UNIVERSITÉ PARIS SUD

IUT D'ORSAY

Département Mesures Physiques

Mathématiques
Analyse et Algèbre linéaire

cours

Maximilien Lagron
Sabine Marduel
Stéphane Béatrix
Gabriel Pallier

DUT Mesures Physiques- Semestre 2

2018 - 2019

Table des matières

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction aux espaces vectoriels

I. Définition

Définition - Structure d'espace vectoriel

Soit E un ensemble muni d'une loi interne notée $+ : E \times E \to E$ et d'une loi externe notée $\times : \mathbb{R} \times E \to E$.
On dit que $(E, +, \times)$ est un **$\mathbb{R}$-espace vectoriel** (en abrégé $\mathbb{R}$-e.v. ou e.v.) s'il vérifie les propriétés suivantes :

- $\forall (u, v, w) \in E^3, u + (v + w) = (u + v) + w$ (**associativité**)
- Il existe $0_E \in E$ tel que $\forall x \in E, 0_E + u = u + 0_E = u$ (on dit que E admet un **élément neutre** pour la loi $+$)
- Tout élément de E admet un **opposé** :
  C'est-à-dire que pour tout $u \in E$, il existe un élément de E, noté $-u$, tel que $u + (-u) = 0_E$
- $\forall (u, v) \in E^2, u + v = v + u$ (**commutativité**)
- $\forall (u, v) \in E^2$ et $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a :
  — $(a + b) \times u = (a \times u) + (b \times v)$
  — $a \times (u + v) = (a \times u) + (a \times v)$
  — $a \times (b \times u) = (ab) \times u$
  — $1 \times u = u$

On appelle alors les éléments de E des **vecteurs** et les nombres réels opérandes de la loi externe (a et b ci-dessus) sont appelés des **scalaires**.

Remarques

— La loi $+$ est appelée **loi interne** car elle s'applique à deux éléments de E et a pour résultat un élément de E : si $(u, v) \in E^2$, alors $u + v \in E$.

— La loi $\times$ est appelée **loi externe** car elle fait opérer un élément de $\mathbb{R}$ sur un élément de E et a pour résultat un élément de E : si $a \in \mathbb{R}$ et si $u \in E$, alors $a \times u \in E$. Très vite on ommetra d'écrire la loi externe : si $a \in \mathbb{R}$ et $x \in E$, ax désignera $a \times u$. Attention toutefois à ne pas oublier que a est un scalaire tandis que u est un vecteur.

Exemples fondamentaux

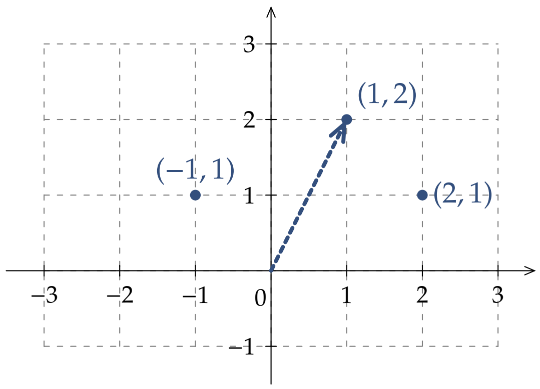
1. $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel.
2. $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
3. L'ensembe $\mathbb{R}^2$ des couples de nombres réels :

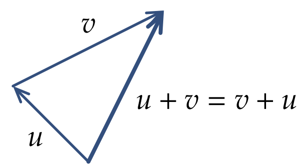
$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, avec les lois définies par

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$
$$a(x, y) = (ax, ay).$$

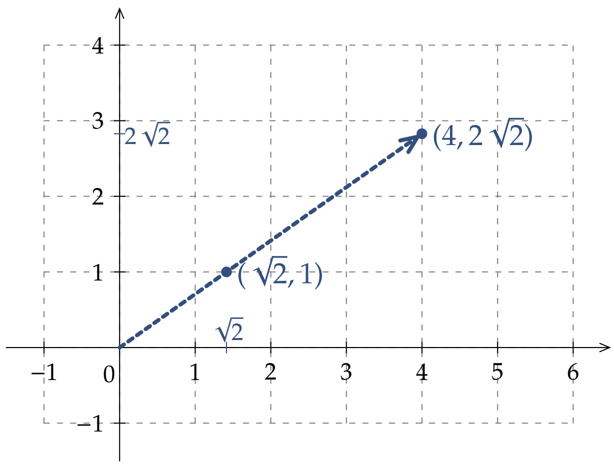
Au moyen d'un repère, $\mathbb{R}^2$ peut s'identifier à l'ensemble des points du plan, ou encore à l'ensemble de ses vecteurs, dans le sens du terme « vecteur » vu au lycée. L'addition et la multiplication admettent des interprétations géométriques.

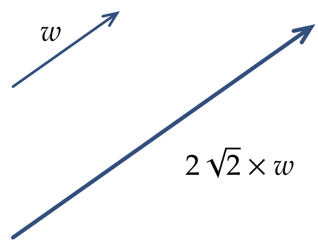




(-1,1) + (2,1) = (2,1) + (-1,1) = (1,2)

addition des vecteurs (notés sans flèche)





$2\sqrt{2}(\sqrt{2}, 1) = (4, 2\sqrt{2})$

multiplication d'un vecteur par un réel

4. De même, l'ensemble $\mathbb{R}^3$ des triplets de nombres réels,
$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\},$$
s'identifie aux vecteurs de l'espace « usuel ». Cependant, ainsi qu'en témoigneront les exemples suivants, la notion d'espace vectoriel est bien plus générale ; les vecteurs du plan ou de l'espace n'en sont qu'une illustration qu'il est utile de garder en tête.
5. Plus généralement $\mathbb{R}^n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$ qui est l'ensemble des n-uplets de nombres réels est un espace vectoriel : $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n), x_1 \in \mathbb{R}, \cdots, x_n \in \mathbb{R}\}$.
6. L'ensemble des polynômes à coefficients réels, noté $\mathbb{R}[X]$, est un espace vectoriel. Par exemple, le polynôme $X + 1$ est un vecteur dans $\mathbb{R}[X]$.
7. L'ensemble des polynômes **de degré au plus** n, noté $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace vectoriel. Par exemple, le polynôme $X^2 - X + 1$ est un vecteur de $\mathbb{R}_4[X]$.

Définition - Combinaison linéaire

Soient n un entier naturel, E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $x_1, x_2, \cdots, x_n$ des vecteurs de E.

On appelle **combinaison linéaire** de $x_1, x_2, \cdots, x_n$ tout vecteur x de E qui peut s'écrire sous la forme :

$$x = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n, \text{ où } (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Exemples et non-exemples

1. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, le vecteur $(0, \sqrt{3})$ est combinaison linéaire des vecteurs $(1, 0)$ et $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. En effet,
$$(0, \sqrt{3}) = 1 \times (0, 1) + 2 \times \left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$
2. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$, le **vecteur** X^3 n'est pas combinaison linéaire des vecteurs X et X^2.
3. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, le vecteur $(0, 1, 0)$ n'est pas combinaison linéaire des vecteurs $(1, 0, 0)$ et $(0, 0, 1)$.

Définition - Sous-espace vectoriel

Soient $(E, +, \times)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et F un ensemble **non vide inclus dans** E ($F \subseteq E$). On dit qu'un tel ensemble F est un **sous-espace vectoriel** de E si F est stable par combinaisons linéaires, c'est-à-dire que : si $(x_1, x_2) \in F^2$ alors : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, ax_1 + bx_2 \in F$.

Propriété

Pour montrer qu'un ensemble F est un s.e.v. de E, il **suffit** de montrer que :

1. F est non vide (en pratique, on vérifie que 0_E est dans F).
2. $F \subseteq E$.
3. $\forall (x, y) \in F$, $x + y \in F$.
4. $\forall a \in \mathbb{R}, \forall x \in F$, $ax \in F$.

Exemples

— L'ensemble des **fonctions polynômes à coefficients réels**, noté $\mathbb{R}[X]$, est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Vérifions-le :
   1. $\mathbb{R}[X]$ contient la fonction nulle $0_{F(\mathbb{R},\mathbb{R})}$, il est donc non vide.
   2. Toute fonction polynôme est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $\mathbb{R}[X] \subset F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
   3. Si P et Q sont deux fonctions polynôme sur $\mathbb{R}$, alors $P + Q$ est une fonction polynôme sur $\mathbb{R}$.
   4. Si P est une fonction polynôme sur $\mathbb{R}$ et si a est un un nombre réel, alors aP est une fonction polynôme sur $\mathbb{R}$.

— Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, l'ensemble F des vecteurs de la forme $(2a, a)$ pour $a \in \mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel. Géométriquement il s'agit d'une droite passant par l'origine.

— Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, l'ensemble $F = \{(x, y, 0) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel. Géométriquement, il s'agit d'un plan passant par l'origine.

— Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, l'ensemble $F = \{(x, y, x + y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel. Géométriquement, il s'agit d'un plan passant par l'origine.

II. Famille libre, famille génératrice, base d'un espace vectoriel

1. Famille libre d'un espace vectoriel

Définition - Famille libre, liée

Soient E un espace vectoriel, n un entier naturel, et $\mathcal{F} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E.

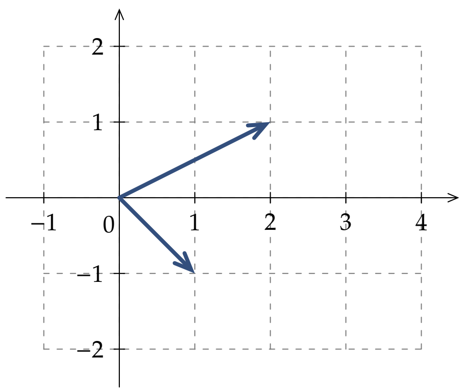
On dit que la **famille $\mathcal{F}$ est libre** si $\forall\,(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = 0_E) \Rightarrow (a_1 = 0, a_2 = 0, \cdots, a_n = 0)$$

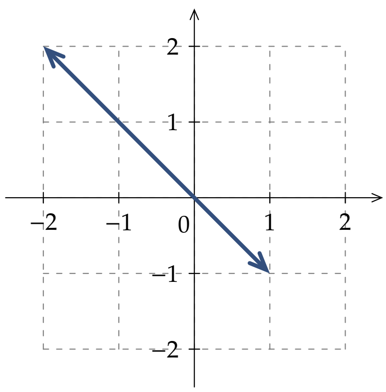
Lorsqu'une famille n'est **pas libre**, on dit qu'elle est **liée**.

Remarque

Une famille de **deux** vecteurs est **libre** si et seulement si ces deux vecteurs **ne sont pas colinéaires**.



$(1, -1)$ et $(2, 1)$ non colinéaires,
$((1, -1), (2, 1))$ libre



$(1, -1)$ et $(-2, 2)$ colinéaires,
$((1, -1), (-2, 2))$ liéé : $0_{\mathbb{R}^2} = 1(-2, 2) + 2(1, -1)$

2. Famille génératrice d'un espace vectoriel

Définition - Famille génératrice

Soient E un espace vectoriel, n un entier naturel, et $\mathcal{F} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E.

On dit que la famille $\mathcal{F}$ est **génératrice** si **tout vecteur** de E peut s'écrire comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{F}$.

C'est-à-dire que : pour tout x dans E, il existe $a_1, \ldots a_n$ des nombres réels tels que :

$$x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n.$$

3. Base d'un espace vectoriel

Définition - Base

Soient E un espace vectoriel et $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E.

On dit que $\mathcal{F}$ est **une base** de E si $\mathcal{F}$ est **libre *et* génératrice**.

Dans certains cas, une base est privilégiée par la construction même de l'espace vectoriel. On l'appelle **base canonique**.

Exemples

- La base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est : $\mathcal{B} = ((1,0),(0,1))$,
- La base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est : $\mathcal{B} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$,
- La base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ est : $\mathcal{B} = \left(1, X, X^2\right)$.

Propriétés fondamentales (admises)

Soit n un entier naturel et E un espace vectoriel. Si E possède une base qui est composée de n **vecteurs exactement** alors **toutes les bases de** E **comptent** n **vecteurs.** On dit alors que E est de **dimension** n, ce que l'on note :

$$\dim(E) = n.$$

De plus, dans un espace vectoriel de dimension n :

- ➢ Toute famille comptant **strictement plus de** n **vecteurs** est **liée** ;
- ➢ Toute famille comptant **strictement moins de** n **vecteurs** est **non génératrice** ;
- ➢ Toute famille **libre** de n **vecteurs exactement** est une **base** ;
- ➢ Toute famille **génératrice** de n **vecteurs exactement** est une **base**.

Exemples

- $\dim \mathbb{R}^2 = 2$,
- $\dim \mathbb{R}^3 = 3$,
- $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3$.

Remarque

Nous travaillerons en général avec des espaces vectoriels de dimension finie, c'est-à-dire admettant une base de n vecteurs pour un certain $n \in \mathbb{N}$.
Cependant il existe des espaces vectoriels qui ne sont pas de dimension finie : par exemple $\mathbb{R}[X]$, qui contient des familles libres arbitrairement grandes, telle $\left(1, X, X^2, X^3, \cdots X^{n-1}\right)$ pour tout n.

Définition - Composantes ou coordonnées d'un vecteur

Soient E un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ une base de E.
Etant donné que $\mathcal{B}$ est génératrice, pour tout vecteur x de E, il existe $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$.
On dit que $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ sont les **composantes ou coordonnées du vecteur x dans la base** $\mathcal{B}$ que l'on

note :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Propriété

La décomposition d'un vecteur dans une base est **unique**.

Démonstration

Soit $\mathcal{B} = (x_1, \dots x_n)$ une base de l'espace vectoriel E, et supposons que le vecteur $x \in E$ admet deux décompositions dans la base $\mathcal{B}$. On peut donc écrire

$$\begin{aligned} x &= a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n \\ &= a'_1 x_1 + a'_2 x_2 + \cdots + a'_n x_n, \end{aligned}$$

où les a_i et a'_i sont des nombres réels. Mais alors

$$\begin{aligned} 0 &= x - x \\ &= a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n - a'_1 x_1 - \cdots - a'_n x_n \\ &= (a_1 - a'_1) x_1 + (a_2 - a'_2) x_2 + \cdots + (a_n - a'_n) x_n. \end{aligned}$$

Puisque $\mathcal{B}$ est une base, c'est une famille libre libre. Donc $a_1 - a'_1 = \cdots = a_2 - a'_2 = 0$. Autrement dit $a_1 = a'_1$, $a_2 = a'_2$... $a_n = a'_n$: les deux décompositions de x dans la base $\mathcal{B}$ sont identiques.

Remarque

Par convention, lorsque l'on ne précise pas dans quelle base on travaille, c'est que l'on utilise la **base canonique**.

2. Applications linéaires et matrices

I. Application linéaire

Définition - Application linéaire

Soient E et F deux espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application.

On dit que f est linéaire si elle vérifie :

- $\forall x, y \in E, f(x + y) = f(x) + f(y)$
- $\forall x \in E, \forall a \in \mathbb{R}, f(ax) = af(x)$.

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Remarques

- Si $f : E \to F$ est linéaire, alors $f(0_E) = 0_F$.
- On peut montrer que les seules applications linéaires $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont les applications définies par $f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$.
- Si E, F et G sont trois espaces vectoriels et si $f : F \to G$ et $g : E \to F$ sont deux applications linéaires, alors la composée $f \circ g : E \to G$ est une application linéaire.

Remarque

Pour définir de manière unique une application linéaire, il suffit de définir l'image de chacun des vecteurs d'*une* base de E.

Définitions - Noyau, Image

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On appelle **noyau** de f, noté $\text{Ker}(f)$, l'ensemble des vecteurs de E dont l'image par f est 0_F.
Soit :

$$\text{Ker}(f) = \{u \in E \text{ tel que } f(u) = 0_F\}.$$

On appelle **image de** E **par** f, notée $\text{Im}(f)$, l'ensemble des images des vecteurs de E par f. Soit :

$$\text{Im}(f) = \{f(u) \text{ pour u } \in E\}.$$

Propriétés

1. $\text{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E ;
2. $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Démonstration

1. (a) $\mathrm{Ker}(f)$ contient 0_E : f est linéaire, donc d'après une remarque précédente, $f(0_E) = 0_F$.
   (b) Soient u et v deux éléments de $\mathrm{Ker}(f)$, a et b deux nombres réels. Par définition de $\mathrm{Ker}(f)$, $f(u) = f(v) = 0_F$. Puisque f est linéaire,
   $$f(au + bv) = af(u) + bf(v) = a0_F + b0_F = 0_F.$$
   Donc $au + bv \in \mathrm{Ker}(f)$.

   Nous avons montré que $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. (a) $\mathrm{Im}(f)$ contient 0_F : f est linéaire, donc d'après une remarque précédente, $f(0_E) = 0_F$.
   (b) Soient x et y deux éléments de $\mathrm{Im}(f)$, a et b deux nombres réels. Par définition de $\mathrm{Im}(f)$, il existe u et v dans E tels que $f(u) = x$ et $f(v) = y$. Puisque f est linéaire,
   $$ax + by = af(u) + bf(v) = f(au + bv).$$
   Donc $ax + by \in \mathrm{Im}(f)$.

   Nous avons montré que $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Théorème du noyau-image (admis)

Soient E et F deux espaces vectoriels de **dimensions finies** et $f : E \to F$ une application linéaire. On a alors :
$$\dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(E).$$

II. Matrice d'une application linéaire

A partir de maintenant, tous les espaces vectoriels sont supposés de dimension finie.

Définition

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f : E \to F$ une application linéaire.
On considère $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, \cdots, e_m)$ une base de E et $\mathcal{B}_2 = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ une base de F.
On appelle **matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$** le tableau comptant m colonnes et n lignes dont la i-ème colonne est formée par les coordonnées de $f(e_i)$ dans la base $\mathcal{B}_2$.
On la note :
$$M_{f,\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$$
L'ensemble des **matrices à n lignes et m colonnes** et à coefficients réels se note :
$$\mathcal{M}_{\mathbf{n,m}}(\mathbb{R})$$

III. Opérations sur les matrices

Soient E et F deux espaces vectoriels de bases respectives $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.

1. Somme de deux matrices

Définition

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.
Les coefficients de la matrice $M = A+B$ sont obtenus en « sommant les coefficients des deux matrices ».

En ce qui concerne les applications linéaires

Soient $f : E \to F$ et $g : E \to F$ deux applications linéaires de matrices respectives A et B dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.

La matrice $A + B$ est la matrice de l'application linéaire $f + g$ dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$

Avec les notations précédentes,

$$M_{f+g,\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = M_{f,\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} + M_{g,\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}.$$

2. Multiplication d'une matrice par un scalaire

Définition

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Les coefficients de la matrice $M = \lambda A$ sont obtenus en multipliant tous les coefficients de A par λ.

Exemples

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad 3A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -9 \end{pmatrix}$$

En ce qui concerne les applications linéaires

Soit $f : E \to F$ une application linéaire de matrice A dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.

La matrice λA est la matrice de l'application linéaire λf dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$

Avec les notations précédentes,

$$M_{\lambda f,\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = \lambda M_{f,\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}.$$

3. Produit de deux matrices

a. Produit d'une matrice par un vecteur colonne

Définition

On calcule le produit d'une matrice par un vecteur colonne en « multipliant les lignes de A par le vecteur colonne ».

En ce qui concerne les applications linéaires

Soient $f : E \to F$ une application linéaire de matrice A dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ et $x \in E$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}_1$.

Les coordonnées de $f(x)$ dans la base $\mathcal{B}_2$ sont données par $A \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

b. Produit de deux matrices

Définition

Les coefficients de la matrice $A \times B$ (ou AB) s'obtiennent en « multipliant les lignes de A par les colonnes de B »

Remarques

— Le produit AB de deux matrices A et B n'est possible que si **le nombre de colonnes** de A est **égal au nombre de lignes de** B

— Si $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$, alors $AB \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

— Le produit de deux matrices n'est pas une opération commutative : en général, $AB \neq BA$.

En ce qui concerne les applications linéaires

Soient E,F et G trois espaces vectoriels de bases respectives $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$.
Soient $\mathbf{g} : E \to F$ et $\mathbf{f} : F \to G$ deux applications linéaires de matrices respectives **B** (pour **g**) et **A** (pour **f**) dans les bases $\mathcal{B}_1$,$\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$.

La matrice $A \times B$ est la matrice de l'application linéaire $f \circ g$ dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_3$.

Avec les notations précédentes,

$$M_{f\circ g,\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_3} = M_{f,\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3} \times M_{g,\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}.$$

IV. Inverse d'une matrice

Définition - Matrice carrée

On appelle matrice carrée toute matrice ayant le même nombre de lignes et de colonnes.
On note indifféremment l'ensemble des matrices carrées $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Définition - Matrice identité

On appelle **matrice identité de dimension** n, la **matrice carrée**, notée I_n, ayant des 1 sur la diagonale et des zéros partout ailleurs :

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarques

— Cette matrice est appelée matrice identité car on a : $I_n u = u$ pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^n$

— Elle joue le même rôle pour les matrices que le 1 réel dans la multiplication usuelle ; I_n est l'**élément neutre** pour la multiplication de matrices carrées de dimension n. Explicitement :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AI_n = I_n A = A.$$

— Si on considère l'application linéaire identité

$$\begin{array}{cccc} f & : & E & \rightarrow & E \\ & & x & \mapsto & x \end{array}$$

et $\mathcal{B}$ une base de E, alors on a : $M_{f,\mathcal{B}} = I_n$

Définition - Matrice inversible, matrice inverse

Soit A une **matrice carrée**.
On dit que A **est inversible** s'il existe une matrice, noté A^{-1}, telle que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.
A^{-1} est alors appelée la **matrice inverse de** A.

Remarque

Attention, on ne peut pas « diviser » une matrice B par une matrice A : on multiplie par B par A^{-1}, **à condition** que A soit **inversible**.

En ce qui concerne les applications linéaires

Soit A la matrice d'une application linéaire f, dire que A **est inversible équivaut à dire** que f est **bijective** et dans ce cas, A^{-1} est la matrice de f^{-1}

V. Déterminant d'une matrice

Nous ne donnerons pas ici une définition rigoureuse du déterminant d'une matrice carrée.
Nous allons voir comment le calculer en dimension 2, en dimension 3 et généraliser ce calcul. Nous terminerons en donnant quelques propriétés du déterminant.

Propriété

Le déterminant est une application, notée det, telle que det : $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$.

1. En dimension deux

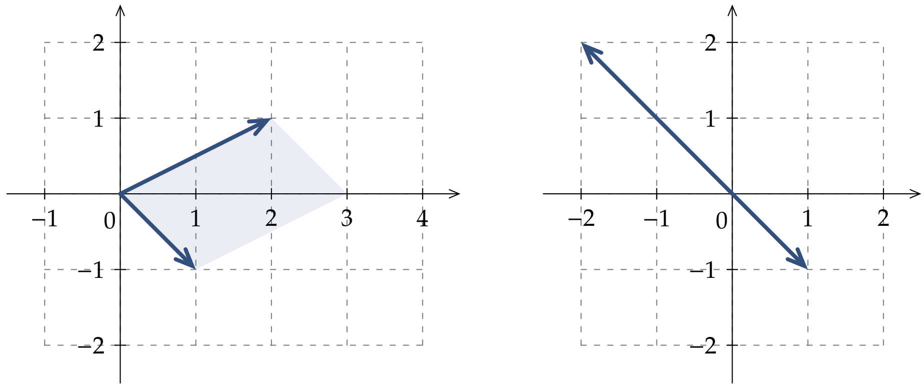
Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice carrée de dimension deux : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
On appelle **déterminant de** A **le nombre réel** défini par :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

Interprétation du déterminant en dimension deux

Le calcul du déterminant en dimension deux correspond (au signe près) à l'aire du parallélogramme engendré par les vecteurs colonne. En particulier, $\det(A) = 0$ **si et seulement si** les deux vecteurs colonne formant la matrice A sont **colinéaires**.



$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

FIGURE 2..1 – Interprétation géométrique du déterminant en dimension 2.

2. En dimension trois

Définition

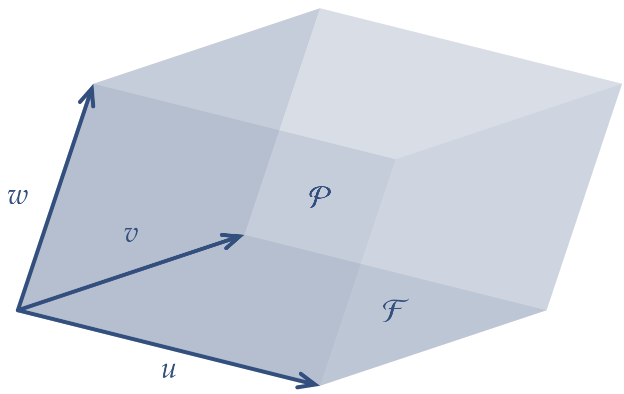
Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice carrée de dimension trois : $A = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$.

On appelle déterminant de A le nombre réel défini par :

$$\det(A) = a\begin{vmatrix} e & h \\ f & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & g \\ f & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & g \\ e & h \end{vmatrix} = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$

Interprétation du déterminant en dimension trois

Le calcul du déterminant en dimension trois correspond au calcul d'un produit mixte : si on considère les vecteurs $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} e \\ d \\ f \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix}$ alors $\det(A) = (u \wedge v) \cdot w$ (où le point désigne le produit scalaire et $\wedge$ le produit vectoriel).
Ainsi $|\det(A)|$ correspond au volume d'un parallélépipède engendré par u, v et w.



$$\text{Volume}(\mathcal{P}) = |\det(A)| = (u \wedge v) \cdot w.$$

$$\text{Aire}(\mathcal{F}) = \|(u \wedge v)\|.$$

3. En dimension quelconque

Développement du déterminant par rapport à la première colonne

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, que l'on écrit sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de la matrice A est un nombre réel noté

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

qui se développe en :

$$a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} - a_{2,1} \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{n,1} \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

4. Propriétés du déterminant

Propriétés

- Echanger deux colonnes ou deux lignes change le signe du déterminant
- Multiplier une colonne ou une ligne par un nombre réel a multiplie le déterminant par a
- Le déterminant ne change pas lorsqu'à une ligne on ajoute ou on retranche une combinaison linéaire des autres lignes (c'est aussi vrai pour les colonnes)
- Le déterminant d'une matrice identité est égal à un :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \det I_n = 1$$

- Si A et B sont deux matrices carrées alors $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$
- En particulier si A est inversible alors $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

Remarque

On peut en fait développer le déterminant par rapport à n'importe quelle ligne ou colonne. On le fait sur l'exemple précédent en introduisant la « matrice signes » :

$$\begin{vmatrix} + & - & \cdots & + \\ - & + & \cdots & - \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ + & - & \cdots & - \end{vmatrix}$$

Propriété fondamentale

Une matrice carrée A est **inversible si et seulement si** $\det(A) \neq 0$

Propriété

Une matrice carrée A est inversible si et seulement si la famille constituée de ses **vecteurs colonnes (ou lignes)** est **libre**.

3. Développements Limités

Dans tout ce chapitre, I désignera un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

I. La notion de développement limité

Définition

Soient f une fonction définie sur I et $x_0 \in I$. Soit n un entier naturel. On dit que f **admet un développement limité à l'ordre** n **en** x_0 s'il existe un polynôme P_n **de degré au plus** n et une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in I, f(x) = P_n(x) + (x - x_0)^n \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

Le polynôme P_n est appelé la **partie régulière** du développement limité et $x^n \varepsilon(x)$ le reste.

Cas particulier du développement limité en 0

f **admet un développement limité à l'ordre** n **en** 0 si on peut écrire :

$$\forall x \in I, f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$$

avec

$$\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Conséquence

Si f admet un développement limité en x_0 **alors** f est continue en x_0.

Exemple fondamental

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^4 + 3x^2 + x + 1$.
Le DL_2 en 0 de f est $f(x) = 1 + x + 3x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.
Le DL_5 en 0 de f est $f(x) = 1 + x + 3x^2 + 2x^4 + x^5\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Ainsi pour obtenir le développement limité d'un **polynôme** en 0, il suffit de le **tronquer** au degré souhaité.

II. Formule de Taylor-Young

Définition

On dit qu'une fonction f **est de classe** C^n **sur** I si f est n fois dérivable sur I et si, pour tout k entier naturel, $k \in [0, n]$, $f^{(k)}$ est continue sur I.

Théorème : formule de Taylor-Young

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction de classe C^n au voisinage de x_0, alors il existe une fonction ε, définie au voisinage de x_0, telle que :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x)$$

avec

$$\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

Conséquences immédiates

— Si f admet un DL_1 en x_0, alors f est dérivable en x_0

— Si f est de classe C^n au voisinage de x_0 alors f admet un DL_n en x_0

La formule de Taylor-Young en 0 s'écrit :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n \varepsilon(x)$$

avec

$$\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Remarque et avertissement

Sauf si cela est explicitement demandé, il est **rare** d'utiliser la formule de Taylor-Young dans les cas pratiques. Pour les calculs explicites, on utilise de préférence les développements limités des fonctions usuelles et on les combine, comme cela est décrit dans les paragraphes suivants.

III. Développements limités des fonctions usuelles

Voici une liste de développements limités en 0 à connaître **par coeur** :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^p\frac{x^{2p}}{(2p)!} + x^{(2p+1)}\varepsilon(x)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^p\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+2}\varepsilon(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{(n+1)}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)$$

$$\forall\alpha\in\mathbb{R}, (1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha x}{1!} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$$

Le DL_2 en 0 est : $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$.
Le DL_3 en 0 est : $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x)$.
Le DL_4 en 0 est : $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x)$.

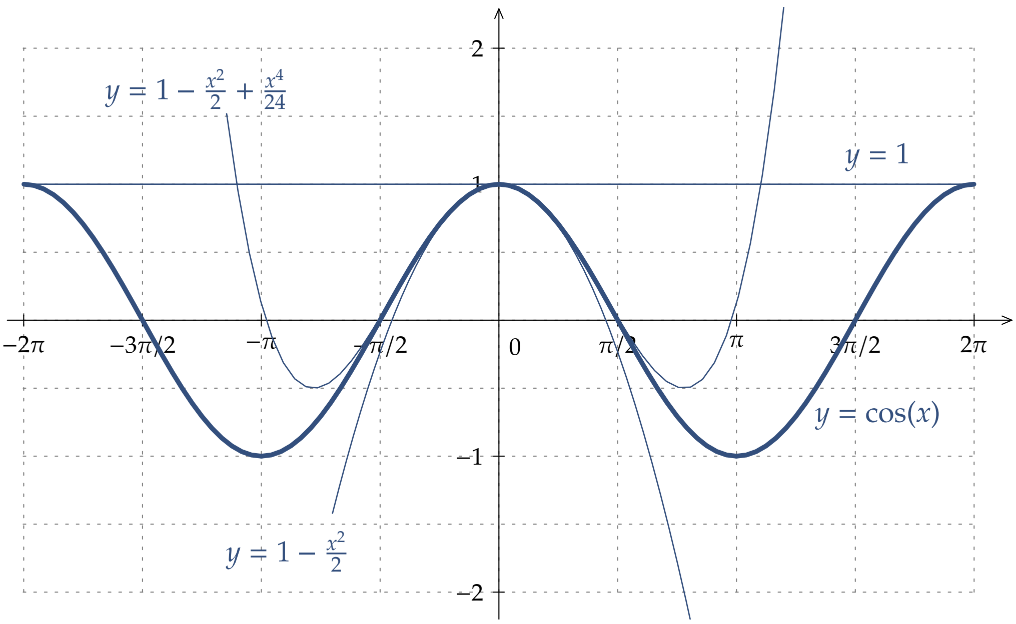


FIGURE 3..1 – Fonction cosinus et parties régulières de ses DLs en 0 à divers ordres.

IV. Propriétés et opérations sur les développements limités

Propriétés

- Si une fonction f admet un DL_n en x_0, alors **il est unique**
- Si f est une **fonction paire**, alors son DL admettra uniquement des termes de degré pair dans sa partie régulière
- Si f est une **fonction impaire**, alors son DL admettra uniquement des termes de degré impair dans sa partie régulière
- **DL d'une somme** : la partie régulière du DL_n d'une somme de fonctions s'obtient en **additionnant les parties régulières** des DL_n de chacune de ces fonctions
- **DL d'un produit** : la partie régulière du DL_n d'un produit de fonctions s'obtient en **multipliant les parties régulières** des DL_n de chacune de ces fonctions et en **tronquant** les termes de degré strictement supérieur à n
- **DL d'un quotient** : si f et g admettent un DL_n en x_0 et si $g(x_0) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ admet un DL_n en x_0 dont la partie régulière est obtenue par **division des parties régulières suivant les puissances croissantes** et en **tronquant** tous les termes de degré strictement supérieur à n
- **DL d'une composée** : si g admet un DL_n en x_0 et si f admet un DL_n en $g(x_0)$ alors $f \circ g$ admet un DL_n en x_0 (nous verrons comment avec des exemples)

4. Courbes et domaines du plan

Dans tout ce chapitre, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.

I. Courbes paramétrées

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.
On a donc pour tout $t \in I$, $f(t) = (x(t), y(t))$.
Les fonctions x et y sont appelées **fonctions composantes** de f.
On dit que f **est dérivable sur** I si ses deux fonctions composantes sont dérivables et pose alors : $f'(t) = (x'(t), y'(t))$
Le couple (I, f) est appelé **courbe paramétrée**.
L'ensemble $f(I)$ est appelé le **support** (ou **support géométrique**) de la courbe paramétrée.

Interprétation

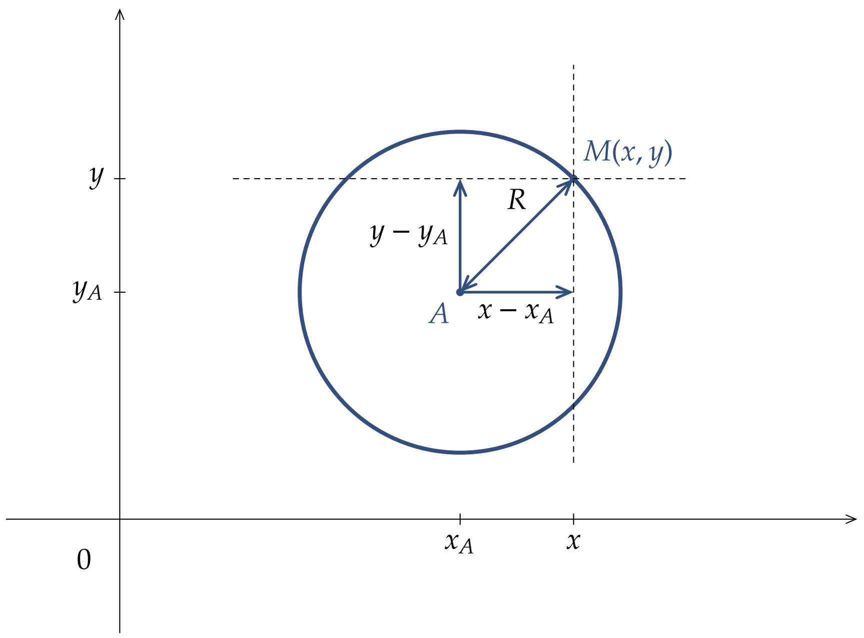
Si f correspond à l'étude du déplacement d'un point sur un intervalle de temps I, alors le support correspond à la **trajectoire** et f' au **vecteur vitesse**. Ceci explique l'usage de la lettre t pour la variable parcourant I.

II. Equation de quelques courbes de référence

1. Equation d'un cercle

Propriété (Pythagore)

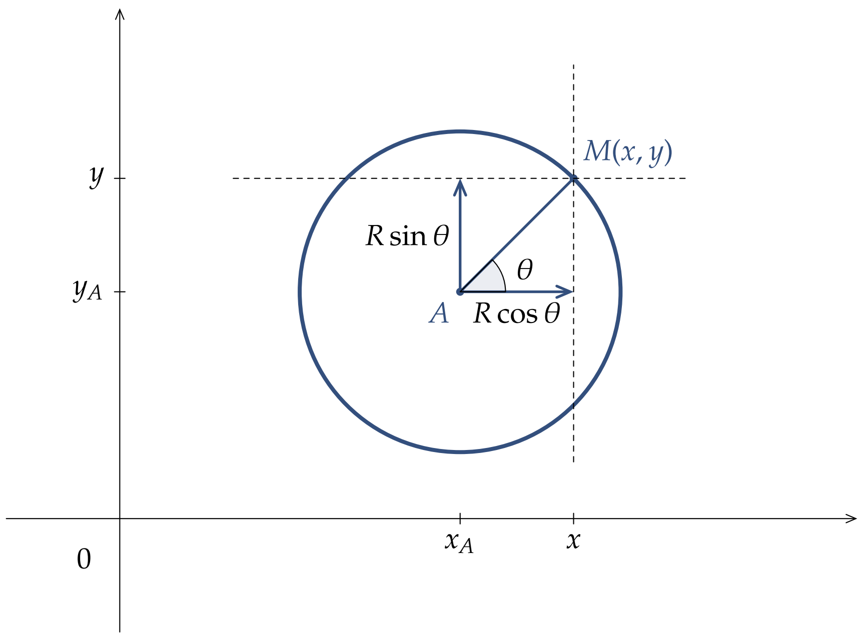
Soit $R > 0$ et A un point du plan de coordonnées $A(x_A, y_A)$. L'ensemble des points du plan d'équation $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2$ est le **cercle de centre** $A(x_A, y_A)$ **et de rayon** R.



Propriété

Le cercle d'équation $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2$ peut être paramétrisé par :

$$\begin{cases} x = x_A + R\cos(\theta) \\ y = y_A + R\sin(\theta) \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi[$$



2. Equation d'une ellipse

Propriété - Définition

Soient a et b deux nombres réels non nuls.

L'ensemble des points du plan d'équation $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ est une **ellipse**. Les axes (Ox) et (Oy) sont des axes de symétrie de cette ellipse.

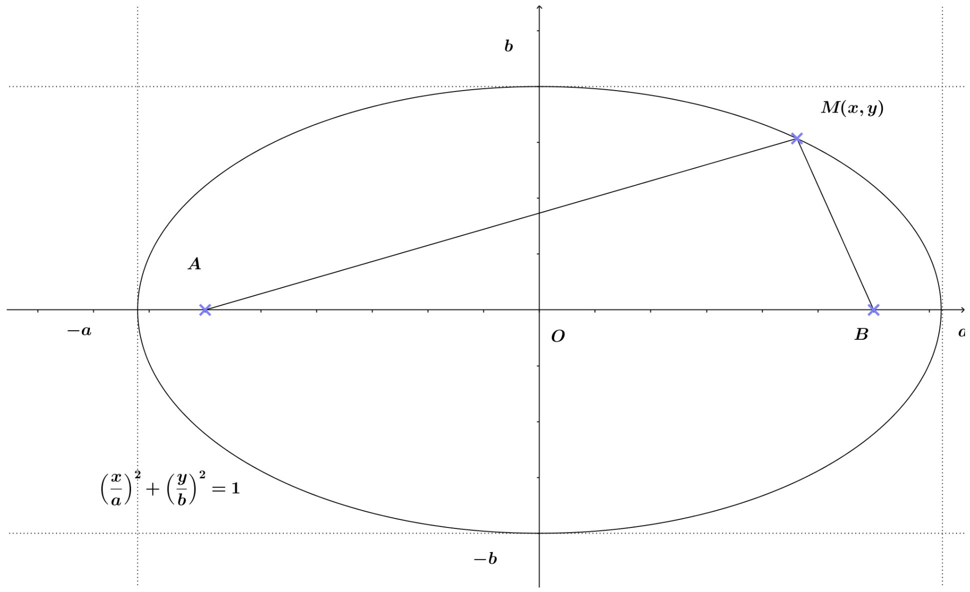


FIGURE 4..1 – Ellipse d'équation $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ et de foyers A et B

Remarque

— En fait, si on fixe deux points A et B du plan et qu'on considère l'ensemble des points M telle que $MA + MB = Cste$ on obtient une **ellipse**.
Les points A et B sont appelés les **foyers** de l'ellipse.

— Un cercle est une ellipse (les foyers sont alors confondus).

Propriété

L'ellipse d'équation réduite $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ peut se paramétriser par :

$$\begin{cases} x = a\cos(\theta) \\ y = b\sin(\theta) \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi[$$

3. Equation d'une hyperbole

Propriété

L'ensemble des points du plan d'équation $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ est une **hyperbole**.
Les axes (Ox) et (Oy) sont des axes de symétrie de cette hyperbole.

Remarque

Comment tracer cette hyperbole ?
Lorsque x et y sont très grands, on a : $\left(\frac{y}{b}\right)^2 \cong \left(\frac{x}{a}\right)^2$ donc $y \cong \frac{b}{a}x$. On en déduit donc que les deux asymptotes à cette hyperbole ont pour équations $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$.

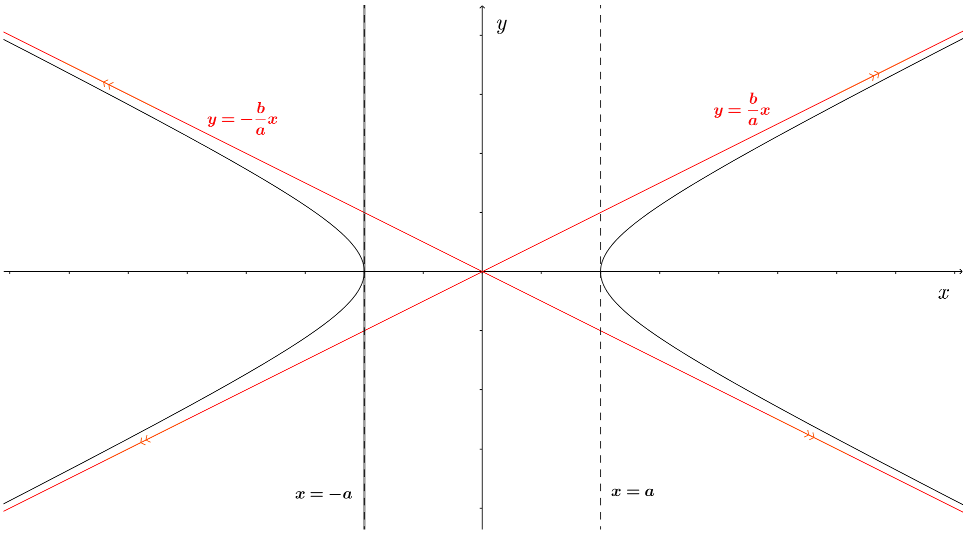


FIGURE 4..2 – Hyperbole et asymptotes

Remarque

Toutes les courbes dont nous venons de parler dans la partie II s'appellent des **coniques** car elles s'obtiennent par section d'un cône par un plan.

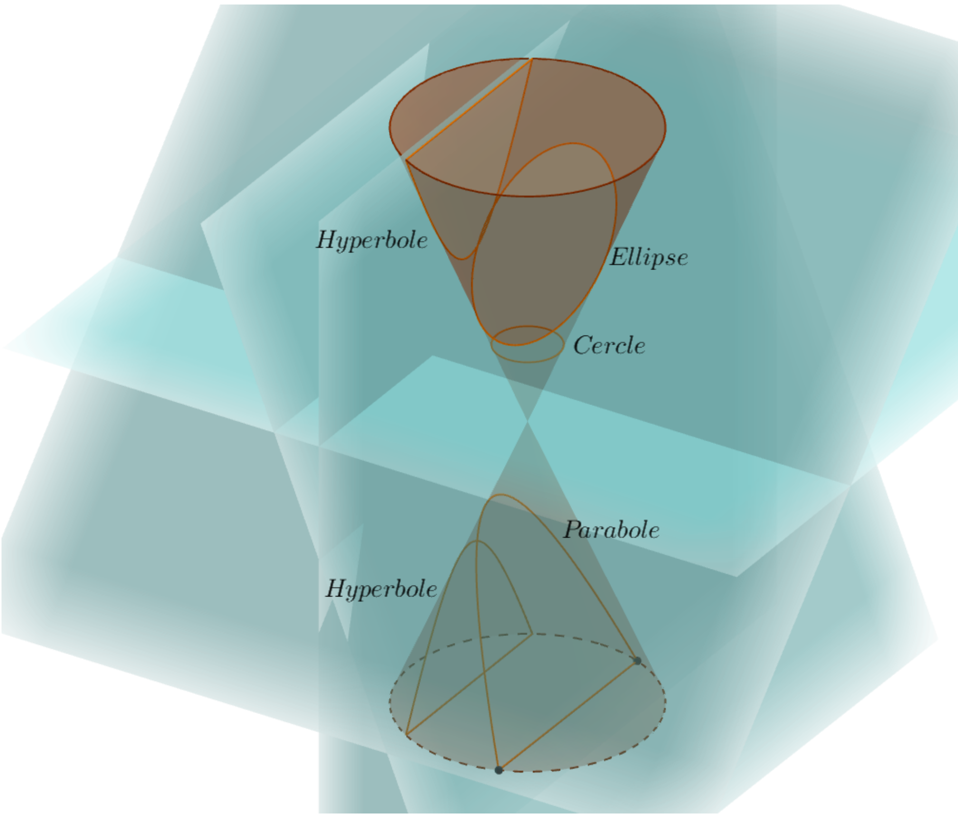


FIGURE 4..3 – Coniques : sections d'un cône par des plans

III. Domaines du plan

La représentation graphique dans $\mathbb{R}^2$ d'une équation du type $f(x, y) = 0$ est, sauf cas particulier, une courbe de $\mathbb{R}^2$.
Une inéquation du type $f(x, y) \leq 0$ décrit - sauf cas particulier - un domaine (une surface de $\mathbb{R}^2$) dont la courbe d'équation $f(x, y) = 0$ est la **frontière**.

5. Fonctions de plusieurs variables

Nous traiterons ici essentiellement de fonctions de 2 variables réelles mais beaucoup de résultats peuvent être généralisés aux fonctions de n variables.

I. Gradient

1. Définitions

Définition - Dérivée partielle

Soit f une fonction de deux variables x et y définie sur D (un ouvert de $\mathbb{R}^2$).

On appelle **dérivée partielle de f par rapport à la variable x en** (x_0, y_0) la limite, si elle existe, de $\dfrac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$ lorsque h tend vers 0. On la note :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

On peut de même définir la dérivée partielle de f par rapport à la variable y en (x_0, y_0).
On la note :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Si ces deux dérivées partielles sont continues sur D, on dit que f est de classe C^1 (ou que f est C^1).

Définition - Gradient

Soit f une fonction de classe C^1 sur D.
Pour $(x, y) \in D$, on appelle **gradient de f en** (x, y) le vecteur

$$\overrightarrow{\mathbf{grad}} f(x, y) = \overrightarrow{\nabla} f(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Remarque

On dit que le gradient de f définit un **champ de vecteurs de** D : à tout point de D, on associe un vecteur du plan.

2. Interprétation graphique du gradient

La représentation graphique d'une fonction f de domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est l'ensemble des points de l'espace $(x, y, f(x, y))$, avec $(x, y) \in D$: il s'agit donc d'une **surface** d'équation $z = f(x, y)$.

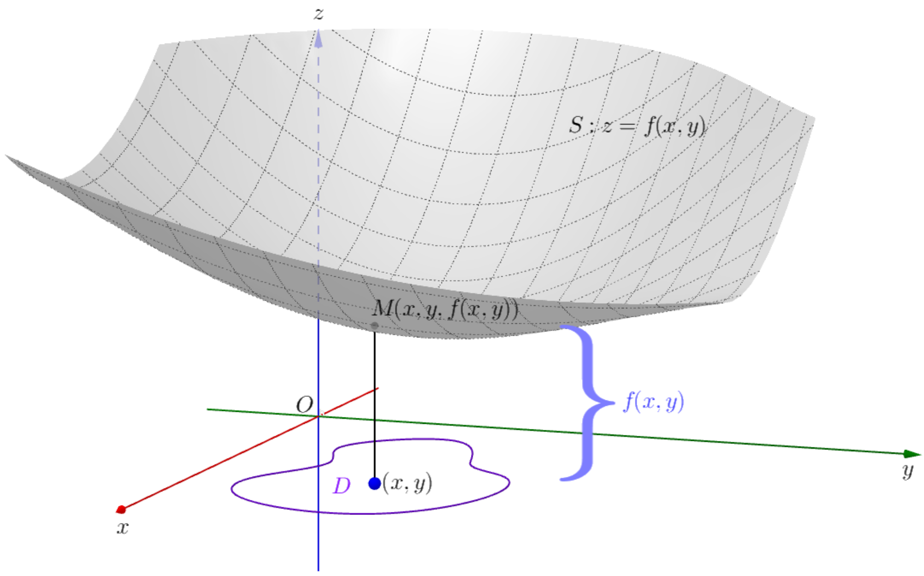


FIGURE 5..1 – Fonction f de deux variables, de domaine D

Définition - Ligne de niveau

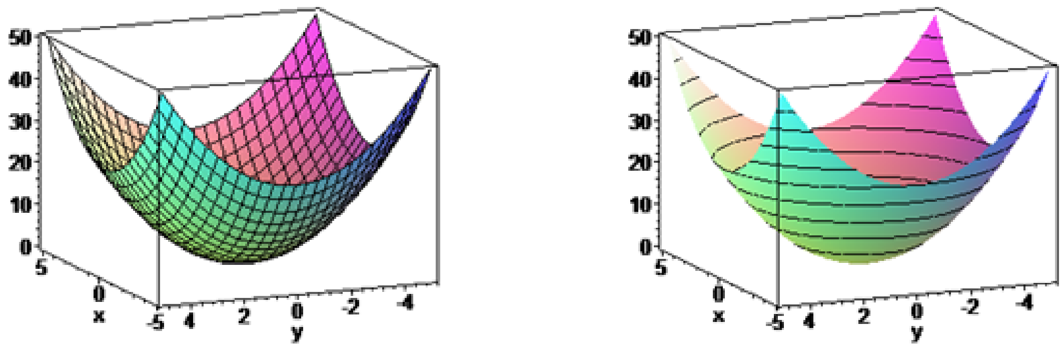
Soit f une fonction définie sur un domaine D de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs réelles.
Pour $k \in \mathbb{R}$, on appelle **ligne de niveau** k de f l'ensemble des points du plan ayant pour équation $f(x, y) = k$.

Propriété (admise)

Le gradient est orthogonal aux lignes de niveau et est dirigé vers les lignes de niveaux croissants.

Exemple

On considère f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 + y^2$.
Voici la représentation graphique de f :



(a) Maillage (b) Lignes de niveaux

FIGURE 5..2 – Représentations de $z = x^2 + y^2$

Et la représentation graphique du gradient de f ainsi que quelques lignes de niveau :

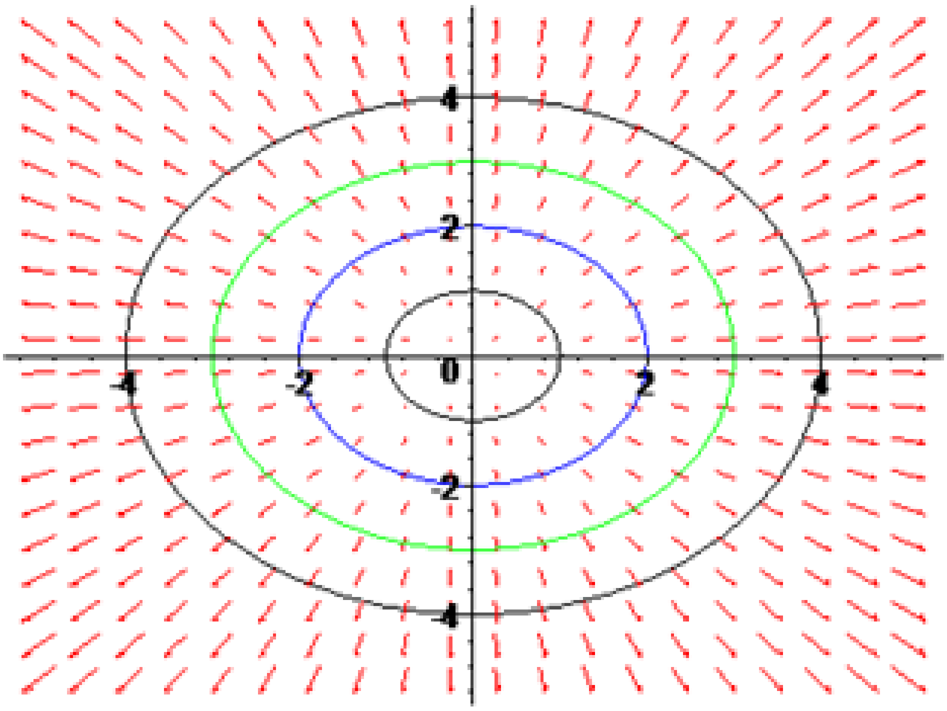


FIGURE 5..3 – Représentation en deux dimensions du gradient et des lignes de niveaux de $f(x, y) = x^2 + y^2$

Remarque

On peut définir de manière analogue le gradient pour les fonctions de 3 variables et à valeurs réelles :

$$\overrightarrow{\mathbf{grad}} f(x,y,z) = \vec{\nabla} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

ou à n variables...

Propriété

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et S sa surface représentative.
Pour $(x_0, y_0) \in D$, le **plan tangent à** S **au point** $M(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ a pour équation :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).(y - y_0) - (z - f(x_0, y_0)) = 0$$

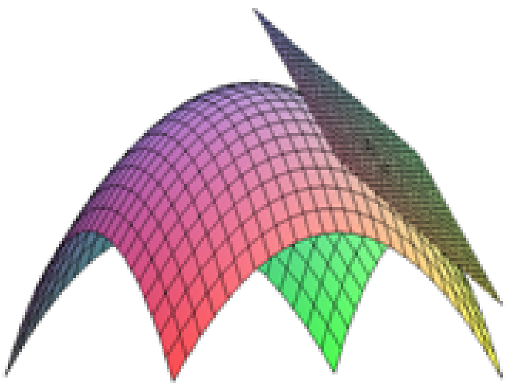


FIGURE 5..4 – Plan tangent à une surface

3. Points critiques et extrema

Définition - point critique

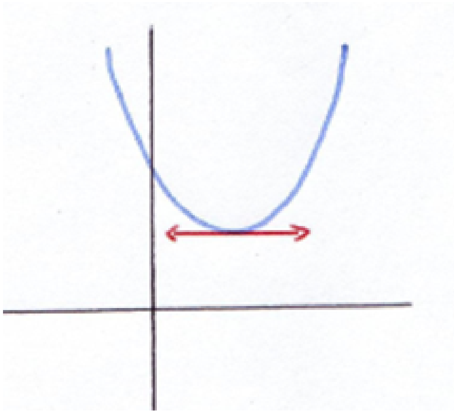
Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1.
On dit que le point $M(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est un **point critique** de f si $\overrightarrow{\mathbf{grad}} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \vec{0}$.

Propriété

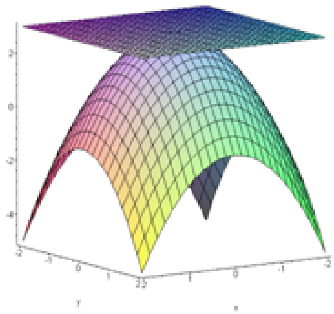
Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1.
Si le point $M(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est un **extremum** de f, alors M est **un point critique** de f.

Remarques

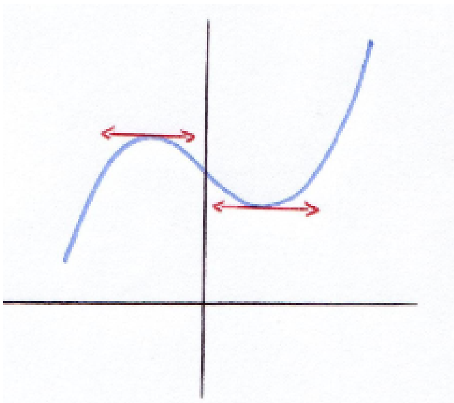
- Les **extrema** sont donc à chercher parmi les points critiques.
- Les points critiques de f correspondent aux points pour lesquels le plan tangent est parallèle au plan $(O; x, y)$:



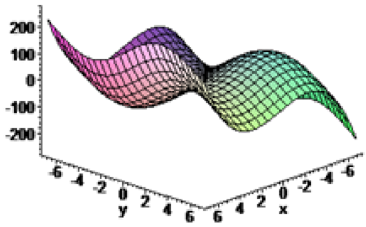
(a) Parabole et point critique



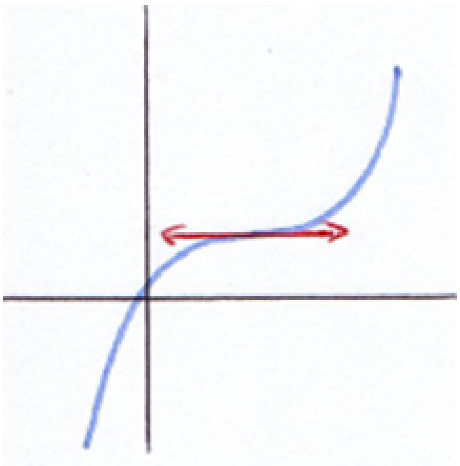
(b) Paraboloïde et point critique



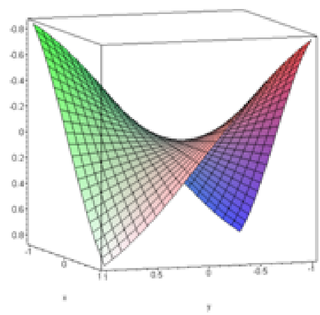
(c) Points critiques d'une fonction polynôme de degré 3



(d) Surface et points critiques



(e) Point d'inflexion (point critique)



(f) Equivalent pour une surface

FIGURE 5..5 – Points critiques et extrema

II. Dérivées partielles d'ordre supérieur

Définition - Dérivées partielles secondes

Une fonction f, définie sur D (un ouvert de $\mathbb{R}^2$) est de classe C^2 si ses quatre dérivées secondes existent et sont continues sur D.
Ces quatre dérivées sont : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right), \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right), \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$.

Théorème : Théorème de Schwarz (admis)

Si f est une fonction de classe C^2 sur D (ouvert de $\mathbb{R}^2$) alors on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Remarque

Le théorème de Schwarz s'écrit, pour les fonctions de 3 variables :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$$

III. Notion de potentiel

Définition - Potentiel

Soit $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$ un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^2$.
On dit que la fonction f **est un potentiel de** $\overrightarrow{u}$ si on a : $\overrightarrow{\mathbf{grad}} f = -\overrightarrow{u}$

Propriété

Soit $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$ un champ de vecteurs défini sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$ tel que P et Q soient C^1 sur D. On suppose que D est convexe.

Le champ de vecteurs $\overrightarrow{u}$ **admet des potentiels** sur D **si et seulement si**

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

IV. Différentielles et formes différentielles

On se limitera souvent ici aux fonctions de deux variables à valeurs réelles, mais ces notions peuvent être généralisées aux fonctions de n variables.

Définition - Différentielle

Soit f une fonction de deux variables x et y admettant des dérivées partielles en (x_0, y_0).

On appelle **différentielle de f en** (x_0, y_0) l'**application linéaire** définie par :

$$\mathrm{d}f_{(x_0,y_0)}(h_1, h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).h_2$$

Ou encore avec des notations « allégées » :

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y$$

Définition - Forme différentielle

On appelle **forme différentielle** toute application ω pouvant se mettre sous la forme : $\omega = P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y$ où P et Q sont deux fonctions $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Définition - Forme différentielle exacte

Soit ω une forme différentielle.

On dit que ω est une **forme différentielle exacte** s'il existe une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\mathrm{d}f = \omega$$

Propriété

Soit $\omega = P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y$ une forme différentielle définie sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$ telle que P et Q soient C^1 sur D. On suppose que D est convexe.

La forme différentielle ω est exacte sur D **si et seulement si**

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Remarque

Cette propriété est analogue à celle liant les champs de vecteurs et les potentiels.

6. Intégration

I. Intégration d'une forme différentielle le long d'une courbe orientée

Dans toute cette partie, le plan est muni d'un repère orthonormé direct.

Définition

On considère une courbe (ou un chemin) orientée C^+ de $\mathbb{R}^2$ parcourue du point A au point B et la forme différentielle $\omega = P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y$ (définie sur C^+).
On suppose que C^+ est paramétrisée par

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

pour t variant de a à b où x et y sont des fonctions C^1 sur $[a, b]$.
On pose alors :

$$\int_{C^+} \omega = \int_{C^+} P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b \big(P(x(t), y(t)).x'(t) + Q(x(t), y(t)).y'(t)\big)\ \mathrm{d}t$$

Remarque

$\int_{C^+} \omega$ **ne dépend pas** de la paramétrisation de C^+ choisie.

Propriété : intégrale d'une forme différentielle exacte

On reprend les mêmes hypothèses que dans la définition précédente.

On suppose de plus que ω est une **forme différentielle exacte**, donc que $\omega = \mathrm{d}f$.
Alors :

$$\int_{C^+} \omega = \int_{C^+} \mathrm{d}f = f(B) - f(A)$$

Remarque

$\int_{C^+} \omega$ lorsque ω est une forme différentielle exacte ne dépend pas du chemin suivi, mais seulement de ses extrémités.

Conséquence

L'intégrale d'une forme différentielle exacte sur une courbe fermée est nulle

Propriétés

Linéarité
$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$,on a :

$$\int_{C^+} (a\omega_1 + b\omega_2) = a\int_{C^+} \omega_1 + b\int_{C^+} \omega_2$$

Relation de Chasles
Si $C^+ = C_1^+ \cup C_2^+$ et si $C_1^+ \cap C_2^+ = \varnothing$, alors :

$$\int_{C^+} \omega = \int_{C_1^+} \omega + \int_{C_2^+} \omega$$

II. Intégrale curviligne

Définition de l'intégrale curviligne

Soit C une courbe du plan.
On veut définir une intégrale analogue à une intégrale simple à ceci près qu'on intègre sur une courbe C au lieu d'intégrer sur un segment $[a,b]$. C'est ce qu'on appelle **une intégrale curviligne**.

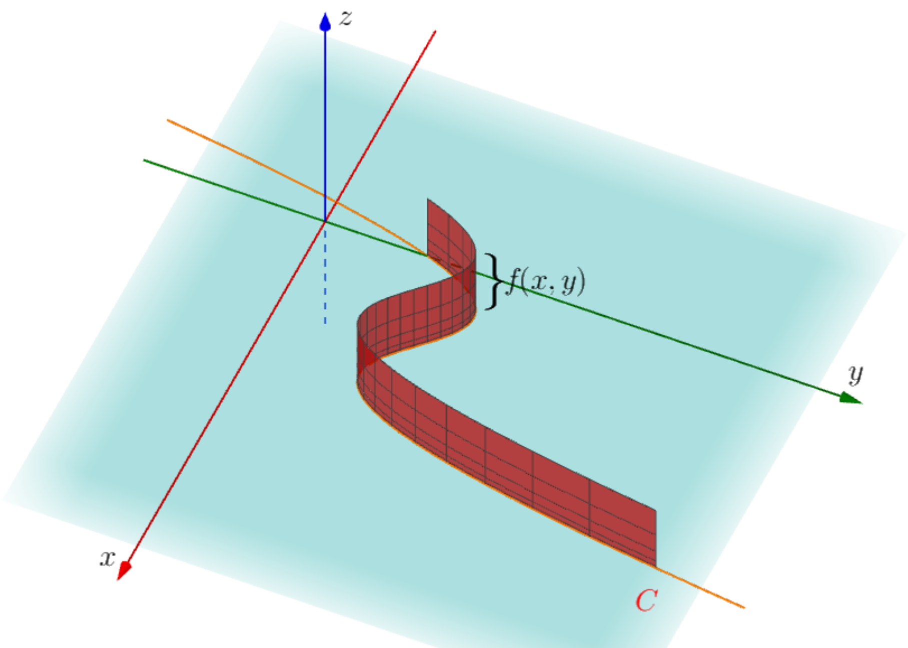


FIGURE 6..1 – Représentation de l'intégrale curviligne sous forme d'aire le long d'une courbe C

Le principe de base reste le même : on subdivise la courbe C en petits arcs, on assimile l'aire du domaine situé entre C et la courbe de la fonction à une somme d'aires de rectangles puis on fait tendre la longueur des petits arcs vers 0...
On note cette aire (dans le cas d'une fonction positive) :

$$\int_C f \, \mathrm{d}s$$

$\mathrm{d}s$ est appelé **l'élément différentiel curviligne**.

Une propriété évidente que doit satisfaire cette intégrale est :

$$\int_C 1 \, \mathrm{d}s = \text{ longueur de } C$$

Définition

Si la courbe C est définie par la représentation paramétrique

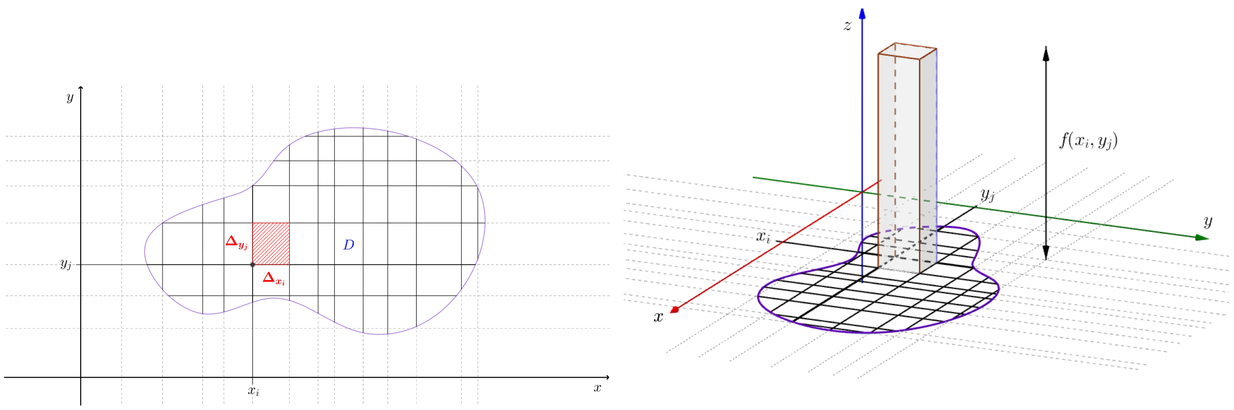
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad a \leq t \leq b$$

où x et y sont des fonctions de classe C^1, on définit l'intégrale curviligne d'une fonction f le long de C par :

$$\int_C f(x, y) \, \mathrm{d}s = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \, \mathrm{d}t$$

On a donc « $\mathrm{d}s = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \, \mathrm{d}t$ ».
Si la courbe C est la représentation graphique d'une fonction g définie sur $[a, b]$, alors on obtient :

$$\int_C f(x, y) \, \mathrm{d}s = \int_a^b f(x, g(x)) \sqrt{1 + (g'(x))^2} \, \mathrm{d}x$$



(a) Pavage d'une surface du plan

(b) Illustration d'une intégrale double et volume d'un parallélépipède

FIGURE 6..2 – Pavages

III. Intégrale double

1. Définition

Soient D un domaine borné du plan, f une fonction définie sur D et S la représentation graphique de f sur D.

On veut définir l'intégrale de f sur D comme étant le volume du domaine de $\mathbb{R}^3$ compris entre S et le plan d'équation $z = 0$, en comptant en positif le volume de ce domaine situé « au-dessus » du plan d'équation $z = 0$ et en négatif le volume de ce domaine situé « en-dessous » du plan d'équation $z = 0$.

On subdivise le domaine en rectangles et on approche le volume du domaine situé entre le plan (Oxy) et S par une somme de volumes de parallélépipèdes rectangles.

Dans le cas d'un domaine **pavable** (que l'on peut approcher par un recouvrement de rectangles), on dira que f **est intégrable sur** D si la somme des volumes de parallélépipèdes rectangles admet une limite finie lorsqu'on fait tendre les deux pas de subdivision vers 0 et on pose :

$$\iint_D f(x,y)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{\Delta x\to 0, \Delta y \to 0} \sum_{i,j} f(x_i, y_j)\Delta x_i \Delta y_j$$

Remarque

Il existe des domaines de $\mathbb{R}^2$ non pavables et des volumes de $\mathbb{R}^3$ qu'on ne peut pas approcher par cette méthode, mais l'étude de ce genre de situation n'est pas l'objet de ce cours.

2. Principales propriétés

Une propriété évidente que satisfait cette intégrale est :

$$\iint_D 1\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \text{aire de } D$$

Propriétés

— **Linéarité de l'intégrale**
Soient f et g deux fonctions intégrables sur D.
Alors la fonction $f+g$ est intégrable sur D et on a $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\iint_D (a.f(x,y) + b.g(x,y))\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = a \iint_D f(x,y)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + b \iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

— **Relation de Chasles**
Soient D_1 et D_2 deux domaines disjoints (ou dont l'intersection est de mesure nulle) et bornés de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction intégrable sur D_1 et sur D_2.
Alors f est intégrable sur $D_1 \cup D_2$ et on a :

$$\iint_{D_1\cup D_2} f(x,y)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D_1} f(x,y)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{D_2} f(x,y)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

3. Calcul d'une intégrale double

Théorème de Fubini : intégration d'une fonction de deux variables sur un rectangle

Soit R un rectangle de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire que $R = [a,b]\times[c,d]$ avec $a \leq b$ et $c \leq d$.
Si f est une fonction continue sur R, alors f est intégrable sur R et on a :

$$\iint_R f(x,y)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\ \mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\ \mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

Propriétés

Soient f et g deux fonctions réelles d'**une** variable réelle, définies et continues respectivement sur les intervalles $[a, b]$ et $[c, d]$ (on note : $f \in C([a, b])$ et $g \in C([c, d])$) **alors** la fonction de **deux** variables $fg : (x, y) \mapsto f(x)g(y)$ est intégrable sur $R = [a, b] \times [c, d]$ et on a :

$$\iint_R f(x).g(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \times \int_c^d g(y)\,\mathrm{d}y$$

Théorème de Fubini : intégrale double et description du domaine d'intégration

Soient D un domaine du plan et f une fonction continue sur D.

— Si $D = D_x = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b \text{ et } g(x) \leq y \leq h(x)\right\}$ où g et h sont deux fonctions continues sur $[a, b]$, alors f est intégrable sur D et on a :

$$\iint_D f = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

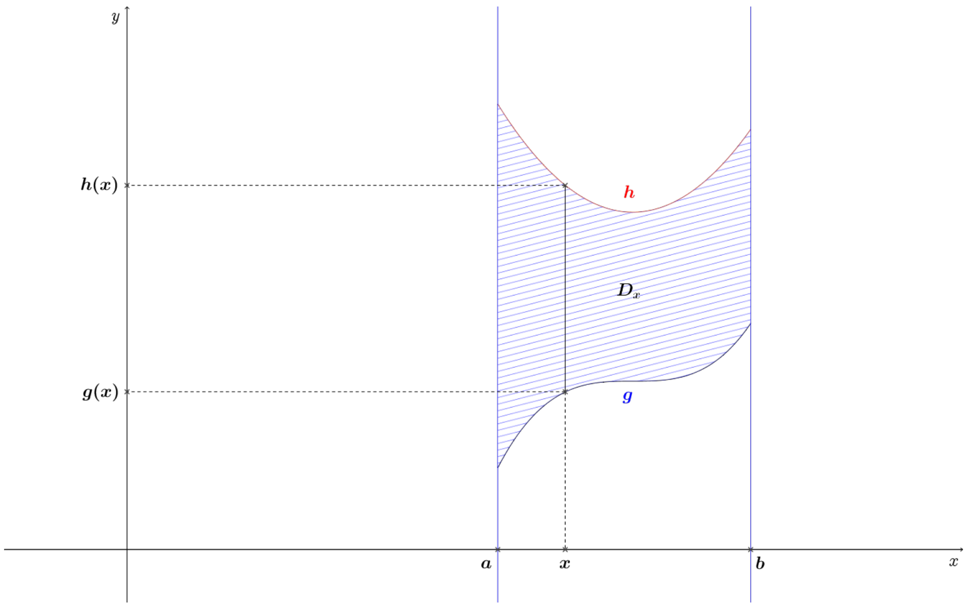


FIGURE 6..3 – Aire d'un domaine D_x situé entre deux graphes de fonctions

— Si $D = D_y = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, a \leq y \leq b \text{ et } g(y) \leq x \leq h(y)\right\}$ où g et h sont deux fonctions continues sur $[a, b]$, alors f est intégrable sur D et on a :

$$\iint_D f = \int_a^b \left(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

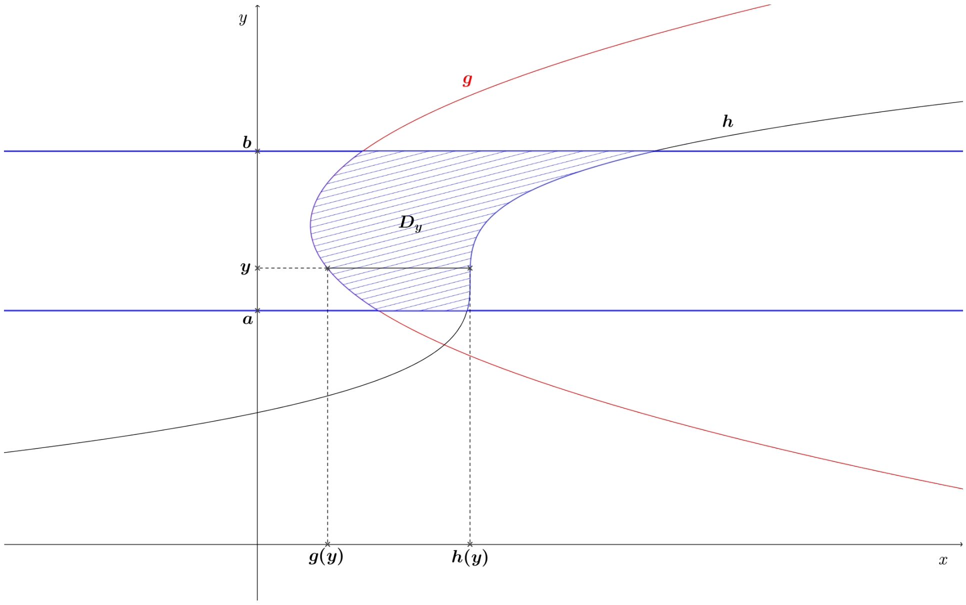


FIGURE 6..4 – Aire d'un domaine D_y situé entre deux graphes de fonctions $x = g(y)$, $x = h(y)$

4. Changement de variables dans une intégrale double

Théorème

Soit f une fonction intégrable sur un domaine D de $\mathbb{R}^2$. Soit $\widetilde{D}$ un domaine de $\mathbb{R}^2$ en bijection de classe C^1 avec D : plus précisément il existe deux fonctions χ_1 et χ_2, de classe C^1 sur $\widetilde{D}$ et telles que :

$$\begin{cases} x = \chi_1(u,v) \\ y = \chi_2(u,v) \end{cases} \quad (x,y) \in D, (u,v) \in \widetilde{D}$$

On note $J(u,v)$ le **déterminant jacobien** associé à ce changement de variable :

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \chi_1}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial \chi_2}{\partial u}(u,v) \\ \dfrac{\partial \chi_1}{\partial v}(u,v) & \dfrac{\partial \chi_2}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix}$$

On a alors :

$$\iint_D f(x,y)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\widetilde{D}} f(\chi_1(u,v), \chi_2(u,v))\,|J(u,v)|\ \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Remarque (changement de variables usuel)

— **Coordonnées polaires**
On pose

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases} \quad r = \in [0, +\infty[\,, \theta \in [0, 2\pi[$$

On a alors $J(r,\theta) = r$ donc « $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ ».

5. Formule de Green-Riemann

La formule de Green-Riemann permet, sous certaines conditions, de calculer une intégrale curviligne sous forme d'intégrale double et réciproquement.

Théorème : formule de Green-Riemann

Soit $\omega = P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y$ une forme différentielle et C^+ une courbe orientée fermée, frontière du domaine D.
On suppose que le domaine D est « à gauche » lorsqu'on parcourt C^+.
On a alors l'égalité :

$$\int_{C^+} \omega = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

IV. Intégrale triple (non traité en cours)

1. Définition et premières propriétés

Soient D un domaine borné de $\mathbb{R}^3$ et f une fonction définie sur D.
L'idée de départ est encore de commencer par découper D en parallélépipèdes rectangles de volume $\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$ et on obtiendra une formule de la forme :

$$\iint_D f(x, y, z)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \lim_{\Delta x \to 0, \Delta y \to 0, \Delta z \to 0} \sum_{i,j,k} f(x_i, y_j, z_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

L'interprétation graphique d'une telle intégrale n'est pas évidente. Il faut comprendre le principe et faire une analogie avec ce qui a été fait pour les intégrales simples et doubles (on pourrait ainsi construire des intégrales dans les dimensions supérieures...).

Une propriété que doit vérifier cette intégrale est :

$$\iiint_D 1\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \text{volume de } D$$

2. Calcul d'une intégrale triple

Théorème de Fubini : intégration d'une fonction de trois variables sur un parallélépipède rectangle

Soit R un parallélépipède de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire que $R = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ avec $a \leq b$,$c \leq d$ et $e \leq f$.
Si f est une fonction continue sur R, alors f est intégrable sur R et on a :

$$\iiint_R f(x, y, z)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_a^b \left(\iint_{[c,d]\times[e,f]} f(x, y, z)\ \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x = \iint_{[a,b]\times[c,d]} \left(\int_e^f f(x, y, z)\ \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Exemple

Notons R le parallélépipède rectangle de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$R = \left\{(x, y, z) \in R^3, 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 0, 1 \leq z \leq 2\right\}$$

Calculer l'intégrale :
$I = \iiint_R (5xy + z + 3)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \int_{-1}^0 \left(\int_1^2 (5xy + 2z + 3)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_{-1}^0 \left[5xyz + z^2 + 3z\right]_1^2 \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\int_{-1}^0 (5xy + 6)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[\frac{5}{2}xy^2 + 6y\right]_{-1}^0 \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(-\frac{5}{2}x + 6\right)\mathrm{d}x = \left[-\frac{5}{4}x^2 + 6x\right]_0^1 = \frac{19}{4}$

Théorème de Fubini : intégrale triple et description du domaine d'intégration

Soit D un domaine de $\mathbb{R}^3$ et f une fonction continue sur D.

Sommation par tranches
Si D peut-être décrit par :

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2, e \leq z \leq f \text{ et } (x, y) \in \Delta_z\right\}$$

Alors f est intégrable sur D et on a :

$$\iiint_D f = \int_e^f \left(\iint_{\Delta_z} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z$$

Sommation par piles
Si D peut-être décrit par :

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, y) \in \Delta \text{ et } g(x, y) \leq z \leq h(x, y)\right\}$$

où g et h sont deux fonctions continues sur $[a, b]$
Alors f est intégrable sur D et on a :

$$\iiint_D f = \iint_\Delta \left(\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Exemple

$\iint_D (x - y + 2z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ où D est l'intérieur du tétraèdre de sommets O,$A\,(2, 0, 0)$, $B\,(0, 2, 0)$, $C\,(0, 0, 2)$.
On commence par tracer le domaine d'intégration.

— **Si on choisit une sommation par piles**

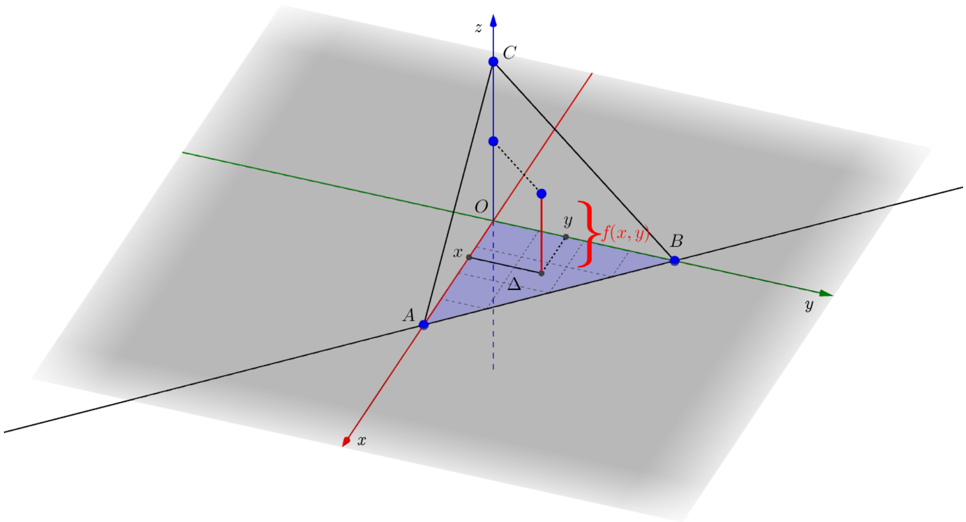


FIGURE 6..5 – Sommation par piles - Tétraèdre D de base Δ

On détermine une équation du plan (ABC) :
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix}$.
D'où l'équation $4x + 4y + 4z + d = 0$ et en utilisant les coordonnées d'un des points on obtient : $x + y + z - 4 = 0 \Leftrightarrow z = -x - y + 4$.
Ainsi une description de D est : $D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, y) \in \Delta \text{ et } 0 \leq z \leq -x - y + 4\right\}$ où Δ est le triangle OAB.
On a donc :
$I = \iiint_D (x-y+2z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_\Delta \left(\int_0^{-x-y+4} (x - y + 2z)\,\mathrm{d}z\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_\Delta \left[xz - yz + z^2\right]_0^{-x-y+4} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$
$\iint_\Delta \left(2y^2 - 4x - 12y + 2xy + 16\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
On doit maintenant décrire Δ :

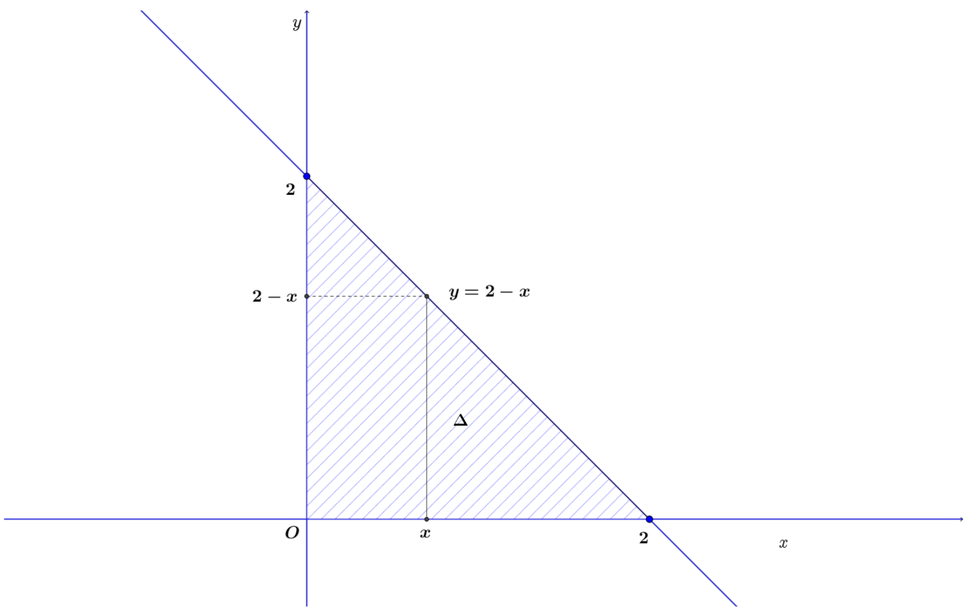


FIGURE 6..6 – Paramétrisation du domaine Δ

$\Delta = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \le x \le 2, 0 \le y \le -x+2\right\}$
$I = \int_0^2 \left(\int_0^{-x+2} (2y^2 - 4x - 12y + 2xy + 16)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$
$I = \int_0^2 \left[\frac{2}{3}y^3 - 4xy - 6y^2 + xy^2 + 16y \right]_0^{-x+2} \mathrm{d}x = \cdots$

— **Si on choisit de réaliser une sommation par tranches**

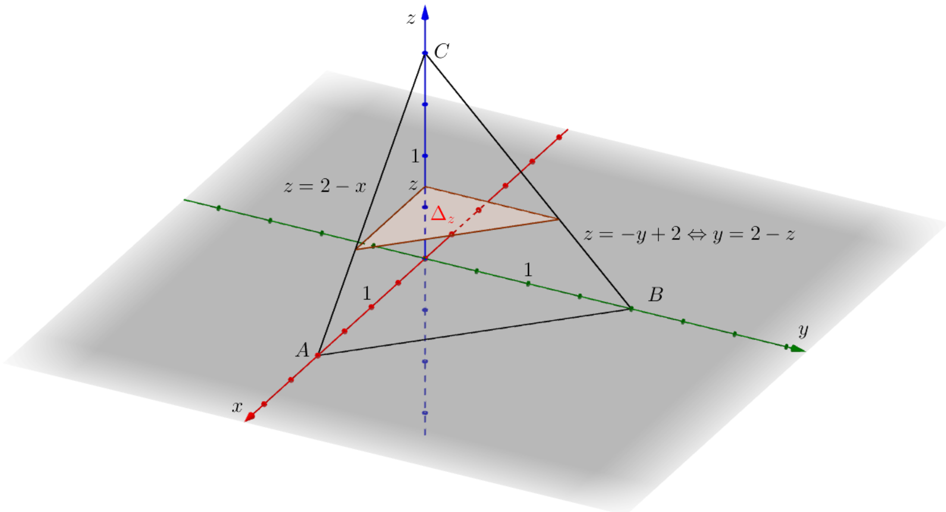


FIGURE 6..7 – Sommation par tranches et triangles Δ_z

Une description de D est alors :
$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, 0 \le z \le 2 \text{ et } (x,y) \in \Delta_z\right\}$ où Δ_z est le triangle suivant :

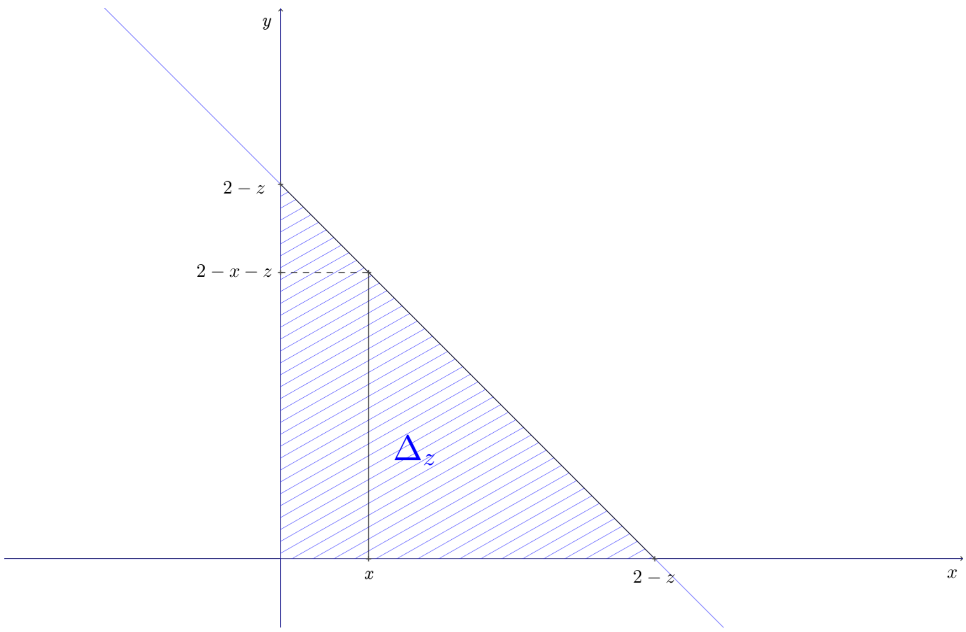


FIGURE 6..8 – Paramétrisation d'un triangle Δ_z

Une description de Δ_z est $\Delta_z = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \le x \le 2 - z, 0 \le y \le 2 - x - z\right\}$.
D'où le calcul :

$I = \iiint_D (x - y + 2z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^2 \left(\iint_{\Delta_z} (x - y + 2z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \right)\,\mathrm{d}z$

$I = \int_0^2 \left(\int_0^{2-z} \left(\int_0^{2-x-z} (x - y + 2z)\,\mathrm{d}y \right)\,\mathrm{d}x \right)\,\mathrm{d}z$

3. Changement de variables dans une intégrale triple

Le théorème de changement de variable pour les intégrales doubles se généralise aux intégrales triples :

Théorème

Soit f une fonction intégrable sur un domaine D de $\mathbb{R}^3$.
On définit une bijection de classe C^1 entre le domaine D et le domaine $\widetilde{D}$ par les relations :

$$\begin{cases} x = \chi_1(u, v, w) \\ y = \chi_2(u, v, w) \\ z = \chi_3(u, v, w) \end{cases}$$

On note $J(u, v, w)$ le déterminant jacobien associé à ce changement de variable :

$$J(u,v,w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \chi_1}{\partial u}(u,v,w) & \frac{\partial \chi_2}{\partial u}(u,v,w) & \frac{\partial \chi_3}{\partial u}(u,v,w) \\ \frac{\partial \chi_1}{\partial v}(u,v,w) & \frac{\partial \chi_2}{\partial v}(u,v,w) & \frac{\partial \chi_3}{\partial v}(u,v,w) \\ \frac{\partial \chi_1}{\partial w}(u,v,w) & \frac{\partial \chi_2}{\partial w}(u,v,w) & \frac{\partial \chi_3}{\partial w}(u,v,w) \end{vmatrix}$$

On a alors :

$$\iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{\widetilde{D}} f(\chi_1(u,v,w), \chi_2(u,v,w), \chi_3(u,v,w))\,|J(u,v,w)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$$

Remarques (changement de variables usuels)

— **Coordonnées cylindriques**
On pose

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \\ z = z \end{cases} \quad r \in \mathbb{R}_+, \theta \in [0, 2\pi[\text{ et } z \in \mathbb{R}$$

On a alors $J(r, \theta, z) = r$ donc « $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$ ».

— **Coordonnées sphériques**
On pose

$$\begin{cases} x = r\sin(\theta)\cos(\phi) \\ y = r\sin(\theta)\sin(\phi) \\ z = r\cos(\theta) \end{cases} \quad r \in \mathbb{R}_+, \phi \in [0, 2\pi[\text{ et } \theta \in [0, \pi]$$

On a alors $J(r, \theta, \phi) = -r^2\sin(\theta)$ et comme $\theta \in [0, \pi]$: « $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = r^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$ ».

A Sources

- Mathématiques Tout-en-un.1ère année, édition Dunod, E Ramis, Claude Deschamps, André Warusfel

- Polycopiés cours et exercices, Gilles Laschon

- Mathématiques BTS/DUT Algèbre et géométrie,édition EdiScience,Gérard Chauvat, Alain Chollet, Yves Bouteiller

Table des figures