QCM de mathématiques - correction

Réponse juste : 1 point, fausse : - 0.25 points. Une seule bonne réponse par question.

1. (1 point) Parmi les familles ci-dessous, laquelle est une base de $\mathbb{R}^3$?
   A) $\mathcal{A} = ((1,1,2),(0,-1,1))$
   B) $\mathcal{B} = ((1,1,2),(0,-1,1),(1,0,1))$
   C) $\mathcal{C} = ((1,1,2),(0,1,1),(1,0,1))$
   D) $\mathcal{D} = ((1,1,2),(0,-1,1),(1,0,1),(2,1,3))$

Solution : Déjà, pour qu'une famille soit une base de $\mathbb{R}^3$ il faut qu'elle possède 3 vecteurs. Ceci élimine $\mathcal{A}$ qui a deux vecteurs et $\mathcal{D}$ qui en a quatre. Ensuite, observons que la famille $\mathcal{C}$ est liée : on peut former à l'aide de ses vecteurs la combinaison linéaire

$$(1,1,2)-(0,1,1)-(1,0,1)=(0,0,0).$$

Ainsi, $\mathcal{C}$ n'est pas une base. Par élimination, **la réponse est B**. On peut aussi vérifier directement que la famille $\mathcal{B}$ est une base, en prouvant qu'elle est libre. Pour cela il faut montrer que $(x,y,z)=(0,0,0)$ est l'unique solution de l'équation $x(1,1,2)+y(0,-1,1)+z(1,0,1)=0$, c'est-à-dire résoudre le système suivant :

$$\begin{aligned}
\begin{cases} x+z=0 \\ x-y=0 \\ 2x+y+z=0 \end{cases}
&\iff \begin{cases} x+z=0 & (L_1) \\ 2x-y+z=0 & (L_2)\leftarrow(L_2)+(L_1) \\ 2x+y+z=0 & (L_3) \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x+z=0 & (L_1) \\ 2x-y+z=0 & (L_2) \\ 2y=0 & (L_3)\leftarrow(L_3)-(L_2) \end{cases} \\
&\iff y=0 \text{ et } \begin{cases} 2x+2z=0 & (L_1)\leftarrow 2(L_1) \\ 2x+z=0 & (L_2) \end{cases} \\
&\iff y=0 \text{ et } \begin{cases} z=0 & (L_1)\leftarrow(L_1)-(L_2) \\ 2x+z=0 & (L_2) \end{cases} \\
&\iff (x,y,z)=(0,0,0).
\end{aligned}$$

Enfin, on peut aussi calculer le déterminant de la matrice formée des vecteurs de $\mathcal{B}$ en colonnes exprimés dans la base canonique : en développant suivant la 1ère colonne,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = +1\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1-(-1)+2 = 2 \neq 0,$$

donc $\mathcal{B}$ est une base d'après le cours.

2. (1 point) Parmi les familles ci-dessous (mêmes familles que dans la question précédente), laquelle est une famille ni libre, ni génératrice de $\mathbb{R}^3$?

   A) $\mathcal{A} = ((1, 1, 2), (0, -1, 1))$
   B) $\mathcal{B} = ((1, 1, 2), (0, -1, 1), (1, 0, 1))$
   C) $\mathcal{C} = ((1, 1, 2), (0, 1, 1), (1, 0, 1))$
   D) $\mathcal{D} = ((1, 1, 2), (0, -1, 1), (1, 0, 1), (2, 1, 3))$

Solution : Dans la question 1 nous avons montré que la famille $\mathcal{C}$ est liée. Or l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3 et cette famille a 3 vecteurs ; si elle était génératrice ce serait une base d'après le cours, donc elle serait libre, ce qui n'est pas. On conclut que $\mathcal{C}$ n'est ni libre, ni génératrice : **la réponse est C**.

3. (1 point) Soit E un espace vectoriel de dimension 4, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base de E. Parmi les familles ci-dessous, laquelle est une base de E ?

   A) $\mathcal{A} = (e_1, e_2, e_3 + e_4)$
   B) $\mathcal{B}' = (e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_3 + e_4, e_4 + e_1)$
   C) $\mathcal{C} = (e_1 + e_2, e_2 + e_3 - e_1, e_1 - e_2, e_3 + e_4, e_3 - e_4)$
   D) $\mathcal{D} = (e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 - e_3, e_1 - e_2, e_4)$

Solution : Déjà, ce ne peuvent être $\mathcal{A}$ et $\mathcal{C}$ qui ont respectivement 3 et 5 vecteurs, donc pas autant que la dimension de l'espace. En jouant avec $\mathcal{B}'$, observons que

$$\begin{aligned}(e_1 + e_2) - (e_2 + e_3) + (e_3 + e_4) - (e_4 + e_1) &= e_1 + e_2 - e_2 + e_3 - e_3 + e_4 - e_4 - e_1 \\ &= e_1 - e_1 = 0.\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{B}'$ est liée, et par élimination, **la réponse est D**. On peut aussi montrer directement que $\mathcal{D}$ est génératrice (donc une base, ayant 4 vecteurs et d'après le cours) ; il suffit pour cela de vérifier que tous les vecteurs de la base $\mathcal{B}$ sont des combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{D}$, ce qui est relativement facile pour e_4 et e_3, puis, de là, pour e_1 et e_2. En revanche, montrer directement que $\mathcal{D}$ est libre est plutôt long (bien que toujours faisable).

4. (1 point) Mêmes hypothèses et familles que dans la question précédente : soit E un espace vectoriel de dimension 4, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base de E. Parmi les familles ci-dessous, laquelle n'est ni libre, ni génératrice ?

   A) $\mathcal{A} = (e_1, e_2, e_3 + e_4)$
   B) $\mathcal{B}' = (e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_3 + e_4, e_4 + e_1)$
   C) $\mathcal{C} = (e_1 + e_2, e_2 + e_3 - e_1, e_1 - e_2, e_3 + e_4, e_3 - e_4)$
   D) $\mathcal{D} = (e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 - e_3, e_1 - e_2, e_4)$

> **Solution :** Dans la question 3, nous avons montré que $\mathscr{B}'$ n'est pas libre. Puisqu'elle possède 4 vecteurs, ce qui est autant que la dimension de E, le même raisonnement que dans la question 2 nous informe que $\mathscr{B}'$ n'est pas non plus génératrice : **la réponse est B**.

5. (1 point) Soit $\mathscr{B} = ((1,1),(1,-1))$ une base de $\mathbb{R}^2$. Quelles sont les coordonnées du vecteur $(5,-3)$ dans $\mathscr{B}$?

> **Solution :** Le plus rapide est peut-être d'essayer les réponses une à une. Si l'on procède dans l'ordre alphabétique, alors on est chanceux, parce que
>
> $$4(1,1) + 1(1,-1) = (5,3),$$
>
> de sorte que **la réponse est A**. Mais bien sûr, on peut aussi chercher à décomposer $(5,-3)$ dans $\mathscr{B}$; ceci revient à rechercher les coordonnées x et y telles que $x(1,1) + y(1,-1) = (5,3)$, ce qui nous ramène au système
>
> $$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=3 \end{cases},$$
>
> qui donne $2x = 8$ et $2y = 2$, soit $(x,y) = (4,1)$ ce qui permet de retrouver la bonne réponse en pas beaucoup plus longtemps.

6. (1 point) On considère l'application linéaire f définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y,z) = (2x + y + 8z, 3x - y).$$

Quelle est la matrice de f dans les bases canonique de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^2$?

A) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

> **Solution :** En fait il suffit de regarder la taille des matrices proposés, parce que la matrice d'une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^2$ a forcément 2 lignes et 3 colonnes, ce qui nous permet d'affirmer que **la bonne réponse est C**.

7. (1 point) Parmi les espaces suivants, lequel n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$?
   A) L'ensemble A des polynômes P tels que $P(2) = 0$.
   B) L'ensemble B des polynômes P tels que $P' = 0$.
   C) L'ensemble C des polynômes P tels que $P(3)^2 = 1$.

D) L'ensemble D des polynômes P de la forme $P = aX^2 + bX + c$ avec $a + b + c = 0$.

Solution : L'ensemble C ne contient pas le polynôme nul $0_{\mathbb{R}_2[X]}$ donc il ne peut pas être un sous-espace vectoriel : **la réponse est C**. On peut aussi si l'on veut mettre en défaut directement

— la stabilité par somme : les polynômes $P = X/3$ et $Q = X - 2$ de $\mathbb{R}_2[X]$ sont tous les deux tels que $P(3)^2 = Q(3)^2 = 1$, donc dans l'ensemble C, mais $((P+Q)(3))^2 = 2^2 = 4 \neq 1$ donc $P + Q \notin C$.

— la stabilité par multiplication par un nombre réel : si $P = X-2$, $3P = 3X-6$ donc $((3P)(3))^2 = 9$, donc $3P \notin C$.

Enfin, il est également possible (bien que plus long) de vérifier que A, B et D sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_2[X]$. Pour cela, on peut observer qu'ils sont tous définis comme des noyaux d'applications linéaires.

8. (1 point) Parmi les applications définies ci-dessous, laquelle n'est pas linéaire ? ?

A) $f_A(x, y) = (x + y, x - 2y, 3y)$,

B) $f_B(x, y, z) = (x + 2y, z, x - y + z,$

C) $f_C(x, y) = (xy, y - x)$,

D) $f_D(x) = (x, 5x)$.

Solution : Nous allons montrer que f_C n'est pas linéaire. Pour cela remarquons préalablement que $g(x, y) = (0, x - y)$ est linéaire, ainsi que le montre le rapide calcul, pour tous $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
g(x_1 + x_2, y_1 + y_2) &= (0, x_1 + x_2 - y_1 - y_2) \\
&= (0, x_1 - y_1 + x_2 - y_2) \\
&= (0, x - 1 - y_1) + (0, x_2 - y_2) = g(x_1, y_1) + g(x_2, y_2) \\
g\left(a(x_1, y_1)\right) &= (0, ax_1 - ay_1) \\
&= a(0, x_1, y_1) = ag(x_1, y_1).
\end{aligned}$$

Or, toute combinaison linéaire de deux applications linéaires définies sur le même espace vectoriel et à valeurs dans le même espace vectoriel, est encore linéaire. Il s'ensuit que si f_D était linéaire, ce serait encore le cas de $g - f_D$, c'est-à-dire de l'application

$$p(x, y) = (xy, 0).$$

Pour vérifier que p n'est pas linéaire, observons par exemple que $p((1, 1) + (1, 1)) = (2 \times 2, 0) = (4, 0)$ alors que $p(1, 1) + p(1, 1) = (1 \times 1, 0) + (1 \times 1, 0) = (2, 0)$, mais $4 \neq 2$. Conclusion, **la réponse est C**.

9. (1 point) Quelle est la valeur du déterminant

$$d = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}?$$

A) $d = 3$ B) $d = 2$ C) $d = 0$ D) $d = 4$

Solution : On calcule d en développant suivant la 1ère colonne :

$$d = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 \times (-1) - 1 \times (-1) = 1 + 2 + 1 = 4.$$

Ainsi, **la réponse est D**.

10. (1 point) Soient E, F et G des espaces vectoriels de bases respectives $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$. On considère les applications linéaires $g : E \to F$ et $f : F \to G$. Soit M la matrice de l'application g dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ et soit N la matrice de l'application f dans les bases $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$. Alors la matrice de l'application $f \circ g$ dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_3$ est
    A) MN
    B) NM
    C) La matrice identité
    D) $M + N$.

Solution : Il s'agit d'une question de cours, mais il y a une coquille dans le cours : dans l'encadré en bas de la page **9**, il faut lire « La matrice BA (et non AB) est la matrice de l'application linéaire $f \circ g$ dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_3$ ». Ici donc, **la réponse correcte est B**. En voici une preuve (instructive, mais il suffit de retenir le résultat) : écrivons

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= (\mathbf{e}_1, \dots \mathbf{e}_n) = (\mathbf{e}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \\ \mathcal{B}_2 &= (\mathbf{f}_1, \dots \mathbf{f}_m) = (\mathbf{f}_j)_{1 \leqslant j \leqslant m} \\ \mathcal{B}_3 &= (\mathbf{g}_1, \dots \mathbf{g}_l) = (\mathbf{g}_k)_{1 \leqslant k \leqslant l}, \end{aligned}$$

avec $n = \dim E$, $m = \dim F$ et $l = \dim G$ (attention à ne pas confondre les $\mathbf{f}_j$ avec f). Ensuite, désignons par $m_{j,i}$ le coefficient en j-ième ligne et i-ième colonne de la matrice M, tandis que $n_{k,j}$ désigne le coefficient en k-ième ligne et j-ième colonne de N. Alors par <u>définition</u> des matrices M et N,

$$f(\mathbf{f}_j) = \sum_{k=1}^{l} n_{k,j}\mathbf{g}_k \qquad \text{et} \qquad g(\mathbf{e}_i) = \sum_{j=1}^{m} m_{j,i}\mathbf{f}_j.$$

Donc, en utilisant la linéarité de f,

$$\begin{aligned} f \circ g(\mathbf{e}_i) = f\left(\sum_{j=1}^{m} m_{j,i}\mathbf{f}_j\right) = \sum_{j=1}^{m} m_{j,i} f(\mathbf{f}_j) &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} m_{j,i} n_{k,j}\mathbf{g}_k \\ &= \sum_{k=1}^{l}\left(\sum_{j=1}^{m} m_{j,i} n_{k,j}\right)\mathbf{g}_k \\ &= \sum_{k=1}^{l}\left(\sum_{j=1}^{m} n_{k,j} m_{j,i}\right)\mathbf{g}_k. \end{aligned}$$

Mais par définition du produit matriciel, $\sum_{j=1}^{m} n_{k,j}m_{j,i}$ est le coefficient en k-ième ligne et i-ième colonne dans la matrice NM. Ceci nous dit que NM est la matrice de $f \circ g$ dans les bases $\mathcal{B}_1$ au départ et $\mathcal{B}_3$ à l'arrivée.