TD 2. Applications linéaires et calcul matriciel

VII. Exercice

1. Montrer que l'application h suivante est linéaire et déterminer sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\to (2x + 3z, -x + y, y + 5z) \end{aligned}$$

2. L'application g suivante est-elle linéaire ?

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\to (2xy + 3y, x + y) \end{aligned}$$

1. h est linéaire, parce que c'est une somme d'applications linéaires. Pour caluler la matrice de h dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$, nous devons calculer l'image des vecteurs de base, et les exprimer dans $\mathcal{B}$:

$$h(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad ; \quad h(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad ; \quad h(e_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Donc la matrice de h dans $\mathcal{B}$ au départ et $\mathcal{B}$ à l'arrivée est

$$\mathcal{M}_{h,\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. g n'est pas linéaire. En effet, si par l'absurde g était linéaire, ce serait aussi le cas de

$$g'(x, y) = g(x, y) - (3y, x + y) = (2xy, 0).$$

Or $2(2x)(2y) = 8xy \neq 2 \cdot 2xy$, ce qui contredit le seconde condition pour être linéaire avec $a = 2$ (cours, page 7).

VIII. Exercice

Avertissement Cet exercice ne comporte aucune difficulté d'abstraction. Il est absolument indispensable de savoir le faire. Par ailleurs, il est beaucoup plus agréable (une fois que l'on a compris) et facile de faire soi-même un produit matriciel plutôt que de regarder quelqu'un d'autre le faire au tableau.

Calcul de $3A$ Multiplier une matrice par un nombre, c'est multiplier tous les éléments de cette matrice par ce même nombre [10] :

10. Après avoir fait quelques produits matriciels, observer que

$$3A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} A = A \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on est ainsi tenté de confondre $3\mathrm{Id}$ avec le nombre réel 3 (modulo certaines précautions, qui sont les mêmes que dans la remarque 3).

$$3A = \begin{pmatrix} 3\times 1 & 3\times 3 & 3\times 2 \\ 3\times 5 & 3\times 1 & 3\times 0 \\ 3\times(-2) & 3\times 0 & 3\times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 6 \\ 15 & 3 & 0 \\ -6 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

Calcul de $2A - 5\mathrm{Id}$ Additionner deux matrices, c'est additionner leurs coefficients :

$$2A - 5\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 10 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 4 \\ 10 & -3 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calcul de AB **(produit matriciel)** On a mis des couleurs sur une ligne de A et une (en fait, la) colonne de B pour montrer les produits à effectuer :

$$\begin{array}{rcl} & & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ AB = & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1\times 1 + 3\times 0 + 2\times 2 \\ 5\times 1 + 1\times 0 + 0\times 2 \\ -2\times 1 + 0\times 0 + 4\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Calcul de BA Ce calcul n'est pas possible, parce que B n'a qu'une colonne tandis que A a 3 lignes.

Calcul de BC

$$\begin{array}{rcl} & & \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ BC = & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1\times 3 & 1\times 1 & 1\times 0 \\ 0\times 3 & 0\times 1 & 0\times 0 \\ 2\times 3 & 2\times 1 & 2\times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Calcul de CB Par définition du produit matriciel,

$$CB = (3\times 1 + 1\times 0 + 0\times 2) = (3).$$

Calcul de AD Ce calcul n'est pas possible, parce que D n'a pas autant de lignes que A a de colonnes.

Calcul de DA On ne détaille plus les produits :

$$\begin{array}{rcl} & & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ DA = & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 14 & 6 & 6 \\ 16 & 4 & 8 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Calcul de EF

$$EF = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Id}.$$

Ce calcul montre que F est l'*inverse* de la matrice E (et inversement).

Question 2.1. *Vérifier que l'on a aussi* $FE = \mathrm{Id}$.

IX. Exercice

On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$(x, y, z) \to (2x + 3y, z - 2y).$$

1. (a) Déterminer la matrice A de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^2$.
   (b) A l'aide d'un calcul matriciel, calculer l'image de $(5, -1, 1)$ par f.
2. On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$(x, y) \to (2x - y, x + y, y)$$

   Déterminer la matrice B de g dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer les matrices des applications linéaires $f \circ g$ et $g \circ f$.
4. Calculer $f \circ g(4, 2)$.

1. (a) La matrice de f dans les bases demandées est

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (b) Notons $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (resp. $\mathbb{R}^2$). Alors

$$f\left(\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}.$$

2. La matrice de g dans $\mathcal{B}_2$ au départ et $\mathcal{B}_3$ à l'arrivée est

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. La matrice de $f \circ g$ dans $\mathcal{B}_2$ au départ et $\mathcal{B}_2$ à l'arrivée est

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3+0 & -2+3+0 \\ 0-2+0 & 0-2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

   La matrice de $g \circ f$ dans $\mathcal{B}_3$ au départ et $\mathcal{B}_3$ à l'arrivée est

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+0 & 6+2 & 0-1 \\ 2+0 & 3-2 & 0+1 \\ 0+0 & 0-2 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Calculons $f \circ g(4, 2)$ dans la base $\mathcal{B}_2$:

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

   On pourra vérifier « à la main » le résultat de ce calcul matriciel.

X. Exercice

On considère l'application $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$,

$$P \to (X+2)P' - 2P$$

1. Montrer que f est linéaire et préciser sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Calculer $f(X^2 - 2X + 3)$ à l'aide d'un calcul matriciel.
3. Déterminer la dimension du noyau de f.

1. Commençons par montrer que $P \to (X+2)P'$ est une application linéaire. On procède pour cela en deux étapes.
   i. L'application $g : P \to (X+2)P'$ est linéaire. Il s'agit en effet de la composition des applications $P \to (X+2)P$ et $P \to P'$, qui sont chacune linéaires. Plus concrètement, on peut se ramener à la définition en vérifiant que pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $a \in \mathbb{R}$,

   $$\begin{aligned} g(P+Q) = (X+2)(P+Q)' &= (X+2)(P'+Q') \\ &= (X+2)P' + (X+2)Q' \\ &= g(P) + g(Q); \\ g(aP) = (X+2)(aP)' &= a(X+2)P' = ag(P). \end{aligned}$$

   ii. L'application $P \to (X+2)P' - 2P$ est linéaire en tant que combinaison linéaire d'applications linéaires à valeurs dans un même espace.

   Pour calculer la matrice de f, il faut calculer les images des vecteurs de la base canonique, et les réexprimer dans la base canonique :

   $$\begin{aligned} f(\mathbf{1}) = (X+2)(\mathbf{1})' - 2 \times \mathbf{1} &= -2 \\ &= (-2) \cdot \mathbf{1} + 0 \cdot X + 0 \cdot X^2 \\ f(X) = (X+2)(X)' - 2X = X + 2 - 2X &= -X + 2 \\ &= 2 \cdot \mathbf{1} + 0 \cdot X + 0 \cdot X^2 \\ f(X^2) = (X+2)(X^2)' - 2X = 2X(X+2) - 2X^2 &= 2X^2 + 4X - 2X^2 \\ &= 0 \cdot \mathbf{1} + 4 \cdot X + 0 \cdot X^2 \end{aligned}$$

   La matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est donc 14/03/2017

   $$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Les coordonnées de $f(X^2 - 2X + 3)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ sont données par le calcul matriciel

   $$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix},$$

   ce que l'on peut retraduire par $f(X^2 - 2X + 3) = 6X - 7$.

3. Nous savons que la dimension de l'image est 2 car incluse dans $\mathbb{R}_1[X]$ et car $f(\mathbf{1})$ et $f(X)$ forment une famille libre. D'après le théorème du noyau-image, la dimension du noyau est égale à $3-2=1$. On peut aussi calculer explicitement le noyau. Allons-y, donc, en remplaçant :

$$\begin{cases} -2x+2y & =0 \\ -y+4z & =0 \\ 0 & =0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x+8z & =0 \\ y=4z & \end{cases} \iff x=y=4z.$$

En particulier le noyau est décrit par un seul paramètre réel, il est de dimension 1. Une base du noyau est $((4,4,1))$.

XI. Exercice

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ définie par : $\varphi(P) = \int_0^X P(x)dx$.

1. Montrer que φ est linéaire.
2. Déterminer la matrice de φ dans les bases canoniques des espaces de départ et d'arrivée.
3. Déterminer par un calcul matriciel $\varphi(P)$ avec $P = 2X^2+3X-1$.

1. On rappelle que la propriété de linéarité de l'intégrale s'écrit, pour des bornes *fixées* a et b et deux fonctions continues à valeurs réelles f et g,

$$\int_a^b f(x)+g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \tag{24}$$

$$\forall c \in \mathbb{R}, \int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx. \tag{25}$$

Choisissons donc P, Q de degré 2 et c une constante réelle. Alors $\varphi(P+Q)(X) = \varphi(P)(X)+\varphi(Q)(X)$ d'après (24) tandis que $\varphi(cP)(X) = c\varphi(P)(X)$ d'après (25). De plus on sait d'après le cours d'analyse que $\varphi(X^n) = \frac{X^{n+1}}{n+1}$; par linéarité, l'image par φ d'un polynôme de degré n est un polynôme de degré $n+1$. Ainsi, φ est linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.

2. Puisque $\varphi(X^n) = \frac{X^{n+1}}{n+1}$, la matrice de φ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ au départ et $\mathbb{R}_3[X]$ à l'arrivée est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

3. Allons-y :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3/2 \\ 2/3 \end{pmatrix},$$

autrement dit

$$\int_0^X (2x^2+3x-1)dx = \frac{2X^3}{3} + \frac{3X^2}{2} - X.$$

XII. Exercice*

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}$, $P \to P(2)$. φ est-elle linéaire ? Si oui, donner sa matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_3[X]$ et de $\mathbb{R}$.

Soient P, Q dans $\mathbb{R}_3[X]$ et a une constante réelle. Alors

$$\varphi(P+Q) = (P+Q)(2) = P(2) + Q(2) = \varphi(P) + \varphi(Q)$$
$$\varphi(a) = (aP)(2) = a \times P(2) = a\varphi(P).$$

On a ainsi vérifié que φ est linéaire.

Remarque 5 (Comparaison). Dans l'exercice I, sous-question 3a nous avons montré que l'ensemble des fonctions qui s'annulent en 0 est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour cela, nous l'avons sans le dire identifié à un noyau, celui de l'application $f \to f(0)$ qui est une cousine de φ.

Pour calculer la matrice de φ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_3[X]$ et de $\mathbb{R}$, nous devons calculer l'image des vecteurs de base :

$$\varphi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}(2) = 1$$
$$\varphi(X) = X(2) = 2$$
$$\varphi(X^2) = X^2(2) = 2^2 = 4,$$

de sorte que

$$[\varphi]_{(1,X,X^2),1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

XIII. Exercice*

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Montrer que f est injective si et seulement si $\ker f = 0_E$.

Si f est injective, alors pour tout $x \in E$, $f(x) = 0$ implique $x = 0$ étant donné que $f(0) = 0$.

Remarque 6. Cette implication ne demande pas que f soit linéaire, simplement que $f(0_E) = 0_F$.

Réciproquement, si $\ker(f) = 0_E$ alors soient x et y dans E tels que $f(x) = f(y)$. Par linéarité de f, $f(x-y) = 0$; mézalor $x - y \in \ker f$ donc $x - y = 0_E$, i.e. $x = y$. Nous avons montré que f est injective.

XIV. Exercice*

Une similitude directe s du plan est la composée d'une rotation r et d'une homothétie h.

1. Soit r la rotation vectorielle du plan d'angle $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer la matrice R de r dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. Soit h l'homothétie vectorielle du plan de rapport $k \in \mathbb{R}$ (c'est-à-dire que $h(u) = ku$). Déterminer la matrice H de h dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
3. En déduire la matrice S de la similitude directe $s = h \circ r$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Soient e_1 et e_2 les vecteurs de la base canonique, orthonormée directe. Alors

$$r(e_1) = (\cos\theta)e_1 + (\sin\theta)e_2$$
$$r(e_2) = (-\sin\theta)e_1 + (\cos\theta)e_2.$$

   Par conséquent, si l'on admet que r est linéaire.

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

   Remarque 7. Soient θ et θ' deux angles (i.e. deux nombres réels auxquels on pense comme à des angles). Alors la composée de la rotation vectorielle d'angle θ et de la rotation vectorielle r' d'angle θ' est la rotation vectorielle d'angle $\theta+\theta'$; matriciellement,

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta' & -\sin\theta' \\ \sin\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix},$$

   ce qui donne une troisième manière de retrouver les formules d'addition des sin et cos (pour mémoire, les deux premières qui ont été vues au premier semestre faisaient appel au produit scalaire et aux nombre complexes. Ces formules sont importantes, ce sont celles qui permettent par exemple de démontrer que $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$).

2. Cette fois-ci, la linéarité de h ne doit pas être un mystère. La matrice de h est

$$H = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}.$$

3. La matrice de s dans une base orthonormée est

$$S = HR = \begin{pmatrix} h\cos\theta & h\sin\theta \\ -h\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

XV. Exercice

A. Il s'agit d'une matrice 2×2, nous appliquons la formule :

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 3\times 2 - 2\times 5 = -4.$$

   Puisque $-4 \neq 0$, A est inversible.

B. N'étant pas carrée, B n'a pas de déterminant.

C. Développons selon la première colonne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\times\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)\times\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\times(-2) + (-1)\times(-2) = 0.$$

   En particulier la matrice C n'est pas inversible.

   Remarque 8. On donnera une autre méthode pour ce même déterminant dans l'exercice XVIII.

D. Cette matrice est bien carrée ; en développant suivant la dernière colonne

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}. = -2 - (13) - 5 \times 1 = 6.$$

E. Cette matrice est bien carrée, et

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot (-1) = -15.$$

Remarque 9 (facultative). Que le déterminant soit égal au produit des termes diagonaux (en couleurs) est un fait général pour les matrices qui sont triangulaires supérieures, c'est-à-dire avec des 0 en-dessous de leur diagonale, ainsi qu'on le montrerait par récurrence sur la dimension.

XVI. Exercice

La famille $\mathcal{F}_2$ est libre (et génératrice, et base) si et seulement si la matrice formée de ses vecteurs écrits en colonnes dans $\mathcal{B}$ est inversible. On est donc ramené au calcul de déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

comme on le voit par exemple en utilisant que la dernière ligne est nulle. Donc $\mathcal{F}_2$ n'est pas libre. Pour $\mathcal{F}_3$, nous sommes ramenés au calcul

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

ce qu'on obtient par exemple en développant suivant la première ligne. Donc $\mathcal{F}_3$ est libre. Enfin,

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

pour les mêmes raisons que $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_5$ est liée.

XVII. Exercice

1. Commençons par écrire la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ au départ et à l'arrivée :

$$A = [f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On calcule ensuite (par exemple avec la formule du cours pour les matrices 3×3) :

$$\det A = 8 + 1 + 1 - 2 - 2 - 2 = 4.$$

Puisque $\det A \neq 0$, f est bijective.

2. Un calcul matriciel donne

$$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix},$$

donc $AB = \mathrm{Id}$. Par conséquent, si $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ désigne l'application linéaire dont B est la matrie dans la base canonique au départ et à l'arrivée, la matrice de $f \circ g$ est Id, autrement dit $f \circ g(x)$ est l'identité (la plus paresseuse des applications linéaires, celle qui ne fait rien bouger). Autrement dit, g est l'application linéaire réciproque de f.

3. Vue la matrice B,

$$f^{-1}(u,v,w) = \left(\frac{3u-v-w}{4}, \frac{-u+3v-w}{4}, \frac{-u-v+3w}{4}\right).$$

XVIII. Exercice

Calcul de d_1 Pour calculer d_1, travaillons sur les lignes.

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}1&2&4\\1&4&6\\0&1&1\end{vmatrix} &= \begin{vmatrix}1&2&4\\1&2&4\\0&1&1\end{vmatrix} \begin{matrix}(L_1)\\(L_2)\leftarrow(L_2)-2(L_3)\\(L_3)\end{matrix}\\ &= \begin{vmatrix}0&0&0\\1&2&4\\0&1&1\end{vmatrix} \begin{matrix}(L_1)\leftarrow(L_1)-(L_2)\\(L_2)\\(L_3)\end{matrix}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Ceci corrobore le calcul de ce même déterminant dans l'exercice XV à la question C.

Calcul de d_2 Pour calculer d_2, on peut par exemple commencer par une opération sur les lignes :

$$d_2 = \begin{vmatrix}3&1&2\\2&2&4\\4&1&3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&0&-1\\2&2&4\\4&1&3\end{vmatrix} \begin{matrix}(L_1)\leftarrow(L_1)-(L_3)\\(L_2)\\(L_3)\end{matrix}$$

ce qui rend le développement suivant la première ligne plus facile :

$$\begin{vmatrix}3&0&-1\\2&2&4\\4&1&3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2&4\\1&3\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}2&2\\4&1\end{vmatrix} = 4.$$

Il est tout autant possible de travailler sur les colonnes pour faire apparaître des zéros sur la première colonne et faciliter ainsi le développement suivant la première colonne.

Calcul de d_3 Il est commode de remarquer que la première et la dernière colonne sont identiques. Par conséquent, quitte à effectuer l'opération sur les colonnes $(C_1) \leftarrow (C_1) - (C_3)$, on trouve que

$$d_3 = \begin{vmatrix}0&5&1&3\\0&2&3&1\\0&1&4&2\\0&2&-6&0\end{vmatrix} = 0.$$

XIX. Exercice

Les déterminants d_1 et d_2 sont nuls, parce que dans les deux cas, la dernière colonne est la somme des deux premières, ce qui permet de se ramener à une colonne nulle en effectuant les deux opérations élémentaires sur les colonnes $(C_3) \leftarrow (C_3) - (C_1)$ puis $(C_3) \leftarrow (C_3) - (C_2)$. Enfin, d_3 est nul parce que la première des colonnes est nulle.