CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE ÉCRITE CAPES EXTERNE 2021-1

Le sujet est disponible à l'adresse https://capes-math.org/data/uploads/ecrits/ep1_2021.pdf.

Etude des nombres harmoniques

I. Soit k un entier naturel tel que $k \geqslant 2$.
- D'une part, pour tout $x \in [k; k+1]$, nous avons que $1/x \leqslant 1/k$.
- D'autre part, pour tout $x \in [k-1; k]$, nous avons que $1/k \leqslant 1/x$.

Par **positivité de l'intégrale**, $\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{k}$ d'une part, et $\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{k} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{k}$ d'autre part. Or $\int_k^{k+1} \mathrm{d}x/k = 1/k$. Donc :

$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

II. Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel. D'après la question **I**,

$$\sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

D'après la relation dite de Chasles pour le calcul intégral, et vue la définition de H_n fournie par l'énoncé, ceci se réécrit

$$\int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leqslant H_n - 1 \leqslant \int_1^{n} \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Notons $i\colon]0, +\infty[\to]0, +\infty[,\ x \mapsto 1/x$. La fonction ln est une primitive de i. Donc les inégalités précédentes sont équivalentes à $\ln(n+1) - \ln(2) \leqslant H_n - 1 \leqslant \ln(n)$, c'est-à-dire

$$\ln(n+1) - \ln 2 + 1 \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln n.$$

Or $-\ln 2 + 1 \geqslant 0$, donc

$$\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln n.$$

On pouvait aussi établir l'inégalité de gauche dans la question **I** *pour* $k = 1$, *et sommer cette inégalité de* $k = 1$ *à* $k = n$ *pour obtenir l'inégalité de gauche sans utiliser le fait que* $\ln 2 \leqslant 1$.

III. 1. Nous savons que la suite $(\ln(n+1))_{n \geqslant 1}$ diverge vers $+\infty$. D'après la question **II**, (H_n) est minorée par une suite qui diverge vers $+\infty$, donc (H_n) diverge vers $+\infty$.

2. Rappelons que la fonction ln est positive et croissante sur $[2; +\infty[$, et tend vers l'infini de sorte que $\lim_{n \to +\infty} 1/\ln n = 0$. Pour tout $n \geqslant 2$, d'après la question 2,

$$1 \leqslant \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \leqslant H_n \leqslant \frac{1 + \ln n}{\ln n} = 1 + 1/\ln n.$$

Date: 26 novembre 2021.
rédigé par Gabriel Pallier.

D'après le théorème d'encadrement des limites, $\lim_{n\to+\infty} H_n/n = 1$, autrement dit H_n admet $\ln n$ pour équivalent quand $n \to +\infty$.

IV. 1. Soit $n \geqslant 1$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= H_{n+1} - H_n + \ln(n) - \ln(n+1) \\ &= \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leqslant 0, \end{aligned}$$

par positivité de l'intégrale (ou encore d'après la question I avec k valant $n+1$). D'autre part,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= H_{n+1} - H_n + \ln(n+1) - \ln(n+2) \\ &= \frac{1}{n+1} - \int_{n+1}^{n+2} \frac{\mathrm{d}x}{x} \geqslant 0, \end{aligned}$$

toujours par positivité de l'intégrale. Donc (u_n) est décroissante tandis que (v_n) est croissante. De plus, pour tout $n \geqslant 1$

$$u_n - v_n = \ln(n+1) - \ln n$$

qui est le terme général d'une suite de limite nulle. Donc les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

2. Les suites adjacentes convergent vers une limite commune. La suite (v_n) est positive, donc $\gamma \geqslant 0$.

V. 1. La suite (u_n) est décroisante, donc $u_n \geqslant \gamma$ pour tout n. De plus $u_n - \gamma \leqslant u_n - v_n$ pour tout $n \geqslant 1$ étant donné que les suites u et v sont adjacentes. Donc

$$0 \leqslant u_n - \gamma \leqslant \ln(1 + 1/n).$$

2. Notons que $\ln(1 + 1/n) \leqslant 1/n$, d'apès l'inégalité $\log(1 + r) \leqslant r$, qui est bien adaptée quand $n \to +\infty$. On peut s'en servir pour stopper l'éxecution à partir du rang n_0 minimal où $1/n_0 \leqslant \varepsilon$. Voici une implémentation en Python.

```
from math import log as ln
def eval_gamma(epsilon):
 harm = 0
 k = 0
    while k*epsilon < 1:
        k=k+1
        harm = harm+1./k
    return harm - ln(k)
```

Entrée: $\varepsilon \in]0;1]$
Sortie: $\widehat{\gamma} \in \mathbb{R}$ tel que $|\widehat{\gamma} - \gamma| \leqslant \varepsilon$
  $k \leftarrow 0$ **et** $H \leftarrow 0$
  tant que $\varepsilon k < 1$ **faire**
    $k \leftarrow k + 1$
    $H \leftarrow H + 1/k$
  fin tant que
    retourne $H - \ln k$

Quelques résultats

```
>>> eval_gamma(0.1)
0.6263831609742081
>>> eval_gamma(0.01)
0.5822073316515279
>>> eval_gamma(0.001)
0.5777155815682056
```

Le problème de Bâle

VI. Pour tout k entier naturel supérieur ou égal à 2, nous avons que
$$\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}=\frac{k}{k(k-1)}-\frac{k-1}{k(k-1)}=\frac{1}{k(k-1)}\geqslant\frac{1}{k^2}.$$

VII. Pour tout entier naturel $n\geqslant 2$, soit $\widehat{B}_n=\sum_{k=2}^{n}(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k})$. Nous avons que
$$B_n\leqslant 1+\widehat{B}_n=1+1-\frac{1}{n}\leqslant 2.$$
La suite (B_n) est croissante et majorée, donc elle converge.

VIII. **1.** Pour tout θ réel, nous avons que $2\cos(\theta)=e^{\mathrm{i}\theta}+e^{-\mathrm{i}\theta}$.Donc pour tous n,t
$$\sum_{k=-n}^{n}e^{\mathrm{i}kt}=1+\sum_{j=1}^{n}(e^{\mathrm{i}kt}+e^{-\mathrm{i}kt})=D_n(t).$$

2. On suppose ici $t>0$. D'après la formule déterminant la somme d'une série géométrique non constante à valeurs complexes,
$$\begin{aligned}\sum_{k=-n}^{n}e^{\mathrm{i}kt}=e^{-\mathrm{i}nt}\sum_{j=0}^{2n}e^{\mathrm{i}jt}&=e^{-\mathrm{i}nt}\frac{1-e^{\mathrm{i}(2n+1)t}}{1-e^{\mathrm{i}t}}\\&=e^{-\mathrm{i}nt}\frac{e^{\mathrm{i}(n+1/2)t}}{e^{\mathrm{i}t/2}}\frac{e^{-\mathrm{i}(n+1/2)t}-e^{\mathrm{i}(n+1/2)t}}{e^{-\mathrm{i}t/2}-e^{\mathrm{i}t/2}}\\&=\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin(\frac{t}{2})}.\end{aligned}$$

3. D'après la définition de $D_n(t)$,
$$D_n(0)=2n+1.$$

D_n (le plus souvent divisé par 2π) est appelé noyau de Dirichlet.

IX. **1.** La fonction sin est continue et strictement positive sur $]0;\frac{\pi}{2}]$, donc f est contine sur $]0;\pi/2]$. Il reste à établir que $t/\sin(t)$ admet pour limite 1 quand t tend vers 0. Pour cela notons que sin est dérivable en 0, de dérivée $\cos(0)=1$, donc $\lim_{t\to 0}t/\sin(t)=1$.

2. D'après le **théorème de prolongement de la dérivée**, il suffit de vérifier que $f'(t)$ (bien définie pour $t\in]0;\pi/2]$ car f est quotient de fonctions dérivable ne s'annulant pas) admet une limite finie quand $t\to 0$. Calculons : pour tout $t\in]0;\pi/2]$,
$$\begin{aligned}f'(t)=\frac{\sin(t)-t\cos(t)}{\sin^2(t)}&=\frac{t+\mathcal{O}(t^3)-t(1+\mathcal{O}(t^2))}{t^2+\mathcal{O}(t^4)}\\&=\frac{\mathcal{O}(t^3)}{t^2(1+\mathcal{O}(t^2))}\\&=\mathcal{O}(t).\end{aligned}$$
Donc f' admet une limite nulle en 0.

3. On a vu que f' est continue en 0. D'autre part, sur $]0,\pi/2]$, f est quotient de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ qui ne s'annulent pas, donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;\pi/2]$. Conclusion, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0:\pi/2]$.

X. 1. Remarquons préliminairement que $\sin(kt) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $t \in \mathbb{R}$. Pour $t \in [0, \pi]$, posons $u(t) = \frac{t^2}{2\pi} - t$ et $v(t) = \frac{\cos(kt)}{k^2}$ de sorte que

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(kt)\mathrm{d}t &= [u(t)v'(t)]_{t=0}^{t=\pi} - \int_0^\pi u'(t)v'(t)\mathrm{d}t \\ &= [u(t)v'(t)]_{t=0}^{t=\pi} - [u'(t)v(t)]_{t=0}^{t=\pi} + \int_0^\pi u''(t)v(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Or $[u(t)v'(t)]_{t=0}^{t=\pi} = \left[\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\frac{\sin(kt)}{k}\right]_{t=0}^{t=\pi} = 0$ et $\int_0^\pi u''(t)v(t)\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin(kt}{\pi k^3}\right]_{t=0}^{t=\pi} = 0$ d'après notre remarque préliminaire. Donc

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(kt)\mathrm{d}t = \left[\left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\frac{\cos kt}{k^2}\right]_{t=0}^{t=\pi} = \frac{1}{k^2}.$$

2. Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel. D'après la définition de D_n et la question précédente,

$$\begin{aligned}B_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} &= \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(kt)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\sum_{k=1}^n \cos(kt)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

par linéarité de l'intégrale. Or d'après la question **VIII** nous avons que $\sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{D_n(t)-1}{2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Donc

$$B_n = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\frac{D_n(t) - 1}{2}\mathrm{d}t.$$

3. Calculons :

$$\int_0^\pi \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right)\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6\pi}\right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{3}.$$

4. Ceci découle de la linéarité de l'intégrale et des questions **X.2** et **X.3** :

$$\begin{aligned}\frac{\pi^2}{6} - B_n &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right)\mathrm{d}t - \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\frac{D_n(t) - 1}{2}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\pi \left[\frac{1}{2}\left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right) + \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right)\frac{D_n(t) - 1}{2}\right]\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right)D_n(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

5. On utilise l'expression de $D_n(t)$ trouvée à la question **VIII**. Cela donne

$$\begin{aligned}\frac{\pi^2}{6} - B_n &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(s - \frac{s^2}{2\pi}\right)D_n(s)\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(s - \frac{s^2}{2\pi}\right)\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}s\right)}{\sin(\frac{s}{2})}\mathrm{d}s\end{aligned}$$

Puis on fait le changement de variables $s = 2t$ dans l'intégrale précédente, t variant dans $[0; \pi/2]$ ce qui donne

$$\begin{aligned}\frac{\pi^2}{6} - B_n &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left(s - \frac{s^2}{2\pi}\right) \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}s\right)}{\sin(\frac{s}{2})}\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \left(2t - \frac{4t^2}{2\pi}\right) \frac{\sin\left((2n+1)t\right)}{\sin(t)}2\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi/2} t\left(2 - \frac{2t}{\pi}\right) \frac{\sin\left((2n+1)t\right)}{\sin(t)}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

XI. Pour $t \in [0; \pi/2]$, posons

$$g(t) = \begin{cases} \frac{t}{\sin(t)}(2 - \frac{2t}{\pi}) & t \in]0; \pi/2] \\ 2 & t = 0 \end{cases}$$

Alors $g(t) = f(t)(2 - 2t/\pi)$ et donc g est de classe $\mathcal{C}^1$. D'après la question précédente,

$$\frac{\pi^2}{6} - B_n = \int_0^{\pi/2} g(t)\sin((2n+1)t)\mathrm{d}t.$$

XII. D'après la question **X.**, g et g' sont continues donc bornées sur $[0; 2\pi]$, disons par M et M' respectivement. Pour tout $n \geqslant 1$, en intégrant par parties,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\sin((2n+1)t)\mathrm{d}t = \left[-g(t)\frac{\cos((2n+1)t)}{2n+1}\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} g'(t)\frac{\cos((2n+1)t)}{2n+1}\mathrm{d}t.$$

En appliquant **l'inégalité triangulaire intégrale**, on obtient que pour tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\sin((2n+1)t)\mathrm{d}t\right| &\leqslant \frac{2M}{2n+1} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M'}{2n+1}\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{4M + \pi M'}{4n+2},\end{aligned}$$

de limite nulle quand n tend vers $+\infty$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\sin((2n+1)t)\mathrm{d}t = 0.$$

XIII. D'après les questions **XI** et **XII**, $\lim_{n\to+\infty}(\pi^2/6 - B_n) = 0$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} B_n = \frac{\pi^2}{6}.$$

Les lois géométriques

Voir aussi l'épreuve **2019-1, problème 2, partie A**.

XIV. Soit $x \in]-1, 1[$. Pour tout $n \geqslant 1$,

$$(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{k=1}^{n+1} x^k = 1 - x^{n+1}.$$

Or, $\lim_{n\to+\infty} x^{n+1} = 0$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1}{1-x},$$

ce qui revient à dire que la série de terme général x^k converge et que $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = (1-x)^{-1}$.

XV. *Nous donnons deux procédures pour cette question,* **(a)** *et* **(b)** *ci-dessous. La procédure attendue est la première. La seconde est plus élémentaire, mais aussi plus fastidieuse.*

(a) Pour tout entier naturel k, introduisons la fonction

$$g_k\colon \begin{array}{ll}]-1;1[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^k. \end{array}$$

Pour tout k, g_k est de classe de classe $\mathcal{C}^\infty$, et pour tout entier naturel j, pour tout $x \in]-1;1[$,

$$g_k^{(j)}(x) = k(k-1)\cdots(k-j+1)x^{k-j}$$

ainsi qu'on le démontrerait par récurrence sur j.

Soit $R \in]0,1[$. D'après le théorème de domination des polynômes par les exponentielles, pour tout entier naturel j nous avons que

$$\lim_{k\to+\infty} k^{j+2}R^{k-j} = 0.$$

Donc la série de terme général $g_k^{(j)}(R)$ converge, d'après le **critère de Riemann**. De plus, pour tout $x \in [-R;R]$ nous avons que $|g_k^{(j)}(x)| \leqslant g_k^{(j)}(R)$. Donc la série de fonction $g_k(j)$ est **normalement convergente** sur $[-R;R]$. D'après le théorème de dérivation des séries de fonctions, la série de fonctions

$$\sum_{k=0}^{+\infty} g_k(x)$$

définit une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur tout $[-R;R]$, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1;1[$. En particulier, et c'est ce qui nous intéresse, si l'on note g la somme alors pour tout entier naturel j,

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1;1[,\ g^{(j)}(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} g_k^{(j)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)\cdots(k-j+1)x^{k-j}. \end{aligned}$$

D'après la question **XIV** nous savons que $g(x) = \frac{1}{1-x}$ pour tout x. Appliquant l'identité précédente pour $j=1$ et $j=2$, nous trouvons que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

(b) Calculons, pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout $x \in]-1;1[$

$$\begin{aligned}(1-x)^2 \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} &= \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} - 2\sum_{k=2}^{n+1}(k-1)x^{k-1} + \sum_{k=3}^{n+2}(k-2)x^{k-1} \\ &= \sum_{k=3}^{n} \left(k - 2(k-1) + (k-2)\right) x^{k-1} \\ &\quad + 1 + 2x - 2x - 2nx^n + (n-1)x^n + nx^{n+1} \\ &= 1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}.\end{aligned}$$

Or $\lim_{n\to+\infty}(n+1)x^n = \lim_{n\to+\infty} nx^{n+1} = 0$, donc la série de terme général kx^{k-1} est convergente pour tout $x \in]-1;1[$ et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

De même, pour tout $x \in]-1;1[$ et n entier naturel supérieur ou égal à 1.

$$\begin{aligned}(1-x)^3 \sum_{k=1}^{n} k(k-1)x^{k-2} &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)x^{k-2} - 3\sum_{k=3}^{n+1}(k-1)(k-2)x^{k-2} \\ &\quad + 3\sum_{k=4}^{n+2}(k-2)(k-3)x^{k-2} - \sum_{k=5}^{n+3}(k-3)(k-4)x^{k-2} \\ &= 2 + (6 - 3\cdot 2)x + (12 - 3\cdot 6 + 3\cdot 2)x^2 + \sum_{k=5}^{n} Q_k x^{k-2} \\ &\quad + R_n(x) \\ &= 2 + \sum_{k=5}^{n} Q_k x^{k-2} + R_n(x),\end{aligned}$$

où

$$Q_k = k(k-1) - 3(k-1)(k-2) + 3(k-2)(k-3) - (k-3)(k-4)$$

pour tout $k \in [\![5;n]\!]$ et $R_n(x) = \mathcal{O}(nx^{n-1})$. Or, pour tout entier naturel $k \geqslant 5$,

$$\begin{aligned}Q_k &= k(k-1) - 3(k-1)(k-2) + 3(k-2)(k-3) - (k-3)(k-4) \\ &= k^2 - k - 3(k-1)^2 + 3(k-1) + 3(k-2)^2 - 3(k-2) - (k-3)^2 + k - 3 \\ &= (1-3+3-1)\,k^2 + (-1+6-3-12+3+6+1)\,k - 3 - 3 + 12 + 6 - 9 - 3 \\ &= 0,\end{aligned}$$

donc $(1-x)^3 \sum_{k=1}^{n} k(k-1)x^{k-2} = 2 + \mathcal{O}(nx^{n-1})$. On en déduit l'identité recherchée quand $n \to +\infty$.

XVI. D'après la question **XIV**,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} = p\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{k-1} = \frac{p}{(1-1+p)} = 1.$$

XVII. Par définition de l'espérance, et sous réserve *a priori* de son existence et de sa finitude,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} kp(1-p)^{k-1} = \frac{p}{(1-1+p)^2} = \frac{1}{p},$$

où nous avons utilisé successivement la définition de p_k et la première identité de la question **XVI**, applicable ici car $p \in]0;1[$ de sorte que $1-p \in]-1;1[$. Par définition de la variance, et sous réserve *a priori* de son existence et de sa finitude,

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Nous sommes donc ramenées à montrer l'existence et la finitude de $\mathbb{E}(X^2)$, puis à la déterminer. Allons-y : si elle existe,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2\mathbb{P}(X=k) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 p(1-p)^{k-1} \\ &= p\sum_{k=1}^{+\infty}(k(k-1)+k)(1-p)^{k-1}.\end{aligned}$$

Or, étant donné que $1-p \in]-1;1[$ nous savons que $\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)(1-p)^{k-1} = \frac{2(1-p)}{(1-1+p)^3}$ d'une part et $\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} = 1/p^2$ d'autre part, grâce à la question **XVI** ; en particulier, nous savons que ces séries sont convergentes. Donc $\mathbb{E}(X^2)$ existe, est finie, et

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{2p(1-p)}{p^3} + \frac{1}{p} = \frac{2(1-p)+p}{p^2} = \frac{2-p}{p^2}.$$

Finalement

$$\mathbb{V}(X) = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

comme demandé.

XVIII. **1.** Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i}$$

où l'on a utilisé le résultat de la question **XVII** pour écrire que $\mathbb{E}(X_i) = 1/p_i$ pour tout i.

2. Puisque les variables aléatoires X_i sont mutuellement indépendantes,

$$\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{p_i^2} - \frac{1}{p_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i},$$

où l'on a utilisé le résultat de la question **XVII** pour écrire que $\mathbb{V}(X_i) = 1/p_i^2 - 1/p_i$ pour tout i.

Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev

Voir aussi l'épreuve **2020-2, partie E**.

XIX. Inégalité de Markov. Pour tout $a \in]0;+\infty[$, nous avons :

$$a\mathbb{P}(Y \geqslant a) = \int_\Omega \mathbf{1}_{Y\geqslant a} a \mathrm{d}\mathbb{P} \leqslant \int_\Omega Y(\omega)\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}(Y),$$

d'où l'inégalité souhaitée en divisant les deux membres de cette inégalité par a.

XX. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Pour tout $a \in]0;+\infty[$, nous avons :

$$a^2\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}(X)| \geqslant a) = \int_\Omega \mathbf{1}_{|X-\mathbb{E}(X)|\geqslant a} a^2 \mathrm{d}\mathbb{P} \leqslant \int_\Omega (X(\omega)-\mathbf{E}(X))^2 \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{V}(X).$$

d'où l'inégalité souhaitée en divisant les deux membres de cette inégalité par a^2.

Le problème du collectionneur

XXI. La collection est complète quand le collectionneur possède n animaux. Donc il s'agit de la variable aléatoire T_n.

XXII. $T_1 = 1$ avec probabilité 1.

XXIII. 1. Cette probabilité est égale à $\frac{1}{n^{q-1}}$.

2. L'évenement « $T_2 > q$ » est exactement l'évenement dont on a calculé la probabilité à la question précédente, car devoir attendre un temps strictement supérieur à q pour avoir deux animaux, c'est avoir tiré toujours le même animal au cours des q premiers achats. Donc d'après la question **XXII.1**,

$$\mathbb{P}(T_2 > q) = \frac{1}{n^{q-1}}.$$

3. Pour tout $k \geqslant 2$,

$$\mathbb{P}(T_2 = k) = \mathbb{P}(T_2 > k-1) - \mathbb{P}(T_2 > k) = \frac{1}{n^{q-2}} - \frac{1}{n^{q-1}}$$

et $\mathbb{P}(T_2 = 1) = 0$ car pour obtenir deux animaux il faut effectuer au moins deux achats.

4. Soit $q_{\min}$ ce nombre minimal d'achat. Par définition, $q_{\min}$ est l'entier minimal parmi les entiers q tels que

$$\mathbb{P}(T_2 > q) \leqslant 0,01.$$

D'après la question **XXIII.2**, si $n = 100$ alors

$$\mathbb{P}(T_2 > 1) = 1$$
$$\mathbb{P}(T_2 > 2) = 1/100.$$

Donc $q_{\min} = 2$.

5. Par définition, Z_k est le temps d'attente entre l'obtention du $(k-1)^{\mathrm{e}}$ animal au temps T_{k-1} et du k^{e} animal au temps T_k. Si l'on pose $T_0 = 0$ avec probabilité 1, alors pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $Z_k = T_k - T_{k-1}$. Nous en déduisons l'expression demandée par l'énoncé.

6. Par récurrence sur l'entier naturel non nul k, montrons que

$$T_k = \sum_{i=1}^{k} Z_i.$$

Initialisation: $T_1 = Z_1$ d'après la question **XXIII.5**.

Hérédité: soit $k \geqslant 1$ un entier naturel. Supposons $T_k = \sum_{i=1}^{k} Z_i$. Alors d'après la question **XXIII.5**, $T_{k+1} = Z_{k+1} + t_k = \sum_{i=1}^{k+1} Z_i$.

7. Puisque les animaux sont uniformément répartis dans les paquets de chocolat, quand le collectionneur possède k animaux, la probabilité que l'animal tiré dans un paquet soit nouveau est $\frac{n-k}{n}$ à chaque tirage. Nous pouvons en déduire que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z_k = 1) &= \frac{n-k}{n};\\ \mathbb{P}(Z_k = 2) &= \mathbb{P}(Z_k > 1) \cdot \frac{n-k}{n} = \frac{k}{n}\frac{n-k}{n}.\end{aligned}$$

Ceci invite à la démarche suivante. Par récurrence sur l'entier naturel non nul j, montrons que

$$\mathbb{P}(Z_k = j) = \frac{n-k}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1}.$$

Initialisation: $\mathbb{P}(Z_k = 1) = \frac{n-k}{n}$ comme vu juste avant.

Hérédité: Soit $j \geqslant 1$ un entier naturel. Supposons $\mathbb{P}(Z_k = i) = \frac{n-k}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{i-1}$ pour tout $i \in [\![1, \ldots, j]\!]$. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z_k = j+1) &= \mathbb{P}(Z_k > j)\frac{n-k}{n}\\ &= \left(1 - \sum_{i=1}^{j} \mathbb{P}(Z_k = i)\right)\frac{n-k}{n}\\ &= \left(1 - \frac{n-k}{n}\sum_{i=1}^{j}\left(\frac{k}{n}\right)^{i-1}\right)\frac{n-k}{n}.\\ &= \left(1 - \left(1-\frac{k}{n}\right)\frac{1-(k/n)^j}{1-k/n}\right)\frac{n-k}{n} = \left(\frac{k}{n}\right)^{j}\frac{n-k}{n}.\end{aligned}$$

8. D'après la question **XVIII** avec $p_k = k/n$, et la question **XXIII.6**,

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Z_k) = \sum \frac{n}{k} = nH_n,$$

où H_n a été défini dans la partie **A**.

9. D'après la partie **A**,

$$\mathbb{E}(T_n) \sim n \ln n$$

quand n tend vers $+\infty$.

XXIV. **1.** Nous savons que les Z_k sont mutuellement indépendantes. Donc

$$\mathbb{V}(T_n) = \mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n} Z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k} = n^2 B_n - nH_n$$

où nous avons utilisé la question **XVIII.2**.

2. Nous savons d'après la conclusion de la partie **B** que pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 1, $B_n \leqslant \pi^2/6$. D'après la question précédente,

$$\mathbb{V}(T_n) = n^2 B_n - nH_n \leqslant n^2 B_n \leqslant \frac{n^2\pi^2}{6}.$$

XXV. Soit $\lambda \in]0;+\infty[$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev puis la question **XXIV.2**,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|T_n - \mathbb{E}(T_n)| \geqslant \lambda n \ln n) &\leqslant \frac{\mathbb{V}(T_n)}{(\lambda n \ln n)^2} \\ &\leqslant \frac{\pi^2}{6\lambda^2(\ln n)^2}.\end{aligned}$$

XXVI. D'après la question **XXIV.1**, pour tout $n \geqslant 1$ entier naturel, $\mathbb{E}(T_n) = nH_n$. Donc $\mathbb{P}(T_n \geqslant nH_n + n\ln n) \leqslant \mathbb{P}(|T_n - \mathbb{E}(T_n)| \geqslant n \ln n)$. D'après la question **XXV** avec $\lambda = 1$, nous avons par conséquent

$$\mathbb{P}(T_n \geqslant nH_n + n\ln n) \leqslant \frac{\pi^2}{6\ln n},$$

de sorte que si l'on pose

$$n_0 = \left\lceil \exp\frac{100\pi^2}{6} \right\rceil,$$

alors pour tout entier $n \geqslant n_0$, $\mathbb{P}(T_n \geqslant nH_n + n\ln n) \leqslant 1/100$. *L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev étant très sommaire, ce n_0 est vraisemblablement non optimal.*

Rappels et compléments de cours

Théorème de prolongement de la dérivée.

Théorème 1. *Soit $I = [a;b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a;b],\mathbb{C})$. On suppose que f est dérivable sur $]a;b]$. Si $f'(t)$ admet une limite finie $\delta \in \mathbb{C}$ quand t tend vers a, alors f est dérivable sur $[a;b]$ et $f'(a) = \delta$.*

Démonstration. Sans perte de généralité, on supposera que f est à valeurs réelles. On va jouer avec une largesse d'hypothèse parfois négligée du théorème des accroissements finis : celui-ci s'applique aux fonctions continues sur un intervalle et dérivables *à l'intérieur* de cet intervalle. Pour tout $h \in]0;b-a]$, il existe donc c_h tel que $0 < c_h < h$ et

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(c_h).$$

On en déduit que la limite du taux d'accroissement en a existe et est égale à δ ; autrement dit, f est dérivable en a et $f'(a) = \delta$. □

Quelques propriétés de l'intégrale de Riemann. Conformément au cadre défini par le volet *Calcul intégral* du programme spécifique de l'épreuve, la positivité de l'intégrale est une propriété de l'intégrale de Riemann des fonctions continues.

Proposition. *Soit $[a;b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. Si $f \in \mathcal{C}^0([a;b],\mathbb{R})$ est positive, alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$. De plus, il y a égalité si et seulement si f est identiquement nulle.*

Démonstration. Soit $(a_{i;n})_{n\geqslant 1, 1\leqslant i\leqslant r(n)}$ une suite de subdivisions de $[a;b]$ à $r(n)$ éléments, dont le pas est de limite nulle. Alors

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{r}(n)(a_{i+1;n} - a_{i;n})f(a_{i;n}).$$

Tous les termes de cette suite étant positifs, leur limite est positive. De plus si f n'est pas identiquement nulle alors il existe $x \in [a;b]$ tel que $f(x) > 0$. Par continuité de f en x, il existe $\delta > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que $f(s) \geqslant \varepsilon$ pour tout $s \in [a;b]$ tel que $|s-t| \leqslant \delta$. Par positivité de l'intégrale,

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_{B_s(x)\cap[a;b]} \varepsilon \mathrm{d}t \geqslant \min(s, b-a)\varepsilon > 0. \qquad \square$$

Notons que dans le cadre plus abstrait de la théorie de la mesure (hors programme), la positivité est quelque chose qu'on va *demander* dans la définition d'une mesure positive. Ce mouvement des propriétés vers les axiomes est quelque chose qu'on observe plus généralement au fil de l'élaboration des mathématiques.

Proposition (Inégalité triangulaire intégrale)**.** *Soit $[a;b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors pour toute f continue sur $[a;b]$ nous avons que $|\int_a^b f| \leqslant \int_a^b |f|$.*

Pour la preuve, on se ramène de nouveau à la propriété analogue pour les sommes de Riemann, qui s'obtient par récurrence à partir de l'inégalité du triangle dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Séries de fonctions. Ce paragraphe est plus développé que les précédents. Les théorèmes utiles sont à la fin.

On rappelle qu'un espace de Banach est un espace vectoriel normé dans lequel toute suite de Cauchy converge. Pout tout entier naturel d, $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{C}^d$ sont des espaces de Banach [1]. L'utilité de cette notion dans l'étude des séries de fonctions vient de la proposition suivante.

Proposition (Convergence absolue implique convergence)**.** *Soit E un espace de Banach et soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite à valeurs dans E. Si $\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\| < +\infty$ alors la suite $(\sum_{i=1}^n x_i)_n$ admet une limite dans E, notée $\sum_{n=1}^{+\infty} x_i$.*

Démonstration. Posons $s_n = \sum_{i=1}^n x_i$ pour tout $n \geqslant 1$. Il suffit de montrer que (s_n) est une suite de Cauchy. Donnons-nous $\varepsilon > 0$ et soit n_0 tel que $\sum_{i=n_0}^{+\infty} \|x_i\| \leqslant \varepsilon$. Soient $n, m \geqslant n_0$ avec $n < m$. Alors d'après l'inégalité du triangle dans E,

$$\|s_n - s_m\| \leqslant \sum_{i=n+1}^{m} \|s_i - s_{i-1}\| = \sum_{i=n+1}^{m} \|x_i\| \leqslant \sum_{i=n_0}^{+\infty} \|x_i\| \leqslant \varepsilon.$$

1. Le fait essentiel, qui est que les suites de Cauchy réelles convergent, peut s'obtenir *via* la propriété de la borne supérieure.

Nous avons vérifié que (s_n) est bien une suite de Cauchy. $\square$

Un cas très important de ce théorème est celui de $E = \mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})$ où K est un fermé borné de $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{C}^d$ pour un certain $d \geqslant 1$. On appellera un tel K un compact dans la suite. On admettra ici que c'est un espace de Banach une fois muni de la norme qui à f associe $\|f\|_\infty = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} \|f(x)\|_E$. Nous renvoyons par exemple à J. Lelong-Ferrand et A. Arnaudiès, *Cours de mathématiques - Tome 2 : Analyse*, § VIII.3, (Dunod, 4e édition) pour une preuve de ce fait.

Théorème (Convergence normale implique convergence uniforme)**.** *Soit $d \geqslant 1$ et soit K un sous-espace compact de $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{C}^d$. Soit $(f_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{C})$. Si la série de terme général $\|f_n\|$ converge, alors les sommes partielles de la série de terme général f_n convergent uniformément sur K, vers une fonction continue notée $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.*

Quand les hypothèses du théorème sont vérifiées on dit que la série de fonctions de terme général f_n converge normalement sur K.

Démonstration. Dire que (f_n) converge normalement sur$K$, c'est dire que $(f_n)_{n \geqslant 1}$ converge absolument dans l'espace de Banach $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{C})$. On conclut d'après la proposition. $\square$

Théorème. *Soit k un entier naturel. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit (f_n) une suite de fonctions sur $[a; b]$ à valeurs réelles. On fait les hypothèses suivantes.*

(1) Pour tout $n \geqslant 1$, f_n est de classe $\mathcal{C}^k$.

(2) La suite de fonctions $(f_n^{(k)})$ converge uniformément sur tous les segments de I vers une fonction g.

(3) Il existe $x_0 \in I$ tel que pour tout $j \in [\![0; k]\!]$, $f_n^{(j)}(x_0)$ admet une limite finie $y_j \in \mathbb{R}$ quand $n \to +\infty$.

Alors, (f_n) converge vers une fonction f uniformément sur tous les segments de I. De plus f est de classe $\mathcal{C}^k$, et $f^{(k)} = g$.

Démonstration. Par récurrence sur k. Pour $k = 0$ c'est le théorème précédent. Supposons le théorème vrai pour $k - 1$, $k \geqslant 1$ donné, et donnons-nous une suite (f_n) vérifiant les trois conditions pour k. La suite de fonctions $(f_n^{(k)})_{n \geqslant 1}$ est une suite de fonctions continue, sa limite uniforme g sur tous les segments est donc continue. Soit G la primitive de g sur I, s'annulant en x_0. Nous prétendons que pour tout $x \in I$,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{x_0}^{x} f_n^{(k)}(t) \mathrm{d}t = G(x),$$

et que cette convergence est uniforme sur tous les segments de I. En effet, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_0}^{x} f_n^{(k)}(t) \mathrm{d}t - G(x) \right| &= \left| \int_{x_0}^{x} f_n^{(k)}(t) \mathrm{d}t - \int_{x_0}^{x} g(t) \mathrm{d}t \right| \\ &\leqslant \int_{x_0}^{x} \left| f_n^{(k)}(t) - g(t) \right| \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Or par hypothèse $|f_n^{(k)}|$ converge vers g uniformément sur tout segment de I. Donc étant donné $\varepsilon > 0$ et un segment $F = [a; b]$ de I, il existe $n_0 \geqslant 1$ tel que pour tout

$n \geqslant n_0$,
$$\|f_n^{(k)} - g\|_{F,\infty} \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}.$$
Mais alors pour tout $x \in F$,
$$\left|\int_{x_0}^{x} f_n^{(k)}(t)\mathrm{d}t - G(x)\right| \leqslant \int_{x_0}^{x} \left|f_n^{(k)}(t) - g(t)\right| \mathrm{d}t \leqslant \int_{x_0}^{x} \frac{\varepsilon}{b-a}\mathrm{d}t = \frac{|x-x_0|\varepsilon}{b-a} \leqslant \varepsilon.$$
Nous avons ainsi montré que
$$\lim_{n\to+\infty} f_n^{(k-1)}(x) = \lim_{n\to+\infty} \left[f_n^{(k-1)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n^{(k)}(t)\mathrm{d}t\right] = y_{k-1} + G(x),$$
uniformément sur tout segment de I. Nous en déduisons que $f_n^{(k-1)}$ converge uniformément sur tout segment, ce qui permet d'appliquer l'hypothèse de récurrence. □

Théorème 2 (Convergence normale des séries dérivées)**.** *Soit k un entier naturel. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit (h_n) une suite de fonctions sur $[a;b]$ à valeurs réelles. On fait les hypothèses suivantes.*

(1) Pour tout $n \geqslant 1$, h_n est de classe $\mathcal{C}^k$.

(2) Pour tout segment $[a;b] \subseteq I$, la série
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sup_{a\leqslant x\leqslant b} |h_n^{(k)}(x)|$$
converge.

(3) Il existe $x_0 \in I$ tel que pour tout $j \in [\![0;k]\!]$ la série de terme général $h_n^{(j)}(x_0)$ converge.

Alors, pour tout $j \in [\![0;k]\!]$, la série de fonctions de terme général $h_n^{(j)}$ converge sur I, uniformément sur tous les segments de I, vers une fonction de classe $\mathcal{C}^{k-j}$, et, en notant
$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} h_n(x)\mathrm{d}x,$$
on a que $f^{(j)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} h_n^{(j)}(x)$ pour tout $x \in I$.

Démonstration. On pose pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout $x \in I$,
$$f_n(x) = \sum_{m=1}^{n} h_m(x).$$
D'après la condition (2) et le théorème « convergence normale implique convergence uniforme », la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur tout segment de I, vers une limite f. On applique ensuite le théorème 2 à la suite (f_n). □

Donnons une version finale avec des hypothèses plus fortes, mais plus pratiques.

Théorème 3 (Convergence normale des séries dérivées, version utile)**.** *Soit k un entier naturel. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit (h_n) une suite de fonctions sur $[a;b]$ à valeurs réelles. On fait les hypothèses suivantes.*

(1) Pour tout $n \geqslant 1$, h_n est de classe $\mathcal{C}^k$.

(2) Pour tout $j \in [\![0;k]\!]$ et pour tout segment $[a;b] \subseteq I$, la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |h_n^{(j)}(x)|$$

converge.

Alors, pour tout $j \in [\![0;k]\!]$, la série de fonctions de terme général $h_n^{(j)}$ converge sur I, uniformément sur tous les segments de I, vers une fonction de classe $\mathcal{C}^{k-j}$, et, en notant

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} h_n(x)\mathrm{d}x,$$

on a que pour tout $j \in [\![1;k]\!]$, $f^{(j)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} h_n^{(j)}(x)$ pour tout $x \in I$.

Démonstration. L'hypothèse (2) entraîne que les hypothèses (2) et (3) du théorème précédent sont vérifiées. La conclusion est la même. ☐

On peut se demander dans quelle mesure l'hypothèse (1) est nécessaire dans les théorèmes précédents. Il s'avère qu'il n'est pas suffisant de supposer les f_n (ou de manière équivalente les h_n) seulement k fois dérivables. Ceci est dû au fait que la preuve repose de manière essentielle sur l'identification de $f^{(k-1)}$ à une primitive de $f^{(k)}$; or une fonction dérivée n'est pas nécessairement Riemann-intégrable. Arrêtons-nous donc pour aujourd'hui au pied de ce problème fécond du calcul intégral.

Notions travaillées dans le pogramme spécifique pour la première épreuve d'admissibilité

Source : https://www.devenirenseignant.gouv.fr/, version du 29 avril 2021.

Raisonnement et vocabulaire ensembliste: ★ Opérateurs logiques et quantificateurs. Vocabulaire de la théorie des ensembles. Applications, relations d'ordre et relations d'équivalence.

Nombres complexes: Module et argument. Racines n-ièmes de l'unité. ★ Exponentielle complexe, trigonométrie. Applications à la géométrie plane. Equation du second degré [dans $\mathbf{C}$].

Fonctions d'une variable réelle: Continuité, théorème des valeurs intermédiaires. ★ Dérivabilité, théorème de Rolle, inégalité des accroissements finis. Extension aux fonctions à valeurs complexes. ★ Fonctions à valeurs dans $\mathbf{R}$. Courbes paramétrées.

Calcul intégral et équations différentielles: ★ Intégrale d'une fonction continue sur un segment, sommes de Riemann. ★ Calculs de primitives. ★ Intégration par parties, changement de variable. Formule de Taylor avec reste intégral. Intégrales généralisées. Équations différentielles linéaires du premier ordre, du premier ordre à variables séparables, linéaires du second ordre à coefficients constants.

Nombres réels et suites réelles: Construction de $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Q}$. Présentation axiomatique de $\mathbf{R}$, bornes supérieure et inférieure. Valeurs approchées, nombres décimaux. ★ Limite d'une suite réelle, théorèmes d'existence. Suites extraites. Extension aux suites à valeurs complexes. ★ Séries numériques, séries à termes positifs, séries absolument convergentes, séries de références (séries géométriques, séries de Riemann).

Analyse asymptotique: ★ Relations de comparaison des suites et des fonctions. Développements limités.

Suites et séries de fonctions: Convergence simple, convergence uniforme. Théorèmes de régularité. ★ Convergence normale des séries de fonctions. Séries entières, rayon de convergence. Développement en série entière des fonctions usuelles.

Algèbre linéaire: Systèmes linéaires, algorithme du pivot de Gauss-Jordan. Espaces vectoriels de dimension finie, familles libres, familles génératrices, bases. Applications linéaires. Homothéties, projections et symétries. Rang d'une application linéaire. Représentations matricielles d'un endomorphisme. Réduction des endomorphismes et des matrices carrées : éléments propres, diagonalisation, trigonalisation.

Matrices: Calcul matriciel, matrices inversibles, transposition. Matrices et applications linéaires, changement de base. Équivalence, similitude. Déterminant d'une matrice carrée, d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

Dénombrement: Cardinal d'un ensemble fini, listes, combinaisons, factorielles, formule du binôme.

Arithmétique des entiers: Arithmétique des entiers : nombres premiers, PGCD, PPCM, algorithme d'Euclide. Sous-groupes de $\mathbf{Z}$. Congruences. Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Théorème des restes chinois, petit théorème de Fermat.

Polynômes: Arithmétique des polynômes à coefficients réels ou complexes. Racines. Décomposition dans $\mathbf{R}[X]$ et $\mathbf{C}[X]$.

Groupes: Sous-groupes, morphismes de groupes. Groupes monogènes et groupes cycliques : groupes $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, groupe des racines n-ièmes de l'unité ; générateurs, indicatrice d'Euler. Ordre d'un élément. Groupes symétriques. Exemples de groupes agissant sur un ensemble, exemples de groupes laissant invariante une partie du plan ou de l'espace.

Produit scalaire et espaces euclidiens: Produit scalaire sur un espace de dimension finie, norme associée, orthogonalité. Bases orthonormées. Projections orthogonales. Orientation. Groupes des isométries vectorielles, des isométries affines, des similitudes. Isométries vectorielles d'un espace euclidien de dimension 2 ou 3. Isométries affines du plan euclidien.

Probabilités: Espaces probabilisés finis. Probabilités conditionnelles, conditionnement et indépendance. Variables aléatoires sur un univers fini : lois usuelles (loi uniforme, loi binomiale), variables aléatoires indépendantes, espérance, variance et écart-type. ★ Variables aléatoires discrètes : espérance et variance, loi de Poisson, loi géométrique, loi exponentielle.

À faire pour la prochaine séance

— Préparer un tableau et lister les notions ci-dessus, et inscrire en face les sujets d'écrit que vous avez préparés. Mutualiser le résultat.
— Préparer le **Problème 1** de l'épreuve **2016-1**.