Exercice

Triangle

Exercice 1 La concourance des médiatrices

Tracer un triangle quelconque ABC, et les médiatrices des segments [AB] et [AC] ; elles se coupent en O.

1. Tracer le cercle de centre O et passant par le point A. Que constate-t-on ?
2. La médiatrice de [BC] passe-t-elle par O ? Pourquoi ?

Exercice 2 Les propriétés du parallélogramme

À l'arrivée dans cet exercice, une sorcière mal intentionnée a balayé dans votre esprit toutes les propriétés du parallélogramme. Elle vous a même fait oublier que des quadrilatères appelés parallélogrammes existent.

On considère $ABCD$ un quadrilatère non croisé.

1. On suppose que (AB) est parallèle à (CD) et que (AD) est parallèle à (BC).
   a) Montrer que $\widehat{ABD} = \widehat{CDB}$.
   b) Que peut-on dire des angles $\widehat{ADB}$ et $\widehat{CBD}$?
   c) Montrer que les triangles ABD et BCD sont égaux, puis que $AB = CD$.
   d) Montrer que les côtés opposés de ABCD sont de même longueur.
2. * Montrer que si $AB = CD$ et $AD = BC$ alors (AB) est parallèle à (CD) et (AD) est parallèle à (BC). *On pourra prendre « à rebours » la question précédente.*
3. On suppose maintenant que $AB = CD$ et que (AB) et (CD) sont parallèles.
   a) On appelle I le point où les diagonales de ABCD se coupent. Montrer que les triangles ABI et CDI sont égaux.
   b) En déduire que les diagonales de $ABCD$ se coupent en leur milieu.
4. * Montrer que si les diagonales de ABCD se coupent en leur milieu, alors les côtés opposés de $ABCD$ sont de même longueur. *On pourra utiliser que deux angles opposés par le sommet sont égaux.*

Exercice 3 Construction de la parallèle

On considère une droite Δ du plan, et un point C qui n'est pas sur la droite Δ.

1. Décrire deux procédures pour tracer la parallèle à Δ passant par C à la règle non graduée et au compas.

2. Le cas échéant, justifier vos procédures au moyen des propriétés du parallélogramme démontrées dans l'Exercice 2.
3. Comparer vos procédures au regard du temps de mise en oeuvre, de leur précision, et de leur difficulté de justification.

Exercice 4 (*« Géométrie à l'École »* [1])

Voici un jeu constitué des dix étiquettes.

Deux angles droits seulement	Quatre angles droits
Côtés égaux deux à deux	Deux côtés égaux seulement
Quatre côtés égaux	Côtés opposés parallèles
Deux côtés parallèles seulement	Diagonales égales
Diagonales perpendiculaires	Diagonales se rencontrant en leur milieu

On choisit au hasard deux étiquettes parmi les dix et on doit essayer de dessiner un quadilatère qui a ces deux propriétés.

1. Avec un tel dispositif, combien de tirages différents est-il possible de réaliser ? Justifiez votre réponse.
2. Un enfant a selectionné les deux étiquettes suivantes :

   Deux angles droits seulement | Diagonales perpendiculaires

   a) En se limitant à la première propriété deux angles droits seulement, tracer à main levée les deux configurations possible.

   b) En prenant en compte les deux propriétés construire à l'aide des outils de la géométrie (règle, équerre, compas) une figure correspondant à chacune des configurations possible. Rédiger leur programme de construction.
3. On choisit l'étiquette

   Deux côtés parallèles seulement.

   Trouver toutes les étiquettes incompatibles avec elle. Justifier les réponses.
4. On s'intéresse aux quadrilatères qui possèdent les deux propriétés

   Diagonales perpendiculaires | Diagonales égales

   Soit ABCD un tel quadrilatère, on appelle E, F, G, H les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CD] et [DA].

Exercice 5

Soit un triangle ABC rectangle en C et M un point de son hypoténuse. La perpendiculaire à [AC] passant par M coupe [AC] en E La perpendiculaire à [BC] passant par M coupe [BC] en F.

1. François Boule, *Savoir dire et savoir-faire*, IREM de Bourgogne.

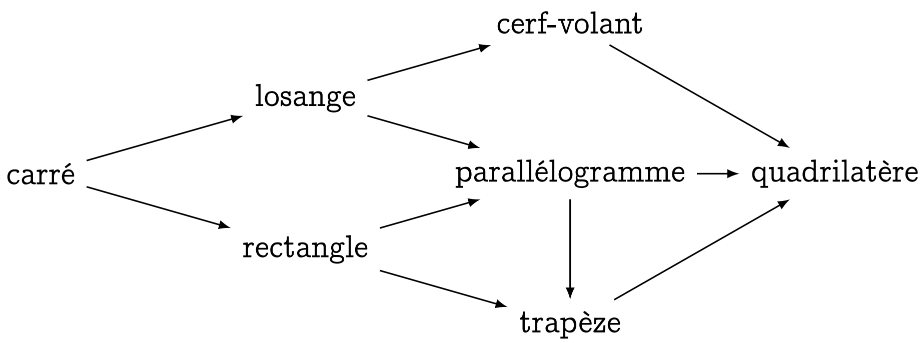
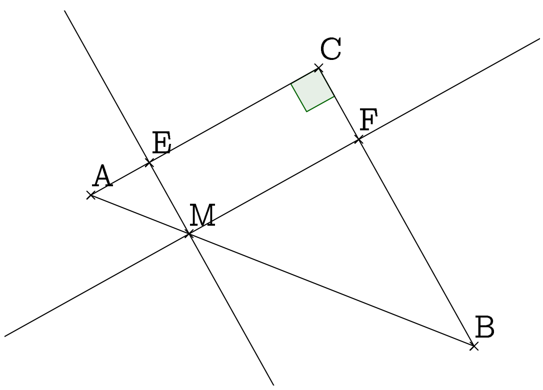


FIGURE 1. Les quadrilatères



a) Quelle est la nature du quadrilatère $ECFM$?

b) Quelle relation y a-t-il entre EF et CM, quelle que soit la position de M ?

Exercice 6

Soit $ABCD$ un parallélogramme, qui a un angle droit et deux côtés adjacents de même longueur. Que peut-on dire de $ABCD$?

Exercice 7 (*CRPE Amiens 1995*)

Soit (C) un cercle de centre O et de diamètre [AB] tel que AB $= 8\,\text{cm}$; C un point du cercle tel que AC $= 4\,\text{cm}$; D le point tel que C soit le milieu du secgment [AD] et E le point tel que C soit le milieu du segment [BE].

a) Quelle est la nature du triangle ABC ?

b) Quelle est la nature du triangle ACO ?

* c) Montrer que les droites (OC) et (BD) sont parallèles.

d) Montrer que le triangle ABD est équilatéral.

e) Que représente la droite (BC) pour le segment $[AD]$?

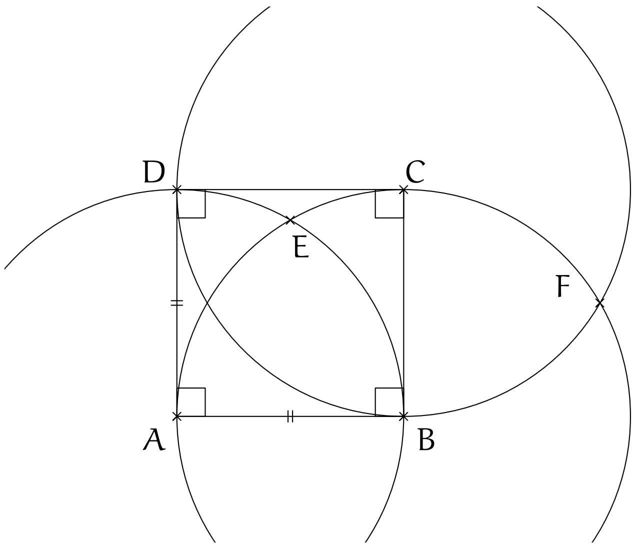
f) Quelle est la nature du quadrilatère $ABDE$?

Exercice 8

ABC est un triangle rectangle et isocèle, de sommet principal C. La droite (d) passe par A et elle est parallèle à (BC). La bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ coupe la droite (d) au point E. Quelle est la nature du triangle ABE ?

* Exercice 9

Sur la figure suivante, ABCD est un carré. Montrer que les points D, E et F sont alignés.



* Exercice 10 La concourance des hauteurs

On considère un triangle ABC.

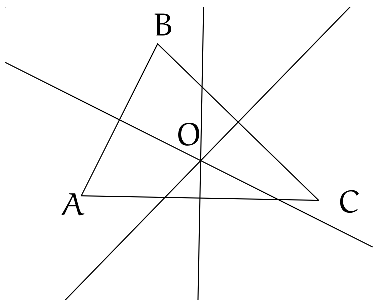
1. [2] Combien de parallélogrammes ayant les points A, B et C comme sommets peut-on construire ?
2. Construire ces parallélogrammes et vérifier qu'ils forment tous ensemble un triangle PQR de sorte que A est le milieu de [PQ], B est le milieu de [QR] et C est le milieu de [RP].
3. a) Montrer que les hauteurs de ABC sont des médiatrices de PQR (précisez lesquelles, pour chacune des hauteurs).
   b) En déduire que les hauteurs de ABC concourent en un point H (On pourra utiliser le résultat de l'exercice 1).
4. * a) Montrer que ABC et PQR ont le même centre de gravité. *On pourra utiliser une propriété du parallélogramme bien choisie.*
   ** b) En déduire que le centre de gravité G, le centre du cercle circonscrit O et l'orthocentre H de ABC sont alignés. *On pourra utiliser que* G *est situé aux deux tiers de la médiane issue de chaque sommet.*

Solutions de

Solution de l'exercice 1

2. CRPE - Maths : Ecrit 2022 - Nouveau concours, Vuibert.

1. On constate que le cercle de centre O et passant par le point A passe aussi par B et C. En effet, O est sur la médiatrice de $[AB]$ donc ce cercle passe par B. De même, O est sur la médiatrice de $[AC]$ donc $OC = OA$, ce cercle passe par C. On en déduit que O est le centre du cercle circonscrit, et par la même occasion, que ce dernier existe et est unique.
2. Oui, car $OB = OA$ et $OA = OC$ donc $OB = OC$.



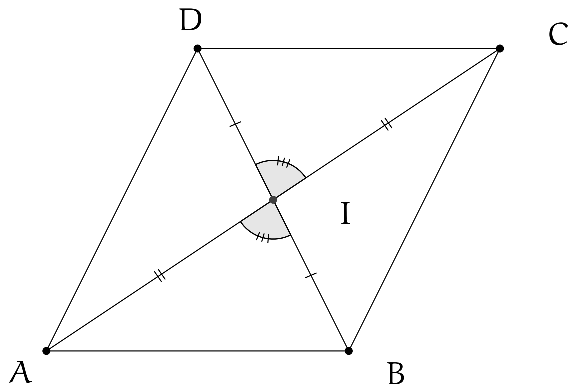
Solution de l'exercice 2

1. a) Les angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{CDB}$ sont des angles alterne-internes formés par la droite (BD), sécante commune aux droites (AB) et (CD). Or (AB) et (CD) sont parallèles, donc $\widehat{ABD} = \widehat{CDB}$.
   b) Les angles $\widehat{ADB}$ et $\widehat{CBD}$ sont des angles alterne-internes formés par la droite (BD), sécante commune aux droites (AD) et (BC). Or (AD) et (BC) sont parallèles, donc $\widehat{ADB} = \widehat{CBD}$.
   c) Les triangles ABD et BCD ont leur côté [BD] commun. D'autre part, les angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{CDB}$ d'une part, $\widehat{ADB}$ et $\widehat{CBD}$ d'autre part, sont égaux. Ces angles sont adjacents au côté [BD]. D'après le deuxième cas d'égalité des triangles (aussi appelé $\mathcal{ACA}$, Angle-Côté-Angle), ABD et BCD sont égaux. En particulier, leurs côtés homologues AB et CD sont de même longueur.
   d) On a montré que AB=CD. D'autre part, les côtés AD et BC sont homologues dans la paire de triangles égaux formée par ABD et BCD. Donc AD=BC.
2. Considérons les triangles ABD et BCD. Le côté [BD] est commun à ces deux triangles. De plus, AB=CD d'une part, et AD=BC d'autre part. D'après le premier cas d'égalité des triangles (aussi appelé $\mathcal{CCC}$, Côté-Côté-Côté), ABD et BCD sont égaux. Mais alors, les angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{BCD}$ sont égaux. Or ce sont des angles alternes-internes formés par la sécante commune (BD) aux droites (AB) et (CD). Donc ces droites sont parallèles. D'autre part, les angles $\widehat{ADB}$ et $\widehat{CBD}$ sont égaux. Or ce sont des angles alternes-internes formés par la sécante commune (BD) aux droites (AD) et (BC). Donc ces droites sont parallèles.
3. a) Nous savons que AB=CD. De plus, les angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{CDB}$ sont alternes-internes formés par la sécante commune (BD) aux droites (AB) et (CD) qui sont parallèles. Donc ces angles sont égaux. D'autre part, les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{DCA}$ sont alternes-internes formés par la sécante commune (AC) aux droites (AB) et (CD) qui sont parallèles.

Donc ces angles sont égaux. D'après le deuxième cas d'égalité des triangles, ABI et CDI sont égaux.

b) Les triangles ABI et CDI sont égaux. Les côtés [AI] et [IC] d'une part, [BI] et [ID] d'autre part, sont homologues dans cette paire de triangles. Ils sont donc égaux : $AI = IC$ et $BI = ID$. Puisque I est sur [AC], c'est le milieu de [AC] et puisque I est sur [BD], c'est le milieu de [BD].

4. Soit I l'intersection des diagonales de ABCD. Nous savons que $AI = IC$ et $BI = ID$. De plus, les angles $\widehat{AIB}$ et $\widehat{CID}$ sont opposés par le sommet, donc ils sont égaux. D'après le troisième cas d'égalité des triangles, les triangles AIB et CID sont égaux. En particulier, leurs côtés homologues AB et CD sont de même longueur.



Montrons maintenant que $AD = BC$. Nous savons que $AI = IC$ et $BI = ID$. De plus, les angles $\widehat{BIC}$ et $\widehat{DIA}$ sont opposés par le sommet, donc ils sont égaux. D'après le troisième cas d'égalité des triangles, les triangles BIC et DIA sont égaux. En particulier, leurs côtés homologues AD et BC sont de même longueur.

Nous avons redémontré toutes les propriétés du parallélogramme !

La terminologie de « cas d'égalité des triangles » ainsi que de « triangles égaux » est sans doute la plus fidèle aux diverses transcriptions d'Euclide. Néanmoins, le mot égalité est à prendre ici dans un sens faible, et l'on ne saurait, par exemple, écrire $ABI = CID$ *dans l'exercice précédent (l'écriture correcte correspondrait à introduire une nouvelle lettre pour désigner la* symétrie *de centre* I, *et à l'appliquer à l'un des deux triangles). La même difficulté se présente avec les angles, pour lesquels la notation est même ambigüe :* $\widehat{BIA}$ *désigne un secteur angulaire quand il est pris séparément dans une phrase, par exemple « Considérons la bissectrice de* $\widehat{BIA}$ *», et un angle quand il figure dans une égalité, par exemple* $\widehat{BIA} = \widehat{CID}$.

Solution de l'exercice 3

1. On va décrire trois procédures, qu'on appellera I, II et III.

I : Placer deux points A et B distincts sur la droite Δ. Tracer un arc de cercle de centre C et de rayon AB, dans la direction approximative de AB et le sens de A vers B. Tracer un arc de cercle de centre B et de rayon AC, dans la direction approximative de AC et le sens de A vers C. Marquer l'intersection D de ces deux arcs de cercles. Tracer la droite (CD) ; c'est la parallèle recherchée.

II : Placer deux points A et B distincts sur la droite Δ. Placer le milieu I de [BC]. (C'est l'intersection de [BC] avec sa médiatrice, qu'on supposera savoir tracer). Tracer le symétrique D de A par rapport à I. Tracer la droite (AD) ; c'est la parallèle recherchée.

III : Tracer la perpendiculaire Π à Δ passant par C. Tracer la perpendiculaire à Π passant par C. C'est la parallèle recherchée.

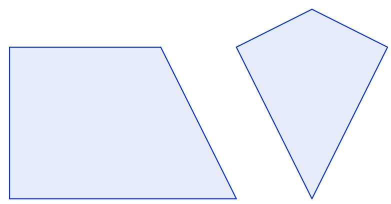
2. **I :** On a utilisé que si dans un quadrilatère non croisé les côtés opposés sont de même longueur alors ce quadrilatère est un parallélogramme et les côtés opposés sont parallèles.

   II : On a utilisé que si dans un quadrilatère non croisé les diagonales se coupent leur milieu, alors ce quadrilatère est un parallélogramme et les côtés opposés sont parallèles.

   III : On a utilisé que si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles.
3. Contrairement peut être aux apparences, c'est la procédure III qui est la plus longue à mettre en oeuvre. La procédure I, si elle est bien menée, est en principe la plus rapide. Les justifications des procédures I et II font appel aux propriétés du parallélogramme, et donc en définitive à la gymnastique des angles alternes-internes, et sont donc a priori un peu plus difficiles que celles de la procédure III. La propriété sous-jacente à la procédure III peut être vue comme un cas particulier de la situation des angles alterne-internes où les angles en présence sont droits.

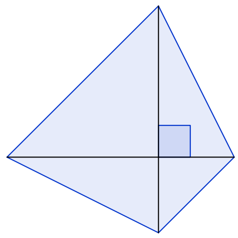
Solution de l'exercice 4

1. On a 10 choix possible pour la première étiquette, 9 pour la deuxième. Mais l'odre des étiquettes choisies n'est pas important. Le nombre de choix possibles est donc
$$\frac{10 \times 9}{2} = 45.$$
2. a) Les deux configurations possibles sont les suivantes, selon que les angles droits sont adjacents à un même côté ou bien non.



   b) à vos équerres !
3. « Deux angles droits seulements » est compatible : penser à un trapèze rectangle qui n'est pas un rectangle. « Côtés égaux deux à deux » est **incompatible** : cela implique d'être un parallélogramme, donc deux paires de côtés opposés sont parallèles et non une seule. De même, « Quatre côtés égaux » est incompatible, car cela implique d'être un losange. « Diagonales perpendiculaires » ou bien « Deux côtés égaux seulement » ou encore

« diagonales égales » sont compatibles, comme en témoigne le quadrilatère ci-dessous.



« Quatre angles droits » implique d'être un rectangle, donc un parallélogramme. C'est donc incompatible. De même avec « côtés opposés parallèles » ou « Diagonales se rencontrant en leur milieu ».

4. On peut montrer que EFGH est un carré. Voici un résumé du raisonnement nécessaire (qui doit être plus long pour être complet) :
   — On montre que les côtés de EFGH sont deux à deux parallèles aux diagonales de ABCD. Puisque les diagonales sont perpendiculaires, ABCD est un rectangle.
   — On montre que les côtés de EFGH ont pour longueur les moitiés des longueurs des diagonales. Comme les diagonales sont de même longueur, ABCD est un losange.

Solution de l'exercice 5

1. Par construction ECFM possède les 3 angles droits $\widehat{\mathrm{ECF}}$, $\widehat{\mathrm{MEC}}$ et $\widehat{\mathrm{MFC}}$. Or un quadrilatère qui possède 3 angles droits est un rectangle. Donc ECFM est un rectangle.
2. ECFM est un rectangle, en particulier, c'est un prallélogramme. Donc quelle que soit la position de M, $EC = FM$.

Solution de l'exercice 6

Etant donné que $ABCD$ est un parallélogramme, ses côtés opposés sont de même longueur deux à deux. Si donc deux de ses côtés adjacents sont de même longueur, alors tous ses cotés sont de même longueur, c'est donc un losange. De plus, $ABCD$ est un parallélogramme qui possède un angle droit. C'est donc un rectangle. Finalement, $ABCD$ est un carré.

Solution de l'exercice 7

1. Introduisons le point F tel que O est le milieu de [CF]. Alors les diagonales de ACBF sont de même longueur et se coupent en leur milieu. Donc ACBF est un rectangle ; en particulier, ABC est un triangle rectangle.
2. Il s'agit d'un triangle equilatéral. En effet OC= 4 cm car C est sur le cercle ($\mathcal{C}$) ; AC) 4 cm d'après l'énoncé, et AO est la moitié de AB=8 cm.
3. Bien que cela ne soit pas absolument nécessaire, il est plus commode d'utiliser le théorème des milieux (pas encore revu) pour cette question
4. Les triangles AOC et ABD sont semblables, et le premier est équilatéral. Donc le second aussi ?

5. La droite (BC) passe par le milieu du segment [AB] et lui est perpendiculaire d'après la question 1. C'est donc sa médiatrice.
6. ABDE est un losange. En effet, ses diagonales se coupent en leur milieu, et sont perpendiculaires.

Solution de l'exercice 8

Les droites (AE) et (BC) sont parallèles, et les angles $\widehat{AEB}$ et $\widehat{EBA}$ sont alterne-internes par rapport à la sécante (EB). Ils sont donc de même mesure. D'autre part, puisque [BE) est la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$, nous avons que $\widehat{EBA} = \widehat{EBC}$. On en déduit que le triangle ABE possède deux angles égaux, il est donc isocèle.

Solution de l'exercice 9

Les triangles ADE et DCF sont isocèles. Utilisant que la somme des angles de chacun est 180°, on trouve que $\widehat{CDF} = 15°$ et $\widehat{EDA} = 75°$. Donc

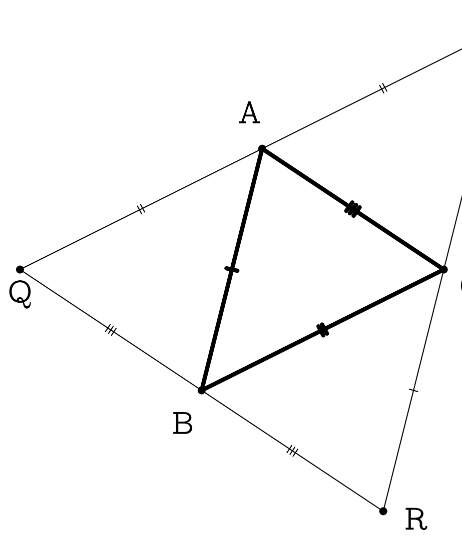
$$\widehat{CDE} = \widehat{CDF} = 15°.$$

Or ces angles sont correspondants pour les droites (DE) et (DF) et leur sécante commune (DC). On en déduit que (DE) et (DF) sont parallèles ; mais puisqu'elles ont en commun le point D, (DE) = (DF).

Solution de l'exercice 10

1. Quand nous formons un parallélogramme dont A, B et C sont des sommets, on peut se poser la question suivante : lequel, parmi [AB], [AC] et [BC], ne sera pas un côté de notre parallélogramme ?
   - Si [AB] n'est pas un côté, alors c'est une diagonale. On a deux manières de construire ce parallélogramme : Ou bien on marque le milieu I de [AB] et on place le symétrique de A par rapport à I. C'est le quatrième point. Ou bien on trace deux arcs de cercles, de centres A et B et de rayons BC et CA respectivement, dont l'intersection est le quatrième point (voir la procédure I de l'exercice 3). Le fait qu'il existe une procédure de construction montre qu'il existe un unique parallélogramme avec la propriété demandé.
   - Si [BC] n'est pas un côté, alors c'est une diagonale. On a deux manières de construire ce parallélogramme comme précédemment, et le fait qu'il existe une procédure de construction montre qu'il existe un unique parallélogramme avec la propriété demandé.
   - De même si [CA] n'est pas un côté.

   On trouve donc trois parallélogrammes.
2. Voir la figure.



3. a) Dans le triangle ABC, la hauteur issue de A est la perpendiculaire à (BC) passant par A. Etant donné que $ABRC$ est un parallélograme, (AB) et (PR) sont parallèle. Donc (PR) est aussi perpendiculaire à la hauteur issue de A. De plus, cette dernière passe par le milieu de $[PR]$. C'est donc la médiatrice de $[PR]$.
   On peut reproduire le même raisonnement avec les trois parallélogrammes construits aux questions précédentes. On en déduit que chaque hauteur de ABC est une médiatrice de PQR.

   b) D'après l'exercice 1 les médiatrices de PQR sont concourantes. Donc les hauteurs de ABC sont concourantes.

4. a) Les médianes de ABC sont exactement les diagonales des trois parallélogrammes $ABRC$, $BCPA$ et $CAQB$ construits à la question 2 qui ne sont pas des côtés du triangle ABC. Puique A, B et C sont les milieux de $[PQ]$, $[QR]$ et $[RP]$, ce sont aussi les médianes du triangle PQR.

   b) Étant donné que ABC et PQR ont les mêmes médianes, et que

$$BG = \frac{PG}{2},\ AG = \frac{RG}{2},\ \text{et } CG = \frac{QG}{2},$$

   PQR s'envoie sur ABC par une homothétie de centre G qui envoie H sur O. On en déduit que les points G, H et O sont alignés. *On appelle droite d'Euler la droite sur laquelle se situent* G, H *et* O. *On trouvera la droite d'Euler sur la Figure 2.*

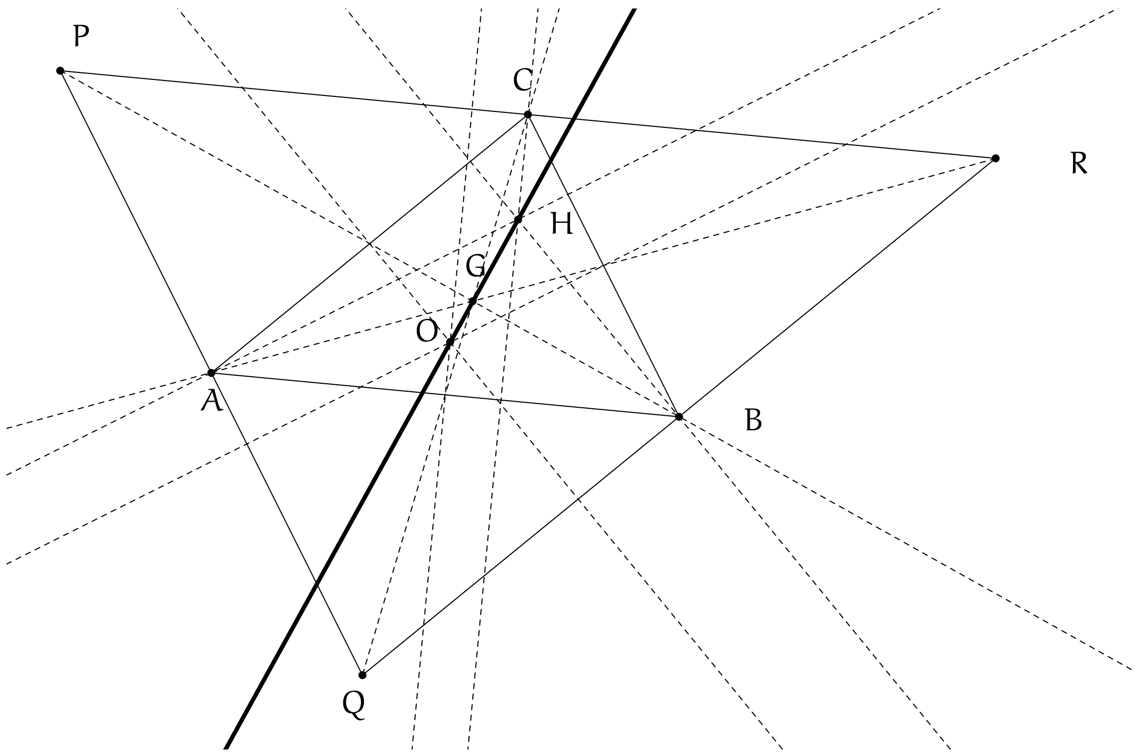


FIGURE 2. La droite d'Euler

Le

Afin de faire émerger et d'enrichir les concepts géométriques, le programme invite à proposer différents types de tâches aux élèves :

Reconnaître : Identifier, de manière perceptive, en utilisant des instruments ou en utilisant des définitions et des propriétés, une figure géométrique plane ou un solide. *Reconnaître qu'un quadrilatère est un rectangle*

Nommer : utiliser à bon escient le vocabulaire géométrique pour désigner une figure géométrique plane ou solide ou certains de ses éléments. *Nommer différents éléments d'un disque : rayon, diamètre, centre.*

Décrire : élaborer un message en utilisant le vocabulaire géométrique approprié et en s'appuyant sur les caractéristiques d'une figure géométrique pour en permettre sa représentation ou son identification. *Jeu du portrait.*

Construire : réaliser une figure géométrique plane ou un solide à partir d'un programme de construction, un texte descriptif, une figure à main levée, etc.

Représenter : reconnaître ou utiliser les premiers éléments de codage d'une figure géométrique plane ou de représentation plane d'un solide (perspective, patron)

Reproduire : construire une figure géométrique à partir d'un modèle fourni avec les mêmes dimensions ou en respectant une certaine échelle. *Reproduire une figure complexe en la décomposant en plusieurs figures simples.*

Classer : regrouper des objets par catégories, suivant une propriété commune *Différencier les rectangles parmi un ensemble de figures géométriques*

Vérifier : s'assurer, en recourant à des instruments ou à des propriétés, que des objets géométriques vérifient certaines propriétés (point alignés, droites perpendiculaires etc.à ou s'assurer de la nature d'une figure géométrique ou d'un solide.