TD 1. Espaces vectoriels

I. Exercice

02/02/2017

Rappel de cours préliminaire Soit E un $(\mathbb{R})$-espace vectoriel, $F \subset E$ un sous-ensemble non vide. F est un sous-espace vectoriel de E si F est *stable par combinaisons linéaires*, c'est-à-dire en langage codé mathématique :

$$\forall (u,v) \in F^2, \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ au + bv \in F.$$

1. On admet que l'ensemble $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
   (a) L'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré exactement 3 est-il un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$?
   (b) Même question pour l'ensemble $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3.
2. (a) Montrer que si E est un espace vectoriel et si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors leur intersection $F_1 \cap F_2$ est un sous-espace vectoriel de E.
   (b) Avec les mêmes hypothèses, que peut-on dire de la réunion $F_1 \cup F_2$?
3. On admet que l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
   (a) L'ensemble des fonctions f telles que $f(0) = 0$ est-il un espace vectoriel ?
   (b) L'ensemble des fonctions f telles que $f(0) = 1$ est-il un espace vectoriel ?
   (c) L'ensemble $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est-il un espace vectoriel ?
4. (a) L'ensemble $\{(0, 2k),\ k \in \mathbb{R}\}$ i.e. l'ensemble des couples d'éléments de la forme (0, 2k) avec k réel, est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?
   (b) Même question avec k entier naturel : l'ensemble $\{(0, 2k),\ k \in \mathbb{N}\}$ est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?

1. (a) Soit F cet ensemble. Soit $P = X^3+X$ et $Q = X^3$; ce sont des éléments de F. Mais $P + (-Q) = X^3 + X - X^3 = X$ n'est pas dans F puisque son degré est 1. Donc F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. Autre exemple : $0X^3 + 0X^3 = 0$ (le polynôme nul) n'est pas dans F.
   Remarque. — Un sous-espace vectoriel de E contient 0_E. Dit autrement, un sous-ensemble de E qui ne contient pas 0_E n'est pas un sous-espace vectoriel.
   (b) Soit F cet ensemble. Vérifions que F est stable par combinaisons linéaires. Soient P et Q deux éléments quelconques de F. Ceux-ci s'écrivent (de manière unique, mais nous n'en aurons pas besoin pour le moment) sous la forme
   $$P = p_3X^3 + p_2X^2 + p_1X + p_0,$$
   $$Q = q_3X^3 + q_2X^2 + q_1X + q_0,$$
   où les p_i et q_i sont des nombres réels. Mais alors, pour tout couple (a, b) de nombres réels,
   $$aP + bQ = (ap_3 + bq_3)X^3 + (ap_2 + bq_2)X^2 + (ap_1 + bq_1)X + ap_0 + bq_0;$$

cette combinaison linéaire est bien de degré au plus 3 (et de degré 3 exactement si $ap_3 + bq_3 \neq 0$). Plus généralement, pour tous polynômes P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, et pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\deg(aP + bQ) \leqslant \max(\deg P, \deg Q)$.

2. (a) Dire qu'un élément est dans $F_1 \cap F_2$ c'est dire qu'il est dans F_1 *et* dans F_2. Soient donc u et v dans $F_1 \cap F_2$, a et b des nombres réels. Alors :
   — Puisque $u \in F_1$, $v \in F_1$ et puisque F_1 est un sous-espace vectoriel, $au+bv \in F_1$.
   — Puisque $u \in F_2$, $v \in F_2$ et puisque F_1 est un sous-espace vectoriel, $au+bv \in F_2$. Nous avons montré que la combinaison linéaire $au+bv$ est à la fois dans F_1 et dans F_2, ce qui se paraphrase par : $au + bv \in F_1 \cap F_2$. La conclusion est que $F_1 \cap F_2$ est un sous-espace vectoriel.

   (b) Dire qu'un élément est dans $F_1 \cup F_2$ c'est dire qu'il est dans F_1 *ou* dans F_2. Montrons que $F_1 \cup F_2$ n'est pas forcément un sous-espace vectoriel. Pour cela il suffit de donner un contre-exemple. Soit $E = \mathbb{C}$ l'espace vectoriel des nombres complexes. $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de E d'après le cours. L'ensemble des nombres imaginaires $i\mathbb{R}$ de la forme it avec t un nombre réel, est aussi un sous-espace vectoriel de E (exercice : le vérifier). Mais $\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E, par exemple parce que $1 \in \mathbb{R}$ et $i \in i\mathbb{R}$, mais $1 + i$ n'est ni dans $\mathbb{R}$, ni dans $i\mathbb{R}$. Question[cf. cours, page 4] Pour F un sous-ensemble, on peut dire que F est un sous-espace vectoriel si les trois conditions suivantes sont réunies :

   (sev 1) F est non-vide.

   (sev 2) $F \subset E$.

   (sev 3) $\forall x \in F, \forall y \in F, x + y \in F$.

   (sev 4) $\forall x \in F, \forall a \in \mathbb{R}, ax \in F$.

   Trois de ces quatres conditions sont quand même vérifiées par $F_1 \cup F_2$ quand F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels ; lesquelles ?

3. (a) Soient f et g dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $f(0) = 0$ et $g(0) = 0$. Alors pour tout (a, b) couple de nombres réels, $(af + bg)(0) = af(0) + bg(0) = 0a + 0b = 0$. Donc cet ensemble est bien un sous-espace vectoriel.

   (b) Soit $f = \cos$. Alors $f(0) = 1$. Mais $(2f)(0) = 2$. Donc cet ensemble n'est pas un sous-espace vectoriel.

   (c) D'après le cours d'analyse, la somme et le produit de deux fonctions continues, est continue. En particulier, le produit d'une fonction continue par une fonction constante est continue. On en déduit que les fonctions continues sont stables par combinaisons linéaires dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, autrement dit que $C(\mathbb{R}, R)$ est un sous-espace vectoriel dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

4. (a) Soit D cet ensemble. Soient u et v des éléments de D, a et b des nombres réels. On peut écrire $u = (0, 2k_1)$ et $v = (0, 2k_2)$ pour des réels k_1 et k_2. Alors 08/02/2017

$$\begin{aligned} au + bv &= (0, 2ak_1 + 2bk_2) \\ &= (0, 2(ak_1 + bk_2)), \end{aligned}$$

   donc $au + bv \in D$; nous avons montré que cet ensemble est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

   (b) Soit D' cet ensemble. Remarquons que $(0, 2)$ est un élément de D' tandis que $(0, 1) = \frac{1}{2}(0, 2)$ n'en est pas un : nous avons mis en défaut la stabilité par combinaison linéaire (ou, si l'on veut être plus précis, par multiplication par un nombre réel). Il s'ensuit que D' n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

II. Exercice

Rappels de cours préliminaire Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{F} = (x_1, \dots x_n)$ une famille de n vecteurs de E.

Définition 1 (cours, page 4). On dit que $\mathcal{F}$ est *libre* si toute combinaison linéaire nulle est à coefficients nuls :

$$\forall (a_1, \dots a_n) \in \mathbb{R}^n, \; [a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0 \implies a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0]$$

Si $\mathcal{F}$ n'est pas libre, on dit qu'elle est *liée*.

Dire que $\mathcal{F}$ est liée, c'est donc dire qu'il existe une combinaison linéaire nulle dont les coefficients sont non nuls. En particulier (cours), une famille de deux vecteurs est libre si et seulement si ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires[8].

Définition 2 (cours, page 5). On dit que $\mathcal{F}$ est génératrice si tout vecteur de E est une combinaison linéaire des x_i :

$$\forall x \in E, \; \exists (a_1, \dots a_n) \in \mathbb{R}^n, \; x = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n.$$

Si $\mathcal{F}$ est libre et génératrice, on dit que c'est une *base* de E.

Remarque 1. Soit f l'application de $\mathbb{R}^n$ dans E qui à $(a_1, \dots a_n)$ associe $a_1 x_1 + \dots a_n x_n$. Alors

i. f est injective si et seulement si $\mathcal{F}$ est libre.
ii. f est surjective si et seulement si $\mathcal{F}$ est génératrice.
iii. f est bijective si et seulement si $\mathcal{F}$ est une base.

Le théorème fondamental est le suivant :

Théorème 1 (Théorème de la dimension, - admis : cours p.5, propriétés fondamentales). *Si E admet une base $(x_1, \dots x_n)$, alors toutes ses bases ont n éléments exactement. On appelle cet entier naturel, s'il existe, la* dimension *de E. De plus, dans ce cas,*

- *Toute famille ayant strictement plus de n vecteurs est liée.*
- *Aucune famille ne peut être génératrice si elle a strictement moins de n vecteurs.*
- *Si une famille de n vecteurs est libre* ou *génératrice, alors c'est une base.*

A revoir dans le cours avant de commencer la question 3 : la notion de composante et de coordonnées dans une base (page 6).

On se place dans $\mathbb{R}^3$.

1. Donner la base canonique de $\mathbb{R}^3$
2. Pour chacune des familles suivantes, dire si elle est libre, si elle est génératrice, si c'est une base de $\mathbb{R}^3$.
   $\mathcal{F}_1 = ((1,1,0), \; (2,4,1))$
   $\mathcal{F}_2 = ((1,1,0), \; (2,4,1), \; (0,0,1))$
   $\mathcal{F}_3 = ((1,1,0), \; (2,4,1), \; (4,6,1))$
   $\mathcal{F}_4 = ((1,1,0), \; (2,4,1), \; (0,0,1), \; (5,1,3))$.
3. Quelles sont les coordonnées $\mathcal{F}_2$?

8. On rappelle que u et v sont colinéaires s'il existe a et b non tous les deux nuls dans $\mathbb{R}$ tels que $au = bv$, ou, de manière équivalente, $au + (-b)v = 0$.

1. La base canonique de $\mathbb{R}^3$ est formée par les vecteurs $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$.
2. $\mathcal{F}_1$. Ecrivons $\mathcal{F}_1 = (x_1, x_2)$ et montrons que la famille $\mathcal{F}_1$ est libre. Pour cela, revenons à la remarque qui a été donnée dans le cours : une famille de deux vecteurs est liée si et seulement si ces deux vecteurs sont colinéaires. Ici pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$ax_1 = (a,a,0)$$
$$bx_2 = (2b,4b,b).$$

L'examen de la dernière composante montre que si $ax_1 = bx_2$, alors $b = 0$. Mais alors $bx_2 = 0$, donc $a = 0$. Conclusion, x_1 et x_2 ne sont pas colinéaires et $\mathcal{F}_1$ est libre. Pour autant, $\mathcal{F}_1$ n'est pas génératrice car elle ne comprend que 2 vecteurs.

$\mathcal{F}_2$. Nous allons montrer que $\mathcal{F}_2$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, d'après le cours (p. 5) il suffit par exemple de vérifier que $\mathcal{F}_2$ est libre. Soient donc a_1, a_2, a_3 tels que $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$. En coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, cela donne

$$(a_1 + 2a_2, a_1 + 4a_2, a_2 + a_3) = (0,0,0).$$

On en déduit que $2a_2 = a_1 + 4a_2 - (a_1 + 2a_2) = 0 - 0 = 0$, d'où $a_2 = 0$. Puis $a_1 + 2a_2 = 0$ donne $a_1 = 0$. Enfin, $a_2 + a_3 = 0$ nous dit que $a_3 = 0$, aussi. Conclusion, $\mathcal{F}_2$ est libre.

Question 1.1. *Montrer que $\mathcal{F}_2$ est génératrice. Retrouver ainsi que $\mathcal{F}_2$ est libre.*

$\mathcal{F}_3$. On écrit toujours $\mathcal{F}_3 = (x_1, x_2, x_3)$. Observons que

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 0,$$

bien que les nombres 2, 1 et -1 soient non tous nuls. Ceci nous dit que $\mathcal{F}_3$ est liée. Comme elle compte 3 vecteurs, elle n'est pas génératrice (sinon elle formerait une base, donc serait libre).

$\mathcal{F}_4$. $\mathcal{F}_4$ compte 4 vecteurs. Elle est liée d'après le cours, puisque la dimension de $\mathbb{R}^3$ est 3. Par ailleurs, $\mathcal{F}_4$ est une famille génératrice puisqu'elle contient $\mathcal{F}_2$ qui est une base.
3. Remarquons que $(1,1,1) = x_1 + x_3$, autrement (et un peu bizarrement) écrit :

$$(1,1,1) = 1x_1 + 0x_2 + 1x_3.$$

On dit que les coordonnées du vecteur $(1,1,1)$ dans la base $\mathcal{F}_2$ sont $(1,0,1)$.

III. Exercice

A préparer pour le 21/02/2017

Soient E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Pour chacune des familles suivantes, dire si elle est libre, si elle est génératrice, si c'est une base de E.

1. $\mathcal{F}_1 = (e_1,\ e_1 + e_2 + e_3)$.
2. $\mathcal{F}_2 = (e_1,\ e_2,\ e_1 + e_2)$.
3. $\mathcal{F}_3 = (e_1 - e_2,\ e_2,\ e_3)$.
4. $\mathcal{F}_4 = (e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_2 + e_3)$.
5. $\mathcal{F}_5 = (e_1 - e_2,\ e_2 - 3e_1,\ 2e_1 + 5e_2)$.

1. La famille $\mathcal{F}_1$ ne peut pas être génératrice, car elle ne comprend que deux vecteurs. Néanmoins, ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc $\mathcal{F}_1$ est libre.
2. Cette famille n'est pas libre, voici une combinaison linéaire fautive (nulle, mais dont les coefficients ne le sont pas) :
$$e_1 + e_2 + (-1)(e_1 + e_2) = 0.$$
A fortiori elle ne peut pas être génératrice (sinon elle serait une base).
3. $\mathcal{F}_3$ est une base. Montrons par exemple qu'elle est génératrice. Pour cela, soit $x \in E$, que l'on décompose dans $\mathcal{B}$ sous la forme $x = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$. Alors
$$x = a_1(e_1 - e_2) + a_1e_2 + a_2e_2 + a_3e_3 = a_1(e_1 - e_2) + (a_1 + a_2)e_2 + a_3e_3.$$
Question 1.2. *Montrer que $\mathcal{F}_3$ est libre. Retrouver ainsi qu'elle est génératrice (à comparer avec la question 2.$\mathcal{F}_2$ de l'exercice I.2).*
4. Déjà $\mathcal{F}_4$ est génératrice, puisqu'elle contient la base canonique. Mais $\mathcal{F}_4$ n'est pas libre car elle a des vecteurs en plus grand nombre que la dimension de E.
5. Observons que $\mathcal{F}_5$ n'est pas génératrice : chacun des vecteurs qui la composent sont des combinaisons linéaires de e_1 et e_2, de sorte que le vecteur e_3 ne peut pas être combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{F}_5$. On peut en déduire que $\mathcal{F}_5$ n'est pas libre : si c'était le cas elle serait une base de E, donc génératrice.

IV. Exercice

1. On considère le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation $x+2y+z = 0$ c'est à dire que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + z = 0\}$. Déterminer une base et la dimension de F.
2. Même question si F est défini par le système
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0. \end{cases}$$

On donne pour cet exercice deux corrections ; la seconde est celle attendue. La première peut être également relue en gardant à l'esprit que ce qui importe n'est pas tant la méthode que le principe : l'application du théorème du noyau-image.

1. D'après nos connaissances anciennes de géométrie dans l'espace, nous pressentons que F est un plan. Retrouvons ceci par les méthodes de l'algèbre linéaire. Soit donc $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que
$$f(x, y, z) = x + 2y + z.$$
Alors, $F = \ker f$. On retrouve en particulier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ (cours, p.7). De plus, le théorème du noyau-image (cours, p.8) nous dit que
$$\dim F + \dim \operatorname{Im}(f) = \dim \mathbb{R}^3 = 3.$$
Or, $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}$ (par exemple parce que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f(x, 0, 0) = x$) ; autrement dit, f est surjective. Il s'ensuit que $\dim F = 3-1 = 2$: F est un plan. D'après le théorème de la dimension, si nous trouvons deux vecteurs colinéaires dans F, ils formeront une base. On peut choisir par exemple $u = (1, 0, -1)$ et $v = (2, -1, 0)$.

2. On pose $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$g(x, y, z) = (x + y + z, 2x - y + z).$$

Comme dans la question précédente, déterminons la dimension de l'image de g. Plus précisément, montrons que $\dim \operatorname{Im}(f) = 2$. Soient donc $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$; on veut montrer que (X, Y) est dans l'image de g. Observons que

$$g\left(0, \frac{X-Y}{2}, \frac{X+Y}{2}\right) = (X, Y).$$

Donc $\dim \operatorname{Im}(f) = 2$; le théorème du noyau-image nous dit que $\dim F = 1$, autrement dit F est une droite. Il suffit pour trouver une base de F de trouver un unique vecteur non nul dans F. Le vecteur $(2, 1, -3)$ convient (cf. le complément qui suit).

Remarque 2 (Interprétation géométrique). F est défini par deux équations, c'est l'intersection de deux plans *distincts* dans $\mathbb{R}^3$: c'est une droite.

2. Voici une résolution moins théorique et plus conforme de la question. On cherche donc l'ensemble des $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que 28/02/17

$$\begin{cases} x + y + z = 0 & (L_1) \\ 2x - y + z = 0 & (L_2) \end{cases}$$

On effectue des opérations élémentaires sur ce système :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 & (L_1) \\ 2x - y + z = 0 & (L_2) \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 2y + 2z = 0 & (L_1) \leftarrow 2(L_1) \\ 2x - y + z = 0 & (L_2) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 3y + z = 0 & (L_1) \leftarrow (L_1) - (L_2) \\ 2x - y + z = 0 & (L_2) \end{cases}$$

A ce stade nous pouvons remplacer z par $-3y$ (grâce à la première ligne), ce qui donne $2x - 4y = 0$, i.e. $x = 2y$. L'ensemble des solutions est donc de dimension 1, c'est l'ensemble des vecteurs de la forme $(2y, y, -3y)$. En particulier, une base est $((2, 1, -3))$.

V. Exercice

On se place dans $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Rappeler la base canonique et la dimension de cet espace vectoriel.
2. Pour chacune des familles suivantes, dire si elle est libre, si elle est génératrice, si c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$:
   $\mathcal{F}_1 = (3, \quad 1 + 2X, \quad 5 + X)$
   $\mathcal{F}_2 = (1 + X, \quad X, \quad X + X^2)$
   $\mathcal{F}_3 = (X - X^2, \quad X + X^2)$
3. Quelles sont les coordonnées du polynôme $P = 2 + 3X + X^2$ dans la base F_2 ?

1. La base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est $(\mathbf{1}, X, X^2)$.

Remarque 3. Attention, dans la base qui précède $\mathbf{1}$ est le *polynôme* $\mathbf{1}$ (autrement dit, si l'on veut, X^0) ; pour cet exercice il est préférable de ne pas le confondre [9] avec le *nombre* 1 qui est un élément de $\mathbb{R}$. C'est pourquoi on l'écrit en gras jusqu'à la fin de la question 2 (mais on arrêtera ensuite).

2. $\mathcal{F}_1$. Cette famille n'est pas génératrice puisque X^2 n'est pas engendré linéairement par des éléments de $\mathcal{F}_1$; autrement dit $\mathcal{F}_1$ est contenue dans $\mathbb{R}_1[X]$. Elle n'est donc pas libre non plus (sinon ce serait une base étant donné qu'elle est formée de 3 vecteurs).

   $\mathcal{F}_2$. Observons que $\mathbf{1} = (\mathbf{1}+X) - X$ et $X^2 = (X+X^2) - X$, donc tous les éléments de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ sont engendrés par $\mathcal{F}_2$. Ainsi, $\mathcal{F}_2$ est génératrice. Puisqu'elle est formée de 3 vecteurs, c'est une base.

   Remarque 4 (Tournant dangereux). Attention, le fait que $X^2 + X = X(\mathbf{1}+X)$ ne constitue pas une relation de liaison linéaire entre les vecteurs de $\mathcal{F}_2$. Dans un espace vectoriel, « on ne multiplie pas les vecteurs entre eux »(même s'ils ont envie).

   $\mathcal{F}_3$. Cette famille, formée de 2 vecteurs, n'est pas génératrice. Elle est tout de même libre parce que $X - X^2$ et $X + X^2$ ne sont pas colinéaires.
3. Ecrivons $2+3X+X^2 = 2(1+X)+X+X^2$. Donc les coordonnées de P dans $\mathcal{F}_2$ sont $(2,0,1)$.

VI. Exercice*

Non traité en classe.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ engendré linéairement par les fonctions $f_1 : x \to 1$, $f_2 : x \to \cos x$, $f_3 : x \to \sin x$.

1. Donner la forme des éléments de E.
2. Montrer que $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de E.
3. Soit φ un réel. Les fonctions $f : x \to \cos(x+\varphi)$ et $g : x \to \sin(2x)$ sont-elles des éléments de E ? Si oui, donner leurs coordonnées dans $\mathcal{B}$.

1. L'ensemble des fonctions dans E, c'est l'ensemble des fonctions de la forme
$$f(x) = a + b\cos(x) + c\sin(x),$$
avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.
2. Soient donc a, b, c tels que
$$\forall x \in \mathbb{R}, a + b\cos(x) + c\sin(x) = 0.$$
Evaluons ceci en $x = -\pi/2, 0, \pi/2$, cela donne
$$\begin{cases} a - c = 0 & (L_1) \\ a + b = 0 & (L_2) \\ a + c = 0 & (L_3) \end{cases}$$
$(L_1) + (L_3)$ nous dit que $a = 0$, $(L_1) - (L_3)$ nous dit que $c = 0$, (L_2) nous dit que $b = 0$. On a montré que $\mathcal{B}$ est libre. Par définition, elle est génératrice dans E. Donc, c'est une base.

9. C'est malgré tout une confusion courante (et pas dangereuse avec un peu d'habitude) quand on pense à $\mathbb{R}$ comme à un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$, par exemple.

3. D'après le cours d'analyse, $\cos(x+\varphi) = \cos\varphi\cos x - \sin\varphi\sin x = b\cos x + c\sin x$ avec $b = \cos\varphi$ et $c = -\sin\varphi$. Donc $f \in E$, et

$$f = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} .$$

En revanche g n'est pas dans E. Pour montrer cela, on peut procéder par l'absurde : supposons que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin(2x) = a + b\cos x + c\sin x. \tag{23}$$

Alors en particulier, en évaluant cette équation en $x = -\pi/2, 0, \pi$ nous trouvons

$$\begin{cases} 0 = \sin(-\pi) = a - c \\ 0 = \sin(0) = a + b \\ 0 = \sin(\pi) = a + c. \end{cases}$$

L'opération élémentaire $(L_1) \leftarrow (L_1) + (L_3)$ nous dit que $2a = 0$, donc $a = 0$, puis $c = 0$ (par exemple grâce à la dernière ligne $a + c = 0$). Donc la deuxième ligne donne $b = 0$; mais alors (23) devient $\sin(2x) = 0$, ce qui est absurde, par exemple parce que $\sin(2 \cdot \pi/4) = 1$, et parce que $1 \neq 0$.

Pour finir, voici une autre manière de montrer que g n'est pas dans E : tous les éléments de E vérifient l'équation différentielle $y'' + y = 0$. Ce n'est pas le cas de g. Cette méthode revient à décrire E comme un *noyau*.