Merci à H. Lavenant qui a corrigé certaines de mes corrections...

TD V. Intégrale curviligne

I. Exercice

a. Soit C^+ le demi-cercle supérieur de centre O et de rayon 1 parcouru dans le sens trigonométrique. Calculer $\int_{C^+}(2+x2y)ds$.

b. Soit C^+ l'arc de la parabole d'équation $y=x^2$ parcouru du point de coordonnées $(0,0)$ au point $(1,1)$. Calculer $\int_{C^+} 2xds$.

a. Soit θ le paramètre d'angle ; θ varie entre 0 et π, et « $ds=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)d\theta = 1d\theta$ » donc
$$\int_{C^+}(2+x^2y)ds = \int_0^\pi (2+\cos^2\theta\sin\theta)d\theta = 2\pi + \int_0^\pi \cos^2\theta\sin\theta d\theta.$$
Pour calculer cette dernière intégrale, on remarque que $-3\cos^2\theta\sin\theta = u'(\theta)$, où $u(\theta)=\cos^3(\theta)$, donc
$$\int_0^\pi \cos^2\theta\sin\theta d\theta = -\frac{1}{3}\left[\cos^3(\theta)\right]_0^\pi = 2/3.$$
En reportant ceci dans l'équation précédente, $\int_{C^+}(2+x^2y)ds = 2\pi+2/3$.

b. C^+ est un graphe de la fonction $g(x)=x$, on le paramètre par la variable x. L'élément de longueur s'exprime « $ds=\sqrt{1+g'(x)^2}dx$ » soit
$$\int_{C^+} 2xds = \int_0^1 2x\sqrt{1+4x^2} = \frac{1}{8}\frac{2}{3}\left[(1+4x^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{5\sqrt{5}-1}{12}.$$

II. Exercice

Calculer les intégrales curvilignes suivantes :

a.
$$\int_C xyds,\ C : \begin{cases} x(t) &= \cos(t) \\ y(t) &= 3\sin(t) \end{cases} \quad t\in[0;\pi].$$

b.
$$\int_C (xy+x^2)ds,\ C : \begin{cases} x(t) &= \cos(t) \\ y(t) &= \sin(t) \end{cases} \quad t\in[0;\pi].$$

c.
$$\int_C \frac{2x^2+x+y}{2+x}ds,\ C: y=2x+1,\ x\in[0;1].$$

a. C est une demi-ellipse, symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, et la fonction $f:(x,y)\to xy$ est telle que $f(-x,y)=-f(x,y)$. Donc $\int_C xyds = -\int_C xyds$, donc $\int_C xyds = 0$. Confirmons ceci par le calcul :
$$\int_C xyds = \int_0^\pi 3\cos t\sin t\sqrt{\sin^2 t+9\cos^2 t}dt = \int_0^\pi 3\cos t\sin t\sqrt{1+8\cos^2 t}dt$$
$$= -\frac{3}{16}\left[\left(1+8\cos^2 t\right)^{3/2}\right]_0^\pi = 0.$$

b. Par l'argument évoqué à la question précédente, $\int_C (xy + x^2) ds = \int_C x^2 ds$, et donc

$$\int_C (xy + x^2) ds = \int_0^{\pi} \cos^2 t dt = \frac{\pi}{2}.$$

c. Ici C est parcourue à vitesse constante « $ds = \sqrt{1+4}$ ». On effectue la division euclidienne de $2x^2 + x + 2x + 1$ par $x + 2$:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3x + 1 &= 2x(x+2) - x + 1 \\ &= (2x-1)(x+2) + 3, \end{aligned}$$

d'où

$$\int_C \frac{2x^2 + x + y}{2+x} ds = \sqrt{5} \int_0^1 (2x-1) dx + 3\sqrt{5} \int_0^1 \frac{dx}{x+2} = 3\sqrt{5} \ln(3/2).$$

III. Exercice

Déterminer les longueurs des courbes suivantes :

a.

$$\begin{cases} x(t) &= t^2/2 \\ y(t) &= \frac{1}{6}(4t+4)^{3/2} \end{cases} \quad t \in [0; 2].$$

b.

$$\begin{cases} x(t) &= e^t(\sin(t) + \cos(t)) \\ y(t) &= e^t(\sin(t) - \cos(t)) \end{cases} \quad t \in [0; \pi/2].$$

a. Calculons « le ds » :

$$\forall t \in [0, 2],\ x'(t)^2 + y'(t)^2 = t^2 + \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{2} \cdot 4 \cdot (4t+4)^{1/2} \right)^2 = t^2 + 4t + 4.$$

Donc

$$\text{longueur}(C) = \int_0^2 \sqrt{t^2 + 4t + 4} dt = \int_0^2 |t+2| dt = \int_0^2 (t+2) dt = 6.$$

b. Calculons :

$$\begin{cases} x'(t) = e^t (\sin t + \cos t + \cos t - \sin t) dt = 2e^t \cos t \\ y'(t) = e^t (\sin t + \cos t - \cos t + \sin t) dt = 2e^t \sin t, \end{cases}$$

d'où $\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = 2e^t$. Donc

$$\text{longueur}(C) = 2 \int_0^{\pi/2} e^t dt = 2(e^{\pi} - 1).$$

Remarque 10. Si l'on pose comme en éléctrocinétique $z(t) = x(t) + jy(t)$, alors $z(t) = (1+j)e^{jt}$, ce qui simplifie un peu le calcul du ds : c'est la vitesse $|z'(t)|$.

TD VI. Intégrale de surface

I. Exercice

Déterminer pour chacun des changements de variables (coordonnées) suivants le déterminant jacobien et en déduire les « élément différentiels associés » :

a. polaire :

$$\begin{cases} x &= r\cos(\theta) \\ y &= r\sin(\theta), \end{cases}$$

avec $r \in \mathbb{R}_+^\star$, $\theta \in [0; 2\pi[$.

b. cylindrique :

$$\begin{cases} x &= r\cos(\theta) \\ y &= r\sin(\theta) \\ z &= z, \end{cases}$$

avec $r \in \mathbb{R}_+^\star$, $\theta \in [0; 2\pi[$, $z \in \mathbb{R}$.

c. sphérique :

$$\begin{cases} x &= r\sin(\theta)\cos(\phi) \\ y &= r\sin(\theta)\sin(\phi) \\ z &= r\cos(\theta), \end{cases}$$

avec $r \in \mathbb{R}_+^\star$, $\theta \in [0; \pi[$, $\phi \in [0; 2\pi[$.

a. On note $\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) = (x,y)$. Alors le déterminant jacobien de Φ est

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r.$$

Ceci explique l'apparition de r dans la formule « $dxdy = rd\theta$ ».

b. On note $\Psi(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z) = (x,y,z)$. Alors le déterminant jacobien de Ψ est

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r,$$

par développement suivant la dernière colonne.

c. On note $\Xi(r,\theta,\varphi) = (r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi) = (x,y,z)$. Alors le déterminant jacobien de Ξ est

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\varphi & 0 & -r\sin\varphi \end{vmatrix} = r\sin\varphi.$$

II. Exercice

Soit $\mathcal{B}$ la boule unité de $\mathbb{R}^3$. Calculer

$$\iiint_{\mathcal{B}} e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

En coordonnées sphérique, la boule unité $\mathcal{B}$ est décrite par le domaine

$$\mathcal{P} = \{(r, \theta, \varphi) : 0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi\},$$

et d'après le théorème de Fubini sur pavé, en notant $\mathcal{P}_0 = \{[0, 2\pi] \times [0, \pi]\}$,

$$\begin{aligned}\iiint_{\mathcal{B}} e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dxdydz &= \iiint_{\mathcal{P}} e^{r^3} r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \\ &= \int_0^1 r^2 e^{r^3} \iint_{\mathcal{P}_0} \sin\theta d\theta d\varphi = 4\pi \left[\frac{e^{r^3}}{3}\right]_0^1 = \frac{4\pi(e-1)}{3}.\end{aligned}$$

Remarque 11. On peut remarquer que $\iint_{\mathcal{P}_0} \sin\theta d\theta d\varphi$ est (par définition) l'aire de la sphère de rayon 1.

III. Exercice

a. Déterminer l'air de la calotte sphérique d'équation

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 & = 4 \\ z & \geqslant 1. \end{cases}$$

b. Soit Σ la surface (graphe) d'équation $z = g(x, y)$ pour $(x, y) \in D$ où $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $D = \{1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 16\}$. Tracer Σ et calculer $\iint x^2 z dS$.

a. Appelons Γ la calotte sphérique. Il s'agit bien d'une calotte sphérique : c'est l'intersection de la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ (de rayon 2, centrée en $(0, 0, 0)$) et du demi-plan d'équation $z \geqslant 1$. Nous voulons calculer $\text{Aire}(\Gamma)$, c'est-à-dire l'intégrale de 1 sur Γ. Pour cela on décrit Γ comme un graphe, celui de la fonction

$$g : \begin{cases} D & \to \mathbb{R} \\ (x, y) & \to \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \end{cases}$$

où D est le disque de centre $(0, 0)$ et de rayon $\sqrt{3}$ (la projection de Γ sur le plan Oxy). A présent d'après le cours page 11,

$$\begin{aligned}\text{Aire}(\Gamma) &= \iint_D 1 \times \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} dxdy. \\ &= \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-2y}{2\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\right)^2} dxdy. \\ &= \iint_D \sqrt{\frac{4}{4 - x^2 - y^2}} dxdy.\end{aligned}$$

Observons que la quantité $x^2 - y^2$ et le domaine D sont invariants par rotation (de même que Γ était invariante par rotation autour de l'axe Oz). Ceci invite à effectuer un changement de variables polaires,

$$\text{Aire}(\Gamma) = \iint_R \sqrt{\frac{4}{4 - r^2}} r dr d\theta,$$

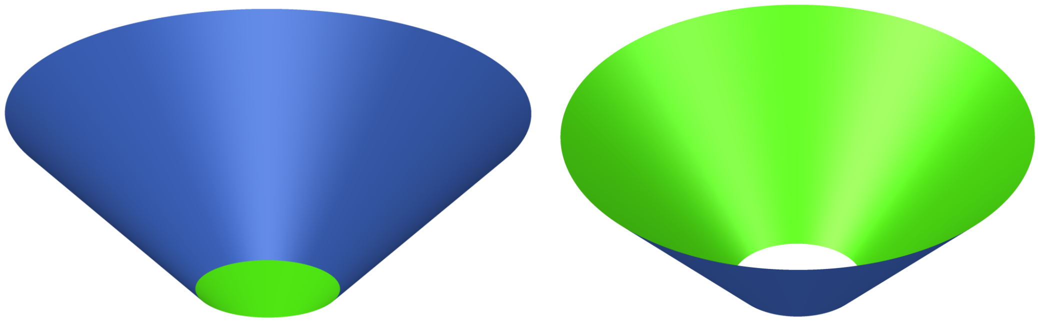

FIGURE 5 – Surface Σ de l'exercice III(vue de dessous, de dessus).

où R est le rectangle $\{(r,\theta) \mid 0 \leqslant r \leqslant \sqrt{3}, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$. Finalement d'après le théorème de Fubini sur un pavé,

$$\text{Aire}(\Gamma) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{4r^2}{4-r^2}}\,dr\,d\theta = 2\pi\left[2\sqrt{4-r^2}\right]_0^{\sqrt{3}} = 4\pi.$$

... Et d'après Mahindan pour la primitive.

Remarque 12. Si $\overline{\Gamma}$ est la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2=4$, alors par la formule bien connue [12] $\text{Aire}(\overline{\Gamma}) = 4\pi \times 2^2 = 16\pi$. L'aire d'une demi-sphère est 8π. C'est compatible avec notre calcul, car la calotte Γ est contenue dans une demi-sphère (donc d'aire plus petite).

b. Σ est un morceau de cône de révolution d'axe Oz, voir la figure 5. Les sections par des plans d'équation $z =$ cste sont des cercles (ou vides), les sections par des plans d'équation $z =$ cste sont des morceaux d'hyperboles.

D'après la formule du cours,

$$\int_\Sigma x^2 z\,dS = \iint_D x^2\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$$

Le calcul donne ici $\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 = 1$ (Géométriquement, c'est le carré de la norme du gradient, la plus grande pente, qui est égal à 1). Après passage aux coordonnées polaires, puis application du théorème de Fubini sur domaine rectangle,

$$\begin{aligned}\int_\Sigma x^2 z\,dS = \sqrt{2}\iint_R \left(r^2\cos^2\theta\right) r\cdot r\,dr\,d\theta &= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\int_1^4 r^4\,dr\\ &= \sqrt{2}\pi\left[\frac{r^5}{5}\right]_1^4 = \frac{(4^5-1)\sqrt{2}\pi}{5} = \frac{1023\sqrt{2}\pi}{5}.\end{aligned}$$

IV. Exercice

a. Calculer $\iint_\Sigma x^2yz\,dS$ où Σ est la portion du plan d'équation $z = 1+2x+3y$ qui se situe au-dessus du rectangle $[0;3]\times[0;2]$.

b. Calculer $\iint_\Sigma y\,dS$ où Σ est le graphe de la fonction $z = \frac{2}{3}\left(x^{3/2}+y^{3/2}\right)$ sur le domaine défini par $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $0 \leqslant y \leqslant 1$.

12. L'expression du volume de la boule et de l'aire de la sphère sont attribuables à Archimède (287 – 212 av. J.-C.), qui y a consacré *De la sphère et du cylindre*. Il aurait été si fier de ce résultat qu'il aurait demandé que celui-ci soit gravé sur sa tombe.

a. On commence par calculer le « dS ». Définissons $g(x, y) = 1+2x+3y$. Alors $\partial g/\partial x = 2$ et $\partial g/\partial y = 3$, donc après application du théorème de Fubini sur rectangle,

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma x^2yz\,dS &= \sqrt{1+2^2+3^2}\int_0^3 x^2\left(\int_0^2 y(1+2x+3y)dy\right)dx\\ &= \sqrt{14}\int_0^3 x^2\left(2+4x+3\cdot 2^3/3\right)dx\\ &= \sqrt{14}\left(\frac{2}{3}3^3+3^4+\frac{8}{3}3^3\right)dx = 171\sqrt{14}.\end{aligned}$$

b. Définissons $g(x, y) = (2/3)\left(x^{3/2}+y^{3/2}\right)$. Alors $\partial g/\partial x = \sqrt{x}$ et $\partial g/\partial y = \sqrt{y}$, donc si $\square$ désigne le carré $[0, 1]^2$,

$$\iint_\Sigma y\,dS = \iint_\square y\sqrt{1+x+y}\,dxdy.$$

Posons pour tout $y \in [0, 1]$, $I_y = \int_0^1 \sqrt{1+x+y}\,dx$. Alors par primitivation directe,

$$I_y = \frac{2}{3}\left((2+y)^{3/2}-(1+y)^{3/2}\right).$$

D'après le théorème de Fubini sur rectangle,

$$\iint_\square y\sqrt{x+y}\,dxdy = \int_0^1 yI_y\,dy = \frac{2}{3}\int_0^1 (y(2+y)^{3/2}-y(1+y)^{3/2})dy.$$

On va calculer $\int_0^1 y(k+y)^{3/2}$ pour k positif par intégration par parties, et puis on remplacera k par 1 puis 2. Allons-y :

$$\begin{aligned}\int_0^1 y(k+y)^{3/2}dy &= \left[\frac{2}{5}y(k+y)^{5/2}\right]_0^1 - \frac{2}{5}\int_0^1 (k+y)^{5/2}dy\\ &= \frac{2}{5}(k+1)^{5/2}-\frac{4}{35}\left((k+1)^{7/2}-k^{7/2}\right). \qquad (\star)\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}\int_0^1 (y(2+y)^{3/2}-y(1+y)^{3/2})dy &= \frac{2}{3}\left(\frac{2}{5}(3^{5/2}-2^{5/2})-\frac{4}{35}(3^{7/2}-2^{7/2}-2^{7/2}+1^{7/2})\right)\\ &= \frac{2}{3}\left(\left[\frac{2}{5}-\frac{3\cdot 4}{35}\right]3^{5/2}-\left[\frac{2}{5}-\frac{2\cdot 2\cdot 4}{35}\right]2^{5/2}-\frac{4}{35}\right)\\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{2\cdot 9\sqrt{3}}{35}+\frac{2\cdot 4\sqrt{2}}{35}-\frac{4}{35}\right)\\ &= \frac{36\sqrt{3}+16\sqrt{2}-8}{105}.\end{aligned}$$