il s'ensuit que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3xe^x + 1}{5x \ln x + 2 \ln x} = +\infty.$$

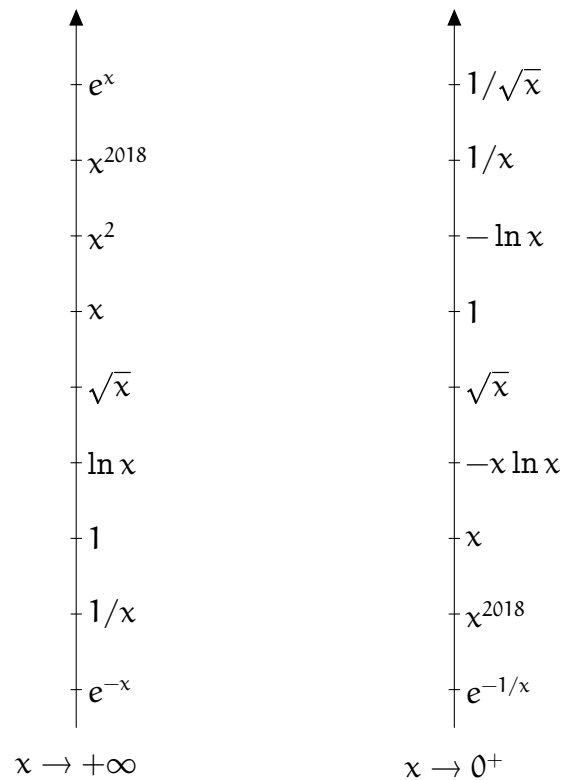


FIGURE 2 – Schéma récapitulatif des termes dominants en $+\infty$ et 0^+ . $f(x)$ sera dominant par rapport à $g(x)$ quand $x \rightarrow \ell$ s'il est situé plus haut suivant la flèche. Cela signifie $\lim_{x \rightarrow \ell} f(x)/g(x) = +\infty$. La plupart des comparaisons présentes ici sont des conséquences plus ou moins directes du théorème des croissances comparées.

f. Attention, le terme dominant ici est e^{-x} (en haut) et $3e^{-x}$ en bas car $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$. Donc

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-3x} + e^{-x}}{e^{-2x} + 3e^{-x}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{3e^{-x}} \frac{1 + e^{-2x}}{1 + e^{-x}/3} \\ &= 1/3. \end{aligned}$$

II. Continuité et dérivabilité

II.1. Exercice

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-1/x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

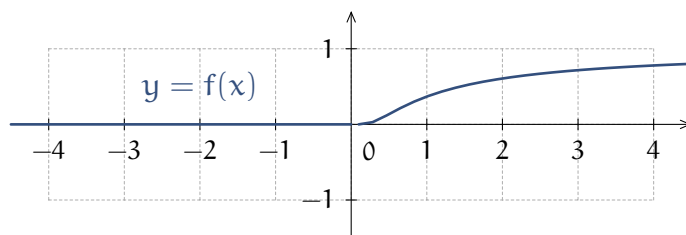
f est-elle continue sur \mathbb{R} ?

Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère.

f est constante, donc continue, sur l'intervalle $]0, +\infty]$. D'autre part, $x \rightarrow -1/x$ est continue sur \mathbb{R}_+^\times , et $x \rightarrow e^x$ est continue sur \mathbb{R} , donc f est continue sur \mathbb{R}_+^\times par composition. Finalement, f est continue sur \mathbb{R} si et seulement si les limites $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ existent⁶ et sont égales. Déjà, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$. Ensuite, par composition des limites,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-1/x} = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0.$$

Nous avons ainsi vérifié que f est continue sur \mathbb{R} . Voici l'allure de sa courbe représentative :



Attention. — Soient I et J deux intervalles de \mathbb{R} tels que $I \cup J = \mathbb{R}$. A priori, il ne suffit pas de vérifier que $f|_I$ est continue sur I et que $f|_J$ est continue sur J pour savoir que f est continue sur \mathbb{R} . Toutefois, si I et J sont ouverts, alors f est continue sur \mathbb{R} dès que ses restrictions à I et J sont continues. Voir aussi l'avertissement page 29.

II.2. Exercice

Soit f la fonction définie par $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \exp(2x) & \text{si } x \leq 0 \\ \ln(1+x) + 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2x + 3 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

f est-elle continue sur \mathbb{R} ?

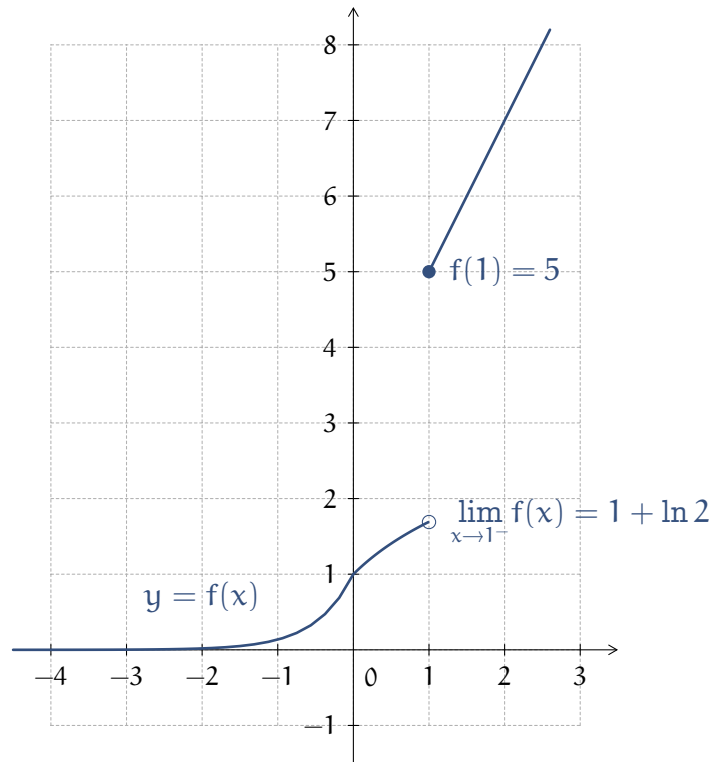
Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère.

On adopte la même méthode que dans l'exercice précédent. Par somme et composition, f est continue sur $]-\infty, 0[$, sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$. De plus, $f(0) = 1$ et $f(1) = 5$, donc f est continue sur \mathbb{R} si et seulement si $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 5$. Or

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1, \text{ mais } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 + \ln 2 \neq 5.$$

Donc f n'est pas continue sur \mathbb{R} . C'est visible sur la courbe représentative :

6. On sait déjà que la limite quand $x \rightarrow 0^-$ existe par définition de la continuité.

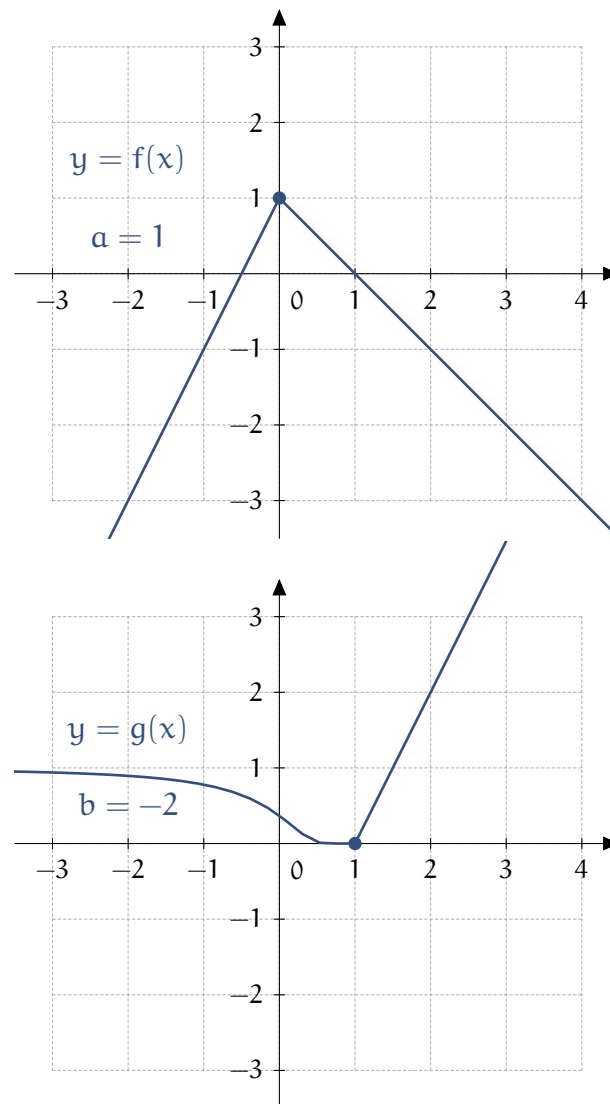


II.3. Exercice

Déterminer les réels a et b afin que les fonctions suivantes soient continues sur \mathbb{R} (vous tracerez leur graphique)

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ -x + a & \text{si } 0 < x \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{(x-1)^2}\right) & \text{si } x < 1 \\ 2x + b & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

f est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$; pour que f soit continue en 0 , il faut et il suffit que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 1$. C'est le cas si et seulement si $a = 1$. De même, g est continue sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$. Pour que g soit continue sur \mathbb{R} , il faut et il suffit que $2 + b = \lim_{x \rightarrow 1^-} \exp\left(\frac{-1}{(x-1)^2}\right) = 0$, c'est-à-dire $b = -2$.

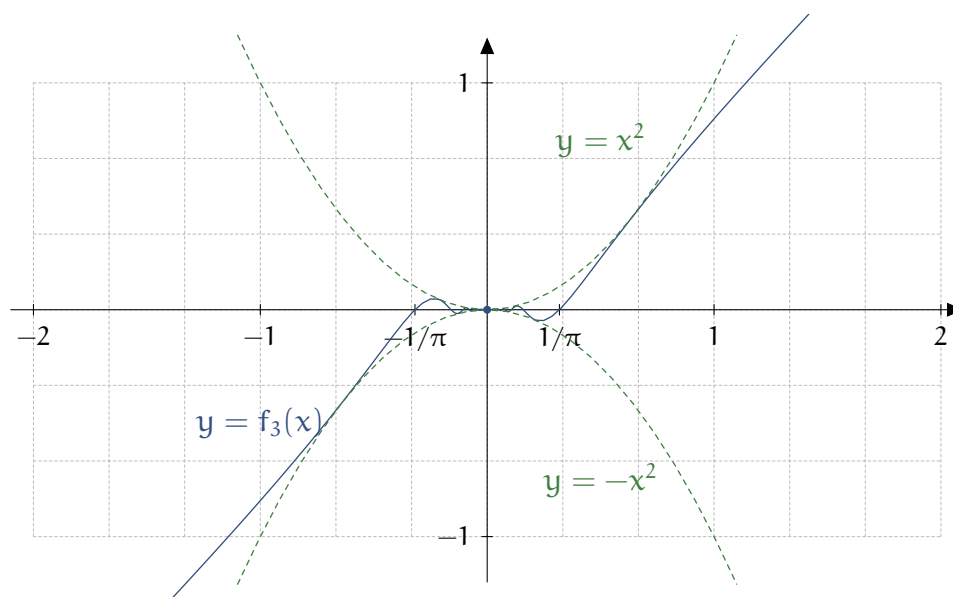
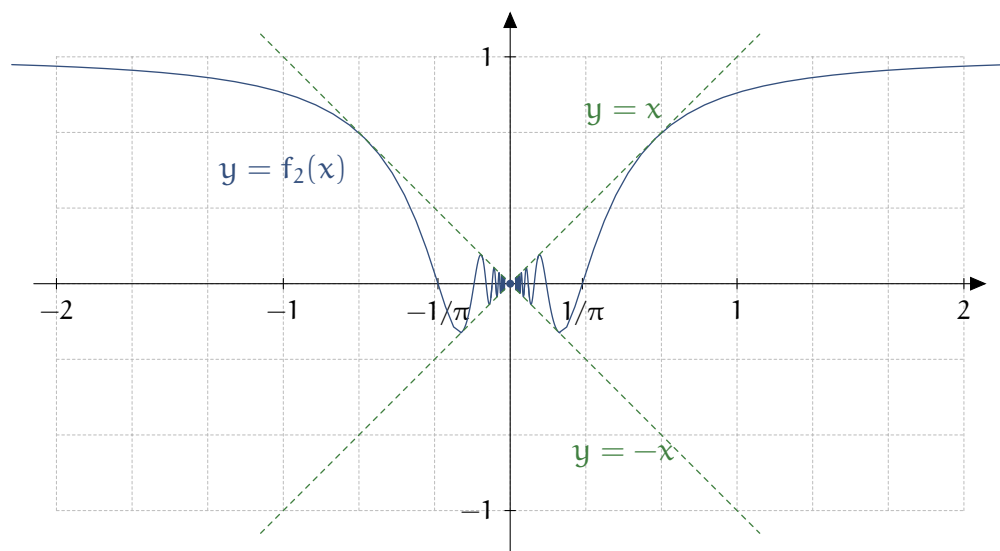
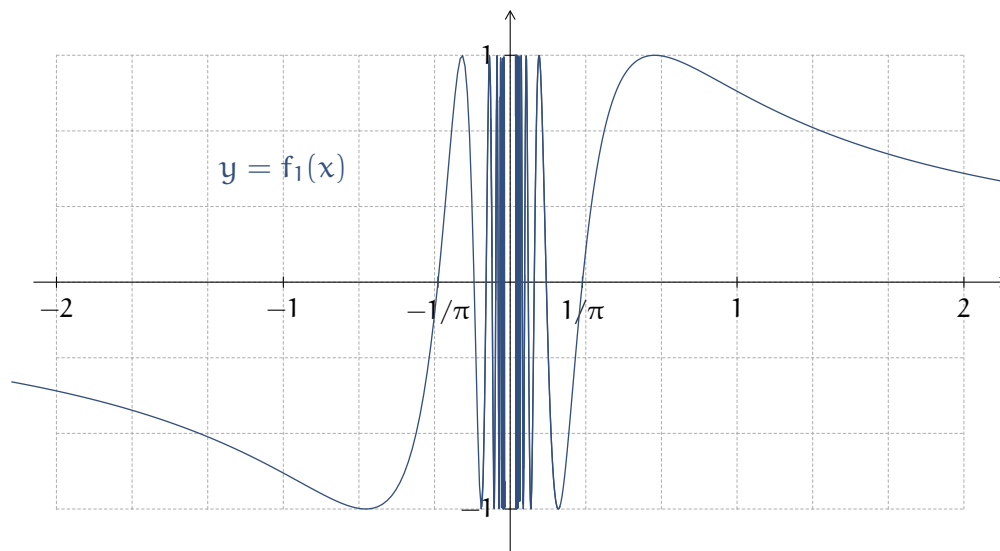


II.4. Exercice

Etudier la continuité et la dérivabilité des trois fonctions suivantes (vous commencerez par tracer leur graphique) :

$$f_1(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad f_3(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Les fonctions f_1 , f_2 et f_3 sont continues et dérivables sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ par produit et composition. On ne s'intéresse donc à la continuité et la dérivabilité qu'en 0.



Le vide apparent au milieu du graphe de f_1 est un artefact.

Voici un tableau récapitulatif :

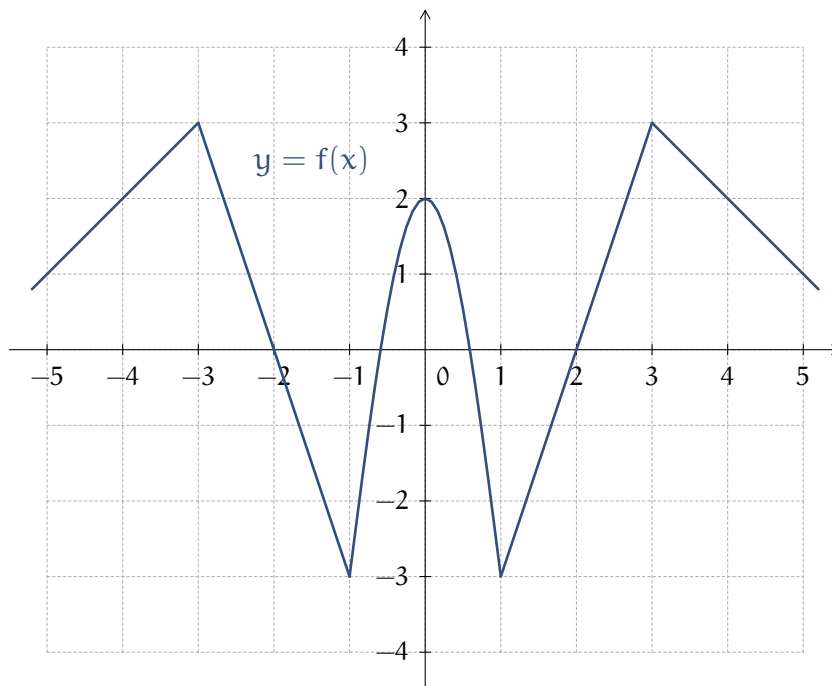
f	continue sur \mathbb{R}	dérivable sur \mathbb{R}
f_1	non	non
f_2	oui	non
f_3	oui	oui

Tableau à mettre en lien avec le tableau des prérequis en bas de la page 10 du TD.

II.5. Exercice

Tracer dans un repère la courbe d'une fonction f vérifiant l'ensemble des propriétés suivantes :

- f est continue sur \mathbb{R} ,
- $f'(2) = 3$,
- $f'(4) = -1$,
- f est une fonction paire, et
- f n'est pas dérivable en 1.



II.6. Exercice

Ecrire chacune des fonctions suivantes comme composée de fonctions de référence :

$$f_1(x) = \sin(x^2), \quad f_2(x) = \frac{1}{(2x+1)^3}, \quad f_3(x) = \ln(3e^x + 2).$$

$$f_1 = u \circ v \text{ avec } u(x) = \sin x \text{ et } v(x) = x^2.$$

$$f_2 = u \circ v \circ w \text{ avec } u(x) = 1/x, \quad v(x) = x^3 \text{ et } w(x) = 2x + 1.$$

$$f_3 = u \circ v \circ w, \text{ avec } u(x) = \ln x, \quad v(x) = 3x + 2 \text{ et } w(x) = e^x.$$

Remarque. — Pour nous, toute fonction affine est une fonction de référence (même si on pourrait encore l'écrire comme une composée d'une fonction linéaire $x \rightarrow ax$ et d'une translation $x \rightarrow x + b$).

II.7. Exercice

a. Rappeler la formule de dérivation des fonctions composées.

b. Dériver les fonctions suivantes sans souci de l'intervalle de dérivabilité :

$f_1(x) = e^{5x+2}$	$f_2(x) = \sin(\cos(x))$	$f_3(x) = \sin(e^x)$
$f_4(t) = \sin(e^{5t})$	$f_5(x) = \ln(\cos(x))$	$f_6(v) = \cos(\ln(v))$
$f_7(x) = \cos^3(x)$	$f_8(\theta) = \sqrt{3\theta + 1}$	$f_9(x) = \cos(\ln(\sin(x)))$
$f_{10}(x) = e^{2\ln(5e^{2x}+3)}$	$f_{11}(x) = \ln(3x)e^{7\cos(2x)}$	$f_{12}(x) = \sin(e^{\cos(\ln(5x^3))})$

a. Soient I et J deux intervalles ouverts de \mathbb{R} , $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ telles que f et g sont dérivables sur I et J respectivement, et $g(J) \subset I$. Alors $f \circ g : J \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable, et pour tout $x \in J$,

$$(f \circ g)'(x) = (f' \circ g)(x) \cdot g'(x).$$

b.

$$f_1'(x) = 5e^{5x+2}$$

$$f_2'(x) = -\cos(\cos(x)) \sin(x)$$

$$f_3'(x) = e^x \cos(e^x)$$

$$f_4'(t) = 5e^{5t} \cos(e^{5t})$$

$$\begin{aligned} f_5'(x) &= -\sin(x)/\cos(x) \\ &= -\tan(x) \end{aligned}$$

$$f_6'(v) = -\frac{\sin(\ln v)}{v}$$

$$f_7'(x) = -3 \cos^2(x) \sin(x)$$

$$f_8'(\theta) = \frac{3}{\sqrt{3\theta + 1}}$$

$$\begin{aligned} f_9'(x) &= -\sin(\ln(\sin(x))) \frac{\cos x}{\sin x} \\ &= \frac{-\sin(\ln(\sin(x)))}{\tan x} \end{aligned}$$

Nous n'utiliserons pas les fonctions trigonométriques sec, csc, ni même cot.

Pour dériver f_{10} il peut être commode de la réécrire sous la forme $f_{10}(x) = (5e^{2x} + 3)^2$. Alors

$$f_{10}'(x) = 20e^{2x}(5e^{2x} + 3) = 20e^{2x+\ln(5e^{2x}+3)}.$$

Pour dériver f_{11} , écrivons-la sous la forme d'un produit :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, f_{11}(x) = g_{11}(x)h_{11}(x),$$

avec $g_{11}(x) = \ln(3x)$ et $h_{11}(x) = e^{7\cos(2x)}$.

Alors $g'_{11}(x) = 1/x$, et $h'_{11}(x) = -14 \sin(2x)e^{7 \cos(2x)}$, donc

$$f'_{11}(x) = g_{11}(x)h'_{11}(x) + g'_{11}(x)h_{11}(x) = \left(-14 \sin(2x) \ln(3x) + \frac{1}{x}\right) e^{7 \cos(2x)}.$$

Enfin, pour dériver f_{12} , on itère la formule de dérivation d'une composée :

$$f'_{12}(x) = \cos\left(e^{\cos(\ln(5x^3))}\right) \cdot \left(-\sin(\ln(5x^3)) \cdot \frac{3}{x}\right) e^{\cos(\ln(5x^3))}.$$

Pourquoi la dérivée de $\ln(5x^3)$ est-elle $3/x$? pour $x > 0$, $\ln(5x^3) = \ln 5 + 3 \ln x$. Quand on dérive, $\ln 5$ s'en va.

II.8. Exercice*

Soit f une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} .

a. Montrer que si f est paire alors f' est impaire.

b. La réciproque est-elle vraie ?

Reprendre cet exercice en remplaçant le terme « paire » par « impaire » et vice versa.

a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}_+^\times$, étant donné que f est paire,

$$\frac{f(-x+h)}{h} = \frac{f(x-h)}{h} = -\frac{f(x+(-h))}{-h}. \quad (9)$$

Or, $\lim_{h \rightarrow 0}(-h) = 0$. Nous savons que f est dérivable en x , de dérivée $f'(x)$. Par composition des limites,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x+h)}{h}$$

existe, et est égale d'après (9) à $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+(-h))}{-h} = f'(x)$. Nous avons montré que f' est impaire.

b. Répondre à cette question nous amènerait trop loin ;).

c. A partir d'ici, les termes « paire » et « impaire » sont échangés. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}_+^\times$, étant donné que f est impaire,

$$\frac{f(-x+h)}{h} = -\frac{f(x-h)}{h} = \frac{f(x+(-h))}{-h}. \quad (10)$$

Or, $\lim_{h \rightarrow 0}(-h) = 0$. Nous savons que f est dérivable en x , de dérivée $f'(x)$. Par composition des limites,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x+h)}{h}$$

existe, et est égale d'après (10) à $-\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+(-h))}{-h} = -f'(x)$. Nous avons montré que f' est paire.

d. Non. Par exemple si $f(x) = x + 1$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1$; donc f' est paire, mais f n'est pas impaire.

III. Etudes de fonctions

Exercice : Etude de la fonction tangente

On définit la fonction tangente par : $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction tangente.
- Montrer que la fonction tangente est π -périodique.
- Etudier la parité de la fonction tangente.
- Déterminer la dérivée de la fonction tangente.
- Déterminer une équation de la tangente à la fonction tangente au point d'abscisse 0.
- Dresser le tableau de variation de cette fonction sur l'intervalle $] -\frac{\pi}{2} : \frac{\pi}{2} [$ (vous déterminerez les limites aux bornes de l'intervalle) puis tracer la représentation graphique de la fonction tangente.

- a. $\tan(x)$ est définie tant que $\cos(x)$ ne s'annule pas, c'est-à-dire tant que x n'est pas de la forme $\pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. On écrit

$$\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

- b. Pour tout $x \in \mathcal{D}_{\tan}$, $x + \pi \in \mathcal{D}_{\tan}$ et

$$\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x),$$

donc \tan est π -périodique. On peut montrer que π est bien la plus petite période (ce sera une conséquence des questions suivantes).

- c. Par la formule de dérivée d'un quotient, \tan est dérivable sur \mathcal{D}_{\tan} et

$$\forall x \in \mathcal{D}_{\tan}, \tan'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}. \quad (11)$$

Tout comme les oeufs, l'équation (11) se cuisine de plusieurs manières : soit on utilise $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ pour simplifier le numérateur, soit on développe et on ré-exprime $\sin^2(x)/\cos^2(x)$ à l'aide de $\tan(x)$. Ainsi,

$$\forall x \in \mathcal{D}_{\tan}, \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2(x). \quad (12)$$

- d. D'après la question précédente, la fonction \tan est dérivable en 0 et $\tan'(0) = 1$. Par ailleurs $\tan(0) = 0$, donc si T est ⁷ la tangente de \tan en 0, alors une équation de T est

$$T: y - x = 0.$$

T est figurée (en vert, pointillés) sur le graphe de la fonction \tan à la suite de cet exercice.

- e. Par quotient,

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\pi/2^+} = -\infty.$$

De plus, \tan' est strictement positive sur $] -\pi/2, \pi/2 [$ d'après (12), donc \tan est strictement croissante sur cet intervalle. Voir le tableau 1 de variations.

x	$-\pi/2$	0	$+\pi/2$
$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$		$+$ 1 $+$	
$\tan(x)$	$-\infty$	\nearrow 0 \nearrow	$+\infty$

TABLE 1 – Tableau de variations pour la fonction \tan sur l'intervalle $] -\pi/2, \pi/2[$.

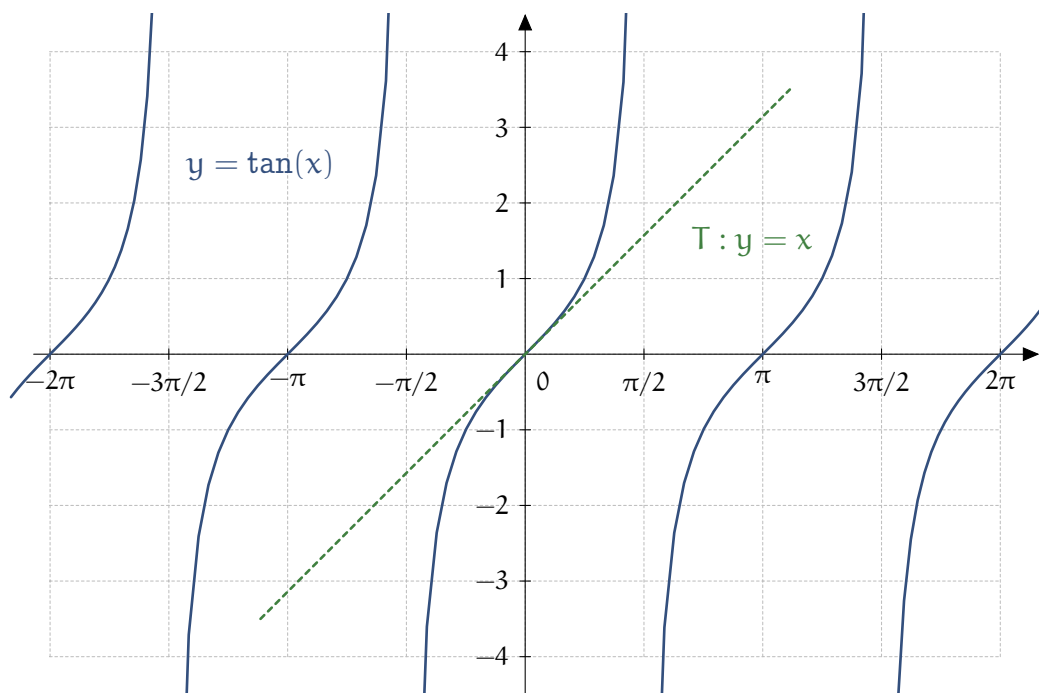


FIGURE 3 – Graphe de la fonction \tan et tangente de la tangente à l'origine.

Remarque. — On justifie a posteriori que π est la plus petite période de \tan : cette fonction restreinte à $] -\pi/2, \pi/2[$ qui est de longueur π , est injective.

IV. Notion de bijection

IV.1. Exercice

1. Les applications de E dans F suivantes sont-elles surjectives, injectives, bijectives ? Vous pourrez entre autre utiliser le théorème de la bijection vu en cours afin de justifier vos réponses.

fonction	E	F
$f_1(x) = \sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	\mathbb{R}
$f_2(x) = \sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	$[0; +\infty[$
$f_3(x) = \sqrt{x^2 + 1}$	\mathbb{R}	$[0; +\infty[$
$f_4(x) = \sqrt{x^2 + 1}$	$] -\infty; 0]$	$[0; +\infty[$
$f_5(x) = \frac{1}{1+x^2}$	\mathbb{R}_+	$]0, 1]$
$f_6(x) = \sin(x^2)$	$[0; \frac{\sqrt{2\pi}}{2}]$	$[0, 1]$

2. Comment montrer qu'il y a exactement autant de nombres réels que de réels dans l'intervalle $]0, 1[$?

- a. (f_1) Si x et y dans \mathbb{R}_+^\times sont tels que $x < y$, alors

$$\sqrt{y} - \sqrt{x} = \frac{y - x}{\sqrt{y} + \sqrt{x}} > 0,$$

donc $\sqrt{y} > \sqrt{x}$. De plus dès que $x > 0$, $\sqrt{x} > 0 = \sqrt{0}$. Nous avons ainsi montré que f_1 est strictement croissante sur $E = [0, +\infty[$ (on aurait aussi pu la dériver). De plus, f_1 est continue sur E , qui est un intervalle. D'après le théorème de la bijection (cours page 12), f_1 réalise une bijection de E sur $f(E) = [0, +\infty[$. En particulier :

- $f_1 : E \rightarrow F$ est injective.
- $f_1 : E \rightarrow F$ n'est pas surjective (-1 n'est pas atteint).
- $f_1 : E \rightarrow F$ n'est pas bijective.

03/10

- (f_2) Comme montré à la question précédente, $f_2 : E \rightarrow F$ est bijective. En particulier f_2 est injective et surjective.

—

06 /10

- (f_3) f_3 n'est pas injective : $-2 \in \mathbb{R}$, $2 \in \mathbb{R}$, $f_3(-2) = \sqrt{5}$ et $f_3(2) = \sqrt{5}$; or $2 \neq -2$.
 f_3 n'est pas surjective : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sqrt{1+x^2} \geq \sqrt{1} = 1.$$

En particulier l'élément $0 \in F$ n'est pas atteint. A fortiori, f_3 n'est pas bijective.

- (f_4) f_4 est strictement décroissante (par composition) sur E , et continue (par composition) sur E . De plus E est un intervalle, donc d'après le théorème de la bijection, f_4 réalise une bijection de E sur $f(E)$. Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_4(x) = +\infty$, et $f(0) = 1$, donc $f(E)$ est un intervalle (cours page 12) dont le plus petit élément est égal à 1 et non majoré, c'est-à-dire $f(E) = [1, +\infty[$. Nous avons ainsi montré que $f_4 : E \rightarrow F$ est une bijection.

7. Mais pourquoi donc \sin / \cos s'appelle-t-elle « tangente » ? Réponse au TD2...

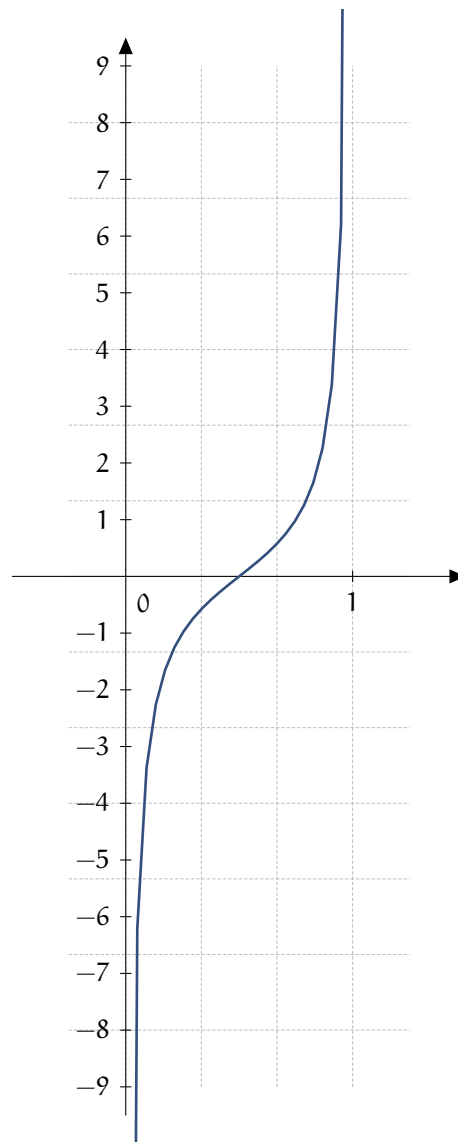


FIGURE 4 – Graphe de la fonction $x \mapsto \tan(\pi x - \pi/2)$ sur l'intervalle $]0, 1[$. Cette fonction réalise une bijection de $]0, 1[$ sur \mathbb{R} .

(f₅) Le même raisonnement que dans la question précédente s'applique, pour nous dire que $f_5 : E \rightarrow F$ est une bijection.

(f₆) f_6 est dérivable sur \mathbb{R} ; calculons :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'_6(x) = 2x \cos(x^2).$$

En particulier, $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]0, \pi/2[$, donc f est strictement croissante sur E . De plus f_6 est continue, et E est un intervalle. On conclut comme précédemment que f_6 est une bijection de E sur $[0, 1] = [f_6(0), f_6(\sqrt{2\pi}/2)]$.

b. La fonction $]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \tan(\pi x - \pi/2)$ réalise une bijection de $]0, 1[$ sur \mathbb{R} (voir la figure 4 occupant la page 29), ainsi qu'on le montre par exemple à l'aide du théorème de la bijection.

Attention (Vu sur les copies). — Soient E et F deux ensembles, $f : E \rightarrow F$ une fonction. On suppose que E se décompose sous la forme $E = E_1 \cup E_2$. Il est incorrect que si f est injective de E_1 vers F et f est injective de E_2 vers F , alors f est injective de E vers F . Contre-exemple : $f : \{0, 1\} \rightarrow \{0\}$, telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 0$. Voir aussi l'avertissement page 19.