Déterminant de Smith, et une remarque de Brauer

Leçons :

105 (dev) Groupe des permutations d'un ensemble fini

106 (dev) Groupe linéaire d'un espace vectoriel, sous-groupes de $\mathbf{GL}(E)$

107 (ex) Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel

150 (dev) Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices

152 (dev) Déterminant. Applications.

170 (ex) Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie

190 (ex) Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement

Source [FGN14, Algèbre 2 ?]

Théorème 1. *Soient k un corps et n un entier naturel non nul. Soient σ et τ deux éléments du groupe $\mathfrak{S}_n$, P_σ et $P_\tau \in \mathbf{GL}(n,k)$ les matrices de permutations correspondantes. Alors P_σ et P_τ sont semblables si et seulement si σ et τ sont conjuguées dans $\mathfrak{S}_n$.*

Le théorème dit aussi que **quand G est cyclique**, deux G-ensembles finis sont isomorphes si et seulement si leurs représentations de permutation (obtenues en vectorialisant l'action de G) sont isomorphes.

(a) L'expression du nombre de cycles de σ^m en fonction du type cyclique

Lemme 2. *Le nombre de cycles de σ est la dimension de l'espace $Ker\ (P_\sigma - I)$.*

Démonstration. Soit $x = \sum x_i e_i$ invariant par P_σ. Alors $P_\sigma(x) = x$ donne que $x_i = x_j$ si $i = \sigma^m(j)$ pour un certain m, ie si i et j apparaissent dans le même cycle intervenant dans la décomposition de σ. Réciproquement, si la fonction $i \mapsto x_i$ est constante sur les supports des cycles de σ, alors x est P_σ-invariant. $\square$

Proposition 3. *Si l'on écrit $c_\ell(\sigma)$ le nombre de cycles de longueur ℓ dans σ, alors le nombre de cycles de σ^m est*

$$\sum_{\ell=1}^{n} \operatorname{pgcd}(\ell, m)\, c_\ell(\sigma)\,. \tag{1}$$

Démonstration. Si $\gamma_1 \cdots \gamma_r$ est la décomposition de σ en produit de cycles disjoints, alors $\sigma^m = \gamma_1^m \cdots \gamma_r^m$; les γ_i^m se décomposent eux-mêmes en cycles disjoints : si $|\gamma| = \ell$ alors en écrivant $\gamma = (c_0 c_1 \cdots c_{\ell-1})$ et en posant $k = \operatorname{pgcd}(\ell, m)$,

$$\begin{aligned} \gamma^m &= (c_0 c_m \cdots c_{\ell-m}) \cdots (c_{m-1} c_{2m-1} \cdots c_{\ell-1}) \\ &= \hat{\gamma}_1 \cdots \hat{\gamma}_k. \end{aligned}$$

où les $\hat{\gamma}_i$ sont des cycles de longueur ℓ/k. □

En vertu du lemme, si P_σ et P_τ sont semblables alors pour tout $m \in \mathbb{N}$ σ^m et τ^m ont même nombre de cycles. Il s'agit de montrer que ceci implique que σ et τ ont même type cyclique, i.e. que la matrice intervenant dans l'équation (1) est inversible.

(b) Déterminant de Smith On est ramené à prouver l'inversibilité de la matrice

$$A_n = (\operatorname{pgcd}(i, j))_{1 \leqslant i, j \leqslant n}\,.$$

Lemme 4. *Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,*

$$\det A_n = \prod_{i=1}^{n} \varphi(i)\,. \tag{2}$$

Démonstration. Introduisons la matrice d'incidence de la relation de divisibilité : $B = (b_{i,j})$ avec $b_{i,j} = \mathbf{1}_{j|i}$. Il vient

$$\begin{aligned} \left(\Phi^t B\right)_{i,j} &= \varphi(i)\, \mathbf{1}_{i|j} \\ \left(B \Phi^t B\right)_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{k|i} \varphi(k)\, \mathbf{1}_{k|j} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{k|\operatorname{pgcd}(i,j)} \varphi(k) \\ &= \operatorname{pgcd}(i, j)\,, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la formule $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$ (φ est la transformée de Möbius de $n \mapsto n$). Par ailleurs B est triangulaire, avec des 1 sur la diagonale, donc

$$\det A_n = (\det B)^2 \det \Phi = \det \Phi = \varphi(1) \cdots \varphi(n)\,.$$ □

Remarque 5. Une manière de « deviner » la relation (2) est de procéder par récurrence. Si p est un nombre premier on obtient (en retranchant p fois la première colonne à la dernière) que $\det A_p = (p-1)\det(A_{p-1})$. Le cas général est plus compliqué et fait intervenir une transformée de Möbius.

Références

[FGN14] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Exercices de mathématiques des oraux de l'École polytechnique et des Écoles normales supérieures.* Enseignement des mathématiques. Cassini, 2008–2014.