Autosimilarité, cônes asymptotiques et SBE.

Gabriel Pallier

Université Paris-Sud, Orsay, France

26 février 2018

Laboratoire de mathématique Jean Leray, Séminaire des doctorants

(extrait)

Espaces auto-similaires

Je suis un espace métrique homéomorphe à $\mathbf{R}^3$, on m'appelle (X, d). Mon groupe d'isométries est transitif, et pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, une application δ^λ me dilate : $d(\delta^\lambda(u), \delta^\lambda(v)) = e^\lambda d(u, v)$ pour tous mes u, v.

Espaces auto-similaires

Je suis un espace métrique homéomorphe à $\mathbf{R}^3$, on m'appelle (X, d). Mon groupe d'isométries est transitif, et pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, une application δ^λ me dilate : $d(\delta^\lambda(u), \delta^\lambda(v)) = e^\lambda d(u, v)$ pour tous mes u, v. Suis-je $\mathbf{R}^3$ normé ?

Espaces auto-similaires

Je suis un espace métrique homéomorphe à $\mathbf{R}^3$, on m'appelle (X, d). Mon groupe d'isométries est transitif, et pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, une application δ^λ me dilate : $d(\delta^\lambda(u), \delta^\lambda(v)) = e^\lambda d(u, v)$ pour tous mes u, v. Suis-je $\mathbf{R}^3$ normé ? Non.

Espaces auto-similaires

Je suis un espace métrique homéomorphe à $\mathbf{R}^3$, on m'appelle (X, d). Mon groupe d'isométries est transitif, et pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, une application δ^λ me dilate : $d(\delta^\lambda(u), \delta^\lambda(v)) = e^\lambda d(u, v)$ pour tous mes u, v. Suis-je $\mathbf{R}^3$ normé ? Non.

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}_{x,y,z \in \mathbf{R}} \qquad d = \inf \left\{ \begin{array}{c} \text{longueur}\,(\gamma) : \\ \gamma'(t) \in \ker\,(-x dy + dz) \end{array} \right\}$$

Espaces auto-similaires

Je suis un espace métrique homéomorphe à $\mathbf{R}^3$, on m'appelle (X, d). Mon groupe d'isométries est transitif, et pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, une application δ^λ me dilate : $d(\delta^\lambda(u), \delta^\lambda(v)) = e^\lambda d(u, v)$ pour tous mes u, v. Suis-je $\mathbf{R}^3$ normé ? Non.

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}_{x,y,z \in \mathbf{R}} \qquad d = \inf \left\{ \begin{array}{c} \text{longueur}\,(\gamma) : \\ \gamma'(t) \in \ker\,(-x dy + dz) \end{array} \right\}$$

$$\delta^\lambda(x, y, z) = (e^\lambda x, e^\lambda y, e^{2\lambda} z).$$

Espaces auto-similaires

Je suis un espace métrique homéomorphe à $\mathbf{R}^3$, on m'appelle (X, d). Mon groupe d'isométries est transitif, et pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, une application δ^λ me dilate : $d(\delta^\lambda(u), \delta^\lambda(v)) = e^\lambda d(u, v)$ pour tous mes u, v. Suis-je $\mathbf{R}^3$ normé ? Non.

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}_{x,y,z \in \mathbf{R}} \qquad d = \inf \left\{ \begin{array}{c} \text{longueur}\,(\gamma) : \\ \gamma'(t) \in \ker\,(-x dy + dz) \end{array} \right\}$$

$$\delta^\lambda(x, y, z) = (e^\lambda x, e^\lambda y, e^{2\lambda} z).$$

- d est invariante à gauche sur X (le groupe d'Heisenberg) : distance de Carnot-Carathéodory (CC).

Espaces auto-similaires

Je suis un espace métrique homéomorphe à $\mathbf{R}^3$, on m'appelle (X, d). Mon groupe d'isométries est transitif, et pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, une application δ^λ me dilate : $d(\delta^\lambda(u), \delta^\lambda(v)) = e^\lambda d(u, v)$ pour tous mes u, v. Suis-je $\mathbf{R}^3$ normé ? Non.

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}_{x,y,z \in \mathbf{R}} \qquad d = \inf \left\{ \begin{array}{c} \text{longueur}\,(\gamma) : \\ \gamma'(t) \in \ker\,(-x dy + dz) \end{array} \right\}$$

$$\delta^\lambda(x, y, z) = (e^\lambda x, e^\lambda y, e^{2\lambda} z).$$

- d est invariante à gauche sur X (le groupe d'Heisenberg) : distance de Carnot-Carathéodory (CC).
- La dimension de Hausdorff de (X, d) est 4.

Espaces auto-similaires

Je suis un espace métrique homéomorphe à $\mathbf{R}^3$, on m'appelle (X, d). Mon groupe d'isométries est transitif, et pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, une application δ^λ me dilate : $d(\delta^\lambda(u), \delta^\lambda(v)) = e^\lambda d(u, v)$ pour tous mes u, v. Suis-je $\mathbf{R}^3$ normé ? Non.

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}_{x,y,z\in\mathbf{R}} \qquad d = \inf \left\{ \begin{array}{c} \text{longueur}\,(\gamma) : \\ \gamma'(t) \in \ker\,(-x dy + dz) \end{array} \right\}$$

$$\delta^\lambda(x, y, z) = (e^\lambda x, e^\lambda y, e^{2\lambda} z).$$

- d est invariante à gauche sur X (le groupe d'Heisenberg) : distance de Carnot-Carathéodory (CC).
- La dimension de Hausdorff de (X, d) est 4.
- Plus général : $\mathfrak{g}$ algèbre de Lie nilpotente, δ dérivation de $\mathfrak{g}$ telle que $\mathfrak{g}_1 = \ker(\delta - 1)$ engendre $\mathfrak{g}$. Norme sur $\mathfrak{g}_1 \rightsquigarrow$ distance CC sur G.

Espaces auto-similaires

Je suis un espace métrique homéomorphe à $\mathbf{R}^3$, on m'appelle (X, d). Mon groupe d'isométries est transitif, et pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, une application δ^λ me dilate : $d(\delta^\lambda(u), \delta^\lambda(v)) = e^\lambda d(u, v)$ pour tous mes u, v. Suis-je $\mathbf{R}^3$ normé ? Non.

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}_{x,y,z \in \mathbf{R}} \qquad d = \inf \left\{ \begin{array}{c} \text{longueur}\,(\gamma) : \\ \gamma'(t) \in \ker\,(-x dy + dz) \end{array} \right\}$$

$$\delta^\lambda(x, y, z) = (e^\lambda x, e^\lambda y, e^{2\lambda} z).$$

- d est invariante à gauche sur X (le groupe d'Heisenberg) : distance de Carnot-Carathéodory (CC).
- La dimension de Hausdorff de (X, d) est 4.
- Plus général : $\mathfrak{g}$ algèbre de Lie nilpotente, δ dérivation de $\mathfrak{g}$ telle que $\mathfrak{g}_1 = \ker(\delta - 1)$ engendre $\mathfrak{g}$. Norme sur $\mathfrak{g}_1 \rightsquigarrow$ distance CC sur G.
- Seuls exemples géodésiques, loc. compacts, homogènes (Le Donne, 2013). En dim 3 : $\mathbf{R}^3$ ou le groupe d'Heisenberg.

Cône asymptotique Gromov-Hausdorff

Soit $\mathcal{X}$ l'ensemble des espaces métriques pointés (mod. isométrie).

Cône asymptotique Gromov-Hausdorff

Soit $\mathcal{X}$ l'ensemble des espaces métriques pointés (mod. isométrie).
$\mathbf{R} \curvearrowright \mathcal{X}$ par $\lambda.(X, d) = (X, e^{-\lambda} d)$.

Cône asymptotique Gromov-Hausdorff

Soit $\mathcal{X}$ l'ensemble des espaces métriques pointés (mod. isométrie).
$\mathbf{R} \curvearrowright \mathcal{X}$ par $\lambda.(X, d) = (X, e^{-\lambda} d)$. Points fixes : espaces λ-autosimilaires, $\forall \lambda$.

Cône asymptotique Gromov-Hausdorff

Soit $\mathcal{X}$ l'ensemble des espaces métriques pointés (mod. isométrie).
$\mathbf{R} \curvearrowright \mathcal{X}$ par $\lambda.(X, d) = (X, e^{-\lambda} d)$. Points fixes : espaces λ-autosimilaires, $\forall \lambda$.
Peut-on donner un sens à une « limite » des $\lambda.X$ quand $\lambda \to +\infty$?

Cône asymptotique Gromov-Hausdorff

Soit $\mathcal{X}$ l'ensemble des espaces métriques pointés (mod. isométrie).
$\mathbf{R} \curvearrowright \mathcal{X}$ par $\lambda.(X, d) = (X, e^{-\lambda} d)$. Points fixes : espaces λ-autosimilaires, $\forall \lambda$.
Peut-on donner un sens à une « limite » des $\lambda.X$ quand $\lambda \to +\infty$?
Exemple de comportement attendu : $\lambda.(\mathbf{Z}^n, d_{\mathrm{mot}}) \to (\mathbf{R}^n, \| \cdot \|)$.

Cône asymptotique Gromov-Hausdorff

Soit $\mathcal{X}$ l'ensemble des espaces métriques pointés (mod. isométrie).
$\mathbf{R} \curvearrowright \mathcal{X}$ par $\lambda.(X, d) = (X, e^{-\lambda} d)$. Points fixes : espaces λ-autosimilaires, $\forall \lambda$.
Peut-on donner un sens à une « limite » des $\lambda.X$ quand $\lambda \to +\infty$?
Exemple de comportement attendu : $\lambda.(\mathbf{Z}^n, d_{\mathrm{mot}}) \to (\mathbf{R}^n, \| \cdot \|)$.

Définition

(X_j, o_j) *converge vers* $(X_\infty, o_\infty) \in \mathcal{X}$ *au sens de Gromov- Hausdorff pointé s'il existe* $\phi_j : X_\infty \to X_j$ *t.q.*

Cône asymptotique Gromov-Hausdorff

Soit $\mathcal{X}$ l'ensemble des espaces métriques pointés (mod. isométrie).
$\mathbf{R} \curvearrowright \mathcal{X}$ par $\lambda.(X, d) = (X, e^{-\lambda} d)$. Points fixes : espaces λ-autosimilaires, $\forall \lambda$.
Peut-on donner un sens à une « limite » des $\lambda.X$ quand $\lambda \to +\infty$?
Exemple de comportement attendu : $\lambda.(\mathbf{Z}^n, d_{\mathrm{mot}}) \to (\mathbf{R}^n, \|\cdot\|)$.

Définition

(X_j, o_j) converge vers $(X_\infty, o_\infty) \in \mathcal{X}$ au sens de Gromov- Hausdorff pointé s'il existe $\phi_j : X_\infty \to X_j$ t.q.

1. $d_j(\phi_j(o_\infty), o_j) \to 0$

Cône asymptotique Gromov-Hausdorff

Soit $\mathcal{X}$ l'ensemble des espaces métriques pointés (mod. isométrie).
$\mathbf{R} \curvearrowright \mathcal{X}$ par $\lambda.(X, d) = (X, e^{-\lambda} d)$. Points fixes : espaces λ-autosimilaires, $\forall \lambda$.
Peut-on donner un sens à une « limite » des $\lambda.X$ quand $\lambda \to +\infty$?
Exemple de comportement attendu : $\lambda.(\mathbf{Z}^n, d_{\mathrm{mot}}) \to (\mathbf{R}^n, \| \cdot \|)$.

Définition

(X_j, o_j) *converge vers* $(X_\infty, o_\infty) \in \mathcal{X}$ *au sens de Gromov- Hausdorff pointé s'il existe* $\phi_j : X_\infty \to X_j$ *t.q.*

1. $d_j(\phi_j(o_\infty), o_j) \to 0$
2. $\forall R > 0$, $sup_{|x|,|y| \leqslant R} |d_j(\phi_j(x), \phi_j(y)) - d_\infty(x, y)| \to 0$

Cône asymptotique Gromov-Hausdorff

Soit $\mathcal{X}$ l'ensemble des espaces métriques pointés (mod. isométrie).
$\mathbf{R} \curvearrowright \mathcal{X}$ par $\lambda.(X, d) = (X, e^{-\lambda} d)$. Points fixes : espaces λ-autosimilaires, $\forall \lambda$.
Peut-on donner un sens à une « limite » des $\lambda.X$ quand $\lambda \to +\infty$?
Exemple de comportement attendu : $\lambda.(\mathbf{Z}^n, d_{\mathrm{mot}}) \to (\mathbf{R}^n, \|\cdot\|)$.

Définition

(X_j, o_j) converge vers $(X_\infty, o_\infty) \in \mathcal{X}$ au sens de Gromov- Hausdorff pointé s'il existe $\phi_j : X_\infty \to X_j$ t.q.

1. $d_j(\phi_j(o_\infty), o_j) \to 0$
2. $\forall R > 0$, $sup_{|x|,|y| \leqslant R} |d_j(\phi_j(x), \phi_j(y)) - d_\infty(x, y)| \to 0$
3. $\forall R' > 0, \sup_{|x|_j, |y|_j < R'} d_j(x, \phi_j(B_\infty(R'))) \to 0.$

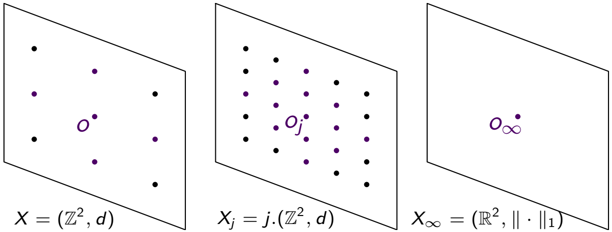
Cône asymptotique Gromov-Hausdorff

Soit $\mathcal{X}$ l'ensemble des espaces métriques pointés (mod. isométrie).
$\mathbf{R} \curvearrowright \mathcal{X}$ par $\lambda.(X, d) = (X, e^{-\lambda} d)$. Points fixes : espaces λ-autosimilaires, $\forall \lambda$.
Peut-on donner un sens à une « limite » des $\lambda.X$ quand $\lambda \to +\infty$?
Exemple de comportement attendu : $\lambda.(\mathbf{Z}^n, d_{\mathrm{mot}}) \to (\mathbf{R}^n, \|\cdot\|)$.

Définition

(X_j, o_j) *converge vers* $(X_\infty, o_\infty) \in \mathcal{X}$ *au sens de Gromov- Hausdorff pointé s'il existe* $\phi_j : X_\infty \to X_j$ *t.q.*

1. $d_j(\phi_j(o_\infty), o_j) \to 0$
2. $\forall R > 0$, $sup_{|x|,|y| \leqslant R} |d_j(\phi_j(x), \phi_j(y)) - d_\infty(x, y)| \to 0$
3. $\forall R' > 0, \sup_{|x|_j, |y|_j < R'} d_j(x, \phi_j(B_\infty(R'))) \to 0.$



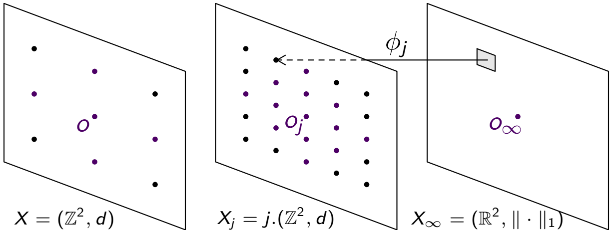
Cône asymptotique Gromov-Hausdorff

Soit $\mathcal{X}$ l'ensemble des espaces métriques pointés (mod. isométrie).
$\mathbf{R} \curvearrowright \mathcal{X}$ par $\lambda.(X, d) = (X, e^{-\lambda} d)$. Points fixes : espaces λ-autosimilaires, $\forall \lambda$.
Peut-on donner un sens à une « limite » des $\lambda.X$ quand $\lambda \to +\infty$?
Exemple de comportement attendu : $\lambda.(\mathbf{Z}^n, d_{\mathrm{mot}}) \to (\mathbf{R}^n, \|\cdot\|)$.

Définition

(X_j, o_j) converge vers $(X_\infty, o_\infty) \in \mathcal{X}$ au sens de Gromov- Hausdorff pointé s'il existe $\phi_j : X_\infty \to X_j$ t.q.

1. $d_j(\phi_j(o_\infty), o_j) \to 0$
2. $\forall R > 0$, $sup_{|x|,|y| \leqslant R} |d_j(\phi_j(x), \phi_j(y)) - d_\infty(x, y)| \to 0$
3. $\forall R' > 0, \sup_{|x|_j, |y|_j < R'} d_j(x, \phi_j(B_\infty(R'))) \to 0.$



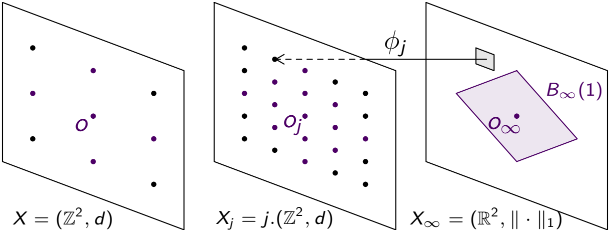
Cône asymptotique Gromov-Hausdorff

Soit $\mathcal{X}$ l'ensemble des espaces métriques pointés (mod. isométrie).
$\mathbf{R} \curvearrowright \mathcal{X}$ par $\lambda.(X, d) = (X, e^{-\lambda} d)$. Points fixes : espaces λ-autosimilaires, $\forall \lambda$.
Peut-on donner un sens à une « limite » des $\lambda.X$ quand $\lambda \to +\infty$?
Exemple de comportement attendu : $\lambda.(\mathbf{Z}^n, d_{\mathrm{mot}}) \to (\mathbf{R}^n, \|\cdot\|)$.

Définition

(X_j, o_j) converge vers $(X_\infty, o_\infty) \in \mathcal{X}$ au sens de Gromov- Hausdorff pointé s'il existe $\phi_j : X_\infty \to X_j$ t.q.

1. $d_j(\phi_j(o_\infty), o_j) \to 0$
2. $\forall R > 0$, $sup_{|x|,|y| \leqslant R} |d_j(\phi_j(x), \phi_j(y)) - d_\infty(x, y)| \to 0$
3. $\forall R' > 0, \sup_{|x|_j, |y|_j < R'} d_j(x, \phi_j(B_\infty(R'))) \to 0.$



Utilisation historique des cônes asymptotiques

Soit $\Gamma = \langle S \rangle$ un groupe de type fini

Utilisation historique des cônes asymptotiques

Soit $\Gamma = \langle S \rangle$ un groupe de type fini à croissance polynomiale, c'est-à-dire

$$\exists n \in \mathbb{N},\ \sharp\{\gamma_1 \cdots \gamma_r : \gamma_i \in S\} = O(r^n).$$

Utilisation historique des cônes asymptotiques

Soit $\Gamma = \langle S \rangle$ un groupe de type fini à croissance polynomiale, c'est-à-dire

$$\exists n \in \mathbb{N},\ \sharp \{\gamma_1 \cdots \gamma_r : \gamma_i \in S\} = O(r^n).$$

Gromov observe que l'hypothèse garantit
$\exists (\lambda_j), \exists Y,\ \lambda_j \to +\infty,\ \lambda_j.\Gamma \to Y$. De plus

Utilisation historique des cônes asymptotiques

Soit $\Gamma = \langle S \rangle$ un groupe de type fini à croissance polynomiale, c'est-à-dire

$$\exists n \in \mathbb{N},\ \sharp \{\gamma_1 \cdots \gamma_r : \gamma_i \in S\} = O(r^n).$$

Gromov observe que l'hypothèse garantit
$\exists (\lambda_j), \exists Y,\ \lambda_j \to +\infty,\ \lambda_j.\Gamma \to Y$. De plus

Utilisation historique des cônes asymptotiques

Soit $\Gamma = \langle S \rangle$ un groupe de type fini à croissance polynomiale, c'est-à-dire

$$\exists n \in \mathbb{N},\ \sharp \{\gamma_1 \cdots \gamma_r : \gamma_i \in S\} = O(r^n).$$

Gromov observe que l'hypothèse garantit
$\exists (\lambda_j), \exists Y,\ \lambda_j \to +\infty,\ \lambda_j.\Gamma \to Y$. De plus

- Y est loc. compacte, connexe, homogène, de dim. finie.

Utilisation historique des cônes asymptotiques

Soit $\Gamma = \langle S \rangle$ un groupe de type fini à croissance polynomiale, c'est-à-dire

$$\exists n \in \mathbb{N},\ \sharp\{\gamma_1 \cdots \gamma_r : \gamma_i \in S\} = O(r^n).$$

Gromov observe que l'hypothèse garantit
$\exists(\lambda_j), \exists Y,\ \lambda_j \to +\infty,\ \lambda_j.\Gamma \to Y$. De plus

- Y est loc. compacte, connexe, homogène, de dim. finie.
- $L = \mathrm{Isom}(Y)$ a la structure d'un groupe de Lie, $\sharp\pi_0 L < \infty$.

Utilisation historique des cônes asymptotiques

Soit $\Gamma = \langle S \rangle$ un groupe de type fini à croissance polynomiale, c'est-à-dire

$$\exists n \in \mathbb{N},\ \sharp \{\gamma_1 \cdots \gamma_r : \gamma_i \in S\} = O(r^n).$$

Gromov observe que l'hypothèse garantit $\exists (\lambda_j), \exists Y,\ \lambda_j \to +\infty,\ \lambda_j.\Gamma \to Y$. De plus

- Y est loc. compacte, connexe, homogène, de dim. finie.
- $L = \mathrm{Isom}(Y)$ a la structure d'un groupe de Lie, $\sharp \pi_0 L < \infty$.

Théorème (Gromov 1980)

Sous ces hypothèses, Γ possède un sous-groupe nilpotent de type fini.

Utilisation historique des cônes asymptotiques

Soit $\Gamma = \langle S \rangle$ un groupe de type fini à croissance polynomiale, c'est-à-dire

$$\exists n \in \mathbb{N},\ \sharp\{\gamma_1 \cdots \gamma_r : \gamma_i \in S\} = O(r^n).$$

Gromov observe que l'hypothèse garantit
$\exists(\lambda_j), \exists Y,\ \lambda_j \to +\infty,\ \lambda_j.\Gamma \to Y$. De plus

- Y est loc. compacte, connexe, homogène, de dim. finie.
- $L = \mathrm{Isom}(Y)$ a la structure d'un groupe de Lie, $\sharp\pi_0 L < \infty$.

Théorème (Gromov 1980)

Sous ces hypothèses, Γ possède un sous-groupe nilpotent de type fini.

A l'époque cette conclusion était connue sous des hypothèses supplémentaires : parmi les groupes résolubles (Milnor-Wolf), parmi les groupes linéaires (D'après l'alternative de Tits et Milnor-Wolf). Les observations précédentes permettent d'amorcer la preuve de Gromov.

Cônes asymptotiques des groupes nilpotents

Soit Γ un groupe nilpotent de type fini. Pour simplifier : Γ sans torsion.

Cônes asymptotiques des groupes nilpotents

Soit Γ un groupe nilpotent de type fini. Pour simplifier : Γ sans torsion.

- Γ se plonge dans un groupe de Lie nilpotent simplement connexe G (Mal'cev 1949).

Cônes asymptotiques des groupes nilpotents

Soit Γ un groupe nilpotent de type fini. Pour simplifier : Γ sans torsion.

- Γ se plonge dans un groupe de Lie nilpotent simplement connexe G (Mal'cev 1949).
- $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ est une déformation de l'algèbre de Carnot graduée

$$\mathrm{gr}(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{i>0} \mathfrak{g}^i/\mathfrak{g}^{i+1}.$$

avec le crochet $[\overline{x}, \overline{y}]_{\mathrm{gr}} = [x, y] \bmod \mathfrak{g}^{i+j+1}$ pour $x \in \mathfrak{g}^i$, $y \in \mathfrak{g}^j$.

Cônes asymptotiques des groupes nilpotents

Soit Γ un groupe nilpotent de type fini. Pour simplifier : Γ sans torsion.

- Γ se plonge dans un groupe de Lie nilpotent simplement connexe G (Mal'cev 1949).
- $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ est une déformation de l'algèbre de Carnot graduée

$$\mathrm{gr}(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{i>0} \mathfrak{g}^i/\mathfrak{g}^{i+1}.$$

  avec le crochet $[\overline{x}, \overline{y}]_{\mathrm{gr}} = [x, y] \mod \mathfrak{g}^{i+j+1}$ pour $x \in \mathfrak{g}^i$, $y \in \mathfrak{g}^j$.
- Soit N le groupe de Lie dont l'algèbre de Lie est $\mathrm{gr}(\mathfrak{g})$. A la différence de G, N peut toujours être muni de distances CC, pour lesquelles il est autosimilaire.

Théorème (Pansu, 1982)

Γ admet pour cône asymptotique N avec une distance CC (explicite pour des distances invariantes à gauche explicites sur Γ).

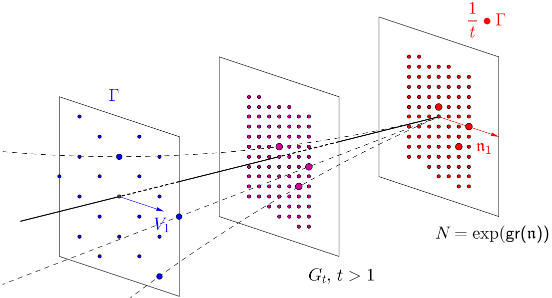
Cônes asymptotiques des groupes nilpotents

Soit Γ un groupe nilpotent de type fini. Pour simplifier : Γ sans torsion.

- Γ se plonge dans un groupe de Lie nilpotent simplement connexe G (Mal'cev 1949).
- $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ est une déformation de l'algèbre de Carnot graduée

$$\mathrm{gr}(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{i>0} \mathfrak{g}^i/\mathfrak{g}^{i+1}.$$

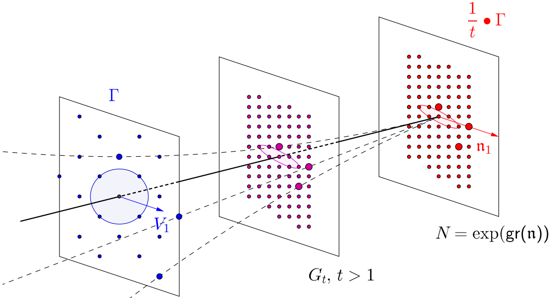
  avec le crochet $[\overline{x}, \overline{y}]_{\mathrm{gr}} = [x, y] \bmod \mathfrak{g}^{i+j+1}$ pour $x \in \mathfrak{g}^i$, $y \in \mathfrak{g}^j$.
- Soit N le groupe de Lie dont l'algèbre de Lie est $\mathrm{gr}(\mathfrak{g})$. A la différence de G, N peut toujours être muni de distances CC, pour lesquelles il est autosimilaire.



Cônes asymptotiques des groupes nilpotents

Soit Γ un groupe nilpotent de type fini. Pour simplifier : Γ sans torsion.

- Γ se plonge dans un groupe de Lie nilpotent simplement connexe G (Mal'cev 1949).
- $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ est une déformation de l'algèbre de Carnot graduée
$$\mathrm{gr}(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{i>0} \mathfrak{g}^i/\mathfrak{g}^{i+1}.$$
avec le crochet $[\overline{x}, \overline{y}]_{\mathrm{gr}} = [x, y] \mod \mathfrak{g}^{i+j+1}$ pour $x \in \mathfrak{g}^i$, $y \in \mathfrak{g}^j$.
- Soit N le groupe de Lie dont l'algèbre de Lie est $\mathrm{gr}(\mathfrak{g})$. A la différence de G, N peut toujours être muni de distances CC, pour lesquelles il est autosimilaire.



Applications SBE

Définition

Soient X et Y deux espaces métriques. $f : X \to Y$ est un homéomorphisme bilipschitzien *s'il existe $\underline{\lambda}, \overline{\lambda} \in \mathbf{R}_{>0}$ telles que pour tous $x, x' \in X$ et $y \in Y$,*

$$\begin{cases} \underline{\lambda} d(x,x') \leqslant d(f(x), f(x')) \leqslant \overline{\lambda} d(x,x'). \\ y \in f(X) \end{cases}$$

Applications SBE

Définition

Soient X et Y deux espaces métriques. $f : X \to Y$ est un homéomorphisme bilipschitzien s'il existe $\underline{\lambda}, \overline{\lambda} \in \mathbf{R}_{>0}$ telles que pour tous $x, x' \in X$ et $y \in Y$,

$$\begin{cases} \underline{\lambda} d(x,x') \leqslant d(f(x), f(x')) \leqslant \overline{\lambda} d(x,x'). \\ y \in f(X) \end{cases}$$

C'est une isométrie si de plus $\underline{\lambda} = \overline{\lambda} = 1$.

Applications SBE

Définition

Soient X et Y deux espaces métriques. $f : X \to Y$ est une *quasi-isométrie* *s'il existe $\gamma \in \mathbf{R}_{\geqslant 0}$, $\underline{\lambda}, \overline{\lambda} \in \mathbf{R}_{>0}$ tel que pour tous $x, x' \in X$ et $y \in Y$,*

$$\begin{cases} \underline{\lambda} d(x,x') - \gamma \leqslant d(f(x), f(x')) \leqslant \overline{\lambda} d(x,x') + \gamma. \\ d(y, f(X)) \leqslant \gamma. \end{cases}$$

Applications SBE

Definition (Cornulier 2011, 2016)

Soient X et Y deux espaces métriques. $f : X \to Y$ est une équivalence bilipschitzienne à grande échelle (SBE) s'il existe $u(r) \ll r$, $\underline{\lambda}, \overline{\lambda} \in \mathbf{R}_{>0}$ telles que pour tous $x, x' \in X$ et $y \in Y$,

$$\begin{cases} \underline{\lambda} d(x,x') - u(|x| + |x'|) \leqslant d(f(x), f(x')) \leqslant \overline{\lambda} d(x,x') + u(|x| + |x'|). \\ d(y, f(X)) \leqslant u(|y|). \end{cases}$$

Applications SBE

Definition (Cornulier 2011, 2016)

Soient X et Y deux espaces métriques. $f : X \to Y$ est une équivalence bilipschitzienne à grande échelle (SBE) s'il existe $u(r) \ll r$, $\underline{\lambda}, \overline{\lambda} \in \mathbf{R}_{>0}$ telles que pour tous $x, x' \in X$ et $y \in Y$,

$$\begin{cases} \underline{\lambda} d(x,x') - u(|x| + |x'|) \leqslant d(f(x), f(x')) \leqslant \overline{\lambda} d(x,x') + u(|x| + |x'|). \\ d(y, f(X)) \leqslant u(|y|). \end{cases}$$

Applications SBE

Definition (Cornulier 2011, 2016)

Soient X et Y deux espaces métriques. $f : X \to Y$ est une équivalence bilipschitzienne à grande échelle (SBE) s'il existe $u(r) \ll r$, $\underline{\lambda}, \overline{\lambda} \in \mathbf{R}_{>0}$ telles que pour tous $x, x' \in X$ et $y \in Y$,

$$\begin{cases} \underline{\lambda} d(x,x') - u(|x| + |x'|) \leqslant d(f(x), f(x')) \leqslant \overline{\lambda} d(x,x') + u(|x| + |x'|). \\ d(y, f(X)) \leqslant u(|y|). \end{cases}$$

Propriété fondamentale

$f : X \to Y$ induit un homéomorphisme bilipschitzien $\mathrm{Cone}(f) : \mathrm{Cone}(X) \to \mathrm{Cone}(Y)$.

Applications SBE

Definition (Cornulier 2011, 2016)

Soient X et Y deux espaces métriques. $f : X \to Y$ est une équivalence bilipschitzienne à grande échelle (SBE) s'il existe $u(r) \ll r$, $\underline{\lambda}, \overline{\lambda} \in \mathbf{R}_{>0}$ telles que pour tous $x, x' \in X$ et $y \in Y$,

$$\begin{cases} \underline{\lambda} d(x,x') - u(|x| + |x'|) \leqslant d(f(x), f(x')) \leqslant \overline{\lambda} d(x,x') + u(|x| + |x'|). \\ d(y, f(X)) \leqslant u(|y|). \end{cases}$$

Propriété fondamentale

$f : X \to Y$ induit un homéomorphisme bilipschitzien $\mathrm{Cone}(f) : \mathrm{Cone}(X) \to \mathrm{Cone}(Y)$.

De nos jours, le point de vue sur les cônes asymptotique est différent, il faudrait préciser la propriété. Il faut juste retenir que si X et Y sont SBE alors leurs cônes asymptotiques sont bilipschitziennement homéomorphess.

Des dilatations asymptotiques pour les groupes nilpotents

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente, $L : \mathfrak{g} \to \mathrm{gr}(\mathfrak{g})$ un isomorphisme linéaire respectant les filtrations centrales descendantes.

Des dilatations asymptotiques pour les groupes nilpotents

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente, $L : \mathfrak{g} \to \mathrm{gr}(\mathfrak{g})$ un isomorphisme linéaire respectant les filtrations centrales descendantes. Sur $\mathrm{gr}(\mathfrak{g})$ il y a :

Des dilatations asymptotiques pour les groupes nilpotents

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente, $L : \mathfrak{g} \to \mathrm{gr}(\mathfrak{g})$ un isomorphisme linéaire respectant les filtrations centrales descendantes. Sur $\mathrm{gr}(\mathfrak{g})$ il y a :

- Deux structures d'algèbre de Lie : le crochet gradué $[x, y]_{\mathrm{gr}}$, et $\{x, y\} = L\left[L^{-1}x, L^{-1}y\right]$.

Des dilatations asymptotiques pour les groupes nilpotents

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente, $L : \mathfrak{g} \to \mathrm{gr}(\mathfrak{g})$ un isomorphisme linéaire respectant les filtrations centrales descendantes. Sur $\mathrm{gr}(\mathfrak{g})$ il y a :

- Deux structures d'algèbre de Lie : le crochet gradué $[x, y]_{\mathrm{gr}}$, et $\{x, y\} = L\left[L^{-1}x, L^{-1}y\right]$.
- Deux structures de groupe de Lie (via la série de Campbell-Hausdorff) : $(x, y) \mapsto x \bullet y$ et $(x, y) \mapsto x \star y$. Remarque : $(-x) \circ x = (-x) \star x = 0$.

Des dilatations asymptotiques pour les groupes nilpotents

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente, $L : \mathfrak{g} \to \mathrm{gr}(\mathfrak{g})$ un isomorphisme linéaire respectant les filtrations centrales descendantes. Sur $\mathrm{gr}(\mathfrak{g})$ il y a :

- Deux structures d'algèbre de Lie : le crochet gradué $[x, y]_{\mathrm{gr}}$, et $\{x, y\} = L\left[L^{-1}x, L^{-1}y\right]$.
- Deux structures de groupe de Lie (via la série de Campbell-Hausdorff) : $(x, y) \mapsto x \bullet y$ et $(x, y) \mapsto x \star y$. Remarque : $(-x) \circ x = (-x) \star x = 0$.
- Une norme, dite homogène : $|x| = \sup_i |x_i|$ si $x = \sum x_i$, $x_i \in \mathfrak{g}^i/\mathfrak{g}^{i+1}$.

Des dilatations asymptotiques pour les groupes nilpotents

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente, $L : \mathfrak{g} \to \mathrm{gr}(\mathfrak{g})$ un isomorphisme linéaire respectant les filtrations centrales descendantes. Sur $\mathrm{gr}(\mathfrak{g})$ il y a :

- Deux structures d'algèbre de Lie : le crochet gradué $[x, y]_{\mathrm{gr}}$, et $\{x, y\} = L\left[L^{-1}x, L^{-1}y\right]$.
- Deux structures de groupe de Lie (via la série de Campbell-Hausdorff) : $(x, y) \mapsto x \bullet y$ et $(x, y) \mapsto x \star y$. Remarque : $(-x) \circ x = (-x) \star x = 0$.
- Une norme, dite homogène : $|x| = \sup_i |x_i|$ si $x = \sum x_i$, $x_i \in \mathfrak{g}^i/\mathfrak{g}^{i+1}$.

Théorème (Guivarc'h 1973)

Si d est une distance invariante à gauche pour $\circ$ ou $\star$, propre et géodésique, alors il existe $c \geqslant 1$ tel que $\frac{1}{c}|x| \leqslant d(0, x) \leqslant c|x|$.

Des dilatations asymptotiques pour les groupes nilpotents

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente, $L : \mathfrak{g} \to \mathrm{gr}(\mathfrak{g})$ un isomorphisme linéaire respectant les filtrations centrales descendantes. Sur $\mathrm{gr}(\mathfrak{g})$ il y a :

- Deux structures d'algèbre de Lie : le crochet gradué $[x, y]_{\mathrm{gr}}$, et $\{x, y\} = L\left[L^{-1}x, L^{-1}y\right]$.
- Deux structures de groupe de Lie (via la série de Campbell-Hausdorff) : $(x, y) \mapsto x \bullet y$ et $(x, y) \mapsto x \star y$. Remarque : $(-x) \circ x = (-x) \star x = 0$.
- Une norme, dite homogène : $|x| = \sup_i |x_i|$ si $x = \sum x_i$, $x_i \in \mathfrak{g}^i/\mathfrak{g}^{i+1}$.

Théorème (Guivarc'h 1973)

Si d est une distance invariante à gauche pour $\circ$ ou $\star$, propre et géodésique, alors il existe $c \geqslant 1$ tel que $\frac{1}{c}|x| \leqslant d(0, x) \leqslant c|x|$.

Théorème (Goodman 1977 - Cornulier 2011, 2016 γ explicite)

Il existe $\gamma \in (0, 1)$ tel que $|x \circ y - x \star y| = O\left((|x| \vee |y|)^{\gamma}\right)$.

Des dilatations asymptotiques pour les groupes nilpotents

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente, $L : \mathfrak{g} \to \mathrm{gr}(\mathfrak{g})$ un isomorphisme linéaire respectant les filtrations centrales descendantes. Sur $\mathrm{gr}(\mathfrak{g})$ il y a :

- Deux structures d'algèbre de Lie : le crochet gradué $[x, y]_{\mathrm{gr}}$, et $\{x, y\} = L\left[L^{-1}x, L^{-1}y\right]$.
- Deux structures de groupe de Lie (via la série de Campbell-Hausdorff) : $(x, y) \mapsto x \bullet y$ et $(x, y) \mapsto x \star y$. Remarque : $(-x) \circ x = (-x) \star x = 0$.
- Une norme, dite homogène : $|x| = \sup_i |x_i|$ si $x = \sum x_i$, $x_i \in \mathfrak{g}^i/\mathfrak{g}^{i+1}$.

Théorème (Guivarc'h 1973)

Si d est une distance invariante à gauche pour $\circ$ ou $\star$, propre et géodésique, alors il existe $c \geqslant 1$ tel que $\frac{1}{c}|x| \leqslant d(0, x) \leqslant c|x|$.

Théorème (Goodman 1977 - Cornulier 2011, 2016 γ explicite)

Il existe $\gamma \in (0, 1)$ tel que $|x \circ y - x \star y| = O\left((|x| \vee |y|)^{\gamma}\right)$.

Exercice : le vérifier quand $\mathfrak{g}^3 = 0$, puis $\mathfrak{g}^4 = 0$; combien vaut γ ?

SBE des groupes nilpotents

La proximité à grande échelle des structures d'algèbre de Lie entraîne une proximité des structures métriques des groupes correspondants :

SBE des groupes nilpotents

La proximité à grande échelle des structures d'algèbre de Lie entraîne une proximité des structures métriques des groupes correspondants :

Théorème (Cornulier)

Soient $d_\circ$ et $d_\star$ deux distances $\circ$ et $\star$-invariantes, propres et géodésiques sur $\mathrm{gr}(\mathfrak{g})$*. Alors* $\mathrm{id} : (\mathrm{gr}(\mathfrak{g}), \circ) \to (\mathrm{gr}(\mathfrak{g}), \star)$ *est $O(r^\gamma)$-SBE, avec γ explicite.*

SBE des groupes nilpotents

Théorème (Cornulier)

Soient $d_\circ$ et $d_\star$ deux distances $\circ$ et $\star$-invariantes, propres et géodésques sur $\mathrm{gr}(\mathfrak{g})$. *Alors* $\mathrm{id} : (\mathrm{gr}(\mathfrak{g}), \circ) \to (\mathrm{gr}(\mathfrak{g}), \star)$ *est $O(r^\gamma)$-SBE, avec γ explicite.*

Ceci implique une variante du th. de Pansu en prenant pour $d_\star$ une distance CC.

SBE des groupes nilpotents

Théorème (Cornulier)

Soient $d_\circ$ et $d_\star$ deux distances $\circ$ et $\star$-invariantes, propres et géodésques sur $\mathrm{gr}(\mathfrak{g})$. Alors $\mathrm{id} : (\mathrm{gr}(\mathfrak{g}), \circ) \to (\mathrm{gr}(\mathfrak{g}), \star)$ est $O(r^\gamma)$-SBE, avec γ explicite.

Ceci implique une variante du th. de Pansu en prenant pour $d_\star$ une distance CC.

Démonstration.

Pour tous $x, y \in \mathrm{gr}(\mathfrak{g})$,

$$d_\circ(x, y) = d(0, -x \circ y) \qquad \text{(inv. à gauche)}$$

SBE des groupes nilpotents

Théorème (Cornulier)

Soient $d_\circ$ et $d_\star$ deux distances $\circ$ et $\star$-invariantes, propres et géodésques sur $\mathrm{gr}(\mathfrak{g})$*. Alors* $\mathrm{id} : (\mathrm{gr}(\mathfrak{g}), \circ) \to (\mathrm{gr}(\mathfrak{g}), \star)$ *est $O(r^\gamma)$-SBE, avec γ explicite.*

Ceci implique une variante du th. de Pansu en prenant pour $d_\star$ une distance CC.

Démonstration.

Pour tous $x, y \in \mathrm{gr}(\mathfrak{g})$,

$$\begin{aligned} d_\circ(x,y) &= d(0, -x \circ y) && \text{(inv. à gauche)} \\ &\leqslant c|-x \circ y| && \text{(Guivarc'h)} \end{aligned}$$

SBE des groupes nilpotents

Théorème (Cornulier)

Soient $d_\circ$ *et* $d_\star$ *deux distances* $\circ$ *et* $\star$*-invariantes, propres et géodésques sur* $\mathrm{gr}(\mathfrak{g})$*. Alors* $\mathrm{id} : (\mathrm{gr}(\mathfrak{g}), \circ) \to (\mathrm{gr}(\mathfrak{g}), \star)$ *est* $O(r^\gamma)$*-SBE, avec* γ *explicite.*

Ceci implique une variante du th. de Pansu en prenant pour $d_\star$ une distance CC.

Démonstration.

Pour tous $x, y \in \mathrm{gr}(\mathfrak{g})$,

$$\begin{aligned}
d_\circ(x,y) &= d(0, -x \circ y) && \text{(inv. à gauche)} \\
&\leqslant c|-x \circ y| && \text{(Guivarc'h)} \\
&\leqslant c|-x \star y| + c|(-x \star y) - (-x \circ y)| && \text{(inég. } \triangle\text{)}
\end{aligned}$$

SBE des groupes nilpotents

Théorème (Cornulier)

Soient $d_\circ$ *et* $d_\star$ *deux distances* $\circ$ *et* $\star$*-invariantes, propres et géodésques sur* $\mathrm{gr}(\mathfrak{g})$*. Alors* $\mathrm{id} : (\mathrm{gr}(\mathfrak{g}), \circ) \to (\mathrm{gr}(\mathfrak{g}), \star)$ *est* $O(r^\gamma)$*-SBE, avec* γ *explicite.*

Ceci implique une variante du th. de Pansu en prenant pour $d_\star$ une distance CC.

Démonstration.

Pour tous $x, y \in \mathrm{gr}(\mathfrak{g})$,

$$\begin{aligned}
d_\circ(x,y) &= d(0, -x \circ y) && \text{(inv. à gauche)} \\
&\leqslant c|-x \circ y| && \text{(Guivarc'h)} \\
&\leqslant c|-x \star y| + c|(-x \star y) - (-x \circ y)| && \text{(inég. } \triangle\text{)} \\
&\leqslant c^2 d_\star(x,y) + O(|x|^\gamma \vee |x|^\gamma) && \text{(Guivarc'h + Goodman)}
\end{aligned}$$

SBE des groupes nilpotents

Théorème (Cornulier)

Soient $d_\circ$ *et* $d_\star$ *deux distances* $\circ$ *et* $\star$*-invariantes, propres et géodésques sur* $\mathrm{gr}(\mathfrak{g})$*. Alors* $\mathrm{id} : (\mathrm{gr}(\mathfrak{g}), \circ) \to (\mathrm{gr}(\mathfrak{g}), \star)$ *est* $O(r^\gamma)$*-SBE, avec* γ *explicite.*

Ceci implique une variante du th. de Pansu en prenant pour $d_\star$ une distance CC.

Démonstration.

Pour tous $x, y \in \mathrm{gr}(\mathfrak{g})$,

$$\begin{aligned}
d_\circ(x,y) &= d(0, -x \circ y) && \text{(inv. à gauche)} \\
&\leqslant c|-x \circ y| && \text{(Guivarc'h)} \\
&\leqslant c|-x \star y| + c|(-x \star y) - (-x \circ y)| && \text{(inég. } \triangle\text{)} \\
&\leqslant c^2 d_\star(x,y) + O(|x|^\gamma \vee |x|^\gamma) && \text{(Guivarc'h + Goodman)} \\
&\leqslant c^2 d_\star(x,y) + O(d_\star(0,x)^\gamma \vee d_\star(0,y)^\gamma),
\end{aligned}$$

SBE des groupes nilpotents

Théorème (Cornulier)

Soient $d_\circ$ et $d_\star$ deux distances $\circ$ et $\star$-invariantes, propres et géodésques sur $\mathrm{gr}(\mathfrak{g})$*. Alors* $\mathrm{id} : (\mathrm{gr}(\mathfrak{g}), \circ) \to (\mathrm{gr}(\mathfrak{g}), \star)$ *est $O(r^\gamma)$-SBE, avec γ explicite.*

Ceci implique une variante du th. de Pansu en prenant pour $d_\star$ une distance CC.

Démonstration.

Pour tous $x, y \in \mathrm{gr}(\mathfrak{g})$,

$$\begin{aligned}
d_\circ(x,y) &= d(0, -x \circ y) && \text{(inv. à gauche)} \\
&\leqslant c|-x \circ y| && \text{(Guivarc'h)} \\
&\leqslant c|-x \star y| + c|(-x \star y) - (-x \circ y)| && \text{(inég. } \triangle\text{)} \\
&\leqslant c^2 d_\star(x,y) + O(|x|^\gamma \vee |x|^\gamma) && \text{(Guivarc'h + Goodman)} \\
&\leqslant c^2 d_\star(x,y) + O(d_\star(0,x)^\gamma \vee d_\star(0,y)^\gamma),
\end{aligned}$$

et de même $d_\star(x,y) \leqslant c^2 d_\circ(x,y) + O(|x|^\gamma \vee |x|^\gamma)$. □

Pour quoi faire ?

La variante faible du théorème de Pansu, combinée aux autres outils, suffit par exemple pour démontrer le résultat suivant :

Proposition

Soit Γ un groupe de type fini quasiisométrique à $\mathbf{Z}^n$. Alors Γ a un sous-groupe d'indice fini isomorphe à $\mathbf{Z}^n$.

Démonstration.

« Avoir une croissance polynomiale de degré n » est un invariant de quasiisométrie. D'après le théorème de Gromov on peut supposer Γ nilpotent (soit $\mathfrak{g}$ le gradué associé). Soit Y le cône asymptotique. D'après Guivarc'h (aussi démontré par Bass), $\sum_i i \dim(\mathfrak{g}^i/\mathfrak{g}^{i+1}) = n$. Mais d'autre part $n = \operatorname{dimtop}(Y) = \sum_i \dim(\mathfrak{g}^i/\mathfrak{g}^{i+1}) = n$. Donc les termes de la somme sont nuls pour $i > 1$. □

Commentaire

La proposition ne vaut plus telle quelle pour les groupes nilpotents (il y a des réseaux non commensurables / formes rationnelles distinctes de $\mathfrak{g}$).

Bilan

- Les groupes de type fini à croissance assez lente (polynômiale) ont des cônes asymptotiques Gromov-Hausdorff.

Bilan

- Les groupes de type fini à croissance assez lente (polynômiale) ont des cônes asymptotiques Gromov-Hausdorff.
- Ces cônes asymptotiques sont λ-autosimilaires pour tout λ, ce sont des groupes nilpotents gradués avec des distances CC (Pansu).

Bilan

- Les groupes de type fini à croissance assez lente (polynômiale) ont des cônes asymptotiques Gromov-Hausdorff.
- Ces cônes asymptotiques sont λ-autosimilaires pour tout λ, ce sont des groupes nilpotents gradués avec des distances CC (Pansu).
- Finalement, ces groupes ne sont pas exactement autosimilaires, mais ils sont « asymptotiquement autosimilaires ».

Bilan

- Les groupes de type fini à croissance assez lente (polynômiale) ont des cônes asymptotiques Gromov-Hausdorff.
- Ces cônes asymptotiques sont λ-autosimilaires pour tout λ, ce sont des groupes nilpotents gradués avec des distances CC (Pansu).
- Finalement, ces groupes ne sont pas exactement autosimilaires, mais ils sont « asymptotiquement autosimilaires ».
- Deux groupes de Lie nilpotents de type fini (resp. de Lie connexe) ont des cônes asymptotiques bilipchitiziennement homéomorphes si et seulement si ils sont *SBE* (quantitativement, par les estimées de Guivarc'h-Goodman-Cornulier).

Bilan

- Les groupes de type fini à croissance assez lente (polynômiale) ont des cônes asymptotiques Gromov-Hausdorff.
- Ces cônes asymptotiques sont λ-autosimilaires pour tout λ, ce sont des groupes nilpotents gradués avec des distances CC (Pansu).
- Finalement, ces groupes ne sont pas exactement autosimilaires, mais ils sont « asymptotiquement autosimilaires ».
- Deux groupes de Lie nilpotents de type fini (resp. de Lie connexe) ont des cônes asymptotiques bilipchitiziennement homéomorphes si et seulement si ils sont *SBE* (quantitativement, par les estimées de Guivarc'h-Goodman-Cornulier).
- C'est une question ouverte de savoir si deux groupes nilpotents de type fini, quasiisométriques, sont réseaux dans des groupes de Lie nilpotents isomorphes. Invariants connus : $\mathrm{gr}(\mathfrak{g})$ (Pansu 1989), nombres de Betti et anneau de cohomologie (Shalom 2004, Sauer 2006).

Bibliographie I

- Y. Guivarc'h, *Croissance polynomiale et période des fonctions harmoniques*, Bull. SMF, 1973.
- R. Goodman, *Filtrations and asymptotic automorphisms of nilpotent Lie groups*, J. Differential Geometry, 1977.
- M. Gromov, *Groups of polynomial growth and expanding maps*, Pub. math. IHES, 1981.
- P. Pansu, *Croissance des boules et des géodésiques fermées dans les nilvariétés*, Erg. theory and Dyn. Systems, 1982.
- M. Bridson et S. Gersten, *the optimal isoperimetric inequality for torus bundles over the circle*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) , 1996.
- Y. Cornulier, *Asymptotic cones of Lie groups and Cone equivalences*, 2011.
- Y. Cornulier, *SBE of nilpotent and hyperbolic groups*, arXiv :1702.06618, 2017.