Ellipsoïde de John-Loewner

Leçons

150 (ex) Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices (ici la congruence)

158 (dev) Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes

160 (ex) Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien

171 (dev) Formes quadratiques réelles

181 (dev) Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

203 (ex) Utilisation de la notion de compacité

219 (ex) Extremums : existence, caractérisation, recherche

Sources possibles [FGN14, Algèbre 3, 3.31, 3.38]

Avertissement Développement long. On doit donc admettre par exemple la proposition 2 qui serait immédiate avec le formalisme de l'algèbre extérieure.

Pré-requis Un théorème de réduction simultanée de deux formes quadratiques, par exemple dans le Ramis-et-Deschamps [RDO88, Algèbre 2, 1.3.4].

Théorème 1. *Soit E un espace euclidien. Soit K une partie relativement compacte de E dont 0 est un point intérieur. Il existe un unique ellipsoïde plein de volume minimal contenant K.*

On désigne par μ la mesure de Lebesgue sur E normalisée pour correspondre à la forme volume de la structure euclidienne.

(a) Volume des ellipsoïdes Soit $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique définie positive ; on lui attache un unique ellipsoïde

$$\mathcal{E}_q = \{x \in E \mid q(x) \leqslant 1\}$$

Il s'agit d'une partie mesurable de E ; on note $V_q = \int_E \mathbf{1}_{\mathcal{E}_q} \mathrm{d}\mu$ son volume. $q \leftrightarrow \mathcal{E}_q$ déinit une bijection entre l'espace $Q^{++}(E)$ des formes quadratiques définies positives sur E et l'ensemble des ellipsoïdes. Pour tout $q \in Q(E)$, on note $D(q)$ le déterminant d'une matrice de q dans une base orthonormée de E.

Proposition 2. *Si q_0 est la forme euclidienne standard de E, alors*[1]

$$V_q = \frac{1}{\sqrt{D(q)}} V_{q_0}. \tag{1}$$

Démonstration. D'après le théorème spectral il existe $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E telle que si $(x_1, \dots x_n)$ sont les formes coordonnées de $\mathcal{B}$, on peut écrire $q = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2$ avec les $a_i > 0$, et $D(q) = a_1 \cdots a_n$. Puisque $\mathcal{B}$ est orthonormée,

$$V_q = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{[0,1]} \left(a_1 x_1^2 + \cdots + a_n x_n^2\right) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n.$$

Faisant le changement de variables $y_i = \sqrt{a_i} x_i$, de jacobien $\mathcal{J} \equiv \prod_i \sqrt{a_i}$, on trouve

$$V_q = \frac{1}{\sqrt{a_1 \cdots a_n}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{[0,1]} \left(y_1^2 + \cdot + y_n^2\right) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = \frac{1}{\sqrt{D(q)}} V_{q_0}. \qquad \square$$

(b) Existence : Compacité On norme $Q(E)$par $N(q) = \sup_{q_0(x)=1} |q(x)|$. Puis on pose

$$\mathcal{A} = \left\{q \in Q^+(E) \mid K \subset \mathcal{E}_q\right\} = \left\{q \in Q^+(E) \mid \forall x \in K, q(x) \leqslant 1\right\}.$$

$\mathcal{A}$ est borné 0 est intérieur à K, il existe donc $\epsilon > 0$ tel que $B(0, \epsilon) \subset K$. Ainsi, $q \in \mathcal{A} \implies N(q) \leqslant 1/\epsilon$.

$\mathcal{A}$ est convexe, fermé dans $Q(E)$ Puisque 0 est intérieur, on a $q \geqslant 0$ sur $K \implies q \in Q^+(E)$ de sorte que

$$\mathcal{A} = \left\{q \in Q^+(E) \mid \forall x \in K, q(x) \in [0,1]\right\}$$

Il s'ensuit que $\mathcal{A}$ est convexe et fermé (en tant qu'intersection de convexes fermés).

$\mathcal{A}$ est non vide Puisque K est relativement compacte, elle est bornée dans E. Donc $tq_0 \in \mathcal{A}$, pour t assez petit.

Conclusion Etant donnés $Q(E)$ est un espace vectoriel normé de dimension finie, et $\mathcal{A}$ une partie fermée et bornée, $\mathcal{A}$ est compacte, non vide, et la fonction $D : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ atteint sa borne supérieure sur $\mathcal{A}$ en un certain $\tilde{q}$. $\mathcal{E}_{\tilde{q}}$ est alors un ellipsoïde de volume minimal, contenant K.

1. On ne précise pas V_{q_0}, ce n'est pas utile. Voir cependant la remarque 6.

(c) Unicité : Convexité

Lemme 3. *Soient q et q' dans $Q^{++}(E)$. Alors pour tout $\lambda \in [0,1]$ on a*

$$D\left((1-\lambda)\, q + \lambda q'\right) \geqslant D\left(q\right)^{1-\lambda} D\left(q'\right)^{\lambda} \tag{2}$$

Avec égalité ssi $q = q'$.

Démonstration. D'après le théorème de réduction simultanée, il existe une base $\mathcal{B}_2$ de E qui est orthonormée pour E et orthogonale pour q' ; autrement dit q a pour matrice I_n et q', $D = \operatorname{diag}(d_1, \dots d_n)$ avec les $d_i > 0$. Puisque l'inégalité 2 à montrer est homogène, on peut se contenter de calculer les déterminants dans la base $\mathcal{B}$ (bien qu'elle ne soit pas forcément orthonormée) soit à montrer :

$$\det\left((1-\lambda)\, I_n + \lambda D\right) \geqslant \left(\det D\right)^{\lambda}.$$

Quitte à prendre les logarithme, on se ramène à montrer

$$\sum_{i=1}^{n} \ln\left((1-\lambda) + \lambda d_i\right) \geqslant \lambda \ln d_i.$$

Il s'agit simplement de l'inégalité de concavité pour le log entre 1 et d_i. Le cas d'égalité est celui de $d_i = 1$ pour tout i, c'est-à-dire $q = q'$. ☐

Si maintenant $q \neq q'$ dans $\mathcal{A}$ sont telles que $D\left(q\right) = D\left(q'\right) = \max_{q \in \mathcal{A} \cap Q^{++}(E)} D$, alors posons $q'' = \left(q + q'\right)/2$. Comme $\mathcal{A}$ est convexe, q'' est dans $\mathcal{A}$ et d'après le cas d'inégalité strcte de 2,

$$D\left(q''\right) > D\left(q\right),$$

ce qui serait absurde.

(d) Une application : forme quadratique invariante Le résultat précédent joue un rôle fondamental, par exemple dans la théorie des représentations des groupes topologiques compacts (il assure la semi-simplicité) :

Théorème 4. *Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, G un sous-groupe compact de $\mathbf{GL}(E)$. Il existe une forme quadratique q définie positive sur E telle que*

$$G \subset O\left(q\right).$$

Démonstration. Donnons une preuve dans le langage des actions de groupes [2]. Soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des parties de E relativement compactes contenant 0 dans leur intérieur. On dispose d'une action naturelle de G sur E ; celle-ci induit deux

2. Autre exemple de ce précepte : $\mathbf{SL}(2,\mathbb{Z})$ agit à droite sur les formes quadratiques binaires entières de discriminant < 0, et à gauche sur $\mathbb{H}$; action qui se restreint pour les imaginaires quadratiques, à l'action équivariante sur les racines de la forme deshomogénéisée.

actions de G (à gauche et à droite, respectivement) sur $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{F}(E, \mathbb{R})$, puis par restriction :

$$\begin{array}{rl} G \curvearrowright \mathcal{R} & g.K = g(K) \\ Q(E) \curvearrowleft G & (q.g)(x) = q(g(x)) \end{array}$$

On peut transformer la seconde action en une action à gauche en posant $g.q(x) = q\left(g^{-1}(x)\right)$. On dispose alors d'un morphisme de G-ensembles $\mathcal{R} \to Q(E)$ qui est la propriété de John-Loewner. On cherche un point stable de la 2e action, pour ceci on en cherche un dans le G-ensemble $\mathcal{R}$. C'est ce qui conduit à considérer

$$K_0 = G.B = \{g(x) \mid g \in G,\ x \in B\}.$$

K est compacte en tant qu'image continue du compact $G \times B$. De plus, 0 est intérieur : on se donne $g \in G$ quelconque, $g.B$ contient une boule ouverte centrée en 0. Ainsi $K_0 \in \mathcal{R}$ et c'est un point fixe pour la première action : donc si q est la forme quadratique de l'ellipsoïde $\mathcal{E}_q$, q est G-invariante. □

Remarque 5. On se demande à quoi ressemble cet ellipsoïde, par exemple, si K est un carré ou un triangle équilatéral plein dans $\mathbb{R}^2$, symétrique par rapport à 0. Si $\mathcal{E}_q$ est l'ellipsoïde de John-Loewner dans ce cas, par unicité, le groupe des isométries de $\mathbb{R}^2$ laissant stable $\mathcal{E}_q$ contient le groupe des isométries de K, qui est plus grand que le groupe des isométries générique d'une conique : $\mathcal{E}_q$ est un disque dont la frontière passe par les sommets.

Remarque 6 (Au sujet de V_{q_0}). Bien que cela ne soit pas essentiel pour ce qui précède, le « vrai » volume d'une boule euclidienne par rapport à la mesure de Lebesgue standard $\lambda^{\otimes n}$ est

$$V_n = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)} \tag{3}$$

Pour démontrer (3) le manière classique est de calculer de deux manières différentes l'intégrale

$$I_n = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-x_1^2 - \cdots - x_n^2} dx_1 \cdots dx_n \ :$$

à l'aide du théorème de Fubini-Tonelli d'une part, à l'aide du changement de variables $r^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ d'autre part. En particulier,

$$\frac{V_{n+2}}{V_n} = \frac{n\pi}{n+2} \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(n/2+1)} = \frac{2\pi}{n+2}$$

d'après l'équation fonctionnelle de la fonction Γ. Ceci implique que V_n est maximal pour $n = 5$ ou 6 (en fait $n = 5$) et décroît ensuite ; par ailleurs

$$\lim_{n \to +\infty} V_n = 0.$$

En particulier, l'ellipsoïde de John-Loewner du cube $[-1/2, 1/2]^n$ dans $\mathbf{R}^n$ voit son diamètre tendre vers... l'infini (!) quand n grandit.

Remarque au sujet de l'orthogonalisation simultanée de deux formes bilinéaires symétriques (ou quadratiques) Le théorème principal est le suivant

Théorème 7. *Soit (E, φ) un espace quadratique (ceci suppose φ non dégénérée) de dimension finie et ψ une forme bilinéaire symétrique. On note d_φ (resp. d_ψ) l'application $E \to E^\star$ associée à φ (resp. à ψ). Alors il existe une base de E orthogonale pour φ et ψ si et seulement si $u = d_\varphi^{-1} d_\psi$ est diagonalisable.*

Remarque 8. d_φ est inversible (φ est non dégénérée) mais ce n'est pas le cas de d_ψ a priori. Noter aussi que u est autoadjoint pour φ.

En corollaire, il découle du théorème spectral et du précédent théorème que si E un espace vectoriel réel, φ et ψ bilinéaires sur E avec φ est définie positive, alors il existe une base orthonormale pour φ, orthogonale pour ψ. On retrouve aussi que si k est quadratiquement clos et u diagonalisable, il existe une base à la fois orthonormale pour φ et orthogonale pour ψ.

Références

[FGN14] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Exercices de mathématiques des oraux de l'École polytechnique et des Écoles normales supérieures.* Enseignement des mathématiques. Cassini, 2008–2014.

[RDO88] E. Ramis, C. Deschamps, and J. Odoux. *Algèbre.* Cours de mathématiques spéciales : classes préparatoires et enseignement supérieur. Masson, 1988.