Théorème de la base de Burnside

Leçons

101 Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotient. Applications.

104 Groupes finis. Exemples et applications.

108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

151 Dimension d'un espace vectoriel

Source M. Hall, [Hal76, p. 175]. Je dois ce développement à Ariles Remaki.

Théorème 1. *Soit P un p-groupe fini et D son sous-groupe de Frattini. On pose $r \geqslant 1$ l'entier naturel tel que P/D est d'ordre p^r. Alors*

(i) Toute famille génératrice de P est de cardinal au moins r.

(ii) De toute famille génératrice de P on peut extraire une sous-famille génératrice de cardinal r.

(a) Croissance des normalisateurs

Lemme 2. *Soit M un sous-groupe maximal de P. Alors M est normal et d'indice p dans P.*

Démonstration. On fait agir M sur P/M par translation à gauche. L'équation aux classes modulo p donne

$$0 \equiv |P/M| \equiv \left|(P/M)^M\right| (p),$$

où $(P/M)^M$ est l'ensemble des classes fixées par cette action. En particulier, $M \in (P/M)^M$ donc $\left|(P/M)^M\right| \geqslant p > 1$. Or $gM \in (P/M)^M$ ssi pour tout m dans M, $mgM = gM$; soit encors $g^{-1}mg \in M$, i.e. $g \in \mathrm{N}_P(M)$. Donc

$$\mathrm{N}_P(M) = |M| \left|(P/M)^M\right| > |M|.$$

Par maximalité[1] de M, $\mathrm{N}_P(M)$ est égal à M ou P. D'après la formule précédente $\mathrm{N}_P(M) = P$ et $M \trianglelefteq P$. Le quotient P/M est un p-groupe sans sous-groupe propre (toujours par maximalité de M), c'est donc $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. □

1. Maximalité que l'on n'avait pas utilisée jusqu'à présent.

(b) Vectorialisons $A = P/D$ Rappelons que par définition D est l'intersection des sous-groupes maximaux de P.

Proposition 3. *D contient toutes les puissances p-ièmes et les commutateurs de P. En d'autre termes A est un groupe abélien p-élémentaire.*

Démonstration. Pour tout M sous-groupe maximal de P, le quotient P/M est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Ceci entraîne que pour tout g dans G, g^p est inclus dans D. En outre on a un morphisme (avec $\mathfrak{M}(P)$ l'ensemble des sous-groupes maximaux de P)

$$\begin{array}{rcl} P & \to & \prod_{M \in \mathfrak{M}(P).} (P/M) \\ g & \mapsto & (g \text{ mod. } M)_M \end{array}$$

Dont le noyau est exactement D, donc une injection

$$A \hookrightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{|\mathfrak{M}(P)|}$$

En particulier, A est abélien donc D contient le sous-groupe dérivé $[P, P]$. □

A est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel de dimension r sur le corps $\mathbb{F}_p$.

(c) Preuve de (i) Soit $\{z_1, \dots z_s\}$ une partie génératrice de P. Puisque le morphisme $\pi : P \to A$ est surjectif, $\{\overline{z_1}, \dots \overline{z_s}\}$ est génératrice dans A. Comme A est un espace vectoriel de dimension r, d'après la théorie de la dimension nous avons $s \geqslant r$.

(d) Preuve de (ii) Soit $Z = \{z_1, \dots z_s\}$ une partie génératrice de P. D'après le théorème de la base incomplète, on peut extraire de Z une sous-famille $X = \{x_1, \dots x_r\}$ telle que $\{\overline{x_1}, \dots \overline{x_r}\}$ est une base de A. Soit donc $H = \langle x_1, \dots x_r \rangle$. Si par l'absurde $H \neq P$, alors il existe M sous-groupe maximal de P tel que $H \subseteq M$. Mais alors $\pi(H)$ est incluse dans M/D.

Remarque 4. On peut vérifier directement que $r = 1$ correspond au cas où P est cyclique. A l'inverse, le cas où r est l'exposant de p dans l'ordre de P correspond à $P \simeq \mathbb{F}_p^r$.Par ailleurs une famille génératrice minimale d'un groupe P d'ordre p^α est de cardinal $\leqslant \alpha$: si $\langle g_1, \dots g_s \rangle$ est une telle famille alors

$$\{1\} \subsetneq \langle g_1 \rangle \subsetneq \langle g_1, g_2 \rangle \subsetneq \cdots \subsetneq \langle g_1, \dots g_s \rangle = P$$

Remarque 5. Le lemme 2 est un cas particulier d'une propriété dite de « croissance des normalisateurs ». Si G est un groupe nilpotent et H un sous-groupe strict, alors $\mathrm{N}_G(H) \supsetneq H$. En particulier, les sous-groupes maximaux sont distingués.

Remarque 6. On peut reformuler la proposition 5, et faire un parallèle avec le sous-groupe dérivé : dans un p-groupe

- Le dérivé $[P, P]$ est le sous-groupe qui donne le plus grand quotient abélien.
- Le Frattini $\phi(P)$ est le sous-groupe qui donne le plus grand quotient abélien p-élémentaire.

Remarque 7. Le sous-groupe de Frattini est aussi l'ensemble des éléments « mous » c'est-à-dire des $g \in G$ tels que pour tout $S \subset G$

$$\langle S \cup \{g\} \rangle = G \implies \langle S \rangle = G.$$

Remarque 8. Il y a une ressemblance avec le lemme de Nakayama en algèbre commutative (avec le radical de Jacobson à la place du sous-groupe de Frattini).

Références

[Hal76] M. Hall. *The Theory of Groups*. AMS Chelsea Publishing Series. AMS Chelsea Pub., 1976.