Quelques corrections des TD - MATH S1

Gabriel Pallier

17 janvier 2017

2 Trigonométrie

2.III Fonctions trigonométriques réciproques

Exercice 2.III.4

Soit f la fonction définie par $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$. Quel est l'ensemble de définition de f ? Calculer f'. Que peut-on en déduire ? Calculer $f(1)$ et $f(-1)$.

Solution de l'exercice 2.III.4

f est définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ privé de 0, qui est la réunion des deux intervalles $I^- =]-\infty, 0[$ et $I^+ =]0, +\infty[$. Par composition, f est dérivable sur ces deux intervalles, et d'après la formule de dérivation d'une composée,

$$\forall x \in I^- \cup I^+,\ f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1+x^{-2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

Or une fonction dérivable sur un intervalle, et dont la dérivée est nulle, est constante sur cet intervalle. Donc f est constante sur I^- et sur I^+. Pour connaître les valeurs de ces constantes, il suffit d'évaluer en -1 et 1 respectivement. On obtient :

$$\forall x < 0, f(x) = f(-1) = -\pi/2 \tag{1}$$
$$\forall x > 0, f(x) = f(1) = \pi/2. \tag{2}$$

7 Equations différentielles

7.I Equations différentielles du premier ordre

Exercice 7.I.1

Résoudre les équations différentielles suivantes

a. $yy' = x$

b. $xyy' = 1$

c. $xy'y^3 = -2$

d. $yy' = 1 + \ln x$

e. $(1+x^2)\sqrt{y}y' = 2x$

f. $2y' = (1+y)xe^x$

Solution de l'exercice 7.I.1

Ces équations sont à variables séparables. On suit la méthode du cours

a.

b.

c.

d.

e. Cecit se réécrit $(1+x^2)\sqrt{y}dy = 2xdx$, soit après séparation des variables $\sqrt{y}dy = \frac{2x}{1+x^2}dx$. On primitive :

$$\frac{2}{3}y\sqrt{y} = \ln(1+x^2) + k, k \in \mathbb{R},$$

d'où $y = \left(\frac{3}{2}\ln(1+x^2) + k\right)^{2/3}, k \in \mathbb{R}$, quitte à changer de constante k.

f. Ceci se réécrit $\frac{2dy}{1+y} = xe^x dx$. On primitive (par IPP à droite) :

$$2\ln(1+y) = (x-1)e^x + k,$$

donc $y = k\exp\frac{(x-1)e^x}{2}$.

Exercice 7.I.2

Résoudre les équations différentielles suivantes où l'inconnue est la variable x (on ne précisera pas les intervalle de définition)

a. $y' + xy = x^2 + 1$

b. $y' - y = x^2 + 1$

c. $xy' - 2y = x^2$

d. $2y' - xy = x$

e. $(1-x)y' - y(x^2+5) = 0$

f. $y' + y = x^2e^x$

g. $xy' - y = x^2e^x$

h. $y' + x(y+2) = x$

i. $y' + 2(y-2) = e^x$

Solution de l'exercice 7.I.2

a. On commence par résoudre l'équation homogène

$$y' + xy = 0. \tag{3}$$

Il s'agit d'une équation de la forme $ay' + by = 0$, de solution $k \exp(-\int \frac{b(x)}{a(x)} dx)$ avec $k \in \mathbb{R}$. Ici donc, les solutions de l'équation homogène sont les

$$y_h(x) = ke^{-\frac{x^2}{2}},$$

où k est une constante réelle. Ensuite, on cherche une solution particulière. Ici la fonction $y_p(x) = x$ convient. Finalement, l'ensemble des solutions est celui des fonctions de la forme

$$y(x) = x + ke^{-\frac{x^2}{2}}.$$

b. L'équation homogène est

$$y' - y = 0, \tag{4}$$

dont la solution est $y(x) = ke^x$. Cherchons une solution particulière parmi les polynômes ; le terme de droite nous informe que l'on peut se limiter au degré au plus 2, c'est-à-dire $y(x) = ax^2 + bx + c$, où les coefficients a, b, c sont indéterminés. Nous voulons donc

$$2ax + b - (ax^2 + bx + c) = x^2 + 1. \tag{5}$$

L'identification donne le système formé des équations $a = -1$, $2a - b = 0$ et $b - c = 1$, d'où $a = -1$, $b = -2$ et $c = -3$. On a trouvé une solution particulière ; la solution générale est

$$y(x) = -(x^2 + 2x + 3) + ke^x.$$

c. Equation homogène :

$$xy' - 2y = 0. \tag{6}$$

Les solutions de cette équation sont les $y(x) = kx^2$, $k \in \mathbb{R}$. Pour trouver une solution particulière, appliquons la méthode de Lagrange : cherchons y sous la forme $y(x) = k(x)x^2$, où k est une fonction inconnue. On remplace dans l'équation, cela donne

$$xy' - 2y = 2kx^2 + k'x^3 - 2kx^2 = x^2,$$

d'où $k'(x) = \frac{1}{x}$. On trouve donc comme solution particulière $y(x) = x^2 \ln x$. La solution générale est

$$y(x) = x^2(k + \ln x),$$

avec $k \in \mathbb{R}$.

d. Equation homogène $2y' - xy = 0$, de solutions $y_h(x) = ke^{x^2/4}$. On remarque aussi que $y_p = -1$ est solution particulière "évidente". Nous concluons que la solution générale est

$$y(x) = ke^{x^2/4} - 1, k \in \mathbb{R}.$$

e. Cette équation est déjà homogène, c'est une bonne nouvelle, cela signifie qu'il n'y a qu'une primitive à calculer. Allons-y :

$$\begin{aligned}
y(x) &= K_0 \exp\left(\int \frac{1-x}{x^2+5}\,dx\right) = \exp\left(\int \frac{dx}{x^2+5} - \int \frac{x}{x^2+5}\,dx\right) \\
&= K_0 \exp\left(\frac{1}{5}\int \frac{dx}{(x/\sqrt{5})^2+1} - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+5}\,dx\right) \\
&= K_0 \exp\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\arctan(x/\sqrt{5}) - \frac{1}{2}\ln(x^2+5) + k\right) \\
&= K\sqrt{x^2+5}e^{\frac{\sqrt{5}}{5}\arctan(x/\sqrt{5})},
\end{aligned}$$

où K est une constante réelle.

f. La solution de l'équation homogène est $y(x) = e^{-x}$. Pour trouver une solution particulière, employons la méthode de Lagrange.

$$y'(x) + y(x) = k'(x)e^{-x} - k(x)e^{-x} + k(x)e^{-x} = x^2e^x,$$

c'est-à-dire $k'(x) = x^2e^{2x}$. Nous savons primitiver ceci par IPP :

$$\int x^2e^{2x}dx = x^2\frac{e^{2x}}{2} - \int 2x\frac{e^{2x}}{2}\,dx = \frac{x^2}{2}e^{2x} - \frac{x}{2}e^{2x} + \int \frac{e^{2x}}{2}\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)e^{2x}.$$

La solution générale est donc

$$y(x) = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)e^x + ke^{-x},$$

où k est une constante réelle.

g. L'équation homogène $xy' - y = 0$ a pour solutions les $y_h(x) = kx$, où k est une constante réelle. La technique de variation de la constante nous amène à rechercher une solution particulière sous la forme $y_p(x) = k(x)x$, où k est une fonction inconnnue. Or le calcul donne

$$xy'(x) - y(x) = x^2e^x \iff k'(x) = e^x \iff k(x) = e^x + c,\ c \in \mathbb{R}$$

Finalement la solution générale est donc $y(x) = (k + e^x)x$, avec $k \in \mathbb{R}$.

h. Pour rendre le membre de gauche homogène en y, on réécrit l'équation sous la forme équivalente

$$y' + xy = -x.$$

L'équation homogène associée est $y' + xy = 0$, de solution k/x, $k \in \mathbb{R}$. Une solution évidente est $y = -1$. Donc la solution générale est $y(x) = -1 + k/x$.

i. De même, une équation équivalente est $y'+2y = e^x+4$. La solution de l'équation homogène est $y_h(x) = k/x^2$, et une solution évidente est $y(x) = e^x/2 + 2$. La solution générale est donc $y(x) = \frac{e^x}{2} + 2 + k/x^2$, où k est une constante réelle.

7.II Equations différentielles linéaires du second ordre (à coefficients constants)

Exercice 7.II.3

Résoudre les équaions différentielles suivantes où l'inconnue est y et la variable x :

a. $y'' - y' - 6y = 3$

b. $y'' - y = x^2$

c. $y'' - 4y' + 4y = 2x + 1$

d. $y'' + 2y' + 2y = 0$

e. $y'' + 2y' + 2y = x^2 - 3x$

f. $y'' - 2y' + 3 = x^2$

Solution de l'exercice 7.II.3

a. L'équation homogène associée est $y'' - y' - 6y = 0$, elle-même d'équation caractéristique $r^2 - r - 6 = 0$. On calcule que $\Delta = 25 > 0$, donc il y a deux racines réelles simples qui sont 3 et -2, et la solution de l'équation homogène est

$$y_h(x) = Ae^{3x} + Be^{-2x},$$

où A et B sont des constantes réelles. Il reste à trouver une solution particulière. La fonction constante $y = -1/2$ convient à cela. C'est un cas particulier de la méthode du cours, dans le cas où le second membre est un polynôme.