Le problème isopérimétrique des métriques périodiques

Gabriel Pallier

Master 2 Mathématiques A.A.G. - Université Paris Sud

gabriel.pallier@u-psud.fr

29 août 2016

Position du problème

Soit Γ un groupe de type fini opérant géométriquement sur un espace X, métrique mesuré, muni d'une notion de mesure des bords de domaines.

Position du problème

Soit Γ un groupe de type fini opérant géométriquement sur un espace X, métrique mesuré, muni d'une notion de mesure des bords de domaines.

Exemples

- $\Gamma = \mathbb{Z}^n$ opérant par translation sur $X = \mathbb{R}^n$ muni d'une métrique riemannienne Γ-invariante.

Position du problème

Soit Γ un groupe de type fini opérant géométriquement sur un espace X, métrique mesuré, muni d'une notion de mesure des bords de domaines.

Exemples

- $\Gamma = \mathbb{Z}^n$ opérant par translation sur $X = \mathbb{R}^n$ muni d'une métrique riemannienne Γ-invariante.
- Γ opérant sur un graphe X orienté localement fini, avec un quotient fini .

Position du problème

Soit Γ un groupe de type fini opérant géométriquement sur un espace X, métrique mesuré, muni d'une notion de mesure des bords de domaines.

Exemples

- $\Gamma = \mathbb{Z}^n$ opérant par translation sur $X = \mathbb{R}^n$ muni d'une métrique riemannienne Γ-invariante.
- Γ opérant sur un graphe X orienté localement fini, avec un quotient fini .

Question

Que peut-on dire du problème isopérimétrique dans X ?

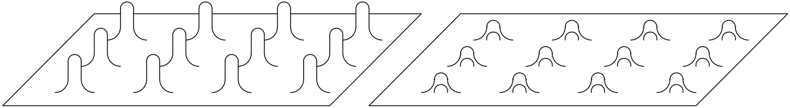


Figure – Exemples avec $\Gamma = \mathbb{Z}^2$, X riemannienne.

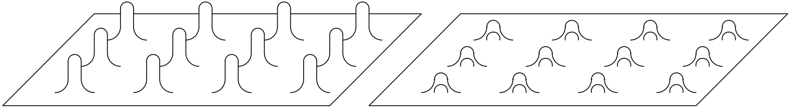


Figure – Exemples avec $\Gamma = \mathbb{Z}^2$, X riemannienne.

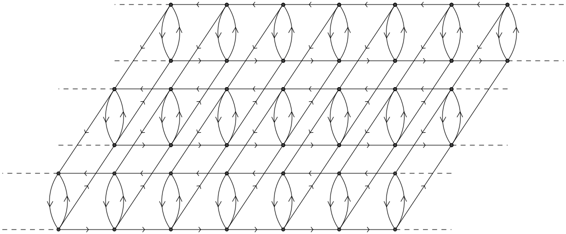


Figure – Exemple avec $\Gamma = \mathbb{Z}^2$, X un graphe.

Profil isopérimétrique

On appelle profil isopérimétrique de X la fonction

$$I_X(\tau) = \inf \{\mathrm{vol}\,(\partial D) : \mathrm{vol}(D) = \tau\}$$

Profil isopérimétrique

On appelle profil isopérimétrique de X la fonction

$$I_X(\tau) = \inf \{\mathrm{vol}\,(\partial D) : \mathrm{vol}(D) = \tau\}$$

D'après un théorème de Gromov, si X et X' sont munis respectivement d'action géométriques de Γ et Γ' quasiisométriques, alors il existe des constantes λ et μ telles que

$$I_X(\lambda\tau) \leqslant \mu I_{X'}(\tau).$$

Profil isopérimétrique

On appelle profil isopérimétrique de X la fonction

$$I_X(\tau) = \inf\{\mathrm{vol}(\partial D) : \mathrm{vol}(D) = \tau\}$$

D'après un théorème de Gromov, si X et X' sont munis respectivement d'action géométriques de Γ et Γ' quasiisométriques, alors il existe des constantes λ et μ telles que

$$I_X(\lambda\tau) \leqslant \mu I_{X'}(\tau).$$

En particulier,

- Si Γ est moyennable, $I_X(\tau) = o(\tau)$

Profil isopérimétrique

On appelle profil isopérimétrique de X la fonction

$$I_X(\tau) = \inf\left\{\mathrm{vol}\left(\partial D\right) : \mathrm{vol}(D) = \tau\right\}$$

D'après un théorème de Gromov, si X et X' sont munis respectivement d'action géométriques de Γ et Γ' quasiisométriques, alors il existe des constantes λ et μ telles que

$$I_X(\lambda\tau) \leqslant \mu I_{X'}(\tau).$$

En particulier,

- Si Γ est moyennable, $I_X(\tau) = o(\tau)$ (X' graphe de Cayley de Γ).

Profil isopérimétrique

On appelle profil isopérimétrique de X la fonction

$$I_X(\tau) = \inf\left\{\mathrm{vol}\left(\partial D\right) : \mathrm{vol}(D) = \tau\right\}$$

D'après un théorème de Gromov, si X et X' sont munis respectivement d'action géométriques de Γ et Γ' quasiisométriques, alors il existe des constantes λ et μ telles que

$$I_X(\lambda\tau) \leqslant \mu I_{X'}(\tau).$$

En particulier,

- Si Γ est moyennable, $I_X(\tau) = o(\tau)$ (X' graphe de Cayley de Γ).
- Si Γ est nilpotent, il existe des constantes c et C telles que $c\tau^{\frac{n-1}{n}} \leqslant I(\tau) \leqslant C\tau^{\frac{n-1}{n}}$ où n est la dimension homogène de Γ (c'est-à-dire le rang du facteur libre si Γ est abélien).

Modèle homogène

Supposons que Γ est (virtuellement) abélien. On dispose dans ce cas du modèle $X = \mathbb{R}^n$ euclidien.

Modèle homogène

Supposons que Γ est (virtuellement) abélien. On dispose dans ce cas du modèle $X = \mathbb{R}^n$ euclidien. Rappelons que (avec B boule unité et $\omega_n = \mathrm{vol}(B)$) :

Modèle homogène

Supposons que Γ est (virtuellement) abélien. On dispose dans ce cas du modèle $X = \mathbb{R}^n$ euclidien. Rappelons que (avec B boule unité et $\omega_n = \mathrm{vol}(B)$) :

- L'inégalité isopérimétrique y prend la forme

$$I(\tau) = n\omega_n^{1/n}\tau^{\frac{n-1}{n}} \; ;$$

on dit que X admet la constante isopérimétrique $c = n\omega_n^{1/n}$.

Modèle homogène

Supposons que Γ est (virtuellement) abélien. On dispose dans ce cas du modèle $X = \mathbb{R}^n$ euclidien. Rappelons que (avec B boule unité et $\omega_n = \mathrm{vol}(B)$) :

- L'inégalité isopérimétrique y prend la forme

  $$I(\tau) = n\omega_n^{1/n}\tau^{\frac{n-1}{n}} \ ;$$

  on dit que X admet la constante isopérimétrique $c = n\omega_n^{1/n}$.
- Les domaines extrémaux sont les boules euclidiennes, elles sont homothétiques.

Modèle homogène

Supposons que Γ est (virtuellement) abélien. On dispose dans ce cas du modèle $X = \mathbb{R}^n$ euclidien. Rappelons que (avec B boule unité et $\omega_n = \mathrm{vol}(B)$) :

- L'inégalité isopérimétrique y prend la forme

$$I(\tau) = n\omega_n^{1/n}\tau^{\frac{n-1}{n}} \ ;$$

  on dit que X admet la constante isopérimétrique $c = n\omega_n^{1/n}$.
- Les domaines extrémaux sont les boules euclidiennes, elles sont homothétiques.
- L'inégalité est stable : si $\mathrm{vol}_n(D) = \tau$ et si $\mathrm{vol}_{n-1}(\partial D)$ est très proche de $I(\tau)$, alors il existe une dilatation δ de facteur $\tau^{-1/n}$ telle que

$$\mathrm{vol}_n\left(\delta(D)\Delta B\right) \ll 1.$$

Position du problème : un exemple (1)

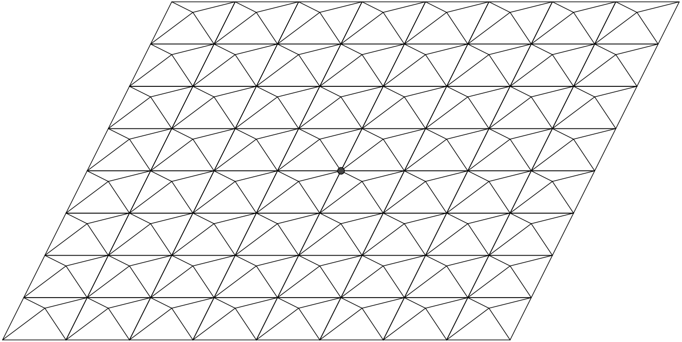


Figure – X est un espace de longueur muni d'une action géométrique de $\mathbb{Z}^2$.

Position du problème : un exemple (2)

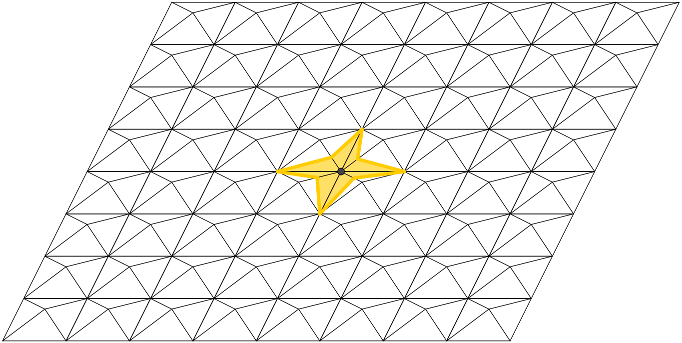


Figure – Une boule géodésique dans X de rayon $\mathrm{syst}_1(X/\Gamma)$.

Position du problème : un exemple (2)

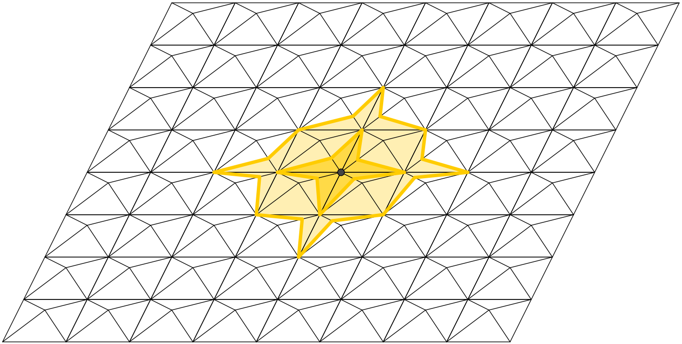


Figure – Une boule géodésique dans X de rayon $2 \cdot \mathrm{syst}_1(X/\Gamma)$.

Position du problème : un exemple (2)

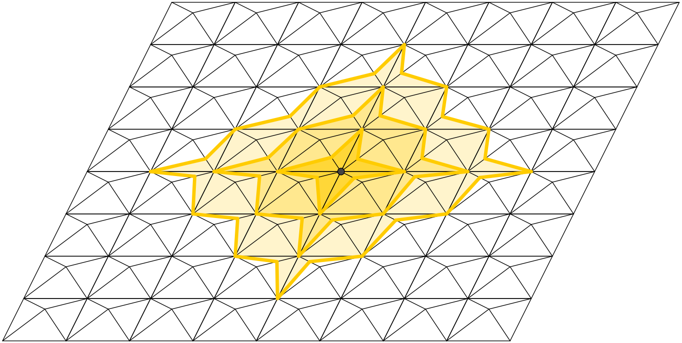


Figure – Une boule géodésique dans X de rayon $3 \cdot \mathrm{syst}_1(X/\Gamma)$.

Position du problème : un exemple (3)

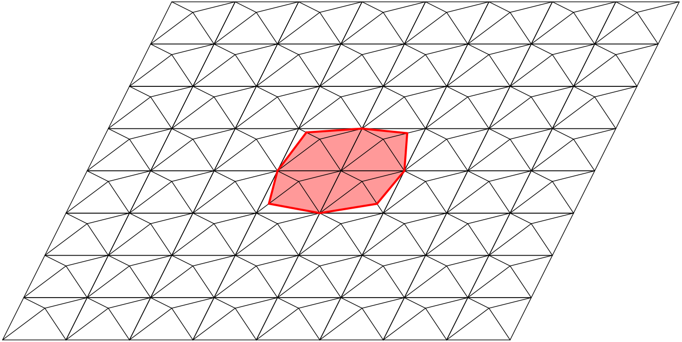


Figure – Solution du problème isopérimétrique dans X.

Position du problème : un exemple (3)

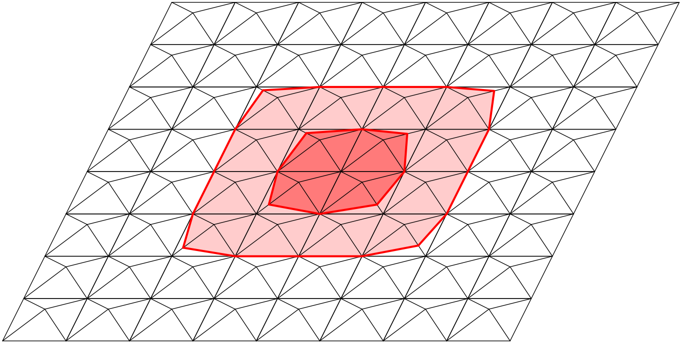


Figure – Solution du problème isopérimétrique dans X.

Position du problème : un exemple (3)

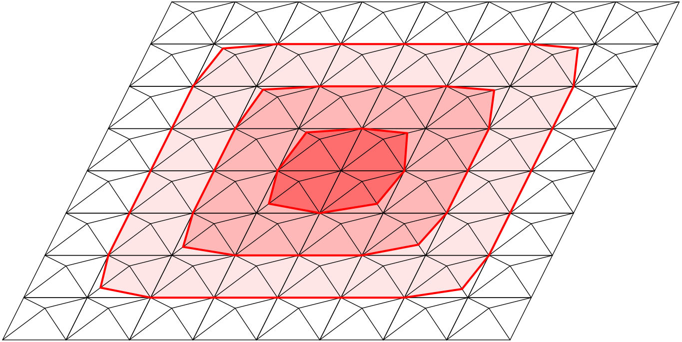


Figure – Solution du problème isopérimétrique dans X.

Constats

- Les boules géodésiques admettent une forme limite.

Constats

- Les boules géodésiques admettent une forme limite. En effet,

Théorème

Supposons Γ abélien. Quand $\lambda \to 0$, il y a convergence au sens de Gromov-Hausdorff

$$\lambda X \to ((\mathrm{H}_1(X/\Gamma, \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\mathbb{R}})$$

où la norme stable $\|\alpha\|_{\mathbb{R}}$ *d'une classe d'homologie réelle α est par définition*

$$\|\alpha\|_{\mathbb{R}} = \inf\{\mathrm{long}(c) : c \in \alpha\}$$

Constats

- Les boules géodésiques admettent une forme limite. En effet,

Théorème

Supposons Γ abélien. Quand $\lambda \to 0$, il y a convergence au sens de Gromov-Hausdorff

$$\lambda X \to ((\mathrm{H}_1(X/\Gamma, \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\mathbb{R}})$$

où la norme stable $\|\alpha\|_{\mathbb{R}}$ *d'une classe d'homologie réelle α est par définition*

$$\|\alpha\|_{\mathbb{R}} = \inf \{\mathrm{long}(c) : c \in \alpha\}$$

- Contrairement au modèle homogène, les solutions du problème isopérimétrique ne sont pas proches des boules géodésiques.

Constats

- Les boules géodésiques admettent une forme limite. En effet,

Théorème

Supposons Γ abélien. Quand $\lambda \to 0$, il y a convergence au sens de Gromov-Hausdorff

$$\lambda X \to ((\mathrm{H}_1(X/\Gamma, \mathbb{R}), \| \cdot \|_{\mathbb{R}})$$

où la norme stable $\|\alpha\|_{\mathbb{R}}$ *d'une classe d'homologie réelle α est par définition*

$$\|\alpha\|_{\mathbb{R}} = \inf \{\mathrm{long}(c) : c \in \alpha\}$$

- Contrairement au modèle homogène, les solutions du problème isopérimétrique ne sont pas proches des boules géodésiques.
- Toutefois, elles paraissent également admettre une forme limite (dans un sens à préciser) distincte de la boule unité du cône asymptotique.

Résultats

Théorème (Pansu, 1999)

Supposons que X est riemannienne et que X/Γ admet pour revêtement fini un tore riemannien (en particulier Γ est virtuellement abélien), ou bien que X est un solide covalent.

Résultats

Théorème (Pansu, 1999)

Supposons que X est riemannienne et que X/Γ admet pour revêtement fini un tore riemannien (en particulier Γ est virtuellement abélien), ou bien que X est un solide covalent. Alors, en notant n le rang du sous-groupe Γ' abélien libre maximal :

- *Le profil isopérimétrique de X est asymptotiquement homogène : il existe une constante c_∞ telle que $I_X(\tau) \sim c_\infty \tau^{\frac{n-1}{n}}$*

Résultats

Théorème (Pansu, 1999)

Supposons que X est riemannienne et que X/Γ admet pour revêtement fini un tore riemannien (en particulier Γ est virtuellement abélien), ou bien que X est un solide covalent. Alors, en notant n le rang du sous-groupe Γ' abélien libre maximal :

- *Le profil isopérimétrique de X est asymptotiquement homogène : il existe une constante c_∞ telle que $I_X(\tau) \sim c_\infty \tau^{\frac{n-1}{n}}$*
- *La constante c_∞ est majorée par un invariant conforme. Elle peut être arbitraire quand $n \geqslant 3$; pour $n = 2$, $c_\infty \leqslant \sqrt{2\pi}$.*

Résultats

Théorème (Pansu, 1999)

Supposons que X est riemannienne et que X/Γ admet pour revêtement fini un tore riemannien (en particulier Γ est virtuellement abélien), ou bien que X est un solide covalent. Alors, en notant n le rang du sous-groupe Γ' abélien libre maximal :

- *Le profil isopérimétrique de X est asymptotiquement homogène : il existe une constante c_∞ telle que $I_X(\tau) \sim c_\infty \tau^{\frac{n-1}{n}}$*
- *La constante c_∞ est majorée par un invariant conforme. Elle peut être arbitraire quand $n \geqslant 3$; pour $n = 2$, $c_\infty \leqslant \sqrt{2\pi}$.*
- *Il existe une forme limite des solutions du problème isopérimétrique sur X, c'est un convexe symétrique C de $\Gamma' \otimes \mathbb{R}$.*

Résultats

Théorème (Pansu, 1999)

Supposons que X est riemannienne et que X/Γ admet pour revêtement fini un tore riemannien (en particulier Γ est virtuellement abélien), ou bien que X est un solide covalent. Alors, en notant n le rang du sous-groupe Γ' abélien libre maximal :

- *Le profil isopérimétrique de X est asymptotiquement homogène : il existe une constante c_∞ telle que $I_X(\tau) \sim c_\infty \tau^{\frac{n-1}{n}}$*
- *La constante c_∞ est majorée par un invariant conforme. Elle peut être arbitraire quand $n \geqslant 3$; pour $n = 2$, $c_\infty \leqslant \sqrt{2\pi}$.*
- *Il existe une forme limite des solutions du problème isopérimétrique sur X, c'est un convexe symétrique C de $\Gamma' \otimes \mathbb{R}$.*

De plus, le convexe C est caractérisé comme la boule unité d'une norme explicite.

Plan

Conventions de masse

On fixe un entier n, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, ou de $\mathbb{T}^n$, ainsi que des densités $\delta_m : U \times \Lambda_m \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ non nécessairement euclidiennes pour tout $m \in \{0, 1, n-1, n\}$.

Conventions de masse

On fixe un entier n, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, ou de $\mathbb{T}^n$, ainsi que des densités $\delta_m : U \times \Lambda_m \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ non nécessairement euclidiennes pour tout $m \in \{0, 1, n-1, n\}$. Pour toute forme différentielle $\psi \in \mathscr{D}^m(U)$,

$$\mathbf{M}^\star(\psi) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \langle \psi(x), \xi(x) \rangle : \|\delta_m(\xi)\|_\infty \leqslant 1 \right\}.$$

Conventions de masse

On fixe un entier n, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, ou de $\mathbb{T}^n$, ainsi que des densités $\delta_m : U \times \Lambda_m \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ non nécessairement euclidiennes pour tout $m \in \{0, 1, n-1, n\}$. Pour toute forme différentielle $\psi \in \mathscr{D}^m(U)$,

$$\mathbf{M}^\star(\psi) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle \psi(x), \xi(x) \rangle : \|\delta_m(\xi)\|_\infty \leqslant 1\} .$$

Définition (Norme $\mathbf{M}$)

On définit la masse d'un courant T représentable par intégration par

$$\mathbf{M}(T) := \sup \{T(\psi) : \mathbf{M}^\star(\psi) \leqslant 1\} .$$

Conventions de masse

On fixe un entier n, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, ou de $\mathbb{T}^n$, ainsi que des densités $\delta_m : U \times \Lambda_m \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ non nécessairement euclidiennes pour tout $m \in \{0, 1, n-1, n\}$. Pour toute forme différentielle $\psi \in \mathscr{D}^m(U)$,

$$\mathbf{M}^\star(\psi) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \langle \psi(x), \xi(x) \rangle : \|\delta_m(\xi)\|_\infty \leqslant 1 \right\}.$$

Définition (Norme $\mathbf{M}$)

On définit la masse d'un courant T représentable par intégration par

$$\mathbf{M}(T) := \sup \left\{ T(\psi) : \mathbf{M}^\star(\psi) \leqslant 1 \right\}.$$

Un courant est entier s'il est rectifiable et de bord rectifiable.

Un courant est entier s'il est rectifiable et de bord rectifiable.

Théorème (Taylor, 1974)

Supposons $\mathbb{R}^n$ muni d'un intégrand $F : \Lambda_{n-1}\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+^\star$ convexe symétrique et d'une forme volume ω, invariants par translations.

Un courant est entier s'il est rectifiable et de bord rectifiable.

Théorème (Taylor, 1974)

Supposons $\mathbb{R}^n$ muni d'un intégrand $F : \Lambda_{n-1}\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+^\star$ convexe symétrique et d'une forme volume ω, invariants par translations. Pour tout courant entier de dimension $n-1$,

$$\mathbf{M}(\partial T) \geqslant c_F \mathbf{M}(T)^{\frac{n-1}{n}}$$

Un courant est entier s'il est rectifiable et de bord rectifiable.

Théorème (Taylor, 1974)

Supposons $\mathbb{R}^n$ muni d'un intégrand $F : \Lambda_{n-1}\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+^\star$ convexe symétrique et d'une forme volume ω, invariants par translations. Pour tout courant entier de dimension $n-1$,

$$\mathbf{M}(\partial T) \geqslant c_F \mathbf{M}(T)^{\frac{n-1}{n}}$$

De plus, il y a égalité si et seulement si $T = \delta_\sharp I_W$ où W est la forme de Wulff *de l'intégrand, c'est-à-dire la boule unité de la norme correspondant à $F^\star$ par l'isomorphisme $\mathbb{R}^n \simeq \Lambda^{n-1}\mathbb{R}^n$,*

$$\Phi_\omega : \xi \mapsto \xi \rfloor \omega$$

et δ une dilatation.

Un courant est entier s'il est rectifiable et de bord rectifiable.

Théorème (Taylor, 1974)

Supposons $\mathbb{R}^n$ *muni d'un intégrand* $F : \Lambda_{n-1}\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+^\star$ *convexe symétrique et d'une forme volume* ω*, invariants par translations. Pour tout courant entier de dimension* $n-1$*,*

$$\mathbf{M}(\partial T) \geqslant c_F \mathbf{M}(T)^{\frac{n-1}{n}}$$

De plus, il y a égalité si et seulement si $T = \delta_\sharp I_W$ *où* W *est la* forme de Wulff *de l'intégrand, c'est-à-dire la boule unité de la norme correspondant à* $F^\star$ *par l'isomorphisme* $\mathbb{R}^n \simeq \Lambda^{n-1}\mathbb{R}^n$*,*

$$\Phi_\omega : \xi \mapsto \xi \rfloor \omega$$

et δ *une dilatation. Enfin,* $c_F = n\mathrm{vol}(W)^{1/n}$

Masse des tranches d'un courant normal

Soit T un courant normal de dimension $m \geqslant 1$, u une fonction lipschitzienne et r un réel. On définit la tranche de T selon u à la valeur r comme

$$\langle T, u, r+\rangle = \partial(T \lfloor \{x : u(x) \leqslant r\}) - (\partial T)\lfloor \{x : u(x) \leqslant r\}.$$

Masse des tranches d'un courant normal

Soit T un courant normal de dimension $m \geqslant 1$, u une fonction lipschitzienne et r un réel. On définit la tranche de T selon u à la valeur r comme

$$\langle T, u, r+\rangle = \partial(T\lfloor\{x : u(x) \leqslant r\}) - (\partial T)\lfloor\{x : u(x) \leqslant r\}.$$

Théorème (Federer)

Il existe une constante K (dépendant seulement de $\mathrm{Lip}(u)$) telle que pour tous $a < b$ réels,

$$\int_a^b \mathbf{M}\langle T, u, r+\rangle dr \leqslant K\mathbf{M}(T\lfloor\{x : a < u(x) < b\}).$$

Définitions

Définition

Le courant $T \in \mathscr{D}_m(U)$ est

- *Une chaîne $\flat$ si $T = R + \partial S$ où R et S sont de masse finie.*
- *Une chaîne $\flat$* entière, *si $T = R + \partial S$ où R et S sont rectifiables ;*

Définitions

Définition

Le courant $T \in \mathscr{D}_m(U)$ est

- *Une chaîne $\flat$ si $T = R + \partial S$ où R et S sont de masse finie.*
- *Une chaîne $\flat$* entière, *si $T = R + \partial S$ où R et S sont rectifiables ;*

Pour une chaîne $\flat$ (resp. pour une chaîne $\flat$ entière)

$$\begin{aligned} \|T\|_\flat &:= \inf\left\{\mathbf{M}(R) + \mathbf{M}(S) : T = R + \partial S\right\} \\ \|T\|_{\flat,\mathbb{Z}} &:= \inf\{\mathbf{M}(R) + \mathbf{M}(S) : T = R + \partial S, \\ &\qquad R, S \text{ rectifiables}\} \end{aligned}$$

Topologie $\flat$

En codimension $\geqslant 1$ la topologie $\flat$ est moins fine que celle définie par $\mathbf{M}$.

Topologie ♭

En codimension $\geqslant 1$ la topologie ♭ est moins fine que celle définie par $\mathbf{M}$.

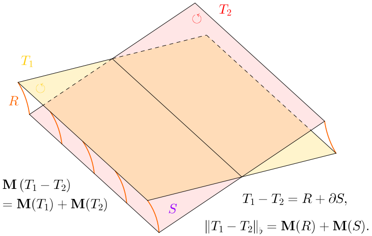


Figure – $\mathbf{M}$ et norme ♭.

Topologie $\flat$

En codimension $\geqslant 1$ la topologie $\flat$ est moins fine que celle définie par $\mathbf{M}$.

Par exemple, on montre que si $\{\Phi_t\}$ est le flot d'un champ de vecteur et T un courant entier, $t \mapsto \Phi_{t\sharp}T$ est continu pour $\flat$ mais pas pour $\mathbf{M}$ en général.

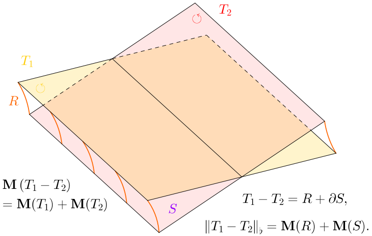


Figure – $\mathbf{M}$ et norme $\flat$.

Théorèmes de déformation et de compacité

Théorème (Federer–Fleming, 1960)

Les chaînes simpliciales entières de dimension m sont denses dans les courants entiers de dimension m, pour la topologie $\flat$ entière.

Théorèmes de déformation et de compacité

Théorème (Federer–Fleming, 1960)

Les chaînes simpliciales entières de dimension m sont denses dans les courants entiers de dimension m, pour la topologie $\flat$ entière.

Théorème (Théorème de compacité)

Soit c une constante réelle positive, et $K \Subset U$ un compact, rétracte lipschitzien d'un de ses voisinages dans U. Alors

$$\mathbf{I}_{m,K}(U) \cap \{T : \mathbf{M}(T) + \mathbf{M}(\partial T) < c\}$$

est compact pour la topologie $\flat$ entière.

Théorèmes de déformation et de compacité

Théorème (Federer–Fleming, 1960)

Les chaînes simpliciales entières de dimension m sont denses dans les courants entiers de dimension m, pour la topologie $\flat$ entière.

Théorème (Théorème de compacité)

Soit c une constante réelle positive, et $K \Subset U$ un compact, rétracte lipschitzien d'un de ses voisinages dans U. Alors

$$\mathbf{I}_{m,K}(U) \cap \{T : \mathbf{M}(T) + \mathbf{M}(\partial T) < c\}$$

est compact pour la topologie $\flat$ entière.

La précompacité est fournie par la version précise du théorème de déformation.

Plan

Soit $\mathbb{T}^n$ un tore muni d'un intégrand, et d'une forme volume ω invariante par translations.

Soit $\mathbb{T}^n$ un tore muni d'un intégrand, et d'une forme volume ω invariante par translations.

Définition

Soit $m \in \{1, n-1\}$. *Pour tout* $c \in \mathrm{H}_m(\mathbb{T}^n, \mathbb{R})$, *et* $\lambda \in \mathrm{H}^m(\mathbb{T}^n, \mathbb{R})$,

$$|c|_{\mathbb{R}} := \inf \{\mathbf{M}(\alpha) : \alpha \in c\}\,;\ |\lambda|_\infty := \inf \{\mathbf{M}^\star(\alpha) : \alpha \in \lambda\}$$

$$|\lambda|_1 := \inf \left\{ \int_{\mathbb{T}^n} \|\phi\| \omega : \phi \in \lambda \right\}.$$

Soit $\mathbb{T}^n$ un tore muni d'un intégrand, et d'une forme volume ω invariante par translations.

Définition

Soit $m \in \{1, n-1\}$. Pour tout $c \in \mathrm{H}_m(\mathbb{T}^n, \mathbb{R})$, et $\lambda \in \mathrm{H}^m(\mathbb{T}^n, \mathbb{R})$,

$$|c|_{\mathbb{R}} := \inf \{\mathbf{M}(\alpha) : \alpha \in c\}\,;\ |\lambda|_\infty := \inf \{\mathbf{M}^\star(\alpha) : \alpha \in \lambda\}$$

$$|\lambda|_1 := \inf \left\{ \int_{\mathbb{T}^n} \|\phi\| \omega : \phi \in \lambda \right\}.$$

Proposition

Les normes $|\cdot|_\infty$ sur $\mathrm{H}^m(\mathbb{T}^n, \mathbb{R})$ et $|\cdot|_{\mathbb{R}}$ sur $\mathrm{H}_m(\mathbb{T}^n, \mathbb{R})$ sont duales.

Proposition

La dualité de Poincaré $(H^m(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}), |\cdot|_1) \to (\mathrm{H}_{n-m}(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}), |\cdot|_{\mathbb{R}})$ est une isométrie.

Proposition

La dualité de Poincaré $(H^m(\mathbb{T}^n,\mathbb{R}),|\cdot|_1) \to (\mathrm{H}_{n-m}(\mathbb{T}^n,\mathbb{R}),|\cdot|_{\mathbb{R}})$ *est une isométrie.*

Proposition

La dualité de Poincaré $(H^m(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}), |\cdot|_1) \to (\mathrm{H}_{n-m}(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}), |\cdot|_{\mathbb{R}})$ *est une isométrie.*

Démonstration.

La dualité de Poincaré est induite par $\alpha \mapsto C_\alpha : \phi \to \int_{\mathbb{T}^n} \alpha \wedge \phi$, et

$$\mathbf{M}(C_\alpha) = \int_{\mathbb{T}^n} \|\alpha\| \omega$$

Proposition

La dualité de Poincaré $(H^m(\mathbb{T}^n,\mathbb{R}),|\cdot|_1) \to (\mathrm{H}_{n-m}(\mathbb{T}^n,\mathbb{R}),|\cdot|_{\mathbb{R}})$ *est une isométrie.*

Démonstration.

La dualité de Poincaré est induite par $\alpha \mapsto C_\alpha : \phi \to \int_{\mathbb{T}^n} \alpha \wedge \phi$, et

$$\mathbf{M}(C_\alpha) = \int_{\mathbb{T}^n} \|\alpha\|\omega$$

D'où

$$\begin{aligned} |[C_\alpha]|_{\mathbb{R}} &= \inf\{\mathbf{M}(\beta) : \beta \in [C_\alpha]\} \\ &\leqslant \inf\{\mathbf{M}(C'_\alpha) : [\alpha'] = [\alpha]\} \\ &= \inf\{\|\alpha'\|_{L^1} : [\alpha'] = [\alpha]\} \\ &= |\,[\alpha]\,|_1 \end{aligned}$$

Proposition

La dualité de Poincaré $(H^m(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}), |\cdot|_1) \to (\mathrm{H}_{n-m}(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}), |\cdot|_{\mathbb{R}})$ *est une isométrie.*

Démonstration.

La dualité de Poincaré est induite par $\alpha \mapsto C_\alpha : \phi \to \int_{\mathbb{T}^n} \alpha \wedge \phi$, et

$$\mathbf{M}(C_\alpha) = \int_{\mathbb{T}^n} \|\alpha\| \omega$$

D'où

$$\begin{aligned} |[C_\alpha]|_{\mathbb{R}} &= \inf \{\mathbf{M}(\beta) : \beta \in [C_\alpha]\} \\ &\leqslant \inf \{\mathbf{M}(C'_\alpha) : [\alpha'] = [\alpha]\} \\ &= \inf \{\|\alpha'\|_{L^1} : [\alpha'] = [\alpha]\} \\ &= |\,[\alpha]\,|_1 \end{aligned}$$

et l'inégalité est une égalité par régularisation. □

Lemme (Principe de calibration)

Soit T un courant fermé de masse finie. Supposons qu'il existe ϕ une m-forme fermée telle que $\mathbf{M}^{\star}(\phi) \leqslant 1$ et $T(\phi) = \mathbf{M}(T)$. Alors T minimise la masse dans sa classe d'homologie.

Lemme (Principe de calibration)

Soit T un courant fermé de masse finie. Supposons qu'il existe ϕ une m-forme fermée telle que $\mathbf{M}^\star(\phi) \leqslant 1$ et $T(\phi) = \mathbf{M}(T)$. Alors T minimise la masse dans sa classe d'homologie.

Démonstration.
Pour tout cycle T' homologue à T,

$$\mathbf{M}(T) = T(\phi) = T'(\phi) \leqslant \mathbf{M}(T')$$

□

Lemme (Principe de calibration)

Soit T un courant fermé de masse finie. Supposons qu'il existe ϕ une m-forme fermée telle que $\mathbf{M}^\star(\phi) \leqslant 1$ et $T(\phi) = \mathbf{M}(T)$. Alors T minimise la masse dans sa classe d'homologie.

Démonstration.
Pour tout cycle T' homologue à T,

$$\mathbf{M}(T) = T(\phi) = T'(\phi) \leqslant \mathbf{M}(T')$$

□

Proposition

Soit F un intégrand convexe, invariant par translation sur $\mathbb{T}^n$. Les multiples scalaires des courants d'intégration sur les sous-tores affines plongés de codimension 1 réalisent le minimum de $\mathbf{M}$ dans leur classe d'homologie.

Démonstration de la proposition.
Soit S un sous-tore plongé de direction $H \in \mathcal{G}_{n-1}(\mathbb{R}^n)$, $v_1, \dots v_{n-1}$ une $\mathbb{Z}$-base de $H \cap \mathbb{Z}^n$ et $\xi = v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1}$.

Démonstration de la proposition.
Soit S un sous-tore plongé de direction $H \in \mathcal{G}_{n-1}(\mathbb{R}^n)$, $v_1, \ldots v_{n-1}$ une $\mathbb{Z}$-base de $H \cap \mathbb{Z}^n$ et $\xi = v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1}$. La boule unité de $F^\star$ sur $\Lambda^{n-1}\mathbb{R}^n$ est compacte, donc il existe ϕ (non unique a priori) telle que

$$\langle \xi, \phi \rangle = \sup \{\langle \xi, \phi' \rangle : F^\star(\phi') \leqslant 1\} = F(\xi).$$

Démonstration de la proposition.
Soit S un sous-tore plongé de direction $H \in \mathcal{G}_{n-1}(\mathbb{R}^n)$, $v_1, \ldots v_{n-1}$ une $\mathbb{Z}$-base de $H \cap \mathbb{Z}^n$ et $\xi = v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1}$. La boule unité de $F^\star$ sur $\Lambda^{n-1}\mathbb{R}^n$ est compacte, donc il existe ϕ (non unique a priori) telle que

$$\langle \xi, \phi \rangle = \sup \{ \langle \xi, \phi' \rangle : F^\star(\phi') \leqslant 1 \} = F(\xi).$$

Pour toute forme $\psi \in \mathscr{D}^{n-1}(\mathbb{T}^n)$ telle que $\mathbf{M}^\star(\psi) \leqslant 1$, avec σ paramétrisant $\pi(H)$,

$$I_S(\psi) = \int_{\mathbb{T}^{n-1}} \langle \xi, \psi_{\sigma(x)} \rangle dx \leqslant \int_{\mathbb{T}^{n-1}} \langle \xi, \phi \rangle = I_S(\overline{\phi}).$$

Démonstration de la proposition.
Soit S un sous-tore plongé de direction $H \in \mathcal{G}_{n-1}(\mathbb{R}^n)$, $v_1, \ldots v_{n-1}$ une $\mathbb{Z}$-base de $H \cap \mathbb{Z}^n$ et $\xi = v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1}$. La boule unité de $F^\star$ sur $\Lambda^{n-1}\mathbb{R}^n$ est compacte, donc il existe ϕ (non unique a priori) telle que

$$\langle \xi, \phi \rangle = \sup \{\langle \xi, \phi' \rangle : F^\star(\phi') \leqslant 1\} = F(\xi).$$

Pour toute forme $\psi \in \mathscr{D}^{n-1}(\mathbb{T}^n)$ telle que $\mathbf{M}^\star(\psi) \leqslant 1$, avec σ paramétrisant $\pi(H)$,

$$I_S(\psi) = \int_{\mathbb{T}^{n-1}} \langle \xi, \psi_{\sigma(x)} \rangle dx \leqslant \int_{\mathbb{T}^{n-1}} \langle \xi, \phi \rangle = I_S(\overline{\phi}).$$

On conclut par le principe de calibration : $\overline{\phi}$ calibre λI_S, pour tout réel λ. $\square$

Définition

Supposons $\mathbb{T}^n$ muni d'une métrique riemannienne. On définit

$$\mathbf{T}_\infty := \frac{\mathrm{H}_1(\mathbb{T}^n, \mathbb{R})}{\mathrm{H}_1(\mathbb{T}^n, \mathbb{Z})},$$

muni de la métrique issue de la norme sur $\widetilde{\mathbf{T}_\infty}$ duale de $|\cdot|_1$ sur $\mathrm{H}^1(\mathbb{T}_n, \mathbb{Z})$.

Définition

Supposons $\mathbb{T}^n$ muni d'une métrique riemannienne. On définit

$$\mathbf{T}_\infty := \frac{\mathrm{H}_1(\mathbb{T}^n, \mathbb{R})}{\mathrm{H}_1(\mathbb{T}^n, \mathbb{Z})},$$

muni de la métrique issue de la norme sur $\widetilde{\mathbf{T}_\infty}$ duale de $|\cdot|_1$ sur $\mathrm{H}^1(\mathbb{T}_n, \mathbb{Z})$.

Il y a une équivalence d'homotopie $f : \mathbb{T}^n \to \mathbf{T}_\infty$, qui induit f_* canonique en homologie.

Définition

Supposons $\mathbb{T}^n$ muni d'une métrique riemannienne. On définit

$$\mathbf{T}_\infty := \frac{\mathrm{H}_1(\mathbb{T}^n, \mathbb{R})}{\mathrm{H}_1(\mathbb{T}^n, \mathbb{Z})},$$

muni de la métrique issue de la norme sur $\widetilde{\mathbf{T}_\infty}$ duale de $|\cdot|_1$ sur $\mathrm{H}^1(\mathbb{T}_n, \mathbb{Z})$.

Il y a une équivalence d'homotopie $f : \mathbb{T}^n \to \mathbf{T}_\infty$, qui induit f_* canonique en homologie.

Proposition

L'isomorphisme

$$H_{n-1}(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}) \xrightarrow{f_\star} H_{n-1}(\mathbf{T}_\infty, \mathbb{R})$$

est une isométrie pour les normes $|\cdot|_\mathbb{R}$ à la source et au but.

Plan

Soit X une variété riemannienne munie d'une action géométrique de Γ.

Soit X une variété riemannienne munie d'une action géométrique de Γ.

Lemme

Pour tout $h \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{R}) = \left(\Gamma^{\mathrm{ab}}\right)^{\vee} \otimes \mathbb{R}$*, il existe* f *lisse sur* X *telle que pour tout* $\gamma \in \Gamma, \gamma.f = f + h(\gamma)$ *(*f *est* Γ*-équivariante).*

Soit X une variété riemannienne munie d'une action géométrique de Γ.

Lemme

Pour tout $h \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{R}) = \left(\Gamma^{\mathrm{ab}}\right)^{\vee} \otimes \mathbb{R}$, il existe f lisse sur X telle que pour tout $\gamma \in \Gamma, \gamma.f = f + h(\gamma)$ (f est Γ-équivariante).

Le lemme permet d'obtenir une inclusion naturelle

$$\varphi : \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{H}^1(X/\Gamma, \mathbb{R}) \tag{1}$$

en associant à h la classe d'homologie de $\pi_* df$.

Soit X une variété riemannienne munie d'une action géométrique de Γ.

Lemme

Pour tout $h \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{R}) = \left(\Gamma^{\mathrm{ab}}\right)^{\vee} \otimes \mathbb{R}$, il existe f lisse sur X telle que pour tout $\gamma \in \Gamma, \gamma.f = f + h(\gamma)$ (f est Γ-équivariante).

Le lemme permet d'obtenir une inclusion naturelle

$$\varphi : \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{H}^1(X/\Gamma, \mathbb{R}) \tag{1}$$

en associant à h la classe d'homologie de $\pi_* df$.

Définition

On désigne par R_Γ l'espace $\Gamma^{\mathrm{ab}} \otimes \mathbb{R}$ muni de la norme duale de la norme induite par $\|\cdot\|_1$ sur $\mathrm{H}^1(X/\Gamma, \mathbb{R})$ via (1), et de l'élément de volume ω_∞ qui fait de Γ^{ab} un réseau de covolume 1.

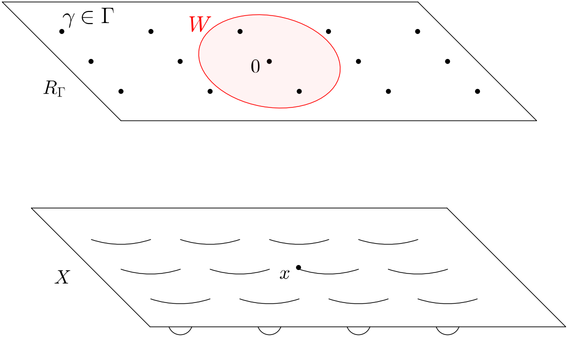
On suppose dorénavant Γ abélien et libre de rang n, On suppose dorénavant Γ abélien et libre de rang n, et la normalisation $\int_{X/\Gamma} \pi_* \omega = 1$.

On suppose dorénavant Γ abélien et libre de rang n, et la normalisation $\int_{X/\Gamma} \pi_*\omega = 1$.

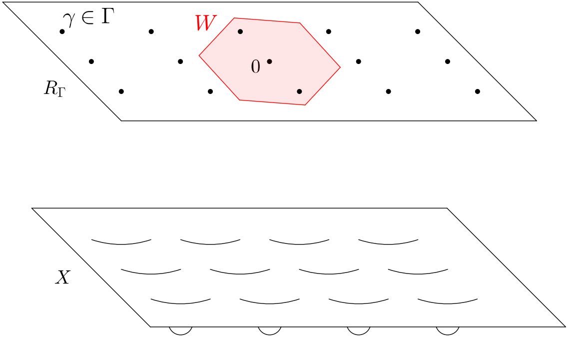
Théorème

Si R_Γ est muni de l'intégrand F tel que $F^\star(\Phi_{\omega_\infty} v) = \|v\|_1^\star$,

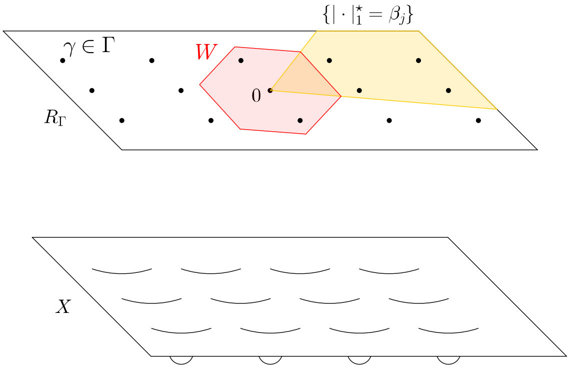
$$\limsup_{\tau \to +\infty} \frac{I_X(\tau)}{I_{R_\Gamma}(\tau)} \leqslant 1 \tag{2}$$



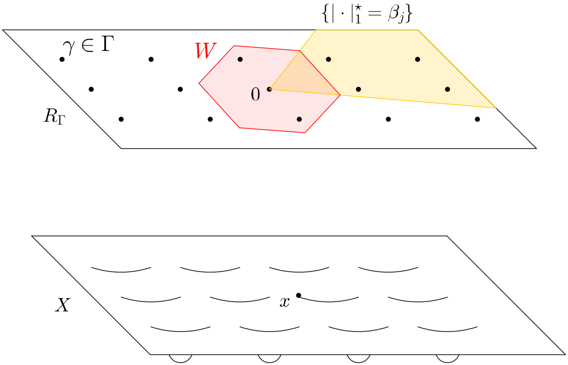
On souhaite transporter de grandes boules métriques tW de R_Γ (que l'on sait minimisantes pour le problème isopérimétrique) sur l'espace X.



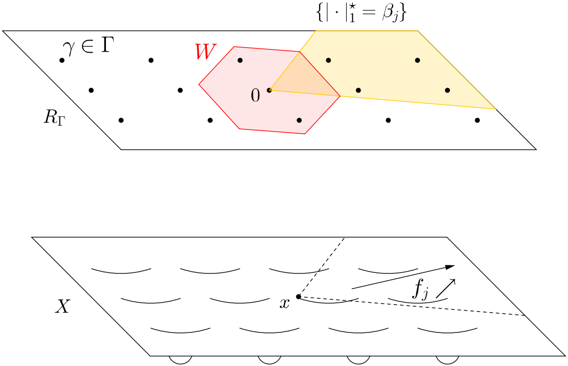
Supposons que ces boules sont polyédrales, c'est-à-dire qu'il existe un nombre fini de formes $\beta_j \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{R})$ tels que $|x|_1^\star = \sup_j \beta_j$.



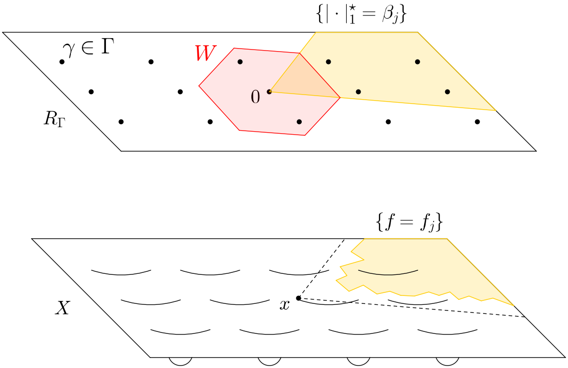
Supposons que ces boules sont polyédrales, c'est-à-dire qu'il existe un nombre fini de formes $\beta_j \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{R})$ tels que $|x|_1^\star = \sup_j \beta_j$.



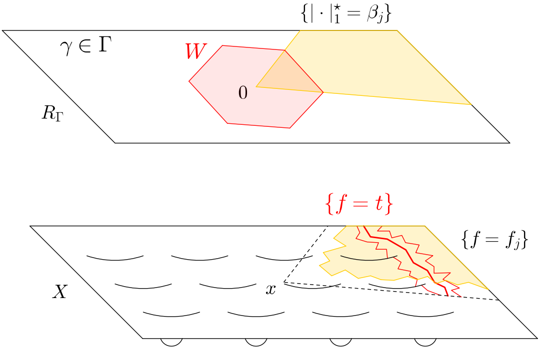
Fixons un point $x \in X$. Au moyen de (1) on associe aux β_j des classes de cohomologie dans $\mathrm{H}^1(X/\Gamma, \mathbb{R})$.



On choisit des cocycles b_j presques minimisants pour $|\cdot|_1$ dans chque $\varphi(\beta_j)$. Puis, f_j est par définition la primitive de $\pi^* b_j$ s'annulant en x.



Finalement, si D_t est une surface de niveau $\{f = t\}$ de la fonction $f = \sup_j f_j$, c'est une approximation dans X de la boule tW.



En moyenne, et donc pour une suite de valeurs de t bien choisies d'après une formule de coaire), $\mathrm{vol}(D_t)$ est comparable à $\mu_F(\partial tW)$.

Plan

Supposons le tore $\mathbb{T}^n$ muni d'une métrique riemannienne g avec élément de volume ω qui lui donne volume 1.

Supposons le tore $\mathbb{T}^n$ muni d'une métrique riemannienne g avec élément de volume ω qui lui donne volume 1. Quitte à remplacer g par $\Psi^* g$ où Ψ est un difféomorphisme, il est possible de supposer que ω est invariante.

Supposons le tore $\mathbb{T}^n$ muni d'une métrique riemannienne g avec élément de volume ω qui lui donne volume 1. Quitte à remplacer g par $\Psi^* g$ où Ψ est un difféomorphisme, il est possible de supposer que ω est invariante. L'espace $\mathbb{R}^n = \widetilde{\mathbb{T}^n}$ est muni simultanément de deux structures métriques :

Supposons le tore $\mathbb{T}^n$ muni d'une métrique riemannienne g avec élément de volume ω qui lui donne volume 1. Quitte à remplacer g par $\Psi^* g$ où Ψ est un difféomorphisme, il est possible de supposer que ω est invariante. L'espace $\mathbb{R}^n = \widetilde{\mathbb{T}^n}$ est muni simultanément de deux structures métriques :

- La métrique riemannienne $\pi^* g$
- La norme $|\cdot|_1^\star$ une fois identifié à $H_1(\mathbb{T}^n, \mathbb{R})$ (avec $\mathbb{Z}^n$ identifié au réseau $\mathrm{H}_1(\mathbb{T}^n, \mathbb{Z})$).

Soit $\mathbf{M}$ la masse définie par la densité riemannienne associée à $\pi^* g$. Pour tout $t > 0$, et T un courant entier de dimension $n-1$ sur $\mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{M}_t(T) := t^{1-n}\mathbf{M}\left(\delta_{t\sharp}T\right)$$

Soit $\mathbf{M}$ la masse définie par la densité riemannienne associée à $\pi^* g$. Pour tout $t > 0$, et T un courant entier de dimension $n-1$ sur $\mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{M}_t(T) := t^{1-n}\mathbf{M}\left(\delta_{t\sharp}T\right)$$

Enfin, $\mathbf{M}_\infty$ est la masse mesurée pour l'intégrand $F : \Lambda_{n-1} \to \mathbb{R}$ correspondant à $|\cdot|_1$, via Ψ_ω.

Soit $\mathbf{M}$ la masse définie par la densité riemannienne associée à $\pi^* g$. Pour tout $t > 0$, et T un courant entier de dimension $n-1$ sur $\mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{M}_t(T) := t^{1-n} \mathbf{M}\left(\delta_{t\sharp} T\right)$$

Enfin, $\mathbf{M}_\infty$ est la masse mesurée pour l'intégrand $F : \Lambda_{n-1} \to \mathbb{R}$ correspondant à $|\cdot|_1$, via Ψ_ω.

Proposition

Soit (t_j) une suite réelle positive de limite infinie, et (T_j) une suite de courants entiers sur $\mathbb{R}^n$ ayant T pour limite $(\flat, \mathbb{Z})$. Alors

$$\mathbf{M}_\infty(T) \leqslant \liminf_j \mathbf{M}_{t_j}(T_j) \tag{3}$$

Importance de la semi-continuité

Pour une suite de courants entiers (presque) extrémaux de masses $\tau_j \to +\infty$, on souhaite pouvoir :

Importance de la semi-continuité

Pour une suite de courants entiers (presque) extrémaux de masses $\tau_j \to +\infty$, on souhaite pouvoir :

- Extraire de la suite des courants renormalisés une sous-suite $\flat$-convergente, à l'aide d'un principe de compacité.

Importance de la semi-continuité

Pour une suite de courants entiers (presque) extrémaux de masses $\tau_j \to +\infty$, on souhaite pouvoir :

- Extraire de la suite des courants renormalisés une sous-suite $\flat$-convergente, à l'aide d'un principe de compacité.
- Majorer la masse limite de la $\flat$-limite pour appliquer le théorème isopérimétrique de Taylor.

L'expression de la constante isopérimétrique dans le théorème de Taylor fournira alors la minoration du profil isopérimétrique, tandis que l'unicité implique la convergence des domaines extrémaux.

Dans le cas homogène, la semi-continuité de la masse par rapport à $\flat$ est apportée par la convexité (en fait la semi-ellipticité) de l'intégrand.

Dans le cas homogène, la semi-continuité de la masse par rapport à $\flat$ est apportée par la convexité (en fait la semi-ellipticité) de l'intégrand.

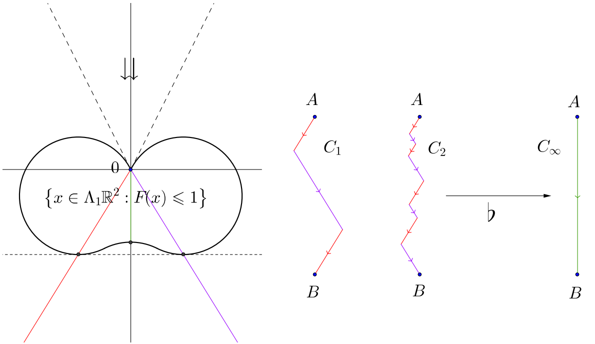


Figure – (pseudo-)intégrand non convexe et défaut de semi-continuité de $\mathbf{M}$.

Dans le cas homogène, la semi-continuité de la masse par rapport à $\flat$ est apportée par la convexité (en fait la semi-ellipticité) de l'intégrand.

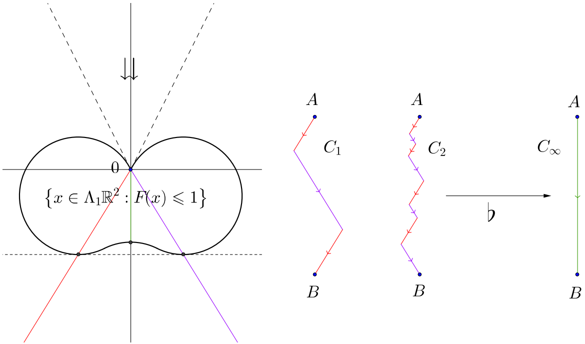


Figure – (pseudo-)intégrand non convexe et défaut de semi-continuité de $\mathbf{M}$.

$$\mathbf{M}(C_1) = \cdots = \mathbf{M}(C_j) = \cdots < \mathbf{M}(C_\infty)$$

Courants k-rationnels

Nous allons adapter la preuve de semi-continuité inférieure pour un intégrand semi-elliptique.

Courants k-rationnels

Nous allons adapter la preuve de semi-continuité inférieure pour un intégrand semi-elliptique.

Définition

Soit $k \geqslant 1$ un entier. On dit qu'un courant sur $\mathbb{R}^n$ est k-rationnel s'il est somme de multiples entiers de courants d'intégration sur des parallélotopes disjoints, de codimension 1, dirigés par des vecteurs à coordonnées dans $\frac{1}{k}\mathbb{Z}$.

Courants k-rationnels

Nous allons adapter la preuve de semi-continuité inférieure pour un intégrand semi-elliptique.

Définition

Soit $k \geqslant 1$ un entier. On dit qu'un courant sur $\mathbb{R}^n$ est k-rationnel s'il est somme de multiples entiers de courants d'intégration sur des parallélotopes disjoints, de codimension 1, dirigés par des vecteurs à coordonnées dans $\frac{1}{k}\mathbb{Z}$.

A l'aide du théorème de déformation, on montre que les courants k-rationnels sont denses dans les courants entiers pour la topologie $(\flat, \mathbb{Z})$.

Courants k-rationnels

Nous allons adapter la preuve de semi-continuité inférieure pour un intégrand semi-elliptique.

Définition

Soit $k \geqslant 1$ un entier. On dit qu'un courant sur $\mathbb{R}^n$ est k-rationnel s'il est somme de multiples entiers de courants d'intégration sur des parallélotopes disjoints, de codimension 1, dirigés par des vecteurs à coordonnées dans $\frac{1}{k}\mathbb{Z}$.

A l'aide du théorème de déformation, on montre que les courants k-rationnels sont denses dans les courants entiers pour la topologie $(\flat, \mathbb{Z})$.

Nous allons démontrer la propriété de semi-continuité (3) dans le cas où le courant limite T est k-rationnel, et les t_j des multiples de k.

Semi-continuité : Démonstration

Supposons donc que $T_j \to T$ en topologie $\flat$. On décompose : $T = \sum_i P_i$, avec $\mathrm{spt}(P_i) = \{u_i \geqslant 0\}$, les u_i K-lipschitziennes.

Semi-continuité : Démonstration

Supposons donc que $T_j \to T$ en topologie $\flat$. On décompose : $T = \sum_i P_i$, avec $\operatorname{spt}(P_i) = \{u_i \geqslant 0\}$, les u_i K-lipschitziennes. Soient X_j et Y_j rectifiables tels que $\mathbf{M}(X_j), \mathbf{M}(Y_j) \to 0$ et $T_j - T = X_j + \partial Y_j$.

Semi-continuité : Démonstration

Supposons donc que $T_j \to T$ en topologie $\flat$. On décompose : $T = \sum_i P_i$, avec $\operatorname{spt}(P_i) = \{u_i \geqslant 0\}$, les u_i K-lipschitziennes. Soient X_j et Y_j rectifiables tels que $\mathbf{M}(X_j), \mathbf{M}(Y_j) \to 0$ et $T_j - T = X_j + \partial Y_j$.
D'après la formule de masse des tranches, pour tout $\varepsilon_j > 0$,

$$\int_0^{\varepsilon_j} \mathbf{M}\langle Y_j, u_i, s+\rangle ds \leqslant K\mathbf{M}(Y_j).$$

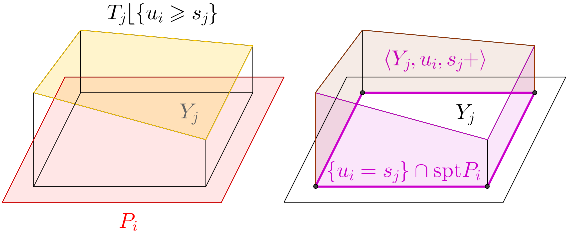
En particulier, pour un certain $s_j > 0$, $\mathbf{M}\langle Y_j, u_i, s_j+\rangle \leqslant K\sqrt{\mathbf{M}(Y_j)}$.

Semi-continuité : Démonstration

D'après la formule de masse des tranches, pour tout $\varepsilon_j > 0$,

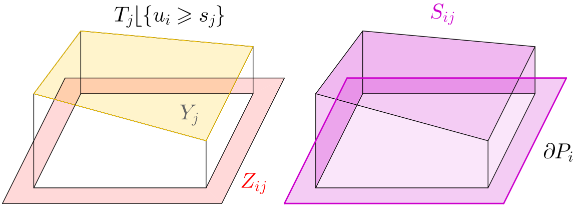
$$\int_0^{\varepsilon_j} \mathbf{M}\langle Y_j, u_i, s+\rangle ds \leqslant K\mathbf{M}(Y_j).$$

En particulier, pour un certain $s_j > 0$, $\mathbf{M}\langle Y_j, u_i, s_j+\rangle \leqslant K\sqrt{\mathbf{M}(Y_j)}$.



Semi-continuité : Démonstration

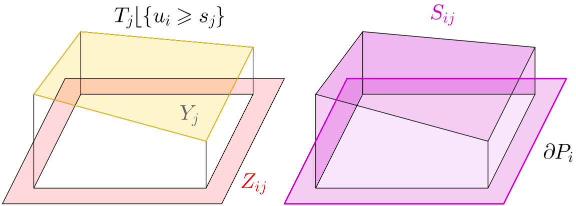
Posons $Z_{ij} = P_i \lfloor \{0 \leqslant u_i \leqslant s_j\}$, puis



Semi-continuité : Démonstration

Posons $Z_{ij} = P_i \lfloor \{0 \leqslant u_i \leqslant s_j\}$, puis

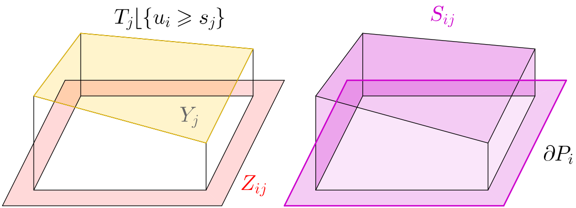
$$S_{ij} := Z_{ij} + \langle Y_j, u_i, s_j+ \rangle + T_j \lfloor \{u_i \geqslant s_j\} - X_j \lfloor \{u_i \geqslant s_j\}$$



Semi-continuité : Démonstration

Posons $Z_{ij} = P_i \lfloor \{0 \leqslant u_i \leqslant s_j\}$, puis

$$S_{ij} := Z_{ij} + \langle Y_j, u_i, s_j+\rangle + T_j \lfloor \{u_i \geqslant s_j\} - X_j \lfloor \{u_i \geqslant s_j\}$$



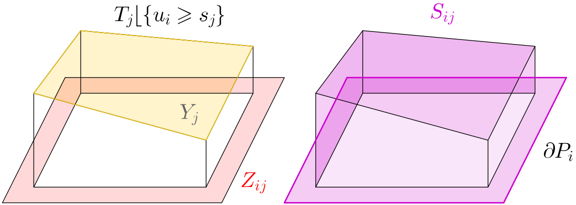
Alors,

(A) $P_i - S_{ij} = \partial \{Y_j \lfloor \{u_i \geqslant s_j\}\}$, et

Semi-continuité : Démonstration

Posons $Z_{ij} = P_i \lfloor \{0 \leqslant u_i \leqslant s_j\}$, puis

$$S_{ij} := Z_{ij} + \langle Y_j, u_i, s_j + \rangle + T_j \lfloor \{u_i \geqslant s_j\} - X_j \lfloor \{u_i \geqslant s_j\}$$



Alors,

(A) $P_i - S_{ij} = \partial \{Y_j \lfloor \{u_i \geqslant s_j\}\}$, et

(B) $\mathbf{M}(S_{ij} - T_j \lfloor \{u_i \geqslant s_j\}) \leqslant K\varepsilon_j \mathbf{M}(\partial P_i) + \varepsilon_j^{-1} K \mathbf{M}(Y_j) + \mathbf{M}(X_j)$.

Semi-continuité : Démonstration

De (A) on déduit que les dilatés de S_{ij} par δ_{t_j}, projetés dans le tore ont même classe d'homologie que les dilatés de P_i, d'où

Semi-continuité : Démonstration

De (A) on déduit que les dilatés de S_{ij} par δ_{t_j}, projetés dans le tore ont même classe d'homologie que les dilatés de P_i, d'où

$$\mathbf{M}_\infty(P_i) = \left| \left[\pi \circ \delta_{t_j \sharp} S_{ij}\right] \right|_{\infty,\mathbb{R}} = \left| \left[\pi \circ \delta_{t_j \sharp} S_{ij}\right] \right|_{\mathbb{R}} \leqslant \mathbf{M}_{t_j}(S_{ij}).$$

Semi-continuité : Démonstration

De (A) on déduit que les dilatés de S_{ij} par δ_{t_j}, projetés dans le tore ont même classe d'homologie que les dilatés de P_i, d'où

$$\mathbf{M}_\infty(P_i) = \left| \left[\pi \circ \delta_{t_j\sharp} S_{ij}\right] \right|_{\infty,\mathbb{R}} = \left| \left[\pi \circ \delta_{t_j\sharp} S_{ij}\right] \right|_{\mathbb{R}} \leqslant \mathbf{M}_{t_j}(S_{ij}).$$

D'où $\mathbf{M}_\infty(T) \leqslant \sum_i \mathbf{M}_{t_j}(S_{ij})$.

Semi-continuité : Démonstration

De (A) on déduit que les dilatés de S_{ij} par δ_{t_j}, projetés dans le tore ont même classe d'homologie que les dilatés de P_i, d'où

$$\mathbf{M}_\infty(P_i) = \left| \left[\pi \circ \delta_{t_j\sharp} S_{ij}\right] \right|_{\infty,\mathbb{R}} = \left| \left[\pi \circ \delta_{t_j\sharp} S_{ij}\right] \right|_{\mathbb{R}} \leqslant \mathbf{M}_{t_j}(S_{ij}).$$

D'où $\mathbf{M}_\infty(T) \leqslant \sum_i \mathbf{M}_{t_j}(S_{ij})$. D'autre part, d'après (B) et par comparaison à un intégrand homogène,

$$\sum_i \mathbf{M}_{t_j}(S_{ij}) = \sum_i \mathbf{M}_{t_j}\left(T_j \lfloor \{u_i \geqslant s_j\}\right) + o(1).$$

Semi-continuité : Démonstration

De (A) on déduit que les dilatés de S_{ij} par δ_{t_j}, projetés dans le tore ont même classe d'homologie que les dilatés de P_i, d'où

$$\mathbf{M}_\infty(P_i) = \left| \left[\pi \circ \delta_{t_j\sharp} S_{ij}\right] \right|_{\infty,\mathbb{R}} = \left| \left[\pi \circ \delta_{t_j\sharp} S_{ij}\right] \right|_{\mathbb{R}} \leqslant \mathbf{M}_{t_j}(S_{ij}).$$

D'où $\mathbf{M}_\infty(T) \leqslant \sum_i \mathbf{M}_{t_j}(S_{ij})$. D'autre part, d'après (B) et par comparaison à un intégrand homogène,

$$\sum_i \mathbf{M}_{t_j}(S_{ij}) = \sum_i \mathbf{M}_{t_j}\left(T_j \lfloor \{u_i \geqslant s_j\}\right) + o(1).$$

Puisque $\liminf_j \sum_i \mathbf{M}\left(T_j \lfloor \{u_i \geqslant s_j\}\right) \leqslant \liminf_j \mathbf{M}_{t_j}(T_j)$, ceci permet de conclure.

Plan

Soit G un graphe localement fini (avec des arêtes éventuellement multiples), orienté, muni d'une action co-finie de Γ.

Définition

Une énergie de liaison *sur G est la donnée d'une fonction Γ-invariante e sur l'ensemble des arêtes E de G, à valeurs positives.*

Soit G un graphe localement fini (avec des arêtes éventuellement multiples), orienté, muni d'une action co-finie de Γ.

Définition

Une énergie de liaison *sur G est la donnée d'une fonction Γ-invariante e sur l'ensemble des arêtes E de G, à valeurs positives.*

Soit B un ensemble fini de sommets de G ; son *périmètre* est

$$\mathcal{E}(\partial B) := \sum_{u \in \partial B} e(u),$$

∂B étant l'ensemble des arêtes sortant de B.

Comme dans le cas riemannien, il y a une injection

$$\mathrm{H}^1(\Gamma, \mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{H}^1(G/\Gamma, \mathbb{R}),$$

le second espace étant muni de la norme quotient issue de la norme ℓ_1 associée à e :

$$\|c\|_1 = \inf \left\{ \sum \underline{e}(u)|\alpha(u)| : \alpha \in c \right\},$$

la somme portant sur les arêtes de G/Γ.

Comme dans le cas riemannien, il y a une injection

$$\mathrm{H}^1(\Gamma, \mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{H}^1(G/\Gamma, \mathbb{R}),$$

le second espace étant muni de la norme quotient issue de la norme ℓ_1 associée à e :

$$\|c\|_1 = \inf\left\{\sum \underline{e}(u)|\alpha(u)| : \alpha \in c\right\},$$

la somme portant sur les arêtes de G/Γ.

Conjecture

Supposons Γ abélien. Le problème isopérimétrique asymptotique de (G, e) est celui de $H_1(\Gamma, \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_1^\star$ dans lequel $H_1(\Gamma, \mathbb{Z})$ est de covolume $|G/\Gamma|$.

La preuve de la majoration du profil isopérimétrique s'adapte au cadre des graphes.

La conjecture a été prouvée par Pansu dans le cas particulier des solides covalents.

Définition

Un solide covalent est un graphe symétrique localement fini G muni d'une action co-finie de $\mathbb{Z}^3$ et d'un plongement $\iota : G \to \mathbb{R}^3$ qui est $\mathbb{Z}^3$-équivariant.

La conjecture a été prouvée par Pansu dans le cas particulier des solides covalents.

Définition

Un solide covalent est un graphe symétrique localement fini G muni d'une action co-finie de $\mathbb{Z}^3$ et d'un plongement $\iota : G \to \mathbb{R}^3$ qui est $\mathbb{Z}^3$-équivariant.

Un solide covalent muni d'une énergie de liaison modélise un milieu périodique formé d'atomes en interaction bornée.

La conjecture a été prouvée par Pansu dans le cas particulier des solides covalents.

Définition

Un solide covalent est un graphe symétrique localement fini G muni d'une action co-finie de $\mathbb{Z}^3$ et d'un plongement $\iota : G \to \mathbb{R}^3$ qui est $\mathbb{Z}^3$-équivariant.

Un solide covalent muni d'une énergie de liaison modélise un milieu périodique formé d'atomes en interaction bornée. Selon ce modèle, la limite donnée par le théorème de convergence des domaines extrémaux est la forme d'équilibre adoptée par un cristal dans ce milieu.

La conjecture a été prouvée par Pansu dans le cas particulier des solides covalents.

Définition

Un solide covalent est un graphe symétrique localement fini G muni d'une action co-finie de $\mathbb{Z}^3$ et d'un plongement $\iota : G \to \mathbb{R}^3$ qui est $\mathbb{Z}^3$-équivariant.

Un solide covalent muni d'une énergie de liaison modélise un milieu périodique formé d'atomes en interaction bornée. Selon ce modèle, la limite donnée par le théorème de convergence des domaines extrémaux est la forme d'équilibre adoptée par un cristal dans ce milieu. La technique de démonstration consiste à approximer $G/\mathbb{Z}^3$ par une suite de tores riemanniens, auquels le théorème riemannien s'applique.

Voici quelques objectifs de travail futur concernant ce problème :

1. Généraliser les théorèmes obtenus par Pansu sous l'hypothèse seule que Γ est abélien.

Voici quelques objectifs de travail futur concernant ce problème :

1. Généraliser les théorèmes obtenus par Pansu sous l'hypothèse seule que Γ est abélien.
2. Dégager une structure rassemblant notamment variétés riemanniennes et graphes munis d'une action d'un même Γ, permettant une preuve unifiée.

Voici quelques objectifs de travail futur concernant ce problème :

1. Généraliser les théorèmes obtenus par Pansu sous l'hypothèse seule que Γ est abélien.
2. Dégager une structure rassemblant notamment variétés riemanniennes et graphes munis d'une action d'un même Γ, permettant une preuve unifiée.
3. Une immersion linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans un tore riemannien porte une métrique quasi-périodique. Que peut-on-dire de son isopérimétrie ?

Merci pour votre attention.