NOM :	IUT d'Orsay	Math S1 groupe $\mathbb{D}$
PRÉNOM :	Université Paris-Sud	2 décembre 2016

Interrogation 1 - sujet α

Question :	1	2	3	4	5	Total
Points :	1½	2	2	3	1½	10
Note :						

Durée : 30 minutes. Les réponses même partielles rapportent des points. Le soin et la précision seront pris en compte.

1. (1 ½ points) Calculer :

$$\int (2x - e^{-x} + \sin 2x)\, dx.$$

Solution : Par linéarité de l'intégrale,

$$\int (2x - e^{-x} + \sin 2x) dx = \int 2x dx - \int e^{-x} dx + \int \sin 2x dx.$$

Une primitive de la fonction $f(x) = 2x$ sur $\mathbb{R}$ est $F(x) = x^2$.
Une primitive de la fonction $g(x) = e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$ est $G(x) = -e^{-x}$.
Une primitive de la fonction $h(x) = \sin 2x$ sur $\mathbb{R}$ est $H(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x$.
Finalement donc,

$$\int (2x - e^{-x} + \sin 2x) dx = x^2 + e^{-x} - \frac{1}{2}\cos 2x + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

2. (2 points) Calculer l'intégrale suivante :

$$I_2 = \int_1^2 \frac{3x^2}{\sqrt{4x^3+4}}\, dx.$$

Solution : Commençons par réécrire le dénominateur :

$$\frac{3x^2}{\sqrt{4x^3+4}} = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}} = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}},$$

avec $u(x) = x^3 + 1$. Etant donné que $u'/(2\sqrt{u}) = (\sqrt{u})'$,

$$\int_1^2 \frac{3x^2}{\sqrt{4x^3+4}} dx = \left[\sqrt{x^3+1}\right]_1^2 = \sqrt{9} - \sqrt{2} = 3 - \sqrt{2}.$$

3. (2 points) Calculer l'intégrale suivante :

$$I_3 = \int_0^{\pi/2} (2x-1) \cdot \sin 3x \, dx.$$

Solution : Intégrons par parties, dans le sens le plus favorable : on dérive le facteur polynômial (de sorte que l'on diminue son degré) tandis que l'on primitive une fonction trigonométrique, ce qui est peu coûteux.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \underset{\searrow}{(2x-1)} \cdot \overset{\nearrow}{\sin 3x} \, dx &= \left[(2x-1) \cdot \left(-\frac{\cos 3x}{3}\right)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2 \cdot \left(-\frac{\cos 3x}{3}\right) \, dx \\
&= (\pi - 1) \cdot 0 - \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left[\frac{\sin 3x}{3}\right]_0^{\pi/2} \\
&= -\frac{1}{3} - \frac{2}{9} = \frac{-5}{9}.
\end{aligned}$$

4. (3 points) Calculer l'intégrale suivante :

$$I_4 = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{3x} - 2e^{2x} - 6}{e^{2x} - 3e^x} e^x \, dx.$$

Solution : Commençons par effectuer le changement de variables $u = e^x$. Alors $dx = du/u$, donc

$$I_4 = \int_1^2 \frac{u^3 - 2u^2 - 6}{u^2 - 3u} \, du$$

On est ramené à un problème d'intégrale de fraction rationnelle que l'on sait traiter. La division euclidienne du numérateur par le dénominateur donne

$$U^3 - 2U^2 - 6 = (U^2 - 3U)(U+1) + 3U - 6,$$

donc

$$I_4 = \int_1^2 (u+1) \, du + \int_1^2 \frac{3u-6}{u^2-3u} \, du$$

La première intégrale se calcule par intégration directe :

$$\int_1^2 (u+1) = \left[\frac{(u+1)^2}{2}\right]_1^2 = \frac{3^2 - 2^2}{2} = \frac{5}{2},$$

tandis que le polynôme $U^2 - 3U$ a deux racines réelles simples 0 et 3. D'après le cours, il existe des constantes a et b telles que

$$\forall u \in \mathbb{R}, \frac{3u-6}{u^2-3u} = \frac{a}{u} + \frac{b}{u-3}.$$

La méthode d'identification des coefficients permet de retrouver les constantes a et b : il faut que pour tout $u \in \mathbb{R}$, $a(u-3)+bu = 3u-6$, ce qui équivaut au système d'équation suivant.

$$\begin{cases} a+b & = 3 \\ -3a & = -6 \end{cases}$$

La deuxième équation implique $a = 2$, puis la première, $b = 1$. Finalement,

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{3u-6}{u^2-3u}\,du &= \int_1^2 \frac{2\,du}{u} + \int_1^2 \frac{du}{u-3} \\ &= [\ln u]_1^2 + [\ln|u-3|]_1^2 = \ln 2 - \ln 2 = 0. \end{aligned}$$

Donc $I_4 = 5/2$.

5. (1 ½ points) Calculer :

$$\int_0^1 \arcsin x\; dx.$$

Solution : Intégrons par parties, cela donne

$$\int_0^1 \arcsin x\; dx = [x\arcsin x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \pi/2 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Mais $-x/\sqrt{1-x^2} = u'(x)/2\sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = 1-x^2$, d'où :

$$\int_0^1 \arcsin x\; dx = \pi/2 + \left[\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 = \pi/2 - 1.$$

Autre méthode : on fait le changement de variables $\theta = \arcsin x$. Alors $dx = \cos\theta d\theta$, et la formule de changement de variables donne (sans oublier de changer les bornes) :

$$\int_0^1 \arcsin x\; dx = \int_0^{\pi/2} \theta\cos\theta\; d\theta.$$

Le membre de droite s'intègre par parties :

$$\int_0^{\pi/2} \theta\cos\theta\; d\theta = [\theta\sin\theta]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin\theta\; d\theta = \pi/2 - \int_0^{\pi/2} \sin\theta\; d\theta = \pi/2 - 1.$$