RÉDIGER DES MATHÉMATIQUES

Problème 1 de l'épreuve 2016-1

Partie A. Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et soient $a_1, \dots, a_n$ des nombre réels deux à deux distincts. Pour tout entier $k \in [\![1; n]\!]$ on considère le polynôme

$$L_k(X) = \prod_{1 \leqslant i \leqslant n; i \neq k} \frac{X - a_i}{a_k - a_i}.$$

I. Soit $k \in [\![1; n]\!]$. Montrer que L_k est l'unique polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que

$$P(a_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq k. \end{cases}$$

► *Il y a* 3 *assertions à vérifier : le fait que* $L_k \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, *que son évaluation en les* a_i *est telle que dans l'énoncé, et l'unicité.*

Par définition, L_k *est produit de* $n-1$ *polynômes de degré* 1, *il est donc de degré* $n-1$.

Calculons : pour tout $i \in [\![1; n]\!]$ *tel que* $i \neq k$,

$$L_k(a_i) = \prod_{1 \leqslant j \leqslant n; j \neq k} \frac{a_i - a_j}{a_k - a_j} = \frac{a_i - a_i}{a_k - a_i} \prod_{1 \leqslant j \leqslant n; j \neq k, j \neq i} \frac{a_i - a_j}{a_k - a_j} = 0,$$

tandis que

$$L_k(a_k) = \prod_{1 \leqslant j \leqslant n; j \neq k} \frac{a_k - a_j}{a_k - a_j} = \prod_{1 \leqslant j \leqslant n; j \neq k} 1 = 1.$$

Finalement, soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ *vérifiant l'identité pour les* $P(a_i)$, $i \in [\![1; n]\!]$. *Alors le polynôme* $Q = P - L_k$ *possède pour racines* $a_1, \dots, a_n$. *Les polynômes* $X - a_i$ *pour* $i \in [\![1; n]\!]$ *sont premiers entre eux deux à deux, et divisent* Q *dans* $\mathbb{R}[X]$. *Donc* $\prod_i (X - a_i)$ *divise* Q. *Donc* Q *est nul ou de degré* $\geqslant n$. *Or* $\deg Q \leqslant \max(\deg P, \deg L_k) \leqslant n-1$. *Donc* $Q = 0$, *autement dit* $P = L_k$.

II. On considère l'application

$$F \colon \begin{cases} \mathbb{R}_{n-1}[X] \to \mathbb{R}^n \\ P \mapsto (P(a_1), \dots, P(a_n)). \end{cases}$$

1. Montrer que F est une application linéaire.

2. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Pour $k \in [\![1; n]\!]$ montrer qu'il existe un polynôme P dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $F(P) = e_k$.

3. Montrer que F est surjective, puis justifier que F est bijective.

Date: 2 décembre 2021.
rédigé par Gabriel Pallier.

▶ **1.** *Nous allons montrer que F est $\mathbb{R}$-linéaire. Soient λ un nombre réel, et $P, Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Alors*

$$\begin{aligned}
F(P+\lambda Q) &= ((P+\lambda Q)(a_1), \dots, (P+\lambda Q)(a_n)) \\
&= (P(a_1)+\lambda Q(a_1), \dots, P(a_n)+\lambda Q(a_n)) \\
&= (P(a_1), \dots, P(a_n)) + (\lambda Q(a_1), \dots, \lambda Q(a_n)) \\
&= (P(a_1), \dots, P(a_n)) + \lambda\,(Q(a_1), \dots, Q(a_n)) \\
&= F(P) + \lambda F(Q).
\end{aligned}$$

▶ **2.** *D'après la question* **I**, *pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $F(L_k) = e_k$.*

▶ **3.** *Soit $x = (x_1, \dots x_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$. Posons $P = \sum_{k=1}^n x_k L_k$. Alors par linéarité de F, et d'après la question* **I.2**,

$$F(P) = \sum_{k=1}^n x_k F(L_k) = \sum_{k=1}^n x_k e_k = x.$$

Nous avons montré que F est surjective. De plus, $\dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = n$. F est une application linéaire et surjective entre espaces vectoriels de même dimension finie. Donc F est bijective. Notons que l'on retrouve ici l'unicité de L_k dans la question **I**.

III. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P(a_k) = f(a_k)$ pour tout $k \in [\![1;n]\!]$. Ce polynôme P est appelé polynôme d'interpolation de f en les points d'abscisse $a_1, \dots, a_n$.

2. Exprimer le polynôme d'interpolation de f en les points d'abscisse $a_1, \dots, a_n$ à l'aide des polynômes $L_1, \dots, L_n$ et des valeurs de f en $a_1, \dots, a_n$.

▶ **1.** *Considérons le vecteur $u_f = (f(a_1), \dots, f(a_n))$ de $\mathbb{R}^n$. D'après la question* **II.3** *il existe un unique $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $F(P) = u_f$. Autrement dit il existe un unique $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P(a_k) = f(a_k)$ pour tout $k \in [\![1;n]\!]$.*

▶ **2.** *Posons $\widetilde{P} = \sum_{k=1}^n f(a_k) L_k$. Alors par linéarité de F,*

$$F(\widetilde{P}) = \sum_{k=1}^n f(a_k) F(L_k) = \sum_{k=1}^n f(a_k) e_k = u_f.$$

Il convient donc de prendre $P = \widetilde{P}$, ce qui répond à la question.

Partie B. Soient $[a;b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit f une fonction de $\mathcal{C}^n([a;b])$ et $a_1 < \cdots a_n$ appartenant à $[a;b]$. On note P le polynôme d'interpolation de f aux points d'abscisse $a_1, \dots, a_n$; on rappelle que $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Le but de cette partie est de majorer $|f - P|$ sur le segment $[a;b]$.

I. Soit g une fonction définie sur le segment $[a;b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Énoncer le théorème de Rolle

2. On suppose que g est n fois dérivable sur $[a;b]$ et s'annule en au moins $n+1$ points distincts de $[a;b]$. Montrer que $g^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur $[a;b]$.

▶ **1. Théorème de Rolle** *Soit $[a;b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$. Si $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

▶ **2.** *Nous allons le montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par récurrence sur n :*

Initialisation: *Si $n = 1$, c'est une conséquence du théorème de Rolle appliqué à g sur l'intervalle $[a';b']$, où $a' = \inf\{x \in [a;b] : f(x) = 0\}$ et $b' = \sup\{x \in [a;b] : f(x) = 0\}$ (on a bien $a' < b'$ par hypothèse).*

Hérédité: *Supposons $n \geqslant 2$. Ordonnons les points où g s'annule, et nommons-les $a_1, \dots, a_{n+1}$ de sorte que*

$$a \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_{n+1} \leqslant b$$

D'après le théorème de Rolle, sur les n intervalles $]a_i; a_{i+1}[$ avec $i \in [\![1;n]\!]$, la fonction g' s'annule : disons $g'(c_i) = 0$ avec $a_i < c_i < a_{i+1}$ pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, et notons que les c_i sont distincts deux à deux. Mais alors g' est $(n-1)$ fois dérivable sur $[c_1;c_n]$, et s'y annule n fois. Par hypothèse de récurrence, la fonction $(g')^{(n-1)}$ s'annule sur $[c_1;c_n]$, en particulier $g^{(n)}$ s'annule sur $[a;b]$.

II. On fixe $c \in [a;b]$, distinct de $a_1, \dots, a_n$. On définit la fonction g_c sur $[a;b]$ par

$$g_c(x) = f(x) - P(x) - (f(c) - P(c)) \prod_{k=1}^{n} \frac{x - a_k}{c - a_k}.$$

1. Montrer que g_c s'annule en au moins $n+1$ points distincts de $[a;b]$.

2. Montrer que g_c est n fois dérivable sur $[a;b]$ puis que $g_c^{(n)}$ s'annule en au moins un point de $[a;b]$.

3. Soit h_c la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h_c(x) = \prod_{k=1}^{n} \frac{x-a_k}{c-a_k}$. En remarquant que h_c est un fonction polynôme de degré n, donner une expression de $h_c^{(n)}$, puis de $g_c^{(n)}$.

▶ **1.** *Pour $i \in [\![1;n]\!]$, nous avons*

$$\begin{aligned} g(a_i) &= f(a_i) - P(a_i) - (f(c) - P(c)) \prod_{k=1}^{n} \frac{a_i - a_k}{c - a_k} \\ &= 0 - (f(c) - P(c)) \frac{a_i - a_i}{c - a_i} \prod_{1 \leqslant k \leqslant n, k \neq i} \frac{a_i - a_k}{c - a_k} \\ &= 0, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé que P est le polynôme d'interpolation de f aux points d'abscisse $a_1, \dots, a_n$. De plus,

$$\begin{aligned} g(c) &= f(c) - P(c) - (f(c) - P(c)) \prod_{k=1}^{n} \frac{c - a_k}{c - a_k} \\ &= f(c) - P(c) - (f(c) - P(c)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

et par hypothèse, c est distinct de a_i pour $i \in [\![1;n]\!]$. Donc g_c s'annule en $n+1$ points.

▶ **2.** *Par hypothèse, f est de classe $\mathcal{C}^n$, en particulier elle est n fois dérivable. En anticipant sur la notation introduite par l'énoncé à la question suivante,*

$$g_c(x) = f(x) - P(x) - (f(c) - P(c)h_c(x),$$

où h_c est une fonction polynôme. Ainsi, g_c est combinaison $\mathbb{R}$-linéaire de fonctions n fois dérivables, donc g_c est n fois dérivable. D'après les questions **B.I.2** *et* **B.II.1**, *$g_c^{(n)}$ s'annule sur $[a; b]$.*

▶ **3.** *h_c est une fonction polynôme de degré n. Son coefficient dominant est $\prod_{k=1}^n (c - a_k)^{-1}$, donc $h_c^{(n)}$ est la fonction constante égale à*

$$h_c^{(n)} \equiv n! \prod_{k=1}^{n} (c - a_k)^{-1}.$$

D'autre part, $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc $P^{(n)}$ est identiquement nulle. On en déduit que pour tout $x \in [a; b]$,

$$g_c^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - (f(c) - P(c))n! \prod_{k=1}^{n} (c - a_k)^{-1}.$$

III. 1. Déduire des questions précédentes qu'il existe un réel $\zeta \in [a; b]$ tel que

$$f(c) - P(c) = \frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!} \prod_{k=1}^{n} (c - a_k).$$

2. Montrer que le résultat établi dans la question **III.1** reste vrai si c est égal à l'un des a_k.

3. En déduire que

$$\max_{x\in[a;b]} |f(x) - P(x)| \leqslant \frac{1}{n!} \max_{x\in[a;b]} |f^{(n)}(x)| \times \max_{x\in[a;b]} \prod_{k=1}^{n} |x - a_k|.$$

▶ **1.** *D'après la question* **B.II.2** *il existe $\zeta \in [a; b]$ tel que $g_c^{(n)}(\zeta) = 0$, et d'après la question* **B.II.3**,

$$0 = g_c^{(n)}(\zeta) = f^{(n)}(\zeta) - (f(c) - P(c))n! \prod_{k=1}^{n} (c - a_k)^{-1}.$$

On en déduit que

$$f(c) - P(c) = \frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!} \prod_{k=1}^{n} (c - a_k).$$

▶ **2. Première méthode** *P est le polynôme d'interpolation de f en les points d'abscisse $a_1, \ldots, a_n$. Donc si c est égal à l'un des a_k, $f(c) - P(c) = 0$, tandis que le produit de droite s'annule pour tout ζ.*

Seconde méthode (sans calcul) *On peut voir le membre de gauche de l'égalité obtenue dans la question* **B.III.1** *comme une fonction continue de la variable c variant dans $[a; b] \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$, qui est dense dans $[a; b]$. Le membre de gauche admet des limites finies quand $c \to a_i$ pour tout $i \in [\![1; n]\!]$. Fixons $k \in [\![1; n]\!]$ et posons ζ_p un ζ tel que l'identité est* *valable pour $c = a_k + 1/p$, quand p est assez grand (disons $p \geqslant p_0$) pour que $a_k + 1/p$ soit différent des a_i pour tout i. Alors l'égalité vaut pour tout $c \in [a;b]$, quitte à prendre dans ce cas pour ζ une valeur d'adhérence quelconque de la suite $(\zeta_p)_{p\geqslant p_0}$ (qui existe car $[a;b]$) est un segment.*

▶ **3.** *D'après la question* **B.III.2**, *pour tout $x \in [a;b]$ il existe $\zeta \in [a;b]$ tel que $f(x) - P(x) = \frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!}\prod_{k=1}^{n}(x - a_k)$. D'autre part, f étant de classe $\mathcal{C}^n$, pour tout $\zeta \in [a;b]$,*

$$|f^{(n)}(\zeta)| \leqslant \sup_{[a;b]} |f^{(n)}| = \max_{[a;b]} |f^{(n)}|,$$

car $[a;b]$ est un segment. On en déduit que

$$\max_{x\in[a;b]} |f(x) - P(x)| \leqslant \frac{\max_{[a;b]} |f^{(n)}|}{n!} \prod_{k=1}^{n} |x - a_k|.$$

Partie C. Dans cette partie, on interpole de deux manières différentes la fonction

$$f : \begin{cases} [0;\pi] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(x). \end{cases}$$

I. Première méthode. On considère le polynôme d'interpolation P de f en les points d'abscisse 0, $\frac{\pi}{2}$ et π.

1. Calculer P.

2. En utilisant les résultats de la partie **B**, montrer que[1] pour tout $x \in [0;\pi]$,

$$|f(x) - P(x)| \leqslant \max_{x\in[0;\pi]} \frac{|x(x - \pi/2)(x - \pi)|}{6}$$

3. En déduire que pour tout $x \in [0;\pi]$,

$$|f(x) - P(x)| \leqslant \frac{\pi^3\sqrt{3}}{216}.$$

▶ **1.** *Posons $a_1 = 0$, $a_2 = \pi/2$ et $a_3 = \pi$. Alors avec les notations de la partie* **A**,

$$\begin{aligned} L_1(X) &= \frac{2}{\pi^2}\left(X - \frac{\pi}{2}\right)(X - \pi) \\ L_2(X) &= -\frac{4}{\pi^2} X (X - \pi) \\ L_3(X) &= \frac{2}{\pi^2} X \left(X - \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

D'après la question **A.III.2**, *on en déduit que*

$$P(X) = \sin(0)L_1(X) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) L_2(X) + \sin(\pi)L_3(X) = \frac{4}{\pi^2}X(\pi - X).$$

▶ **2.** *Nous allons appliquer le résultat de la question* **B.III.3** *avec $f = \sin$, $n = 3$ et P comme à la question précédente. Pour cela, nous devons majorer la fonction $|\sin^{(3)}|$ sur $[0;\pi]$:*

$$\forall x \in [0;\pi], |\sin^{(3)}(x)| = | - \cos(x)| \leqslant 1.$$

1. NdR : On pourrait préférer éviter l'usage de la variable x des deux côtés dans l'inégalité qui suit. Nous gardons la formulation de l'énoncé.

Nous en déduisons que

$$\begin{aligned}\forall y \in [0;\pi],\ |f(y)-P(y)| &\leqslant \max_{x\in[0;\pi]} \frac{|x|\left|x-\frac{\pi}{2}\right||x-\pi|}{6}\\ &= \max_{x\in[0;\pi]} \frac{\left|x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(x-\pi)\right|}{6}.\end{aligned}$$

► **3.** *Introduisons la fonction*

$$\eta\colon \begin{cases}[0;\pi] \to \mathbb{R}\\ x \mapsto x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(x-\pi).\end{cases}$$

η est dérivable sur $[0;\pi]$, de dérivée

$$\eta'(x) = 3x^2 - 3\pi x + \frac{\pi^2}{2}.$$

L'étude du signe du trinôme $\eta'(x)$ permet d'établir un tableau de variations pour η, et, de là, de déterminer que

$$\max_{x\in[0;\pi]} |\eta(x)| = \left|\eta\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi\sqrt{3}}{6}\right)\right| = \left|\eta\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi\sqrt{3}}{6}\right)\right| = \frac{\pi^3\sqrt{3}}{36}.$$

Reportant ceci dans l'inégalité exprimée à la question **C.I.2***, nous obtenons que pour tout $x\in[0;\pi]$,*

$$|f(x)-P(x)| \leqslant \frac{\pi^3\sqrt{3}}{6\cdot 36} = \frac{\pi^3\sqrt{3}}{216}.$$

II. Seconde méthode. On choisit un entier $n \geqslant 1$. Pour tout $k \in [\![0;n-1]\!]$, on note P_k le polynôme de degré inférieur ou égal à 1 d'interpolation de f aux deux points d'abscisse $\frac{k\pi}{n}$ et $\frac{(k+1)\pi}{n}$. On note Q_n la fonction affine par morceaux définie par

$$Q_n(x) = \begin{cases} P_0(x) & \text{si } 0 \leqslant x < \frac{\pi}{n},\\ P_1(x) & \text{si } \frac{\pi}{n} \leqslant x < \frac{2\pi}{n},\\ \vdots & \\ P_k(x) & \text{si } \frac{k\pi}{n} \leqslant x < \frac{(k+1)\pi}{n},\ \text{pour } k \in [\![1;n-2]\!],\\ \vdots & \\ P_{n-1}(x) & \text{si } \frac{(n-1)\pi}{n} \leqslant x \leqslant \pi.\end{cases}$$

1. Calculer Q_1 et Q_2. Tracer la courbe représentative de Q_2.

2. Justifier que Q_n est continue sur $[0;\pi]$.

3. Soit $k \in [\![0;n-1]\!]$. Montrer que pour tout $x \in \left[\frac{k\pi}{n};\frac{(k+1)\pi}{n}\right]$,

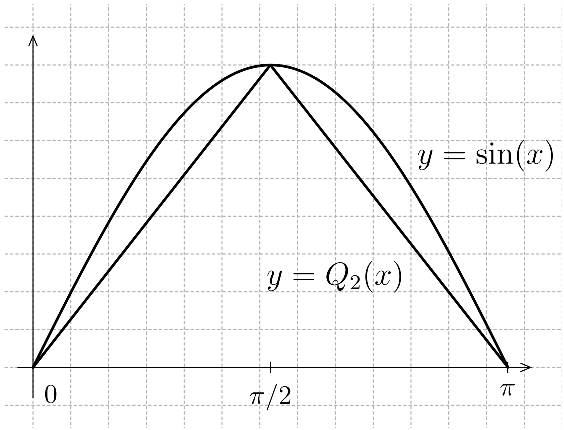
$$\left|\left(x-\frac{k\pi}{n}\right)\left(x-\frac{(k+1)\pi}{n}\right)\right| \leqslant \frac{\pi^2}{4n^2}.$$

4. Montrer que pour tout $x\in[0;\pi]$,

$$|f(x)-Q_n(x)| \leqslant \frac{\pi^2}{8n^2}.$$

▶ **1.** *On trouve* $Q_1(x) \equiv 0$ *et*

$$Q_2(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}x & 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 2 - \frac{2}{\pi}x & \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$



▶ **2.** Q_n *est affine, donc continue, sur tous les intervalles ouverts* $]k\pi/n; (k+1)\pi/n[$ *pour* $k \in [\![0; n-1]\!]$. *La continuité de* Q_n *aux points* $k\pi/n$ *découle de la définition de polynôme d'interpolation.*

▶ **3.** *Pour tous réels* u, v *nous avons*

$$uv \leqslant \frac{(u+v)^2}{4}$$

en vertu de l'indentité $(u+v)^2 - 4uv = (u-v)^2 \geqslant 0$. *On applique cela à*

$$\begin{aligned} u &= \left|x - \tfrac{k\pi}{n}\right| \ \textit{et} \\ v &= \left|x - \tfrac{(k+1)\pi}{n}\right|, \end{aligned}$$

dont la somme est égale à π/n. *Cela donne le résultat demandé.*

▶ **4.** *D'après la question* **B.III.3** *appliquée à la fonction* $f = \sin$ *et à* Q_n *restreintes au segment* $[k\pi/n; (k+1)\pi/n]$*(c'est-à-dire à* $\sin$ *et* P_k*), on trouve que pour tout* $y \in \left[\frac{k\pi}{n}; \frac{(k+1)\pi}{n}\right]$,

$$(*) \qquad |f(y) - Q_n(y)| \leqslant \frac{\max\limits_{x\in\left[\frac{k\pi}{n};\frac{(k+1)\pi}{n}\right]} |\sin''(x)|}{2} \max_{x\in\left[\frac{k\pi}{n};\frac{(k+1)\pi}{n}\right]} \left|x - \frac{k\pi}{n}\right| \left|x - \frac{(k+1)\pi}{n}\right|.$$

Notons que

$$\max_{x\in\left[\frac{k\pi}{n};\frac{(k+1)\pi}{n}\right]} |\sin''(x)| = \max_{x\in\left[\frac{k\pi}{n};\frac{(k+1)\pi}{n}\right]} |-\sin(x)| \leqslant 1.$$

Le membre de droite dans l'inégalité $(*)$ *est donc majoré par* $\frac{1}{2}\frac{\pi^2}{4n^2}$ *d'après la question* **B.II.3**. *Ces inégalités sont valables pour tout* $k \in [\![0; n-1]\!]$. *On a donc pour tout* $x \in [0; \pi]$,

$$|f(x) - Q_n(x)| \leqslant \frac{\pi^2}{8n^2}.$$

III. Parmi ces deux méthodes d'approximation, quelle est la meilleure ? Justifier.

Dans la première méthode, nous avons borné l'erreur d'approximation par $\frac{\pi^3\sqrt{3}}{216}$ *à la question* **C.I.3**. *La deuxième méthode donne une meilleure garantie dès que* $\pi^2/(8n^2) \leqslant \pi^3\sqrt{3}/216$. *Or*

$$\frac{\pi^2}{8n^2} \leqslant \frac{\pi^3\sqrt{3}}{216} \iff \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{\pi\sqrt{3}}{27} \Longleftarrow n^2 \geqslant 2,$$

ce qui arrive dès que $n \geqslant 2$. *On conçoit donc que la seconde méthode est meilleure. Cependant, s'il s'agissait d'interpoler au points d'abscisse* $\frac{k}{n}$ *par un polynôme de degré* $n-1$, *l'erreur serait majorée par*

$$\frac{1}{n!} \max_{x\in[0;\pi]} \prod_{k=0}^{n} \left| x - \frac{k\pi}{n} \right|$$

d'après la question **B.II.3**. *On peut montrer que le maximum de droite est de limite nulle quand* n *tend vers l'infini. Donc si* $\widetilde{P}_n$ *désigne le polynôme d'interpolation correspondant, alors* $\max_{0\leqslant x\leqslant \pi} |\widetilde{P}_n(x) - f(x)| = o(1/n!)$.

Partie D. On considère la matrice de Vandermonde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $a_1, \dots a_n$ sont des nombres réels.

On cherche à déterminer par deux méthodes différentes une condition nécessaire et suffisante portant sur les a_k [pour $k \in [\![1;n]\!]$, ndR] pour que A soit inversible.

I. Calculer le déterminant de A lorsque $n = 2$ et $n = 3$. *Quand* $n = 2$,

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1.$$

Quand $n = 3$,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix} &= a_2a_3^2 + a_3a_1^2 + a_1a_2^2 - a_2a_1^2 - a_3a_2^2 - a_1a_3^2 \\ &= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2). \end{aligned}$$

II. Première méthode.

1. Montrer que A est la matrice de l'application linéaire F définie dans la question **A.II.1** dans des bases bien choisies.

2. En déduire que si les a_k sont deux à deux distincts alors A est inversible.

3. Qu'en est-il si deux des a_k sont égaux ?

4. Conclure.

▶ **1.** *Considérons la base* $\mathcal{F} = (1, X, X^2, \dots, X^{n-1})$ *de* $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. *Par définition de l'application* F, $F(X^{k-1}) = (a_1^{k-1}, \dots a_n^{k-1})$ *pour tout* $k \in [\![1;n]\!]$. *Donc* A *est la matrice de* $F\colon \mathbb{R}_{n-1}[X] \to \mathbb{R}^n$ *dans les bases* $\mathcal{F}$ *au départ et* $(e_1, \dots, e_n)$ *à l'arrivée.*

▶ **2.** *Nous avons vu à la question* **A.II.3** *que si les a_k sont deux à deux distincts, alors F est bijective. Puisque A représente F, A est inversible dans ce cas.*

▶ **3.** *Si $a_i = a_j$ avec $i, j \in [\![1; n]\!]$ et $i \neq j$, alors les lignes de A d'indice i et j sont égales, en particulier elles sont colinéaires, donc* $\det A = 0$.

▶ **4.** *D'après les questions* **D.II.2** *et* **D.II.3**, *A est inversible si et seulement si les a_k sont deux à deux distincts.*

III. Seconde méthode On considère le polynôme

$$P(X) = (X - a_1) \cdots (X - a_{n-1}).$$

1. Montrer qu'il existe des nombres réels $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-2}$ tels que

$$P(X) = X^{n-1} + \lambda_{n-2} X^{n-2} + \cdots + \lambda_0.$$

2. On note $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de A. Montrer que

$$C_n + \lambda_{n-2} C_{n-1} + \cdots + \lambda_0 C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ P(a_n) \end{pmatrix}.$$

3. En déduire que

$$\det(A) = P(a_n) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}$$

4. Montrer que

$$\det(A) = \prod_{1 \leqslant k < l \leqslant n} (a_l - a_k).$$

5. Conclure.

▶ **1.** *Par définition, P est un polynôme unitaire de degré $n - 1$.*

▶ **2.** *Calculons :*

$$\begin{aligned} C_n + \lambda_{n-2} C_{n-1} + \cdots + \lambda_0 C_1 &= \begin{pmatrix} a_1^{n-1} + \lambda_{n-2} a_1^{n-2} + \cdots + \lambda_0 \\ \vdots \\ a_{n-1}^{n-1} + \lambda_{n-2} a_{n-1}^{n-2} + \cdots + \lambda_0 \\ a_n^{n-1} + \lambda_{n-2} a_n^{n-2} + \cdots + \lambda_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P(a_1) \\ \vdots \\ P(a_{n-1}) \\ P(a_n) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

d'après la question **D.III.1**. *Or $P(a_k) = 0$ pour $k \in [\![1; n-1]\!]$ étant donné que $(X - a_k)$ divise P dans ce cas. Ceci prouve l'identité demandée.*

▶ **3.** *D'après le caractère multilinéaire alterné du déterminant, on peut ajouter à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes sans le changer. Donc d'après la question* **D.III.2**, *en remplaçant* C_n *par* $C_n + \lambda_{n-2}C_{n-1} + \cdots + \lambda_0 C_1$,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & 0 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & 0 \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-2} & 0 \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & P(a_n) \end{vmatrix}.$$

Par développement suivant la dernière colonne on en déduit l'inégalité demandée.

▶ **4.** *Ceci se démontre par récurrence sur* n

Initialisation: *Si* $n = 1$, *le produit* $\prod_{1 \leqslant k < l \leqslant n} (a_l - a_k)$ *est indexé par l'ensemble vide, donc égal à* 1, *ce qui est égal au déterminant de la matrice* $A = 1$.

Hérédité: *Supposons* $n \geqslant 2$. *Alors d'après la question* **D.III.3** *et par hypothèse de récurrence,*

$$\begin{aligned} \det(A) = P(a_n) & \prod_{1 \leqslant k < l \leqslant n-1} (a_l - a_k) \\ &= (a_n - a_1) \cdots (a_n - a_{n-1}) \prod_{1 \leqslant k < l \leqslant n-1} (a_l - a_k) \\ &= \prod_{1 \leqslant k < l \leqslant n} (a_l - a_k). \end{aligned}$$

▶ **5.** $\mathbb{R}$ *est un corps, en particulier c'est un anneau intègre : un produit (fini) de réels est nul si et seulement si l'un de ces réels est nul. Donc* $\det A = 0$ *si et seulement s'il existe* $\{i, j\}$ *avec* $i \neq j$ *tels que* $a_i - a_j = 0$. *Autrement dit* A *est inversible si et seulement si les* a_k *sont distincts deux à deux.*

Partie E. On fixe trois points distincts A_1, A_2, A_3 du plan affine euclidien. On recherche toutes les paraboles de ce plan passant par A_1, A_2 et A_3.

I. Dans cette question, on impose en plus aux paraboles recherchées d'avoir un axe parallèle à une droite D donnée. On choisit un repère orthonormé du plan tel que D ait pour équiation $x = 0$. Par définition, les paraboles d'axe parallèle à D sont les courbes d'équation

$$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,$$

avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \neq 0$. Les coordonnées du point A_i dans ce repère sont notées (a_i, b_i) pour $1 \leqslant i \leqslant 3$.

1. Montrer que la recherche des paraboles d'axe parallèle à D et passant par les points A_1, A_2 et A_3 est équivalente à la recherche des solutions (γ, β, α) avec $\alpha \neq 0$, du système :

$$(S) \colon \begin{cases} \gamma + a_1\beta + a_1^2\alpha & = b_1, \\ \gamma + a_2\beta + a_2^2\alpha & = b_2, \\ \gamma + a_3\beta + a_3^2\alpha & = b_3. \end{cases}$$

2. Montrer que si deux des points A_i ont la même abscisse (S) n'a aucune solution.

3. On suppose que les abscisses des points A_i sont deux à deux distinctes.

a. Montrer que le système (S) possède une unique solution (γ, β, α).

b. Exprimer α sous la forme d'un quotient de déterminants.

c. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes.

i. $\alpha = 0$.

ii. $\begin{vmatrix} a_2 - a_1 & b_2 - b_1 \\ a_3 - a_1 & b_3 - b_1 \end{vmatrix} = 0$.

iii. A_1, A_2 et A_3 sont alignés.

4. Montrer que les problème admet une solution si et seulement si A_1, A_2 et A_3 ne sont pas alignés et aucune des droites (A_1A_2), (A_2A_3) et (A_1A_3) n'est parallèle à D.

▶ **1.** *Dire que (γ, β, α) est solution du système (S), c'est dire que (a_i, b_i) est sur la courbe d'équation $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$. Or cette courbe est une parabole d'axe parallèle à D, et toutes les paraboles d'axe parallèle à D ont une équation de cette forme.*

▶ **2.** *Par hypothèse les points A_1, A_2 et A_3 sont distincts. Donc si A_1 et A_2, disons, ont la même abscisse $a_1 = a_2$, alors ils ont des ordonnées distinctes, $b_1 \neq b_2$. Mais $\gamma + a_1\beta + a_1^2\alpha = \gamma + a_2\beta + a_2^2\alpha$. Donc le système (S) n'a pas de solution.*

▶ **3. a.** *D'après la question* **A.II.3** *pour $n = 2$, le point (b_1, b_2, b_3) possède un antécédent dans $\mathbb{R}_2[X]$ par l'application F.*

b. *D'après la règle de Cramer,*

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 1 & a_2 & b_2 \\ 1 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1b_2 - a_2b_1 + a_2b_3 - a_3b_2 + a_3b_1 - a_1b_3}{(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)}$$

où l'on a utilisé la valeur du déterminant de Vandermonde d'ordre 3 *établi dans la partie* **D**.

c. *Supposons* **i.** *Alors d'après la question* **E.I.3.b**,

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 1 & a_2 & b_2 \\ 1 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & * & * \\ 0 & a_2 - a_1 & b_2 - b_1 \\ 0 & a_3 - a_1 & b_3 - b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & b_2 - b_1 \\ a_3 - a_1 & b_3 - b_1 \end{vmatrix}.$$

Supposons **ii.** *Alors les vecteurs $\overrightarrow{A_1A_2}$ et $\overrightarrow{A_1A_3}$ sont colinéaires. Donc A_1, A_2 et A_3 sont alignés.*

Supposons **iii.** *Alors il existe une droite affine passant par A_1, A_2 et A_3. Cette droite est représentée par une équation de la forme $y = \beta x + \gamma$. Par unicité du polynôme d'interpolation, $\alpha = 0$.*

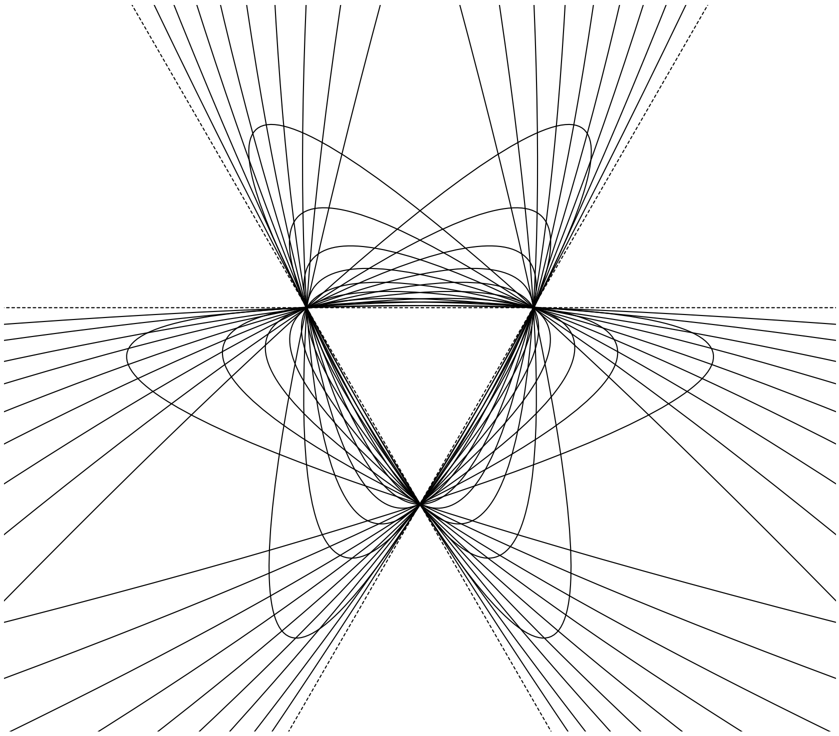


FIGURE 1. Paraboles passant par les sommets d'un triangle du plan affine.

► **4.** *D'après la question* **E.I.2***, il est nécessaire que les abscisses des points* A_1*,* A_2 *et* A_3 *soient toutes distinctes, atrement dit qu'aucune des droites* (A_1A_2)*,* (A_2A_3) *et* (A_1A_3) *ne soit parallèle à* D*. D'après la question* **E.I.3.c***, il est nécessaire que* A_1*,* A_2 *et* A_3 *ne soient pas alignés. D'après la question* **E.I.3.a***, quand ces deux conditions sont réunies, le problème tel que défini dans l'énoncé de la question* **E.I** *admet une solution.*

II. 1. On suppose A_1, A_2 et A_3 alignés. En utilisant les résultats précédents, montrer qu'il n'existe aucune parabole passant par A_1, A_2 et A_3.

2. On suppose que A_1, A_2 et A_3 ne sont pas alignés. Montrer qu'il existe une infinité de paraboles passant par A_1, A_2 et A_3 et préciser les directions dde leurs axes.

► **1.** *Si par l'absurde il y existait une parabole passant par* A_1*,* A_2 *et* A_3*, alors en posant* D *son axe, il y aurait une parabole d'axe parallèle à* D *passant par* A_1*,* A_2 *et* A_3*. Nous avons montré à la question* **E.I.4** *que ce problème n'a pas de solution quand* A*,* B *et* C *sont alignés.*

► **2.** *Les vecteurs non nuls* $\overrightarrow{A_1A_2}$*,* $\overrightarrow{A_2A_3}$ *et* $\overrightarrow{A_1A_3}$ *définissent* 3 *directions du plan. Puisque le corps* $\mathbf{R}$ *est infini, il reste dans le plan une infinité de directions qui leur sont différentes. D'après la question* **E.I.4***, chacune des directions restantes est celle de l'axe d'une parabole passant par* A_1*,* A_2 *et* A_3*.*

Extraits du rapport de jury. « Le jury a été particulièrement attentif aux questions suivantes :

— Question **A.II.3** du premier problème Dans cette question, on demandait de montrer qu'une application linéaire était bijective, en s'appuyant sur un argument de dimension finie. Environ 22 % des candidats ont répondu correctement à cette question ; 36 % n'ont pas répondu correctement ou de manière incomplète ; 42 % n'ont pas abordé cette question. [...]

— Question **D.III.3** du premier problème Il s'agissait ici d'exploiter les propriétés du déterminant. Environ 19 % des candidats ont répondu correctement à cette question ; 12 % n'ont pas répondu correctement ou de manière incomplète ; 61 % n'ont pas abordé cette question. »

« Le théorème de Rolle, qui semble assez bien connu, est souvent énoncé avec des hypothèses trop fortes[2] ; il est également parfois confondu avec le théorème des accroissements finis. »

« La gestion des indices est perfectible dans beaucoup de copies ; ainsi la partie **A** du premier problème a révélé de nombreuses erreurs d'écriture : par exemple, pour écrire $L_k(a_i)$ sous forme d'un produit, il est nécessaire d'utiliser un indice muet que l'on ne peut noter ni i, ni k. »

Rappels de cours

Théorème de Rolle, interpolation et approximation.

Théorème. *Soient a et b deux nombres réels, avec $a \leqslant b$. Soit $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f atteint sa borne supérieure en un point de $[a;b]$.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite à valeurs dans $[a;b]$ telle que $f(x_n) \geqslant \sup f - \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. Une telle suite existe bien par définition de la borne supérieure. D'après la propriété de Bolzano-Weierstrass pour $[a;b]$, il existe $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ strictement croissante et $x \in [a;b]$ telles que $\lim_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = x$. Par continuité de f en x, $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(x_{\varphi(n)}) = \sup f$. □

Théorème (Lemme ou Théorème de Rolle)**.** *Soit $[a;b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$. Si $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Démonstration. Si $a = b$ il n'y a rien à montrer ; on supposera donc $a < b$. Si f est identiquement nulle, alors il suffit de prendre $c = \frac{a+b}{2}$; on supposera donc que f n'est pas identiquement nulle. Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer que $\sup_{[a;b]} f > 0$. D'après le théorème précédent, f étant continue, elle atteint son maximum en un point $\widetilde{c} \in [a;b]$; puisque $f(a) = f(b) = 0$, $\widetilde{c}$ est dans $]a;b[$. Montrons alors que $f'(\widetilde{c}) = 0$. Si par l'absurde ce n'est pas le cas, alors

— Ou bien $f'(\widetilde{c}) > 0$, auquel cas il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in [\widetilde{c}, \widetilde{c} + \varepsilon]$, $f(x) \geqslant f(\widetilde{c}) + \frac{1}{2}f'(\widetilde{c})(x - \widetilde{c}) > f(\widetilde{c}) = \sup f$.

— Ou bien $f'(\widetilde{c}) < 0$, auquel cas il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in [\widetilde{c} - \varepsilon, \widetilde{c}]$, $f(x) \geqslant f(\widetilde{c}) - \frac{1}{2}f'(\widetilde{c})(\widetilde{c} - x) > f(\widetilde{c}) = \sup f$.

Les deux cas mènent à une contradiction, ce qui conclut la preuve. □

Attention, le théorème ne s'applique pas aux fonctions f à valeurs dans $\mathbb{C}$ (a fortiori à valeurs vectorielles). On pourra penser à

$$f\colon t \mapsto 1 - e^{it}$$

2. NdR : L'hypothèse faite sur la fonction f par l'énoncé dans la partie **B** était légèrement plus forte que celle demandée par le théorème de Rolle. On peut supposer que cela a pu faire douter des candidats. D'où l'importance de bien connaître les hypothèses des théorèmes.

qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et pour laquelle on vérifie $f(0) = f(2\pi) = 0$, mais dont la dérivée ne s'annule pas sur $[0; 2\pi]$.

Théorème (Théorème des accroissements finis)**.** *Soit $[a; b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. Soit f une fonction à valeurs réelles, continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$. Il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

On a vu une application de ce théorème dans le sujet **2021-1-B** (prolongement de la dérivée vers la borne d'un intervalle). Une autre application plus connue est la formule de Taylor-Lagrange, qui suit. (Démontrée dans la partie **C** du problème 2 du sujet **2016-1**.)

Théorème. *Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel. Soient $a \in \mathbb{R}$, et $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > a$. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur $[a; x]$, et n fois dérivable sur $]a; x[$. Alors il existe $\zeta \in]a; x[$ tel que*

$$\text{(TL)} \qquad f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(\zeta).$$

De plus, si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a; x]$, alors $f^{(n)}$ est bornée sur $[a; x]$ et

$$\text{(ITL)} \qquad \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leqslant \frac{(x-a)^n}{n!} \sup_{a \leqslant z \leqslant x} |f^{(n)}(z)|.$$

La formule obtenue à la question **B.III.1** du sujet **2016-1-Problème 1** est une forme délocalisée du théorème de Taylor-Lagrange. Le polynôme de Taylor qui apparaît dans le membre de gauche de (TL) est un « polynôme d'interpolation de f au point a avec multiplicité n » (on peut donner un sens précis à cette affirmation en passant à la limite où les a_k se confondent). De même, la question **BIII.3** est une variante de l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Le théorème de Rolle a d'autres applications notable, parmi lesquelles :

— Le théorème de Darboux : si f est une fonction à valeurs réelles dérivable sur un intervalle I, alors $f'(I)$ est un intervalle. En particulier, la propriété des valeurs intermédiaires ne caractérise pas les fonctions continues [3].

— L'interpolation d'Hermite, qui, sous la forme la plus simple, s'énonce comme suit : si f à valeurs réelles est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[0, 1]$, et si $f(0) = f'(0) = f(1) = f'(1) = 0$ alors pour tout $x \in [0; 1]$,

$$|f(x)| \leqslant \frac{\max |f^{(4)}(x)|}{24} x^2(1-x)^2,$$

ce qui constitue encore un cas limite d'interpolation de Lagrange sur $[0, 1]$ avec $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 = a_4 = 1$.

Méthodes linéaires en géométrie affine. La question **E.I.3** du premier problème de **2016-1** demandait d'établir une équivalence entre des conditions traduisant l'alignement de trois points dans le plan affine réel. Nous donnons ici un cadre théorique pour cette question. Il est utile de représenter le plan affine réel $\mathcal{P}$ dans $\mathbf{R}^3$ muni du système de coordonnées x, y, z par le plan d'équation $z = 1$ (dans le cas de la question **E.I.3**, c'est la première coordonnée qui est fixée égale à 1). $\mathcal{P}$ hérite

3. Toutefois, on peut montrer que si f envoie tout segment sur un segment et si $f^{-1}(x)$ est fermé pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors f est continue.

alors d'un repère privilégié et de coordonnées (x, y) par restriction des coordonnées de $\mathbf{R}^3$.

Proposition (Condition d'alignement)**.** *Dans $\mathcal{P}$, les points $A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$ et $A_3(x_3, y_3)$ sont alignés si et seulement si*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Démonstration. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, soit u_i le vecteur de $\mathbf{R}^3$ de coordonnées $(x_i, y_i, 1)$. Alors les points A_1, A_2 et A_3 sont alignés si et seulement si les vecteurs u_1, u_2 et u_3 sont liés. □

Proposition (Condition de concourrance ou parallélisme)**.** *Dans $\mathcal{P}$, les droites*

$$\begin{aligned} \Delta_1 : a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ \Delta_2 : a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \\ \Delta_3 : a_3 x + b_3 y + c_3 = 0 \end{aligned}$$

sont parallèles ou concourrantes si et seulement si

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Démonstration. Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, soit Π_i le plan vectoriel de $\mathbf{R}^3$ d'équation

$$a_i x + b_i y + c_i z = 0.$$

Alors $\Delta_i = \Pi_i \cap \mathcal{P}$. Les droites Δ_i sont parallèles ou concourrantes si et seulement si Π_1, Π_2 et Π_3 ont une direction commune. Soit φ_i la forme linéarie qui à $(x; y; z) \in \mathbf{R}^3$ associe $a_i x + b_i y + c_i z \in \mathbf{R}$. Alors $\Pi_i = \ker \varphi_i$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, et dire que les Π_i ont une direction commune, c'est dire que les φ_i sont liées. □

Les énoncés précédents ont l'avantage de conférer aux trois objets (points ou droites) des rôles symétriques, alors que quand on formule la condition d'alignement sous la forme vectorielle dans $\mathbf{R}^2$, un choix doit être fait : les points de coordonnées (a_i, b_i) pour $i \in \{1, 2, 3\}$ sont alignés si et seulement si, par exemple

$$\begin{vmatrix} a_2 - a_1 & b_2 - b_1 \\ a_3 - a_1 & b_3 - b_1 \end{vmatrix} = 0;$$

mais on aurait aussi bien pu choisir

$$\begin{vmatrix} a_2 - a_1 & b_2 - b_1 \\ a_3 - a_2 & b_3 - b_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} a_3 - a_1 & b_3 - b_1 \\ a_3 - a_2 & b_3 - b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Rappels de cours relatifs à la séance précédente

Le critère de Riemann.

Théorème. *Soit $\alpha \in]1; +\infty[$. La série de terme général $n^{-\alpha}$, $n \geqslant 1$, est convergente.*

Démonstration. Par positivité de l'intégrale, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\frac{1}{n^\alpha} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha},$$

et la fonction $f\colon t\mapsto t^{-\alpha}$ admet pour primitive sur $[1,+\infty[$ la fonction $F : t \mapsto \frac{1}{1-\alpha}t^{1-\alpha}$. Donc pour tout $N\geqslant 2$,

$$\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n^\alpha}\leqslant\sum_{n=2}^{N}\int_{n-1}^{n}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}=\int_1^N\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}=\frac{1}{\alpha-1}\left(1-N^{1-\alpha}\right)\leqslant\frac{1}{\alpha-1}.$$

Puisque la série est de termes positifs et que ses sommes partielles sont majorées, elle converge. □

Quand $\alpha=2$, il existe une preuve plus élémentaire, pratiquée par le sujet **2021-1-VI** qui consiste à remarquer que pour tout $n\geqslant 2$,

$$\frac{1}{n}\leqslant\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$$

ce qui permet de majorer les sommes partielles par des sommes télescopiques. Notons que $\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=\int_{n-1}^{n}\mathrm{d}t/t^2$, donc cette preuve n'est pas très différente de celle du théorème, hormis le fait qu'elle ne fait pas apparaître l'intégrale.

Corollaire. *Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle ou complexe. S'il existe $\alpha>1$ réel tel que $u_n=O(1/n^\alpha)$, alors la série de terme général u_n est convergente.*

Démonstration. D'après le théorème, la suite (u_n) est **absolument convergente**, à valeurs dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, donc elle est convergente, en vertu du fait que les suites de Cauchy dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ convergent. □

Convergence simple et convergence uniforme. Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions définies sur I à valeurs réelles. Soit $f\colon I\to\mathbf{R}$. On considère les deux propriétés suivantes.

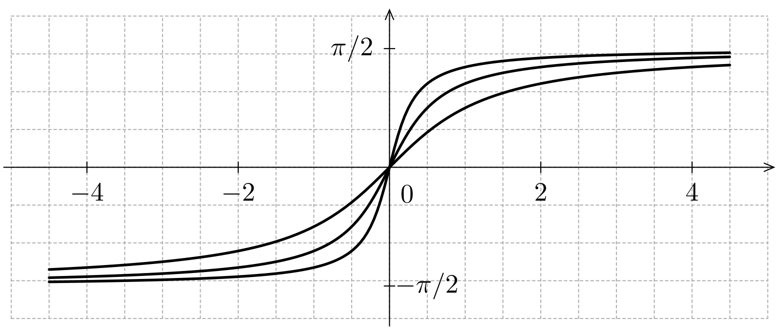
Convergence simple de (f_n) vers f: $\forall x\in I,\forall\varepsilon>0,\exists n_0\in\mathbf{N}^*,\forall n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant n_0\implies|f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon$.

Convergence uniforme de (f_n) vers f: $\forall\varepsilon>0,\exists n_0\in\mathbf{N}^*,\forall n\in\mathbf{N}^*,\forall x\in I,n\geqslant n_0\implies|f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon$.

Nous avons vu que si (f_n) est une suite de fonctions continues qui converge uniformément, alors la limite est continue. Une contraposée peut s'exprimer ainsi :

Proposition. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fonction continues sur I. S'il existe $f : I\to\mathbb{R}$ telle que (f_n) converge simplement vers f sur I, mais que f n'est pas continue sur I, alors (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur I.*

Considérons la suite de fonctions de terme général $f_n : \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f_n(x)=\arctan(nx)$, dont voici le graphe pour $n=1,2$ et 4.



Pour tout $x \in \mathbf{R}$, la limite de $f_n(x)$ quand n tend vers l'infini existe et

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} \pi/2 & x > 0 \\ -\pi/2 & x < 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

On appelle signe la fonction qui à $x \in \mathbf{R}$ associe 1 si $x > 0$, -1 si $x < 0$ et 0 si $x = 0$. Cette fonction n'est pas continue en 0. (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $x \mapsto \pi/2\,\mathrm{signe}(x)$. Donc f_n ne converge pas uniformément vers la fonction $f\colon x \mapsto \frac{\pi}{2}\,\mathrm{signe}(x)$.