ADDENDUM (MAI 2017) À "UNE GÉOMÉTRIE POUR LES GRAPHES D'AMITIÉ"

GABRIEL PALLIER

On indique un théorème de Baer permettant d'éviter la partie "algèbre linéaire" (Section 3) dans la preuve du théorème principal. Ce théorème qui ne nous était pas connu au moment de la rédaction est utilisé dans l'article original de Erdös, Renyi et Sós.

Définition 1. *Une* polarité *d'un plan projectif* (Π, Δ) *est une bijection* $\varphi : \Pi \to \Delta$, *notée* $x \mapsto x^\star$ *(ainsi que son inverse), telle que*

$$\forall \pi, \pi' \in \Pi, \pi \in \pi'^\star \iff \pi' \in \pi^\star.$$

Étant donné une polarité C_φ*, son* cône isotrope *est* $C_\varphi = \{\pi \in \Pi : \pi \in \pi^\star\}$.

La terminologie est inspirée du cas linéaire : si k est de caractéristique non 2, les polarités de P^2k proviennent de formes quadratiques sur k^3 et le projectifié du cône isotrope est l'ensemble des points appartenant à leur polaire.

Theorem 1 (Baer, 1946 [1])**.** *Soit* (Π, Δ) *un plan projectif fini régulier; on pose* n *tel que* $|\Pi| = n^2 - n + 1$. *Alors toute polarité admet au moins* n *points isotropes. En particulier, son cône isotrope est non vide.*

Dans le cas linéaire, la conclusion du théorème est assez connue : toute forme quadratique sur $\mathbb{F}_q^3$ possède une droite vectorielle isotrope.

Le théorème principal suit alors directement du théorème 1 en introduisant (par l'absurde, avec les notations de l'article) la polarité de $\mathscr{P}$ qui à $v \in \mathscr{F}^{(0)}$ associe la sphère de rayon 1 dans $\mathscr{F}$ centrée en v.

Notons que le théorème de Baer (et le théorème de l'amitié) ne sont pas valable pour les plans projectifs (et graphes) infinis. Par exemple, $P^2\mathbb{R}$ possède une polarité (qui dans sa représentation comme bipoints de la sphère euclidienne, à chaque bipoint associe un équateur équidistant de la sphère).

References

[1] R. Baer, Polarities in finite projective planes. *Bull. Amer. Math. Soc.* 52 (1946), 77–93.

Date: Mai 2017.