Interrogation 1 - S3 - sujet b

Question :	1	2	3	Total
Points :	2	2	6	10
Note :				

Durée : 45 minutes.

1. (2 points) Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{4x^2} & x \neq 0 \\ 1/8 & x = 0. \end{cases}$$

Montrer que f est continue sur son ensemble de définition.

Solution : Déjà, f est continue sur $\mathbb{R}$ privé de $\{0\}$ en tant que quotient de fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant pas sur cet ensemble. Pour établir la continuité en 0, effectuons un DL_2 de cos en 0 : $\sin x = 1 - x^2/2 + \epsilon(x)x^2$. Ceci nous dit que, pour $x \neq 0$ au voisinage de 0,

$$f(x) = \frac{1 - 1 + x^2/2 + \epsilon(x)x^2}{4x^2} = 1/8 + \epsilon(x),$$

avec $\lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0$. Donc f est continue en 0.

2. (2 points) Soit f la fonction de $[2, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sqrt{3x+1} \cdot (\sin(1/x^2)) \cdot (2x^5 - 4x + \sqrt{3}e^x).$$

Donner un équivalent simple de f au voisinage de $+\infty$.

Solution : Cherchons un équivalent au voisinage de $+\infty$ pour chaque facteur :
- $\sqrt{3x+1} \sim \sqrt{3x}$.
- D'après le DL $_1$ de sin en 0, et puisque $\lim_{x\to+\infty} 1/x^2 = 0$, $\sin(1/x^2) \sim 1/x^2$.
- Par croissances comparées le terme dominant de $2x^5 - 4x + \sqrt{3}e^x$ est $\sqrt{3}e^x$, et

  $$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^5 - 4x + \sqrt{3}e^x}{\sqrt{3}e^x} = 1.$$

  Donc $2x^5 - 4x + \sqrt{3}e^x \sim \sqrt{3}e^x$ au voisinage de $+\infty$.

D'après le cours sur les produits d'équivalents,

$$f(x) \sim \sqrt{3x} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \sqrt{3}e^x = 3x^{-5/2}e^x.$$

3. (6 points) Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes :

$$I_1 = \int_{\pi}^{+\infty} \frac{dx}{x(2+\cos x)\sqrt{x}}, \quad I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^{1+3\ln t}} dt, \quad I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx.$$

Solution :

1. Posons $f_1(x) = \frac{1}{x(2+\cos x)\sqrt{x}}$ pour $x \in [\pi, +\infty[$, et montrons que I_1 est convergente. f_1 est positive, et pour tout $x \in [\pi, +\infty[$, $2+\cos x \geqslant 1$ donc $f_1(x) \leqslant \frac{1}{x\sqrt{x}} = g_1(x)$. D'après le cours page 4, il suffit de montrer que l'intégrale $\int_{\pi}^{+\infty} g_1(x)dx$ converge. C'est bien le cas d'après le critère de Riemann au voisinage de $+\infty$:
$$g_1(x) = x^{-3/2},$$
et $-3/2 < -1$. **Conclusion, I_1 est convergente**.
2. Posons $f_2(t) = \frac{\cos t}{e^{1+3\ln t}}$ pour $t \in [0, +\infty[$, et montrons que I_2 est convergente. Déjà f_2 est continue sur $[0, 1]$, ce qui permet de reléguer l'étude de la nature de l'intégrale à $[1, +\infty[$. f_2 est de signe variable ; d'après le cours page 5 il suffit de montrer que f_2 est (absolument) intégrable sur $[1, +\infty[$, c'est-à-dire que
$$J_2 := \int_1^{+\infty} \frac{|\cos t|}{e^{1+3\ln t}} dt \text{ converge.}$$
Puisque J_2 est l'intégrale d'une fonction positive, et étant donné que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\cos t| \leqslant 1$ et $e^{1+3\ln t} = et^3 \geqslant t^3$, d'après le cours page 4 il suffit d'avoir que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} dt/t^3$ converge. C'est bien le cas d'après le critère de Riemann en $+\infty$, car $3 > 1$. **Conclusion, I_2 est convergente**.
3. Posons $f_3(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ pour $x \in]0, +\infty[$, et montrons que I_3 est convergente. Déjà $f_3(x)$ a pour limie 0 en 0, donc l'intégrale de f_3 entre 0 et $\pi/2$ est convergente. Ensuite, pour tout $X \geqslant \pi/2$, par intégration par parties
$$\int_{\pi/2}^{X} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \left[\frac{-\cos x}{\sqrt{x}}\right]_{\pi/2}^{X} + \int_{\pi/2}^{X} \frac{\cos x}{2x\sqrt{x}} dx = \frac{-\cos X}{\sqrt{X}} + \int_{\pi/2}^{X} \frac{\cos x}{2x\sqrt{x}} dx.$$
Or $\frac{-\cos X}{\sqrt{X}}$ a pour limite 0 quand $X \to +\infty$, tandis que l'intégrale de droite est absolument convergente d'après le critère de Riemann. **Conclusion, I_3 est convergente**.