Problème de Dirichlet et uniformisation des surfaces de Riemann

Géométrie analytique complexe, Homework 1

G. Pallier

Motivation et remarques préliminaires

L'objet de cette synthèse est d'esquisser la construction d'outils permettant une preuve du résultat de classification suivant, qui élargit le théorème de l'application conforme de Riemann concernant les ouverts du plan :

Théorème 1 (Riemann-Poincaré-Koebe). *Soit X une surface de Riemann connexe simplement connexe. Alors X est isomorphe à l'un des trois modèles suivants :*
(a) La sphère de Riemann $\mathbb{S}$
(b) La droite complexe $\mathbb{C}$
(c) Le disque de Poincaré $\mathbb{D}$ (ou le demi-plan $\mathbb{H}$ qui lui est isomorphe)

Ce théorème, remarquable en raison du petit nombre de modèles obtenus, a des conséquences très importantes dans la théorie des surfaces de Riemann et même au-delà en géométrie et en topologie :

1. (Surfaces de Riemann) Conjugué à la connaissance des groupes d'automorphismes agissant proprement et librement sur les trois modèles, le théorème 1 permet en retour de classifier toutes les surfaces de Riemann via leur revêtement universel. Or les groupes d'automorphismes de $\mathbb{S}$, $\mathbb{D}$ et $\mathbb{C}$ sont relativement petits et agréablement décrits[1], ~~il suffit pour cela de décrire~~
2. (Géométrie riemannienne) Le théorème d'uniformisation entraîne que toute surface de Riemann X admet une métrique riemannienne dont la courbure de Gauss est constante, avec un signe qui dépend seulement du type conforme de son revêtement universel $\tilde{X}$ (X est dite respectivement elliptique, parabolique, hyperbolique selon que $\tilde{X}$ est biholomorphe à $\mathbb{S}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}$)[2]

[1] A savoir respectivement $PGL(2,\mathbb{C})$ pour la sphère de Riemann, $PSL(2,\mathbb{R}) = \mathrm{Stab}_{PGL(2,\mathbb{C})}(\mathbf{P}^1\mathbb{R})$ pour $\mathbb{H}$ et $\mathrm{Aff}(\mathbb{C}) = \mathrm{Stab}_{PGL(2,\mathbb{C})}(\infty) \simeq \mathbb{C}^\times \rtimes \mathbb{C}$ pour le plan complexe

[2] En fait dès qu'une variété riemannienne de dimension 2 est orientée, on peut montrer qu'elle acquiert une structure complexe, donc c'est encore une surface de Riemann. Le théorème d'uniformisation dit alors qu'il est possible de se ramener à une courbure constante en effectuant seulement un changement de métrique conforme (ceci est parfois appelé théorème d'uniformisation de Poincaré)

3. (Topologie) Tout ouvert non vide, contractile du plan $\mathbb{R}^2$ est homéomorphe au plan (puisque conforme à $\mathbb{D}$ ou $\mathbb{C}$). Ceci est notable puisque en général la relation d'homéomorphisme est bien plus fine que le type d'homotopie.

On se concentrera ici sur une preuve du théorème cas où X n'est pas compacte. La preuve dans le cas compact requiert des idées assez différentes ; on peut la faire reposer sur la classification des 2-variétés réelles compactes connexes orientables par leur genre, conjointement au cas non compact ou bien au fait que $\mathbb{S}$ est l'unique structure complexe (à isomorphisme près) que l'on peut placer sur la sphère S^2.

Si X est simplement connexe, alors l'intégrale de toute 1-forme holomorphe le long d'un lacet dans X est nulle, de sorte que toutes les 1-formes holomorphes admettent des primitives, autrement dit $H^1_{dR}(X) = 0$. Dans la suite, nous entreprendrons d'atteindre l'uniformisation sous l'hypothèse a priori[3] plus large que le premier groupe de cohomologie de de Rham de X s'annule.

Théorème 2 (Riemann-Poincaré-Koebe - Version de travail). *Soit X une surface de Riemann connexe non compacte telle que $H^1_{dR}(X) = 0$. Alors X est isomorphe à $\mathbb{D}$ ou $\mathbb{C}$.*

1 Principe de la preuve

1.1 Un lemme intermédiaire

Une idée pour prouver le théorème 2 d'uniformisation est de le faire découler du lemme suivant et d'un argument de passage à la limite. Démontrer ce lemme concentrera par la suite l'essentiel de la difficulté technique :

Lemme 1. *Soit X une surface de Riemann non compacte, dont le premier groupe de cohomologie de de Rham $H^1_{dR}(X)$ s'annule. Alors il existe $a \in X$ et une exhaustion de X par une suite croissante de domaines (Y_n) biholomorphes à $\mathbb{D}$. De plus, si l'on se donne $a \in Y_0$, alors il existe une suite de réels $r_n > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ un biholomorphisme $f_n : Y_n \to \mathbb{D}_{r_n}$ vérifiant :*

$$f_n(a) = 0 \tag{1}$$

$$f_n'(a) = 1 \tag{2}$$

Ainsi, on commence par uniformiser des domaines assez réguliers (dans un sens qu'il faudra éclaircir, qui permette de s'assurer a priori qu'ils sont bien biholomorphes à $\mathbb{D}$) qui exhaustent la surface X. A ce stade il faut remarquer que la suite r_n fournie par le lemme sera croissante, puisqu'il résulte de la version standard du lemme de Schwarz que

$$\left|\left(f_{n+1}\,|_{Y_n} \circ f_n^{-1}\right)'(0)\right| \leqslant \frac{r_{n+1}}{r_n}$$

[3] Pour les surfaces de Riemann, l'hypothèse de trivialité de $\pi_1(X)$ n'est en réalité pas strictement plus forte que l'annulation de $H^1(X)$, comme le justifie a posteriori le théorème d'uniformisation (les modèles sont simplement connexes).

le membre de gauche étant égal à 1 d'après la contrainte de normalisation (2). La suite r_n possède donc une limite R, finie (auquel cas sous réserve d'un argument de passage à la limite d'une extraction des f_n nous aurons que $X \simeq \mathbb{D}$) ou infinie (auquel cas $X \simeq \mathbb{C}$).

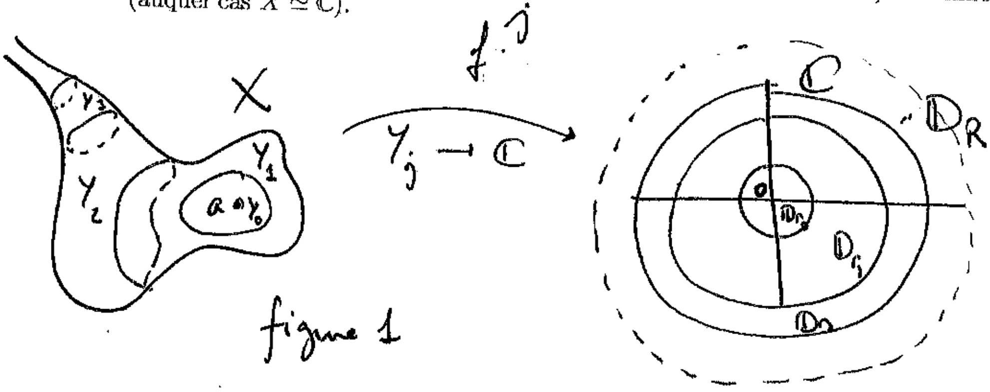


figure 1

Preuve du théorème 1 à partir du lemme On reprendra ici sans démonstration les deux résultats suivants concernant les fonctions holomorphes d'une variable complexe :

Proposition 1. *L'ensemble $\mathcal{S}$ des fonctions holomorphes f univalentes $\mathbb{D} \to \mathbb{C}$ telles que $f(0) = 0$ et $f'(1) = 1$ est compact, pour la topologie*[4] *de la convergence uniforme sur tous les compacts.*

Proposition 2. *Soit $R \in [0, +\infty]$ et soit U un ouvert strictement inclus dans $\mathbb{D}_R$ (avec la convention notationnelle $\mathbb{C} = \mathbb{D}_\infty$). Alors il existe $g : \mathbb{D}_R \to \mathbb{C}$ et $r < R$ tels que $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$ et $g(U) \subset \mathbb{D}_r$.*

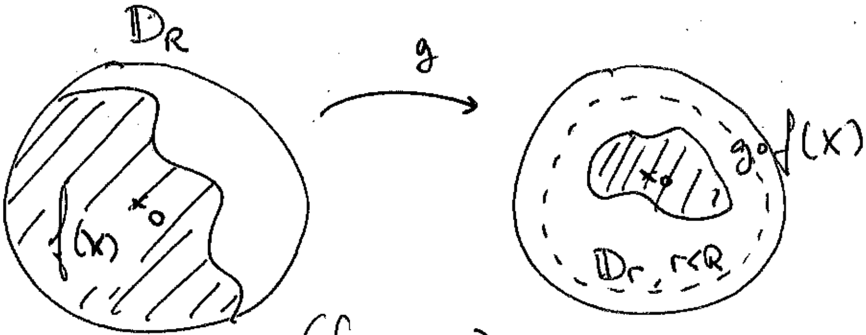
Passons à la preuve proprement dite. On pose pour tous $n \geqslant m$

$$\begin{aligned} g_n^m : \mathbb{D} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto r_m^{-1} f_n \circ f_m^{-1}(r_m z) \end{aligned}$$

Les fonctions g_n^m sont dans l'ensemble $\mathcal{S}$ des fonctions holomorphes univalentes sur $\mathbb{D}$, telles que $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$. D'après la proposition 1, de la suite (g_n^0) on peut extraire une sous-suite $(g_{n_k^0}^0)$ qui converge uniformément sur tous les compacts de $\mathbb{D}$; puis, par récurrence sur l'entier $j \in \mathbb{N}$, en supposant une extraction n_k^j construite, de la suite des $g_{n_k^j}^{j+1}$ on peut extraire une sous-suite $\left(g_{n_k^{j+1}}^{j+1}\right)$ qui converge uniformément sur tous les compacts de $\mathbb{D}$. La suite des $f_{n_k^j}$ converge alors sur tous les compacts de Y_j vers une fonction $f^j \in \mathcal{O}(Y_0)$. Finalement les f^j coïncident sur les intersections de leur domaine de définition et la condition de faisceau de $\mathcal{O}(X)$ fournit $f : X \to \mathbb{D}_R$ telle que pour tout

[4] Il s'agit de la topologie induite par $\mathcal{O}(\mathbb{D})$, qui est un espace de Fréchet, donc métrisable. En particulier cette topologie est métrisable, donc séquentielle et on pourrait reformuler la proposition comme suit : toute suite de fonctions de $\mathcal{S}$ admet une valeur d'adhérence dans $\mathcal{S}$

compact $K \subset \mathbb{D}_R$ la suite $(f_{n_k^k})_k$ (qui est bien définie sur K pour k assez grand) converge uniformément vers f. Comme $\mathcal{S}$ est fermé, et puisque pour tout j les $g^j_{n^j_k}$ sont dans $\mathcal{S}$ pour tout k, f^j est univalente sur Y_j et finalement f est injective sur X. Puisque f est holomorphe injective, elle est ouverte et il reste seulement à montrer que f est surjective sur $\mathbb{D}_R$. D'après la proposition 2 est possible de construire $g : \mathbb{D}_R \to \mathbb{C}$ avec $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$ telle que $g \circ f(X) \subset \mathbb{D}_r$ pour un certain $r < R$, comme sur la figure 2. Le lemme d'estimée de Schwarz appliqué à $h = (g \circ f)^{-1}$ en 0 sur $\mathbb{D}_R$ fournit alors une contradiction. Finalement f est bien un biholomorphisme comme souhaité.



(figure 2)

1.2 Outils pour la démonstration du lemme

Afin d'établir la faisabilité de la stratégie évoquée dans la section précédente, il faut montrer le lemme 1. Pour cela, deux objectifs doivent impérativement être atteints :

Objectif 1 Exhiber le plus possible de (dans l'idéal, trouver une caractérisation des) domaines biholomorphes à $\mathbb{D}$ sur une surface de Riemann quelconque.

Objectif 2 Montrer que sous l'hypothèse $H^1_{dR}(X) = 0$ on dispose d'une exhaustion X avec une quantité dénombrable de tels domaines.

En ce qui concerne l'objectif 1, on montre (c'est un théorème[5]) que pour qu'un pour qu'un domaine $Y \subset\subset X$ soit isomorphe à $\mathbb{D}$, il est suffisant que Y vérifie deux conditions :

- (Condition topologique) $H^1_{dR}(Y) = 0$. En particulier on vérifie que c'est le cas des domaines de Runge de X dès que $H^1_{dR}(X) = 0$

[5] L'outil majeur ici, et qui demande un travail non négligeable est une version du théorème de Weierstrass pour les surfaces de Riemann non compactes : on peut trouver une fonction méromorphe ayant des zéros et pôles prescrits avec multiplicité prescrits sur une partie discrète.

- (Condition de régularité) Le problème de Dirichlet est résoluble sur Y, autrement dit pour toute entrée $f \in \mathcal{C}(\partial Y)$ il existe[6] $\hat{f} \in \mathcal{C}(Y \cup \partial Y) \cap$ Harm(Y) telle que $\hat{f}\,|_{\partial Y} = f$

Remarque 1. En fait, les deux conditions sont suffisantes mais aussi nécessaires puisque le problème de Dirichlet est résolu sur $\mathbb{D}$ à l'aide du noyau de Poisson (solution que nous admettrons ici). On a donc là une caractérisation des domaines $Y \subset\subset X$ biholomorphes à $\mathbb{D}$.

Dans la suite, on reviendra sur la condition de résolubilité du problème de Dirichlet dans le but de la faire dépendre seulement de la régularité de ∂Y.

L'objectif 2 s'appuie sur des résultats différents. Notons qu'il peut paraître assez surprenant au premier abord qu'il soit même réalisable puisqu'il implique notamment que la topologie de X doit être à base dénombrable. Ceci n'est pas inclus a priori dans la définition d'une surface de Riemann, mais en découle de manière non triviale, ce qui constitue le théorème de Radó (qui n'est d'ailleurs plus valable en dimension $\geqslant 2$). Une fois acquis ce fait, il faut encore montrer qu'il est possible d'exhauster X à l'aide de domaines de Runge dont le bord est assez régulier dans un sens le moins exigeant possible fourni par l'étude du problème de Dirichlet.

2 Problème de Dirichlet

On se donne ici Y un domaine d'une surface de Riemann et f une fonction continue sur ∂Y. L'unicité d'une solution éventuelle du problème de Dirichlet sur Y avec f pour condition de bord découle de manière directe du principe du maximum. L'existence est plus délicate ; mais si l'harmonicité est une condition assez contraignante, on peut en revanche espérer tirer partie du fait plausible qu'il doit exister de très nombreuses de fonctions sous-harmoniques dans Y plus petites que f sur le bord afin de considérer leur enveloppe supérieure.

Combinée avec le théorème de Poisson garantissant l'existence d'une solution sur les disques de $\mathbb{C}$, l'unicité permet d'obtenir l'inégalité de Harnack : si f est positive, harmonique dans $\mathbb{D}_r$ et continue sur $\overline{\mathbb{D}_r}$ alors

$$\frac{r-|z|}{r+|z|}f(0) \leqslant f(z) \leqslant \frac{r+|z|}{r-|z|}f(0)$$

En corollaire (théorème de Harnack), toute limite d'une suite croissantes de fonctions harmoniques dans $\mathbb{D}_r$ dont la valeur en 0 est bornée supérieurement est uniforme sur tout les compacts de $\mathbb{D}_r$ (et la fonction limite est harmonique).

Le théorème de Harnack est alors l'ingrédient principal dans la preuve du lemme de Perron suivant :

[6] La notion de fonction harmonique fait bien sens sur les ouverts de surfaces de Riemann puisqu'on peut transporter $\Delta = \frac{i}{2\pi}\partial\bar{\partial}$ sur X à partir des trivialisation locale, d'une manière compatible avec les changement de cartes : cet opérateur est invariant par biholomorphisme. De même, la notion de fonction sous-harmonique assez régulière est bien définie.

Proposition 3. *Soit $\mathcal{H}$ une famille non-vide de fonctions sous-harmoniques dans Y telle que :*
- Pour tous $u, v \in \mathcal{H}, \max(u, v) \in \mathcal{H}$
- Si $u \in \mathcal{H}$ alors[7] *$P_D(u) \in \mathcal{H}$ pour tout D sur lequel le problème de Dirichlet est résoluble.*
- Les fonctions de $\mathcal{H}$ sont toutes bornées supérieurement par une même constante K.
Alors, la fonction u^* définie par $u^*(x) = \sup_{u \in \mathcal{H}} u(x)$ est harmonique dans Y.

La proposition précédente amène un début de solution quand on l'applique à la classe de Perron, mais ne dit rien sur la possibilité de prolonger u^* par continuité au bord de Y. Garantir cette continuité passe par la notion de point régulier et de barrière.

Définition 1. *Une barrière au point $x \in \partial Y$ est la donnée d'une fonction β continue sur $\overline{Y} \cap U$, où U est un voisinage ouvert de x dans X, qui est sous-harmonique dans $Y \cap U$, et atteint son maximum global sur $\overline{Y} \cap U$.*
Le point $x \in \partial Y$ est dit régulier s'il admet une barrière.

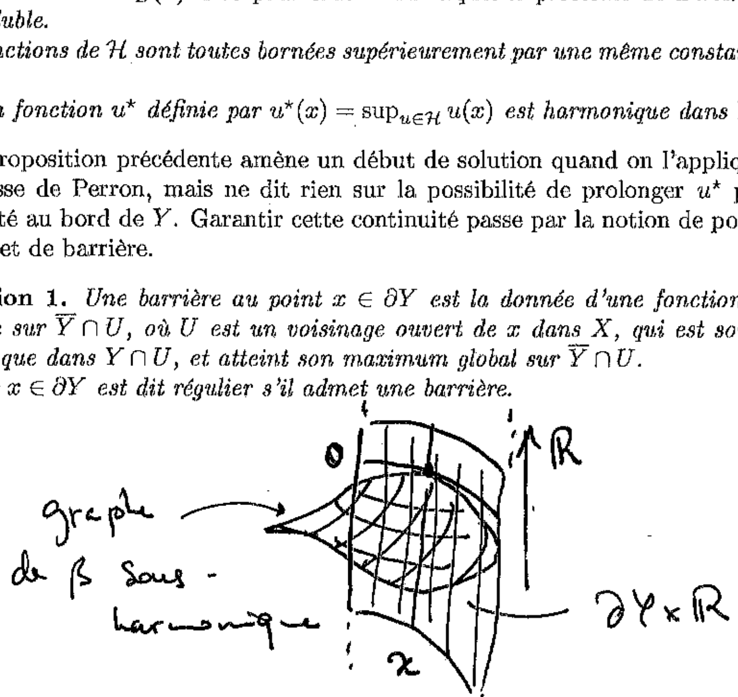


Figure 5 : Graphe d'une fonction - barrière

L'utilité des barrières réside dans la

Proposition 4. *Soit $f : \partial Y \to \mathbb{R}$ continue et bornée, et u^* la solution fournie par le lemme de Perron*[8]*. Alors si $x \in \partial Y$ est un point régulier.*

Pour finir et rendre tous ces résultats effectivement utilisables, il reste à rattacher la définition 1 qui n'est satisfaisante que d'un point de vue théorique, à des notions plus concrètes de régularité. Ceci fait l'objet du résultat suivant :

Lemme 2. *Soit Y un domaine de $\mathbb{C}$, et Soit $a \in \partial Y$ un point du bord On suppose qu'il existe $b \in \mathbb{C} \setminus Y$ tel que le segment $[a, b]$ soit inclus dans $\mathbb{C} \setminus Y$. Alors a est régulier au sens de la définition 1.*

[7] Pour toute fonction u sous-harmonique sur Y et un domaine $D \subset\subset Y$ où le problème de Dirichlet est résoluble, on note $P_D(u)$ la fonction sous-harmonique qui coïncide avec u sur $Y \setminus D$ et est harmonique dans D, continue sur $\overline{D}$.
[8] La classe de Perron est bien non-vide puisque f est bornée inférieurement