Géométrie hyperbolique sous-linéairement lipschitzienne à grande échelle.

Gabriel Pallier

Université Paris-Sud, Orsay, France

Séminaire Pampers, IRMAR, 7 dec. 2017

Plan

Introduction. Hyperbolicité.

Cônes asymptotiques et SBE.

La sphère à l'infini.

Le groupoïde sous-linéairement quasiMöbius.

Le cas riemannien homogène.

Questions ouvertes. Perspectives.

Introduction. Hyperbolicité.

Un exemple important

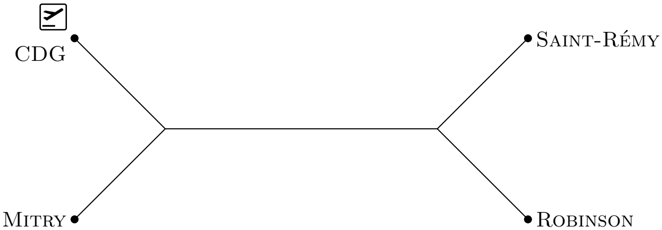
Pour se déplacer entre Orsay et Paris, il est commode d'emprunter le RER B.

Un exemple important

Pour se déplacer entre Orsay et Paris, il est commode d'emprunter le RER B.
Voici un dessin simplifié de la ligne du RER B.

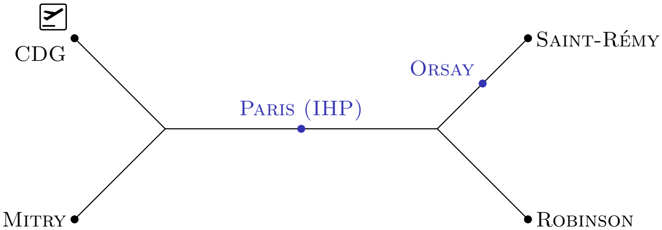
Un exemple important

Pour se déplacer entre Orsay et Paris, il est commode d'emprunter le RER B.
Voici un dessin simplifié de la ligne du RER B.



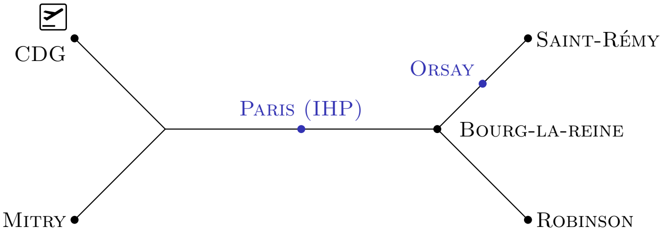
Un exemple important

Pour se déplacer entre Orsay et Paris, il est commode d'emprunter le RER B.
Voici un dessin simplifié de la ligne du RER B.



Un exemple important

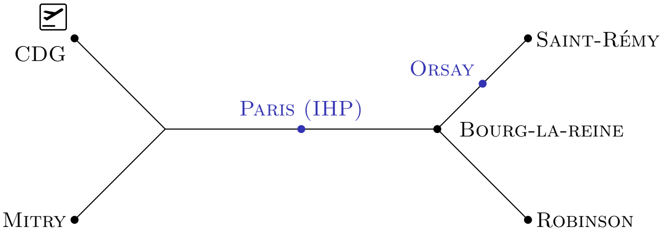
Pour se déplacer entre Orsay et Paris, il est commode d'emprunter le RER B.
Voici un dessin simplifié de la ligne du RER B.



Un exemple important

Pour se déplacer entre Orsay et Paris, il est commode d'emprunter le RER B.

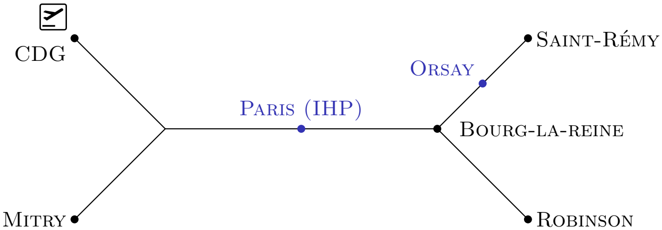
Voici un dessin simplifié de la ligne du RER B.



Ce n'est pas vraiment une ligne.

Un exemple important

Pour se déplacer entre Orsay et Paris, il est commode d'emprunter le RER B.
Voici un dessin simplifié de la ligne du RER B.



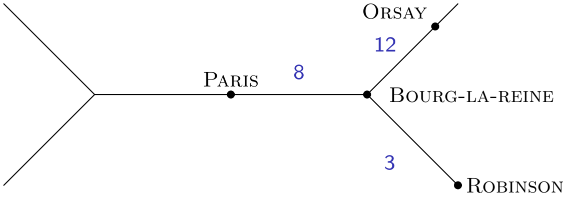
Ce n'est pas vraiment une ligne. Malgré tout, entre deux gares quelconques il y a une ligne (quitte à changer de trains) qui minimise la distance de toute paire de ses points. On dit que le RER B est un espace métrique géodésique.

Une histoire de triangle ferroviaire

Je rentre chez moi depuis Paris, mais je me suis trompé de train : il m'amène à Robinson.

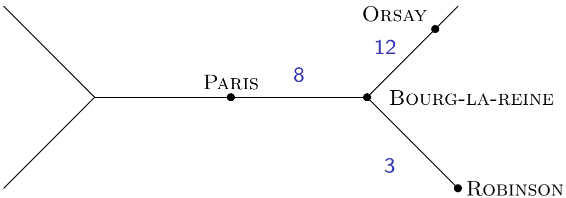
Une histoire de triangle ferroviaire

Je rentre chez moi depuis Paris, mais je me suis trompé de train : il m'amène à Robinson.



Une histoire de triangle ferroviaire

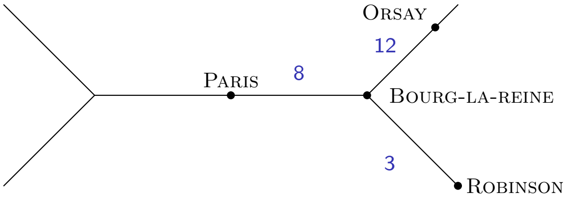
Je rentre chez moi depuis Paris, mais je me suis trompé de train : il m'amène à Robinson.



Le détour m'a couté $11 + 15 - 20 = 6$ stations, le double du produit de Gromov de Paris et Orsay dans le RER B, vu depuis Robinson.

Une histoire de triangle ferroviaire

Je rentre chez moi depuis Paris, mais je me suis trompé de train : il m'amène à Robinson.



Le détour m'a couté $11 + 15 - 20 = 6$ stations, le double du produit de Gromov de Paris et Orsay dans le RER B, vu depuis Robinson.

Définition

Soit X un espace métrique, $x, y, z \in X$. Le produit de Gromov de y et z vu de x est $2(y \mid z)_x := d(x,y) + d(x,z) - d(y,z)$.

Produit de Gromov et espaces hyperboliques

Dans un triangle, les produits de Gromov sont les distances des sommets aux points équiradiaux.

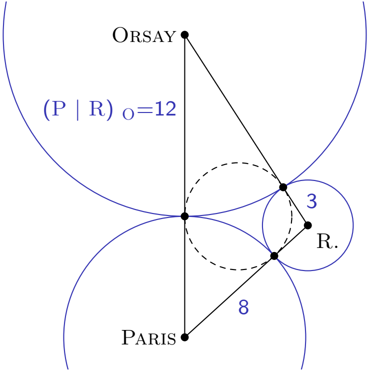


Figure 1 – Triangle précédent et ses produits de Gromov rapportés dans le plan euclidien.

Produit de Gromov et espaces hyperboliques

Dans un triangle, les produits de Gromov sont les distances des sommets aux points équiradiaux.

Définition

Soit $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$*.* X *espace géodésique est* *δ-hyperbolique* *si dans tout triangle* xyz*, pour tout* $y' \in [xy]$ *et* $z' \in [xz]$*,*

$$xy' = xz' \leqslant (y \mid z)_x \implies y'z \leqslant \delta.$$

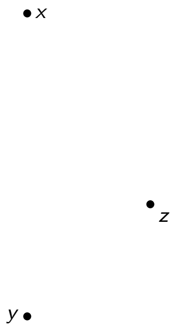


Figure 1 – Triangle dans un espace hyperbolique géodésique.

Produit de Gromov et espaces hyperboliques

Dans un triangle, les produits de Gromov sont les distances des sommets aux points équiradiaux.

Définition

Soit $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$. X espace géodésique est δ-hyperbolique si dans tout triangle xyz, pour tout $y' \in [xy]$ et $z' \in [xz]$,

$$xy' = xz' \leqslant (y \mid z)_x \implies y'z \leqslant \delta.$$

En particulier,

$$d(x,[yz]) - 2\delta \leqslant (y \mid z)_x \leqslant d(x,[yz]).$$

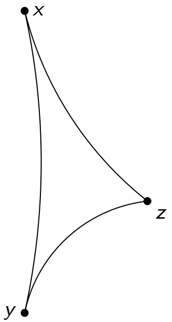


FIGURE 1 – Triangle dans un espace hyperbolique géodésique.

Produit de Gromov et espaces hyperboliques

Dans un triangle, les produits de Gromov sont les distances des sommets aux points équiradiaux.

Définition

Soit $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$. X espace géodésique est δ-hyperbolique si dans tout triangle xyz, pour tout $y' \in [xy]$ et $z' \in [xz]$,

$$xy' = xz' \leqslant (y \mid z)_x \implies y'z \leqslant \delta.$$

En particulier,

$$d(x, [yz]) - 2\delta \leqslant (y \mid z)_x \leqslant d(x, [yz]).$$

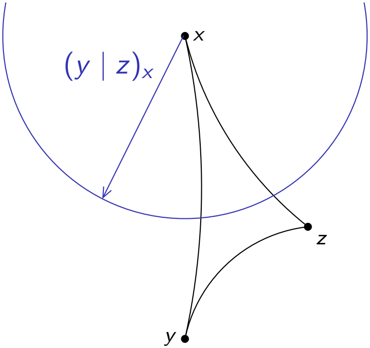


FIGURE 1 – Triangle dans un espace hyperbolique géodésique.

Produit de Gromov et espaces hyperboliques

Dans un triangle, les produits de Gromov sont les distances des sommets aux points équiradiaux.

Définition

Soit $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$. X espace géodésique est δ-hyperbolique si dans tout triangle xyz, pour tout $y' \in [xy]$ et $z' \in [xz]$,

$$xy' = xz' \leqslant (y \mid z)_x \implies y'z \leqslant \delta.$$

En particulier,

$$d(x,[yz]) - 2\delta \leqslant (y \mid z)_x \leqslant d(x,[yz]).$$

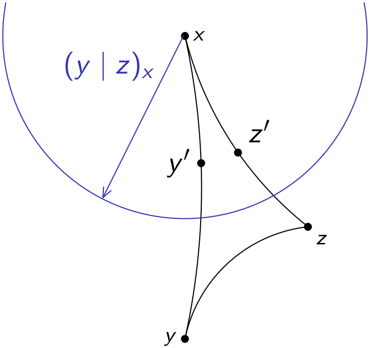


FIGURE 1 – Triangle dans un espace hyperbolique géodésique.

Produit de Gromov et espaces hyperboliques

Dans un triangle, les produits de Gromov sont les distances des sommets aux points équiradiaux.

Définition

Soit $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$. X espace géodésique est δ-hyperbolique si dans tout triangle xyz, pour tout $y' \in [xy]$ et $z' \in [xz]$,

$$xy' = xz' \leqslant (y \mid z)_x \implies y'z \leqslant \delta.$$

En particulier,

$$d(x,[yz]) - 2\delta \leqslant (y \mid z)_x \leqslant d(x,[yz]).$$

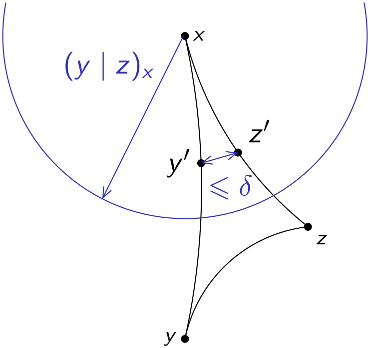


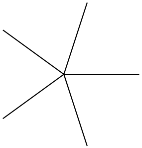
FIGURE 1 – Triangle dans un espace hyperbolique géodésique.

Exemples et non-exemples

- Le RER B (et tout arbre métrique, en particulier $\mathbf{R}$) est 0-hyperbolique.

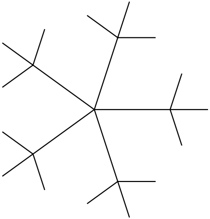
Exemples et non-exemples

- Le RER B (et tout arbre métrique, en particulier $\mathbf{R}$) est 0-hyperbolique.



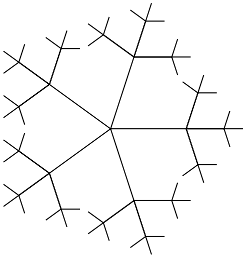
Exemples et non-exemples

- Le RER B (et tout arbre métrique, en particulier **R**) est 0-hyperbolique.



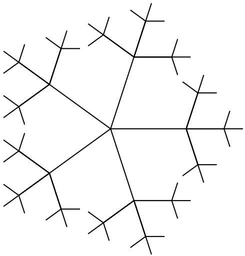
Exemples et non-exemples

- Le RER B (et tout arbre métrique, en particulier $\mathbf{R}$) est 0-hyperbolique.



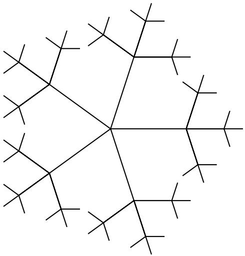
Exemples et non-exemples

- Le RER B (et tout arbre métrique, en particulier $\mathbf{R}$) est 0-hyperbolique.
- Le plan euclidien n'est pas hyperbolique.

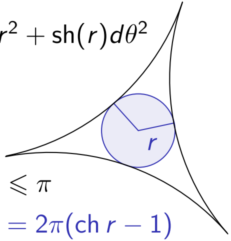


Exemples et non-exemples

- Le RER B (et tout arbre métrique, en particulier $\mathbf{R}$) est 0-hyperbolique.
- Le plan euclidien n'est pas hyperbolique.
- Le plan hyperbolique réel $\mathbb{H}^2_{\mathbf{R}}$ est hyperbolique, $\delta = 1.93$ convient.



$$ds^2 = dr^2 + \mathrm{sh}(r) d\theta^2$$



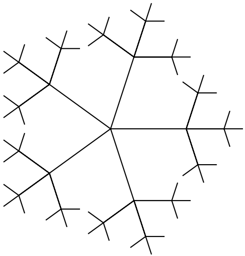
$\mathrm{Aire}(\triangle) \leqslant \pi$

$\mathrm{Aire}(\bigcirc) = 2\pi(\mathrm{ch}\, r - 1)$

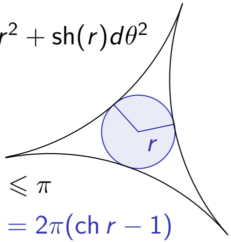
$2\,\mathrm{ch}^{-1}(3/2) \approx 1.92$

Exemples et non-exemples

- Le RER B (et tout arbre métrique, en particulier $\mathbf{R}$) est 0-hyperbolique.
- Le plan euclidien n'est pas hyperbolique.
- Le plan hyperbolique réel $\mathbb{H}^2_{\mathbf{R}}$ est hyperbolique, $\delta = 1.93$ convient.
- Toute variété riemannienne complète à $K \leqslant -\kappa^2 < 0$ est hyperbolique, $\delta \leqslant -1.93/\kappa$.



$$ds^2 = dr^2 + \mathrm{sh}(r)d\theta^2$$



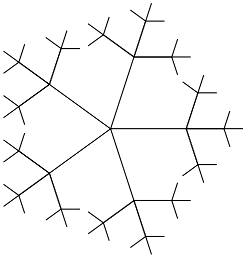
$\mathrm{Aire}(\triangle) \leqslant \pi$

$\mathrm{Aire}(\bigcirc) = 2\pi(\mathrm{ch}\, r - 1)$

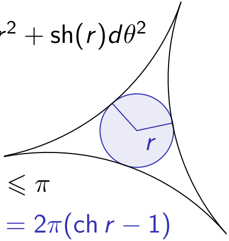
$2\,\mathrm{ch}^{-1}(3/2) \approx 1.92$

Exemples et non-exemples

- Le RER B (et tout arbre métrique, en particulier $\mathbf{R}$) est 0-hyperbolique.
- Le plan euclidien n'est pas hyperbolique.
- Le plan hyperbolique réel $\mathbb{H}^2_{\mathbf{R}}$ est hyperbolique, $\delta = 1.93$ convient.
- Toute variété riemannienne complète à $K \leqslant -\kappa^2 < 0$ est hyperbolique, $\delta \leqslant -1.93/\kappa$.
- $\mathbb{H}^2_{\mathbf{R}} \times \mathbb{H}^2_{\mathbf{R}}$ n'est pas hyperbolique.



$ds^2 = dr^2 + \mathrm{sh}(r) d\theta^2$



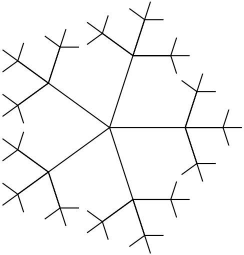
$\mathrm{Aire}(\triangle) \leqslant \pi$

$\mathrm{Aire}(\bigcirc) = 2\pi(\mathrm{ch}\, r - 1)$

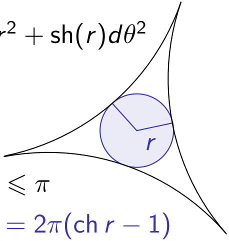
$2\,\mathrm{ch}^{-1}(3/2) \approx 1.92$

Exemples et non-exemples

- Le RER B (et tout arbre métrique, en particulier $\mathbf{R}$) est 0-hyperbolique.
- Le plan euclidien n'est pas hyperbolique.
- Le plan hyperbolique réel $\mathbb{H}^2_{\mathbf{R}}$ est hyperbolique, $\delta = 1.93$ convient.
- Toute variété riemannienne complète à $K \leqslant -\kappa^2 < 0$ est hyperbolique, $\delta \leqslant -1.93/\kappa$.
- $\mathbb{H}^2_{\mathbf{R}} \times \mathbb{H}^2_{\mathbf{R}}$ n'est pas hyperbolique.
- G groupe de Lie simple (réel) est hyperbolique ssi son rang réel est 1.



$ds^2 = dr^2 + \mathrm{sh}(r)d\theta^2$



$\mathrm{Aire}(\triangle) \leqslant \pi$

$\mathrm{Aire}(\bigcirc) = 2\pi(\mathrm{ch}\, r - 1)$

$2\,\mathrm{ch}^{-1}(3/2) \approx 1.92$

Des triangles aux tétraèdres

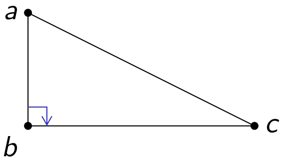
Définition

Un triangle geodésique abc est rectangle en b si b est un projeté orthogonal (plus proche point) de a sur $[bc]$ ou de c sur $[ab]$.

Des triangles aux tétraèdres

Définition

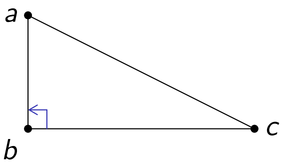
Un triangle geodésique abc est rectangle en b si b est un projeté orthogonal (plus proche point) de a sur $[bc]$ ou de c sur $[ab]$.



Des triangles aux tétraèdres

Définition

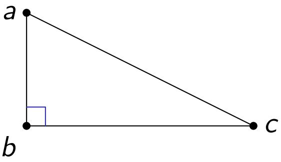
Un triangle geodésique abc est rectangle en b si b est un projeté orthogonal (plus proche point) de a sur $[bc]$ ou de c sur $[ab]$.



Des triangles aux tétraèdres

Définition

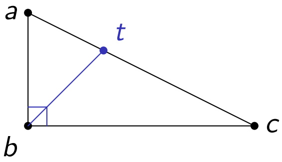
Un triangle geodésique abc est rectangle en b si b est un projeté orthogonal (plus proche point) de a sur [bc] ou de c sur [ab].



Des triangles aux tétraèdres

Définition

Un triangle geodésique abc est rectangle en b si b est un projeté orthogonal (plus proche point) de a sur $[bc]$ ou de c sur $[ab]$.



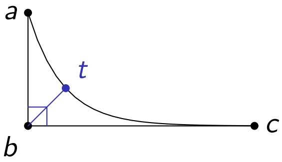
Lemme

Dans un triangle rectangle δ-hyperbolique, il existe un point de l'hypoténuse 2δ-proche de l'angle droit.

Des triangles aux tétraèdres

Définition

Un triangle geodésique abc est rectangle en b si b est un projeté orthogonal (plus proche point) de a sur $[bc]$ ou de c sur $[ab]$.



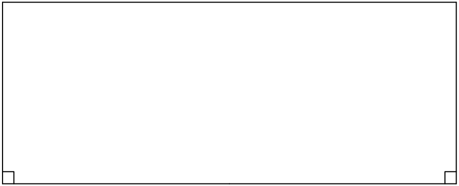
Lemme

Dans un triangle rectangle δ-hyperbolique, il existe un point de l'hypoténuse 2δ-proche de l'angle droit.

Des triangles aux tétraèdres

Lemme

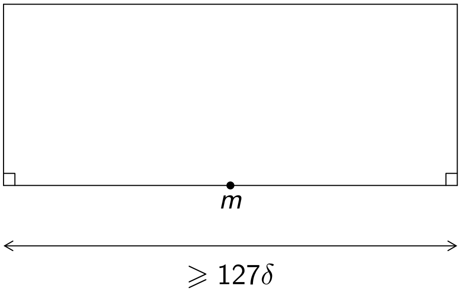
Dans un quadrilatère, si un côté assez grand (plus long que 127δ*) est bordé par deux angles droits, alors le côté opposé passe* 63δ*-proche de chaque extrémités.*



Des triangles aux tétraèdres

Lemme

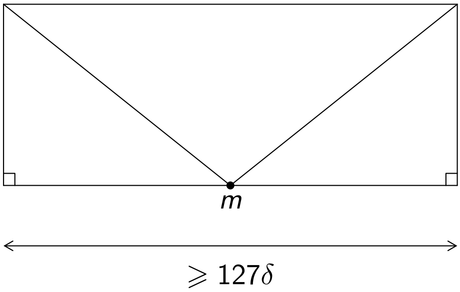
Dans un quadrilatère, si un côté assez grand (plus long que 127δ*) est bordé par deux angles droits, alors le côté opposé passe* 63δ*-proche de chaque extrémités.*



Des triangles aux tétraèdres

Lemme

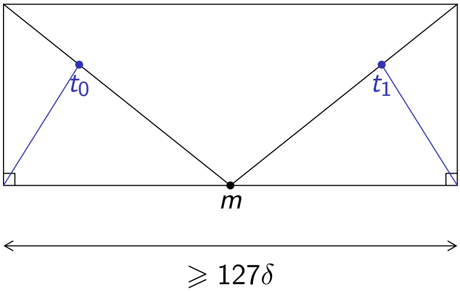
Dans un quadrilatère, si un côté assez grand (plus long que 127δ*) est bordé par deux angles droits, alors le côté opposé passe* 63δ*-proche de chaque extrémités.*



Des triangles aux tétraèdres

Lemme

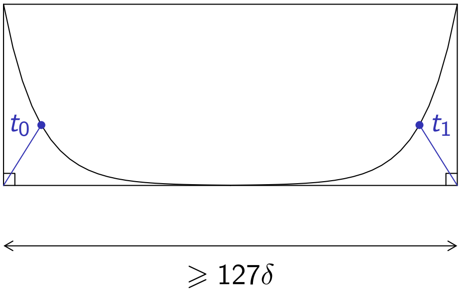
Dans un quadrilatère, si un côté assez grand (plus long que 127δ*) est bordé par deux angles droits, alors le côté opposé passe* 63δ*-proche de chaque extrémités.*



Des triangles aux tétraèdres

Lemme

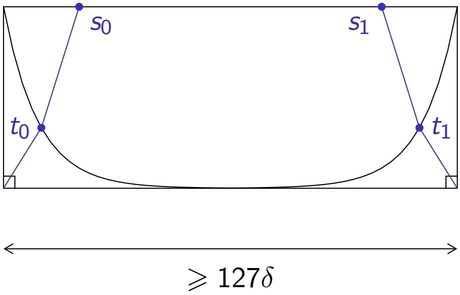
Dans un quadrilatère, si un côté assez grand (plus long que 127δ*) est bordé par deux angles droits, alors le côté opposé passe* 63δ*-proche de chaque extrémités.*



Des triangles aux tétraèdres

Lemme

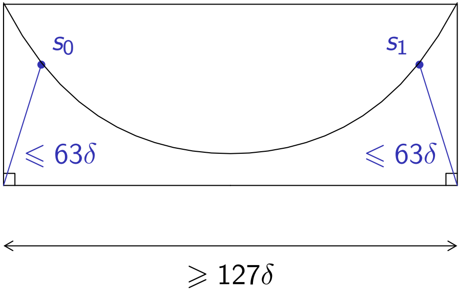
Dans un quadrilatère, si un côté assez grand (plus long que 127δ*) est bordé par deux angles droits, alors le côté opposé passe* 63δ*-proche de chaque extrémités.*



Des triangles aux tétraèdres

Lemme

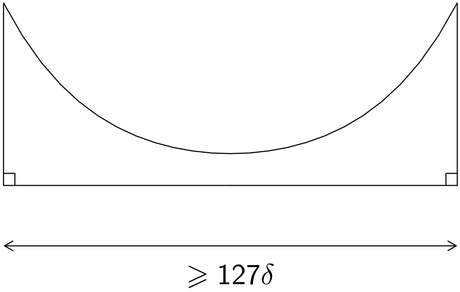
Dans un quadrilatère, si un côté assez grand (plus long que 127δ*) est bordé par deux angles droits, alors le côté opposé passe* 63δ*-proche de chaque extrémités.*



Des triangles aux tétraèdres

Lemme

Dans un quadrilatère, si un côté assez grand (plus long que 127δ*) est bordé par deux angles droits, alors le côté opposé passe* 63δ*-proche de chaque extrémités.*



Des triangles aux tétraèdres

Lemme

Dans un quadrilatère, si un côté assez grand (plus long que 127δ*) est bordé par deux angles droits, alors le côté opposé passe* 63δ*-proche de chaque extrémités.*

Des triangles aux tétraèdres

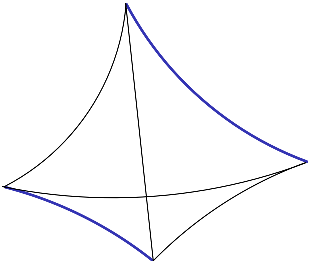
Proposition

Dans un (squelette de) tétraèdre hyperbolique, il existe 3 *paires d'arêtes opposées, et au plus l'une d'entre elles est distante de plus de* 127δ.

Des triangles aux tétraèdres

Proposition

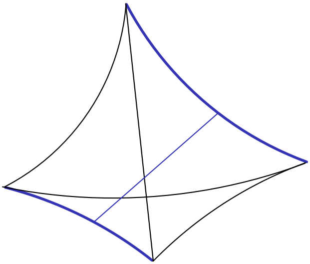
Dans un (squelette de) tétraèdre hyperbolique, il existe 3 paires d'arêtes opposées, et au plus l'une d'entre elles est distante de plus de 127δ*.*



Des triangles aux tétraèdres

Proposition

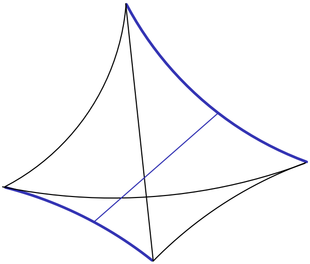
Dans un (squelette de) tétraèdre hyperbolique, il existe 3 paires d'arêtes opposées, et au plus l'une d'entre elles est distante de plus de 127δ.

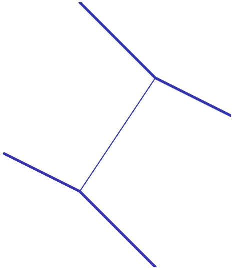


Des triangles aux tétraèdres

Proposition

Dans un (squelette de) tétraèdre hyperbolique, il existe 3 paires d'arêtes opposées, et au plus l'une d'entre elles est distante de plus de 127δ*.*



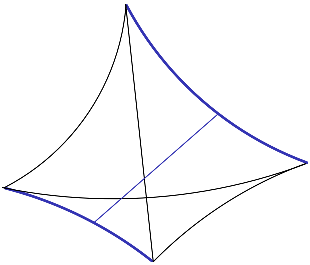


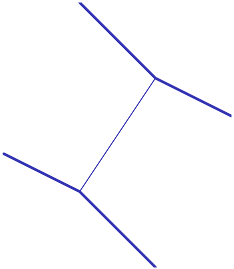
Le grand tétraèdre hyperbolique est bien approximé par un arbre du type RER B.

Des triangles aux tétraèdres

Proposition

Dans un (squelette de) tétraèdre hyperbolique, il existe 3 paires d'arêtes opposées, et au plus l'une d'entre elles est distante de plus de 127δ.



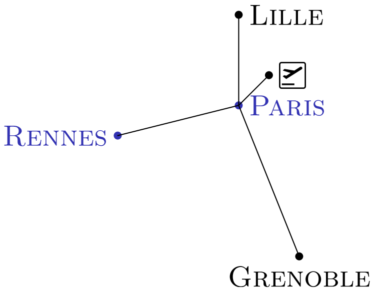


Le grand tétraèdre hyperbolique est bien approximé par un arbre du type RER B. On appelle différence croisée la plus grande distance entre deux arêtes.

Cônes asymptotiques et SBE.

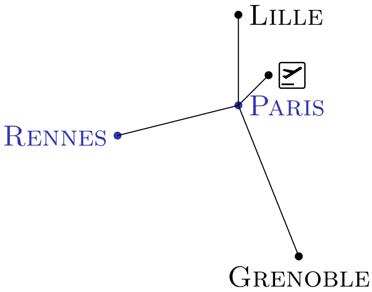
Le télescope de Gromov, van den Dries et Wilkie

Vus de loin, les objets de taille $\approx \delta$ dans un espace δ-hyperboliques sont petits. Les triangles très minces ressemblent à des tripodes, et l'espace à un arbre dont le branchement augmente, sauf cas particuliers.



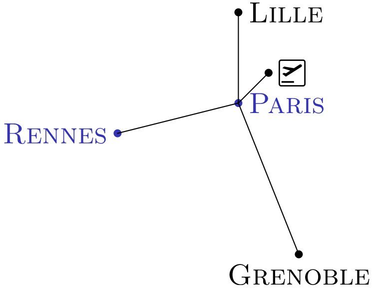
Le télescope de Gromov, van den Dries et Wilkie

Vus de loin, les objets de taille $\approx \delta$ dans un espace δ-hyperboliques sont petits. Les triangles très minces ressemblent à des tripodes, et l'espace à un arbre dont le branchement augmente, sauf cas particuliers.



Le télescope de Gromov, van den Dries et Wilkie

Vus de loin, les objets de taille $\approx \delta$ dans un espace δ-hyperboliques sont petits. Les triangles très minces ressemblent à des tripodes, et l'espace à un arbre dont le branchement augmente, sauf cas particuliers. On formalise ceci par une propriété métrique des cônes asymptotiques des espaces hyperboliques



Cônes asymptotiques

Soit X un espace métrique, $(o_j)_{j \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}}$ une suite de points-bases, et (λ_j) une suite de facteurs de renormalisation de limite infinie.

Cônes asymptotiques

Soit X un espace métrique, $(o_j)_{j \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}}$ une suite de points-bases, et (λ_j) une suite de facteurs de renormalisation de limite infinie. Soit ω un ultrafiltre non principal sur $\mathbf{Z}_{\geqslant 0}$. On forme ${}^*X$, avec ${}^*d$ allant vers ${}^*\mathbf{R}$.

Cônes asymptotiques

Soit X un espace métrique, $(o_j)_{j\in\mathbf{Z}_{\geqslant 0}}$ une suite de points-bases, et (λ_j) une suite de facteurs de renormalisation de limite infinie. Soit ω un ultrafiltre non principal sur $\mathbf{Z}_{\geqslant 0}$. On forme ${}^*X$, avec ${}^*d$ allant vers ${}^*\mathbf{R}$. $\mathrm{Cone}_\omega(o_j,\lambda_j)$ est constitué des éléments non-standards (x_j) qui s'échappent en $O(\lambda_j)$, avec la distance $\lim_\omega {}^*d/\lambda$ et en identifiant les points à distance nulle.

Cônes asymptotiques

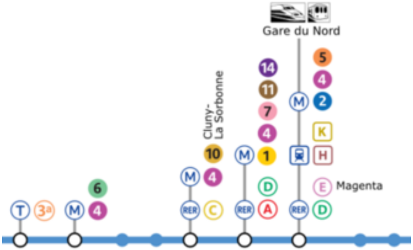
Soit X un espace métrique, $(o_j)_{j \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}}$ une suite de points-bases, et (λ_j) une suite de facteurs de renormalisation de limite infinie. Soit ω un ultrafiltre non principal sur $\mathbf{Z}_{\geqslant 0}$. On forme ${}^*X$, avec ${}^*d$ allant vers ${}^*\mathbf{R}$. $\mathrm{Cone}_\omega(o_j, \lambda_j)$ est constitué des éléments non-standards (x_j) qui s'échappent en $O(\lambda_j)$, avec la distance $\lim_\omega {}^*d/\lambda$ et en identifiant les points à distance nulle.

Voir aussi A. Sisto : `https://alexsisto.wordpress.com/2012/01/22/asymptotic-cones/`

Cones asymptotiques et hyperbolicité

Propriétés

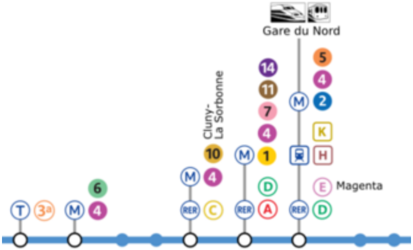
1. *X est hyperbolique si et seulement si pour tout (o_j) et pour tout ω, $\mathrm{Cone}_\omega(o_j, \lambda_j)$ est un arbre réel.*



Cones asymptotiques et hyperbolicité

Propriétés

1. *X est hyperbolique si et seulement si pour tout (o_j) et pour tout ω, $\mathrm{Cone}_\omega(o_j, \lambda_j)$ est un arbre réel.*
2. *Si X est riemannienne complète à $K < -\kappa^2$ ou groupe hyperbolique de type fini non élémentaire, c'est l'arbre réel homogène $2^{\aleph_0}$-branché.*



Catégories Lipschitz à grande échelle

Définition

Soient X et Y deux espaces métriques. $f : X \to Y$ est un homéomorphisme bilipschitzien *s'il existe $\underline{\lambda}, \overline{\lambda} \in \mathbf{R}_{>0}$ telles que pour tous $x, x' \in X$ et $y \in Y$,*

$$\begin{cases} \underline{\lambda} d(x,x') \leqslant d(f(x), f(x')) \leqslant \overline{\lambda} d(x,x'). \\ y \in f(X) \end{cases}$$

Catégories Lipschitz à grande échelle

Définition

Soient X et Y deux espaces métriques. $f : X \to Y$ est une quasi-isométrie s'il existe $\gamma \in \mathbf{R}_{\geqslant 0}$, $\underline{\lambda}, \overline{\lambda} \in \mathbf{R}_{>0}$ tel que pour tous $x, x' \in X$ et $y \in Y$,

$$\begin{cases} \underline{\lambda} d(x,x') - \gamma \leqslant d(f(x), f(x')) \leqslant \overline{\lambda} d(x,x') + \gamma. \\ d(y, f(X)) \leqslant \gamma. \end{cases}$$

Catégories Lipschitz à grande échelle

Definition (Cornulier 2011, 2016)

Soient X et Y deux espaces métriques. $f : X \to Y$ est une équivalence bilipschitzienne à grande échelle (SBE) s'il existe $u(r) \ll r$, $\underline{\lambda}, \overline{\lambda} \in \mathbf{R}_{>0}$ telles que pour tous $x, x' \in X$ et $y \in Y$,

$$\begin{cases} \underline{\lambda} d(x,x') - u(|x| + |x'|) \leqslant d(f(x), f(x')) \leqslant \overline{\lambda} d(x,x') + u(|x| + |x'|). \\ d(y, f(X)) \leqslant u(|y|). \end{cases}$$

Catégories Lipschitz à grande échelle

Definition (Cornulier 2011, 2016)

Soient X et Y deux espaces métriques. $f : X \to Y$ est une équivalence bilipschitzienne à grande échelle (SBE) s'il existe $u(r) \ll r$, $\underline{\lambda}, \overline{\lambda} \in \mathbf{R}_{>0}$ telles que pour tous $x, x' \in X$ et $y \in Y$,

$$\begin{cases} \underline{\lambda} d(x,x') - u(|x| + |x'|) \leqslant d(f(x), f(x')) \leqslant \overline{\lambda} d(x,x') + u(|x| + |x'|). \\ d(y, f(X)) \leqslant u(|y|). \end{cases}$$

Catégories Lipschitz à grande échelle

Definition (Cornulier 2011, 2016)

Soient X et Y deux espaces métriques. $f : X \to Y$ est une équivalence bilipschitzienne à grande échelle (SBE) s'il existe $u(r) \ll r$, $\underline{\lambda}, \overline{\lambda} \in \mathbf{R}_{>0}$ telles que pour tous $x, x' \in X$ et $y \in Y$,

$$\begin{cases} \underline{\lambda} d(x,x') - u(|x| + |x'|) \leqslant d(f(x), f(x')) \leqslant \overline{\lambda} d(x,x') + u(|x| + |x'|). \\ d(y, f(X)) \leqslant u(|y|). \end{cases}$$

Propriété fondamentale

Pour tout ultrafiltre non principal ω, f induit un homéomorphisme biLipschitz $X_\omega \to Y_\omega$ (point-base constant).

Motivation : Cônes asymptotiques des groupes de Lie

La classification des groupes de Lie connexes à QI près est très difficile.

Motivation : Cônes asymptotiques des groupes de Lie

La classification des groupes de Lie connexes à QI près est très difficile. Elle se ramène toutefois au cas résoluble (Cornulier) et en s'autorisant les SBE on peut être plus précis.

Motivation : Cônes asymptotiques des groupes de Lie

La classification des groupes de Lie connexes à QI près est très difficile. Elle se ramène toutefois au cas résoluble (Cornulier) et en s'autorisant les SBE on peut être plus précis.
Soit G un groupe de Lie connexe, R son radical exponentiel. Si G est résoluble c'est le sous-groupe des éléments exponentiellement distordus (Guivarc'h, Osin).

Motivation : Cônes asymptotiques des groupes de Lie

La classification des groupes de Lie connexes à QI près est très difficile. Elle se ramène toutefois au cas résoluble (Cornulier) et en s'autorisant les SBE on peut être plus précis.
Soit G un groupe de Lie connexe, R son radical exponentiel. Si G est résoluble c'est le sous-groupe des éléments exponentiellement distordus (Guivarc'h, Osin).

Théorème (Cornulier 2008, 2011)

Sous ces hypothèses, il existe une extension scindée

$$1 \longrightarrow R \underset{\text{Exprad}}{\longrightarrow} \widetilde{G} \longrightarrow H \longrightarrow 1,$$

où H est un groupe nilpotent gradué, $\mathfrak{r}$ est un $\mathfrak{h}$-module semi-simple de poids réels, et $\widetilde{G}$ est SBE à G.

Motivation : Cônes asymptotiques des groupes de Lie

La classification des groupes de Lie connexes à QI près est très difficile. Elle se ramène toutefois au cas résoluble (Cornulier) et en s'autorisant les SBE on peut être plus précis.
Soit G un groupe de Lie connexe, R son radical exponentiel. Si G est résoluble c'est le sous-groupe des éléments exponentiellement distordus (Guivarc'h, Osin).

Théorème (Cornulier 2008, 2011)

Sous ces hypothèses, il existe une extension scindée

$$1 \longrightarrow R \underset{\text{Exprad}}{\longrightarrow} \widetilde{G} \longrightarrow H \longrightarrow 1,$$

où H est un groupe nilpotent gradué, $\mathfrak{r}$ est un $\mathfrak{h}$-module semi-simple de poids réels, et $\widetilde{G}$ est SBE à G.

La classification à QI près des groupes nilpotents est conjecturale, mais la classification SBE est connue (Pansu, Breuillard, Cornulier).

La sphère à l'infini.

La sphère à l'infini

Les modèles de $\mathbb{H}^n_{\mathbf{R}}$ ont des bords. Pour le disque c'est un cercle, pour la boule c'est une sphère, et pour le demi-espace, c'est un plan augmenté d'un point « à l'infini ».

La sphère à l'infini

Les modèles de $\mathbb{H}^n_{\mathbf{R}}$ ont des bords. Pour le disque c'est un cercle, pour la boule c'est une sphère, et pour le demi-espace, c'est un plan augmenté d'un point « à l'infini ». Ces bords représentent tous la sphère à l'infini de l'espace hyperbolique.

La sphère à l'infini

Les modèles de $\mathbb{H}^n_{\mathbf{R}}$ ont des bords. Pour le disque c'est un cercle, pour la boule c'est une sphère, et pour le demi-espace, c'est un plan augmenté d'un point « à l'infini ». Ces bords représentent tous la sphère à l'infini de l'espace hyperbolique.

Définition

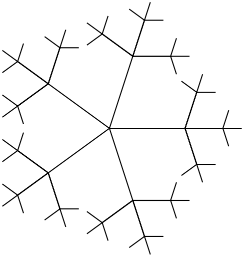
Soit X un espace δ-hyperbolique, géodésique et propre. Sa sphère à l'infini $\partial_\infty X$ est l'ensemble des rayons géodésiques $\mathbf{R}_{\geqslant 0} \to X$, quotienté par la relation $\gamma \sim \sigma \iff \sup_s d(\gamma(s), \sigma) < +\infty$.

La sphère à l'infini

Les modèles de $\mathbb{H}^n_{\mathbf{R}}$ ont des bords. Pour le disque c'est un cercle, pour la boule c'est une sphère, et pour le demi-espace, c'est un plan augmenté d'un point « à l'infini ». Ces bords représentent tous la sphère à l'infini de l'espace hyperbolique.

Définition

Soit X un espace δ-hyperbolique, géodésique et propre. Sa sphère à l'infini $\partial_\infty X$ est l'espace des rayons géodésiques $\mathbf{R}_{\geqslant 0} \to X$, quotienté par la relation fermée $\gamma \sim \sigma \iff \sup_s d(\gamma(s), \sigma) < +\infty$.

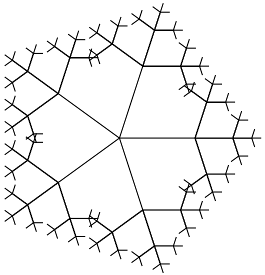


La sphère à l'infini

Les modèles de $\mathbb{H}^n_{\mathbf{R}}$ ont des bords. Pour le disque c'est un cercle, pour la boule c'est une sphère, et pour le demi-espace, c'est un plan augmenté d'un point « à l'infini ». Ces bords représentent tous la sphère à l'infini de l'espace hyperbolique.

Définition

Soit X un espace δ-hyperbolique, géodésique et propre. Sa sphère à l'infini $\partial_\infty X$ est l'espace des rayons géodésiques $\mathbf{R}_{\geqslant 0} \to X$, quotienté par la relation fermée $\gamma \sim \sigma \iff \sup_s d(\gamma(s), \sigma) < +\infty$.

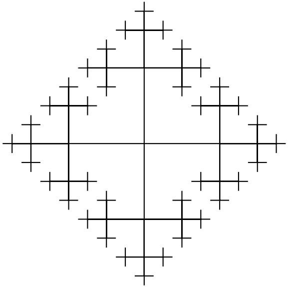


La sphère à l'infini

Les modèles de $\mathbb{H}^n_{\mathbf{R}}$ ont des bords. Pour le disque c'est un cercle, pour la boule c'est une sphère, et pour le demi-espace, c'est un plan augmenté d'un point « à l'infini ». Ces bords représentent tous la sphère à l'infini de l'espace hyperbolique.

Définition

Soit X un espace δ-hyperbolique, géodésique et propre. Sa sphère à l'infini $\partial_\infty X$ est l'espace des rayons géodésiques $\mathbf{R}_{\geqslant 0} \to X$, quotienté par la relation fermée $\gamma \sim \sigma \iff \sup_s d(\gamma(s), \sigma) < +\infty$.

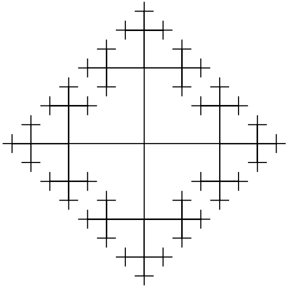


La sphère à l'infini

Les modèles de $\mathbb{H}^n_{\mathbf{R}}$ ont des bords. Pour le disque c'est un cercle, pour la boule c'est une sphère, et pour le demi-espace, c'est un plan augmenté d'un point « à l'infini ». Ces bords représentent tous la sphère à l'infini de l'espace hyperbolique.

Définition

Soit X un espace δ-hyperbolique, géodésique et propre. Sa sphère à l'infini $\partial_\infty X$ est l'espace des rayons géodésiques $\mathbf{R}_{\geqslant 0} \to X$, quotienté par la relation fermée $\gamma \sim \sigma \iff \sup_s d(\gamma(s), \sigma) < +\infty$.

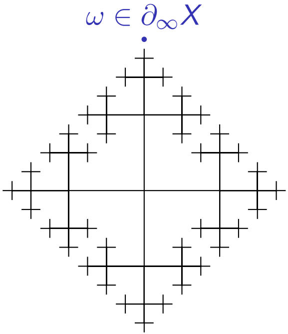


La sphère à l'infini

Les modèles de $\mathbb{H}^n_{\mathbf{R}}$ ont des bords. Pour le disque c'est un cercle, pour la boule c'est une sphère, et pour le demi-espace, c'est un plan augmenté d'un point « à l'infini ». Ces bords représentent tous la sphère à l'infini de l'espace hyperbolique.

Définition

Soit X un espace δ-hyperbolique, géodésique et propre. Sa sphère à l'infini $\partial_\infty X$ est l'espace des rayons géodésiques $\mathbf{R}_{\geqslant 0} \to X$, quotienté par la relation fermée $\gamma \sim \sigma \iff \sup_s d(\gamma(s), \sigma) < +\infty$.

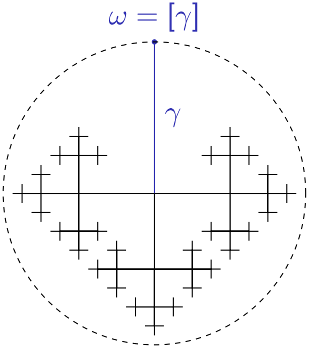


La sphère à l'infini

Les modèles de $\mathbb{H}^n_{\mathbf{R}}$ ont des bords. Pour le disque c'est un cercle, pour la boule c'est une sphère, et pour le demi-espace, c'est un plan augmenté d'un point « à l'infini ». Ces bords représentent tous la sphère à l'infini de l'espace hyperbolique.

Définition

Soit X un espace δ-hyperbolique, géodésique et propre. Sa sphère à l'infini $\partial_\infty X$ est l'espace des rayons géodésiques $\mathbf{R}_{\geqslant 0} \to X$, quotienté par la relation fermée $\gamma \sim \sigma \iff \sup_s d(\gamma(s), \sigma) < +\infty$.

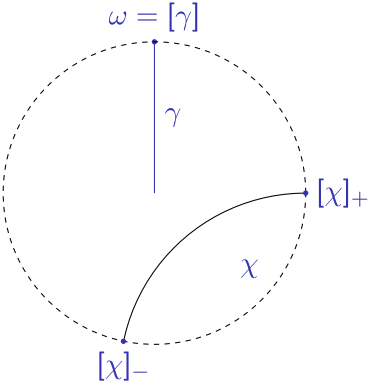


La sphère à l'infini

Les modèles de $\mathbb{H}^n_{\mathbf{R}}$ ont des bords. Pour le disque c'est un cercle, pour la boule c'est une sphère, et pour le demi-espace, c'est un plan augmenté d'un point « à l'infini ». Ces bords représentent tous la sphère à l'infini de l'espace hyperbolique.

Définition

Soit X un espace δ-hyperbolique, géodésique et propre. Sa sphère à l'infini $\partial_\infty X$ est l'espace des rayons géodésiques $\mathbf{R}_{\geqslant 0} \to X$, quotienté par la relation fermée $\gamma \sim \sigma \iff \sup_s d(\gamma(s), \sigma) < +\infty$.



Métriques visuelles

On fixe un point-base $o \in X$.

Métriques visuelles

On fixe un point-base $o \in X$. Pour $\xi_1, \xi_2 \in \partial X$, on définit

$$(\xi_1 \mid \xi_2)_o := \sup \lim (\chi_1(t) \mid \chi_2(t))_o$$

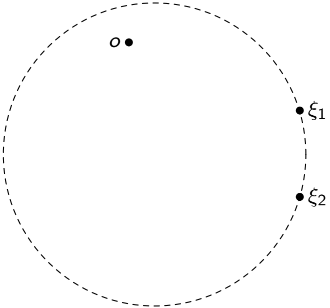
pour les χ_i tels que $\xi_i = [\chi_i]$.

Métriques visuelles

On fixe un point-base $o \in X$. Pour $\xi_1, \xi_2 \in \partial X$, on définit

$$(\xi_1 \mid \xi_2)_o := \sup \lim (\chi_1(t) \mid \chi_2(t))_o$$

pour les χ_i tels que $\xi_i = [\chi_i]$.

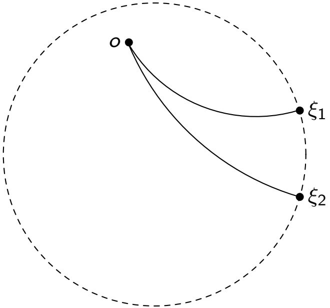


Métriques visuelles

On fixe un point-base $o \in X$. Pour $\xi_1, \xi_2 \in \partial X$, on définit

$$(\xi_1 \mid \xi_2)_o := \sup \lim (\chi_1(t) \mid \chi_2(t))_o$$

pour les χ_i tels que $\xi_i = [\chi_i]$.



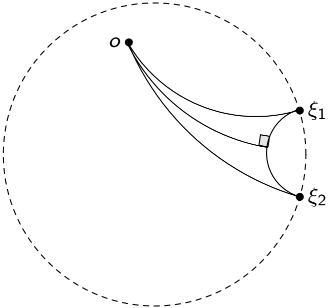
Puisque les triangles rectangles dégénèrent, $(\xi_1 \mid \xi_2)_o$ s'interprète comme la distance de o à une géodésique $(\xi_1\xi_2)$.

Métriques visuelles

On fixe un point-base $o \in X$. Pour $\xi_1, \xi_2 \in \partial X$, on définit

$$(\xi_1 \mid \xi_2)_o := \sup \lim (\chi_1(t) \mid \chi_2(t))_o$$

pour les χ_i tels que $\xi_i = [\chi_i]$.



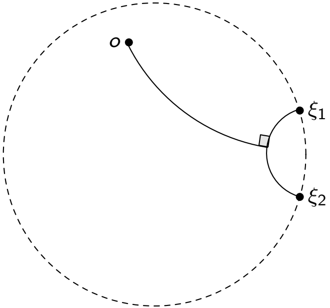
Puisque les triangles rectangles dégénèrent, $(\xi_1 \mid \xi_2)_o$ s'interprète comme la distance de o à une géodésique $(\xi_1 \xi_2)$.

Métriques visuelles

On fixe un point-base $o \in X$. Pour $\xi_1, \xi_2 \in \partial X$, on définit

$$(\xi_1 \mid \xi_2)_o := \sup \lim (\chi_1(t) \mid \chi_2(t))_o$$

pour les χ_i tels que $\xi_i = [\chi_i]$.



Puisque les triangles rectangles dégénèrent, $(\xi_1 \mid \xi_2)_o$ s'interprète comme la distance de o à une géodésique $(\xi_1 \xi_2)$. Finalement, pour μ paramètre réel, $\rho_\mu(\xi_1, \xi_2) = \mu^{-(\xi_1 \mid \xi_2)_o}$, et d_μ est la plus grande distance de longueur $\leqslant \rho_\mu$.

Exemples

X	∂X	$\mathrm{Ldim}(\partial X)$
T_3	cantor	0
$\mathbb{H}^n_{\mathbf{R}}$	S^{n-1}	$n-1$
$M^n : K < -\kappa^2$	S^{n-1}	$n-1$
$\mathbb{H}^n_{\mathbf{C}}$	S^{2n-1}	$2n-1$

TABLE 1 – Sphères à l'infini de quelques espaces hyperboliques, et leurs dimensions topologiques.

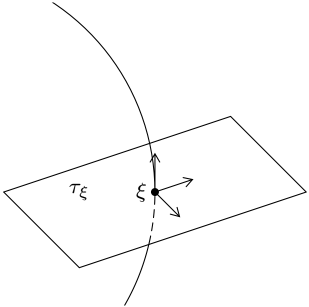
La sphère à l'infini de $\mathbb{H}^2_{\mathbf{C}}$

Espace symétrique hermitien, $\mathbb{H}^2_{\mathbf{C}}$ est $1/4$-pincé. Les $\mathbf{C}$-droites sont les plus (négativement) courbées, et tracent sur sa 3-sphère à l'infini les cercles d'une fibration de Hopf.

La sphère à l'infini de $\mathbb{H}^2_{\mathbf{C}}$

Espace symétrique hermitien, $\mathbb{H}^2_{\mathbf{C}}$ est 1/4-pincé. Les **C**-droites sont les plus (négativement) courbées, et tracent sur sa 3-sphère à l'infini les cercles d'une fibration de Hopf. Soit τ le champ de plans orthogonal, puis

$$d(x,y) = \inf \{\ell(\gamma) : \gamma(0) = x, \\ \gamma(1) = y, \dot\gamma(t) \in \tau \text{ p.p.} t\}.$$

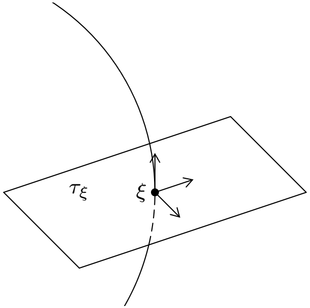


La sphère à l'infini de $\mathbb{H}^2_{\mathbf{C}}$

Espace symétrique hermitien, $\mathbb{H}^2_{\mathbf{C}}$ est 1/4-pincé. Les **C**-droites sont les plus (négativement) courbées, et tracent sur sa 3-sphère à l'infini les cercles d'une fibration de Hopf. Soit τ le champ de plans orthogonal, puis

$$d(x,y) = \inf\{\ell(\gamma) : \gamma(0) = x, \\ \gamma(1) = y, \dot\gamma(t) \in \tau \text{ p.p.} t\}.$$

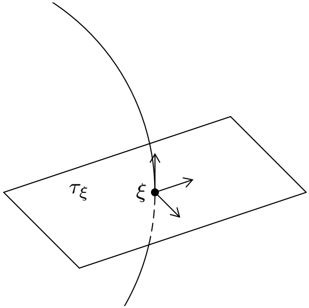
Il est « quadratiquement plus difficile » de suivre les fibres ; la dimension conforme de $\mathbb{H}^2_{\mathbf{C}}$ est $\dim \tau + 2 = 4$.



La sphère à l'infini de $\mathbb{H}^2_{\mathbf{C}}$

Espace symétrique hermitien, $\mathbb{H}^2_{\mathbf{C}}$ est 1/4-pincé. Les **C**-droites sont les plus (négativement) courbées, et tracent sur sa 3-sphère à l'infini les cercles d'une fibration de Hopf. Soit τ le champ de plans orthogonal, puis

$$d(x,y) = \inf\{\ell(\gamma) : \gamma(0) = x, \\ \gamma(1) = y, \dot\gamma(t) \in \tau \text{ p.p.} t\}\,.$$



Il est « quadratiquement plus difficile » de suivre les fibres ; la dimension conforme de $\mathbb{H}^2_{\mathbf{C}}$ est $\dim \tau + 2 = 4$.

Pour une description alternative, voir
www.math.u-psud.fr/ pallier/pdfs/rennes.pdf

Le groupoïde sous-linéairement quasiMöbius.

Hölderianité au bord

Dans un espace hyperbolique, les grands produits de Gromov se matérialisent comme de grandes distances (d'un point à une géodésique)

Hölderianité au bord

Dans un espace hyperbolique, les grands produits de Gromov se matérialisent comme de grandes distances (d'un point à une géodésique)

Théorème (Cornulier, 2016)

Soit $f : X \to Y$ une application sous-linéairement bilipschitzienne à grande échelle. f induit $\partial f : \partial X \to \partial Y$. De plus, si $\underline{\lambda}$ est la constante d'expansion à grande échelle, alors pour tout $\alpha \in (0, \underline{\lambda})$, ∂f est C^α (par rapport aux métriques visuelles d_μ de même paramètre).

Hölderianité au bord

Dans un espace hyperbolique, les grands produits de Gromov se matérialisent comme de grandes distances (d'un point à une géodésique)

Théorème (Cornulier, 2016)

Soit $f : X \to Y$ une application sous-linéairement bilipschitzienne à grande échelle. f induit $\partial f : \partial X \to \partial Y$. De plus, si $\underline{\lambda}$ est la constante d'expansion à grande échelle, alors pour tout $\alpha \in (0, \underline{\lambda})$, ∂f est C^α (par rapport aux métriques visuelles d_μ de même paramètre).

Corollaire

Un groupe de Schottky fuchsien (qui est libre) et un groupe de surface (qui est cocompact dans $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2_{\mathbf{R}})$) ne sont pas SBE.

Hölderianité au bord

Dans un espace hyperbolique, les grands produits de Gromov se matérialisent comme de grandes distances (d'un point à une géodésique)

Théorème (Cornulier, 2016)

Soit $f : X \to Y$ une application sous-linéairement bilipschitzienne à grande échelle. f induit $\partial f : \partial X \to \partial Y$. De plus, si $\underline{\lambda}$ est la constante d'expansion à grande échelle, alors pour tout $\alpha \in (0, \underline{\lambda})$, ∂f est C^α (par rapport aux métriques visuelles d_μ de même paramètre).

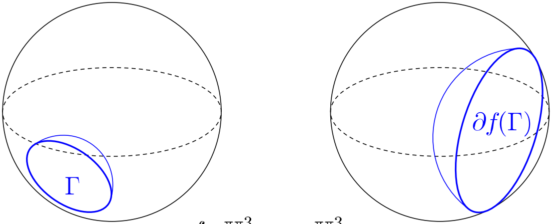
Corollaire

Un groupe de Schottky fuchsien (qui est libre) et un groupe de surface (qui est cocompact dans $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2_{\mathbf{R}})$) ne sont pas SBE.

En effet leurs sphères ne sont pas homéomorphes : Dans le premier cas c'est un cantor, dans le second cas c'est S^1.

Géométrie hyperbolique et géométrie conforme

Toute isométrie f de $\mathbb{H}^3_{\mathbf{R}}$ imprime à la sphère à l'infini une transformation conforme ∂f : les cercles sont envoyés sur les cercles.



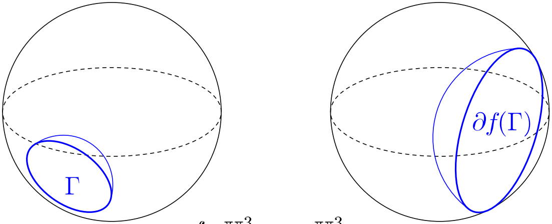
$$f : \mathbb{H}^3_{\mathbf{R}} \longrightarrow \mathbb{H}^3_{\mathbf{R}}$$

$$\partial f \in \mathrm{Conf}(\mathrm{S}^2)$$

Géométrie hyperbolique et géométrie conforme

Toute isométrie f de $\mathbb{H}^3_{\mathbf{R}}$ imprime à la sphère à l'infini une transformation conforme ∂f : les cercles sont envoyés sur les cercles. De plus

- Si $\partial f = \mathrm{Id}_{S^2}$, alors $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{H}^3_{\mathbf{R}}}$: fidélité.



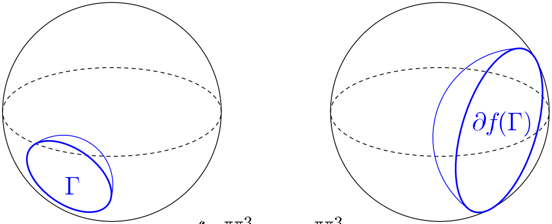
$$f : \mathbb{H}^3_{\mathbf{R}} \longrightarrow \mathbb{H}^3_{\mathbf{R}}$$

$$\partial f \in \mathrm{Conf}(\mathrm{S}^2)$$

Géométrie hyperbolique et géométrie conforme

Toute isométrie f de $\mathbb{H}^3_{\mathbf{R}}$ imprime à la sphère à l'infini une transformation conforme ∂f : les cercles sont envoyés sur les cercles.

- Si $\partial f = \mathrm{Id}_{S^2}$, alors $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{H}^3_{\mathbf{R}}}$: fidélité.
- Toute transformation conforme S^2 s'étend en $\mathbb{H}_{\mathbf{R}^3}$ et s'écrit donc sous la forme ∂f : plénitude.



$$f : \mathbb{H}^3_{\mathbf{R}} \longrightarrow \mathbb{H}^3_{\mathbf{R}}$$

$$\partial f \in \mathrm{Conf}(\mathrm{S}^2)$$

Birapport

Définition

Soit ∂X *une sphère à l'infini (ou un espace métrique compact) et* $\xi_1, \ldots \xi_4$ *des points distincts. Leur birapport métrique est*

$$[\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4] = \frac{|\xi_1\xi_3||\xi_2\xi_4|}{|\xi_1\xi_2||\xi_3\xi_4|}.$$

Birapport

Définition

Soit ∂X *une sphère à l'infini (ou un espace métrique compact) et* $\xi_1, \ldots \xi_4$ *des points distincts. Leur birapport métrique est*

$$[\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4] = \frac{|\xi_1\xi_3||\xi_2\xi_4|}{|\xi_1\xi_2||\xi_3\xi_4|}.$$

En permutant quatre points, on obtient six birapports possibles. Seuls deux au plus sont très grands.

Birapport

Définition

Soit ∂X *une sphère à l'infini (ou un espace métrique compact) et* $\xi_1, \ldots \xi_4$ *des points distincts. Leur* birapport *métrique est*

$$[\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4] = \frac{|\xi_1\xi_3||\xi_2\xi_4|}{|\xi_1\xi_2||\xi_3\xi_4|}.$$

En permutant quatre points, on obtient six birapports possibles. Seuls deux au plus sont très grands.

Proposition

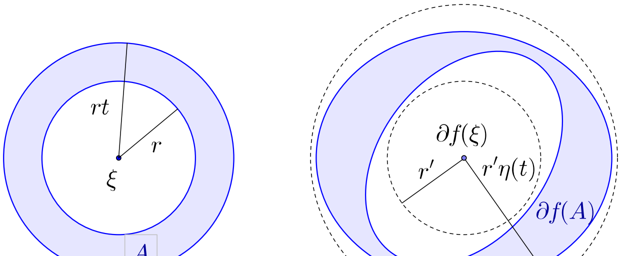
A une erreur additive près, $\log_\mu \sup_\sigma [\xi_{\sigma(i)}]$ *est égale à la différence croisée du tétraèdre idéal de sommets* ξ_i*.*

Applications quasiMöbius

Définition (locale)

Un homéomorphisme φ est quasiMöbius s'il quasipréserve le biraport, i.e. pour nous s'il existe $\underline{\lambda}, \overline{\lambda}, \gamma$ tels que pour tous ξ_i distincts,

$$\underline{\lambda}\log^+[\xi_i] - \gamma \leqslant \log^+[\varphi(\xi_i)] \leqslant \overline{\lambda}\log^+[\xi_i] + \gamma$$



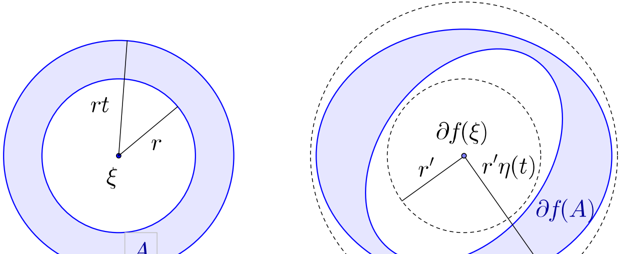
Applications quasiMöbius

Définition (locale)

Un homéomorphisme φ est quasiMöbius s'il quasipréserve le biraport, i.e. pour nous s'il existe $\underline{\lambda}, \overline{\lambda}, \gamma$ tels que pour tous ξ_i distincts,

$$\underline{\lambda}\log^+[\xi_i] - \gamma \leqslant \log^+[\varphi(\xi_i)] \leqslant \overline{\lambda}\log^+[\xi_i] + \gamma$$

En appliquant la définition à un triple groupé et un quatrième point très loin « à l'infini », les homéomorphismes quasiMöbius sont quasisymétriques.



Le théorème principal

Theorème (Efremovich – Tihomirova 1964)

Soit $\mathbb{H}^n_{\mathbf{R}} \to \mathbb{H}^n_{\mathbf{R}}$ une quasiisométrie, f induit $\partial f : S^{n-1} \to S^{n-1}$ quasiMöbius.

Le théorème principal

Theorème (Efremovich – Tihomirova 1964)

Soit $\mathbb{H}^n_{\mathbf{R}} \to \mathbb{H}^n_{\mathbf{R}}$ une quasiisométrie, f induit $\partial f : S^{n-1} \to S^{n-1}$ quasiMöbius.

Pour les SBE, on obtient la généralisation suivante.

Le théorème principal

Theorème (Efremovich – Tihomirova 1964)

Soit $\mathbb{H}^n_{\mathbf{R}} \to \mathbb{H}^n_{\mathbf{R}}$ une quasiisométrie, f induit $\partial f : S^{n-1} \to S^{n-1}$ quasiMöbius.

Pour les SBE, on obtient la généralisation suivante.

Théorème

Soient X et Y propres, géodésiques, pointés, Gromov-hyperboliques, $f : X \to Y$ SBE. Alors f induit $\varphi = \partial f$, et pour tous ξ_i tous assez proches,

$$\underline{\lambda} \log^+[\xi_i] - v(\overline{\boxtimes}\{\xi_i\}) \leqslant \log^+[\varphi(\xi_i)] \leqslant \overline{\lambda} \log^+[\xi_i] + v(\overline{\boxtimes}\{\xi_i\}),$$

où $v(r) \ll r$, $\overline{\boxtimes}\{\xi_i\}$ désigne $\sup_{i \neq j}(\xi_i \mid \xi_j)_o$, et $\underline{\lambda}, \overline{\lambda}$ sont les constantes d'expansion et Lipschitz à grande échelle de f.

Le théorème principal

Theorème (Efremovich – Tihomirova 1964)

Soit $\mathbb{H}^n_{\mathbf{R}} \to \mathbb{H}^n_{\mathbf{R}}$ une quasiisométrie, f induit $\partial f : S^{n-1} \to S^{n-1}$ quasiMöbius.

Pour les SBE, on obtient la généralisation suivante.

Théorème

Soient X et Y propres, géodésiques, pointés, Gromov-hyperboliques, $f : X \to Y$ SBE. Alors f induit $\varphi = \partial f$, et pour tous ξ_i tous assez proches,

$$\underline{\lambda} \log^+[\xi_i] - v(\overline{\boxtimes}\{\xi_i\}) \leqslant \log^+[\varphi(\xi_i)] \leqslant \overline{\lambda} \log^+[\xi_i] + v(\overline{\boxtimes}\{\xi_i\}),$$

où $v(r) \ll r$, $\overline{\boxtimes}\{\xi_i\}$ désigne $\sup_{i \neq j}(\xi_i \mid \xi_j)_o$, et $\underline{\lambda}, \overline{\lambda}$ sont les constantes d'expansion et Lipschitz à grande échelle de f.

v peut être rendue plus explicite en fonction de f.

Homéomorphismes sous-linéairement quasiMöbius

On appelle un homéomorphisme tel que précédemment sous-linéairement quasiMöbius (SQM). Voici quelques propriétés.

Homéomorphismes sous-linéairement quasiMöbius

On appelle un homéomorphisme tel que précédemment sous-linéairement quasiMöbius (SQM). Voici quelques propriétés.

- Les homéos SQM sont bihölderiens. Le théorème de Cornulier est un corollaire du précédent.

Homéomorphismes sous-linéairement quasiMöbius

On appelle un homéomorphisme tel que précédemment sous-linéairement quasiMöbius (SQM). Voici quelques propriétés.

- Les homéos SQM sont bihölderiens. Le théorème de Cornulier est un corollaire du précédent.
- Les homéos SQM forment un groupoïde avec pour objets les métriques compacts. ∂ définit un foncteur vers ce groupoïde.

Homéomorphismes sous-linéairement quasiMöbius

On appelle un homéomorphisme tel que précédemment sous-linéairement quasiMöbius (SQM). Voici quelques propriétés.

- Les homéos SQM sont bihölderiens. Le théorème de Cornulier est un corollaire du précédent.
- Les homéos SQM forment un groupoïde avec pour objets les métriques compacts. ∂ définit un foncteur vers ce groupoïde.
- Les homéos SQM ont une propriété de distorsion bornée des modules, aux petites échelles finies.

Homéomorphismes sous-linéairement quasiMöbius

On appelle un homéomorphisme tel que précédemment sous-linéairement quasiMöbius (SQM). Voici quelques propriétés.

- Les homéos SQM sont bihölderiens. Le théorème de Cornulier est un corollaire du précédent.
- Les homéos SQM forment un groupoïde avec pour objets les métriques compacts. ∂ définit un foncteur vers ce groupoïde.
- Les homéos SQM ont une propriété de distorsion bornée des modules, aux petites échelles finies.

La dernière propriété est une forme faible de quasisymétrie. C'est avec elle qu'on travaille pour l'analyse au bord.

Le cas riemannien homogène.

Espaces riemanniens hyperboliques et homogènes

Les espaces homogènes simplement connexes de courbure négative sont des groupes résolubles de la forme $N \rtimes_\alpha \mathbf{R}$, où N est nilpotent et α est une dérivation compactante de $\mathfrak{n}$ (Heintze 1974).

Espaces riemanniens hyperboliques et homogènes

Les espaces homogènes simplement connexes de courbure négative sont des groupes résolubles de la forme $N \rtimes_\alpha \mathbf{R}$, où N est nilpotent et α est une dérivation compactante de $\mathfrak{n}$ (Heintze 1974). $\mathbf{R}$ est toujours géodésique. Soit $\omega \in \partial S$ son extrémité. On peut identifier $\partial^* S = \partial S \setminus \{\omega\}$ à N.

Espaces riemanniens hyperboliques et homogènes

Les espaces homogènes simplement connexes de courbure négative sont des groupes résolubles de la forme $N \rtimes_\alpha \mathbf{R}$, où N est nilpotent et α est une dérivation compactante de $\mathfrak{n}$ (Heintze 1974). $\mathbf{R}$ est toujours géodésique. Soit $\omega \in \partial S$ son extrémité. On peut identifier $\partial^* S = \partial S \setminus \{\omega\}$ à N. Il existe sur $\partial^* S$ une quasimétrique α-équivariante :

$$d([\chi]_-, [\gamma]_-) = \exp(-\inf\{s \in \mathbf{R} : |\chi(s)\gamma(s)| \leqslant 1\}),$$

ayant fixé les origines de χ et γ sur une horosphère centrée en ω.

Espaces riemanniens hyperboliques et homogènes

Les espaces homogènes simplement connexes de courbure négative sont des groupes résolubles de la forme $N \rtimes_\alpha \mathbf{R}$, où N est nilpotent et α est une dérivation compactante de $\mathfrak{n}$ (Heintze 1974). $\mathbf{R}$ est toujours géodésique. Soit $\omega \in \partial S$ son extrémité. On peut identifier $\partial^* S = \partial S \setminus \{\omega\}$ à N. Il existe sur $\partial^* S$ une quasimétrique α-équivariante :

$$d([\chi]_-, [\gamma]_-) = \exp(-\inf\{s \in \mathbf{R} : |\chi(s)\gamma(s)| \leqslant 1\}),$$

ayant fixé les origines de χ et γ sur une horosphère centrée en ω. (Dans le cas S symétrique, α dilate un groupe de Carnot N, et d est une norme de Guivarc'h.)

Espaces riemanniens hyperboliques et homogènes

Les espaces homogènes simplement connexes de courbure négative sont des groupes résolubles de la forme $N \rtimes_\alpha \mathbf{R}$, où N est nilpotent et α est une dérivation compactante de $\mathfrak{n}$ (Heintze 1974). $\mathbf{R}$ est toujours géodésique. Soit $\omega \in \partial S$ son extrémité. On peut identifier $\partial^* S = \partial S \setminus \{\omega\}$ à N. Il existe sur $\partial^* S$ une quasimétrique α-équivariante :

$$d([\chi]_-, [\gamma]_-) = \exp(-\inf\{s \in \mathbf{R} : |\chi(s)\gamma(s)| \leqslant 1\}),$$

ayant fixé les origines de χ et γ sur une horosphère centrée en ω. (Dans le cas S symétrique, α dilate un groupe de Carnot N, et d est une norme de Guivarc'h.)

Proposition (via la mesure des familles de courbes horizontale)

On suppose que $\lambda_1 = 1$ est la plus petite valeur propre de α, et qu'il existe une SBE $S \to S'$. Alors $\operatorname{tr}\alpha = \operatorname{tr}\alpha'$.

SBE des espaces symétriques hyperboliques

Dans le cas Carnot, $\mathrm{tr}\,\alpha$ est la dimension homogène (ou de Hausdorff) de N.

Théorème

Si deux espaces riemanniens symétriques de type non compact (resp. groupes de Lie simples) de rang un sont SBE, alors ils sont homothétiques, resp. isomorphes.

X	$\mathrm{Ldim} N$	$\mathrm{Hdim} N$
$\mathbb{H}^n_{\mathbf{R}}$	$n-1$	$n-1$
$\mathbb{H}^n_{\mathbf{C}}$	$2n-1$	$2n$
$\mathbb{H}^n_{\mathbf{H}}$	$4n-1$	$4n+2$
$\mathbb{H}^2_{\mathbf{O}}$	15	22

Table 2 – Dimension topologique et dimension de Hausdorff des paraboliques minimaux (cartes conformes des sphères à l'infini) pour les espaces symétriques hyperboliques.

Questions ouvertes. Perspectives.

Questions ouvertes

Questions ouvertes

- Si $\varphi : \partial X \to \partial Y$ est sous-linéairement quasiMöbius, s'étend-elle en $f : X \to Y$ une SBE ? Dans le cas des quasiisométries, c'est un théorème de Bonk et Schramm.

Questions ouvertes

- Si $\varphi : \partial X \to \partial Y$ est sous-linéairement quasiMöbius, s'étend-elle en $f : X \to Y$ une SBE ? Dans le cas des quasiisométries, c'est un théorème de Bonk et Schramm.
- Peut-on étendre le théorème aux espaces sous-linéairement hyperboliques pour lesquels $\delta(r) = o(u(r))$? (ne concerne pas les groupes)

Questions ouvertes

- Si $\varphi : \partial X \to \partial Y$ est sous-linéairement quasiMöbius, s'étend-elle en $f : X \to Y$ une SBE ? Dans le cas des quasiisométries, c'est un théorème de Bonk et Schramm.
- Peut-on étendre le théorème aux espaces sous-linéairement hyperboliques pour lesquels $\delta(r) = o(u(r))$? (ne concerne pas les groupes)
- Un homéomorphisme sous-linéairement quasiMöbius est-il absolument continu ? Très probablement, non.

Questions ouvertes

- Si $\varphi : \partial X \to \partial Y$ est sous-linéairement quasiMöbius, s'étend-elle en $f : X \to Y$ une SBE ? Dans le cas des quasiisométries, c'est un théorème de Bonk et Schramm.
- Peut-on étendre le théorème aux espaces sous-linéairement hyperboliques pour lesquels $\delta(r) = o(u(r))$? (ne concerne pas les groupes)
- Un homéomorphisme sous-linéairement quasiMöbius est-il absolument continu ? Très probablement, non.
- Soit $f : \mathbb{H}^n_{\mathbf{H}} \to \mathbb{H}^n_{\mathbf{H}}$ SBE. Est-elle $O(u)$-proche d'une isométrie ? D'une application harmonique ?

Merci pour votre attention.

Bibliographie

M. Bourdon, *Quasiconformal geometry and Mostow Rigidity*, in B. Rémy and A. Parreau eds, *NPC geometry, discrete groups and rigidity*, Séminaires et Congrès (SMF), No. 18, 2009.

Y. Cornulier, *Asymptotic cones of Lie groups and Cone equivalences*, arXiv :1702.06618, 2017.

Y. Cornulier, *SBE of nilpotent and hyperbolic groups*, arXiv :1702.06618, 2017.

Y. Cornulier, Sublinearly bilipschitz maps, hyperbolic and nilpotent groups, video from MSRI workshop, December 7, 2016. `https://www.msri.org/workshops/770/schedules/21623`