Interrogation 1 - sujet β

Question :	1	2	3	4	5	Total
Points :	$1\frac{1}{2}$	2	2	3	$1\frac{1}{2}$	10
Note :						

Durée : 30 minutes. Les réponses même partielles rapportent des points. Le soin et la précision seront pris en compte.

1. (1 $\frac{1}{2}$ points) Calculer :

$$\int (4x + e^{-x} + \cos 5x)\, dx.$$

Solution : Par linéarité de l'intégrale,

$$\int (4x + e^{-x} + \cos 5x) dx = \int 4x dx + \int e^{-x} dx + \int \cos 5x dx.$$

Une primitive de la fonction $f(x) = 4x$ sur $\mathbb{R}$ est $F(x) = 2x^2$.
Une primitive de la fonction $g(x) = e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$ est $G(x) = -e^{-x}$.
Une primitive de la fonction $h(x) = \cos 5x$ sur $\mathbb{R}$ est $H(x) = \frac{1}{5}\sin 5x$.
Finalement donc,

$$\int (4x + e^{-x} + \cos 5x) dx = 2x^2 - e^{-x} + \frac{1}{5}\sin 5x + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

2. (2 points) Calculer l'intégrale suivante :

$$I_2 = \int_1^2 \frac{8x^2}{\sqrt{16x^3 - 4}}\, dx.$$

Solution : Commençons par réécrire le dénominateur :

$$\frac{8x^2}{\sqrt{16x^3 - 4}} = \frac{8x^2}{2\sqrt{4x^3 - 1}} = \frac{2}{3}\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}},$$

avec $u(x) = 4x^3 - 1$. Etant donné que $u'/(2\sqrt{u}) = (\sqrt{u})'$,

$$\int_1^2 \frac{8x^2}{\sqrt{16x^3 - 4}} dx = \frac{2}{3}\left[\sqrt{4x^3 - 1}\right]_1^2 = \frac{2}{3}\left(\sqrt{31} - \sqrt{3}\right).$$

3. (2 points) Calculer l'intégrale suivante :

$$I_3 = \int_0^{\pi/2} (x+3) \cdot \sin 2x \, dx.$$

Solution : Intégrons par parties, dans le sens le plus favorable : on dérive le facteur polynômial (de sorte que l'on diminue son degré) tandis que l'on primitive une fonction trigonométrique, ce qui est peu coûteux.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \underset{\searrow}{(x+3)} \cdot \overset{\nearrow}{\sin} 2x \, dx &= \left[(x+3) \cdot \left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 1 \cdot \left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) \, dx \\
&= (\pi/2+3) \cdot \frac{+1}{2} - 3\frac{-1}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi/2} \\
&= 3 + \pi/4.
\end{aligned}$$

4. (3 points) Calculer l'intégrale suivante :

$$I_4 = \int_0^{\ln 3} \frac{e^{3x} - 5e^{2x} + 6e^x - 12}{e^{2x} - 4e^x} e^x \, dx.$$

Solution : Commençons par effectuer le changement de variables $u = e^x$. Alors $dx = du/u$, donc

$$I_4 = \int_1^3 \frac{u^3 - 5u^2 + 6u - 12}{u^2 - 4u} \, du$$

On est ramené à un problème d'intégrale de fraction rationnelle que l'on sait traiter. La division euclidienne du numérateur par le dénominateur donne

$$U^3 - 5U^2 + 6U - 12 = (U^2 - 4U)(U-1) + 2U - 12,$$

donc

$$I_4 = \int_1^3 (u-1) \, du + \int_1^3 \frac{2u-12}{u^2-4u} \, du$$

La première intégrale se calcule par intégration directe :

$$\int_1^2 (u-1) = \left[\frac{(u-1)^2}{2}\right]_1^3 = \frac{2^2 - 0^2}{2} = \frac{4}{2} = 2,$$

tandis que le polynôme $U^2 - 4U$ a deux racines réelles simples 0 et 4. D'après le cours, il existe des constantes a et b telles que

$$\forall u \in \mathbb{R}, \frac{2u-12}{u^2-4u} = \frac{a}{u} + \frac{b}{u-4}.$$

La méthode d'identification des coefficients permet de retrouver les constantes a et b : il faut que pour tout $u \in \mathbb{R}$, $a(u-4)+bu = 2u-12$, ce qui équivaut au système d'équation suivant.

$$\begin{cases} a+b &= 2 \\ -4a &= -12 \end{cases}$$

La deuxième équation implique $a = 3$, puis la première, $b = -1$. Finalement,

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{2u-12}{u^2-4u}\,du &= \int_1^2 \frac{3\,du}{u} - \int_1^2 \frac{du}{u-4} \\ &= 3\left[\ln u\right]_1^3 - \left[\ln|u-4|\right]_1^3 = 3\ln 3 + \ln 3 = 4\ln 3. \end{aligned}$$

Donc $I_4 = 2 + 4\ln 3$.

5. (1 ½ points) Calculer :

$$\int_0^1 \arccos x\;dx.$$

Solution : Intégrons par parties, cela donne

$$\int_0^1 \arccos x\;dx = \left[x\arccos x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}dx = 0 + \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Mais $x/\sqrt{1-x^2} = -u'(x)/2\sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = 1-x^2$, d'où :

$$\int_0^1 \arccos x\;dx = -\left[\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 = 1.$$

Autre méthode : on fait le changement de variables $\theta = \arccos x$. Alors $dx = -\sin\theta d\theta$, et la formule de changement de variables donne (sans oublier de changer les bornes) :

$$\int_0^1 x\;dx = \int_{\pi/2}^0 -\theta\sin\theta\;d\theta = \int_0^{\pi/2} \theta\sin\theta\;d\theta.$$

Le membre de droite s'intègre par parties :

$$\int_0^{\pi/2} \theta\sin\theta\;d\theta = \left[-\theta\cos\theta\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos\theta\;d\theta = 0+1 = 1.$$