Représentations des groupes symétriques

Gabriel Pallier

Séminaire des étudiants, Orsay - mars 2016

Soit d un entier naturel. D'après la théorie de Frobenius, le groupe symétrique $\mathfrak{S}_d$ admet autant de représentations irréductibles que de classes de conjuguaison – à savoir $p(d)$, le nombre de partitions de l'entier d – mais on ne dispose pas de bijection privilégiée entre ces deux ensembles. On donne ici une énumération combinatoire des représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_d$: nous montrons qu'elles peuvent être indicées par les partitions de d, via les symétriseurs [1] de Young. Pour finir, on énonce une formule de Frobenius qui exprime les caractères de ces représentations.
Ces notes suivent d'assez près le chapitre 4 de [1].

Table des matières

1. On rencontre aussi la terminologie "symétrisateur" dans la traduction française de [2], mais cet usage semble isolé.

1 Le symétriseur de Young

1.1 Premières définitions

Diagramme de Ferrers Par convention, une partition λ de l'entier d est écrite $(\lambda_1, \dots \lambda_s)$ où $\lambda_1 + \cdots + \lambda_s = d$ avec $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_s$ (les derniers λ_i son éventuellement nuls) et représentée graphiquement par un diagramme de Ferrers, aligné dans le coin supérieur gauche dont la i-ème ligne comporte λ_i cases. Par exemple, les diagrammes de Ferrers des partitions de $d = 3$ sont :

$$(3)\ :\ \begin{array}{|c|c|c|}\hline \ & \ & \ \\ \hline \end{array} \qquad (2,1)\ :\ \begin{array}{|c|c|}\hline \ & \ \\ \hline \ & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad (1,1,1)\ :\ \begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline \ \\ \hline \ \\ \hline \end{array}$$

A partir d'un diagramme de Ferrers, on peut en former un nouveau, où chaque ligne correspond à une colonne du précédent. Ce nouveau diagramme correspond à la partition conjuguée λ'.

$$\lambda = (4,2,1)\ :\ \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \ & \ & \ & \ \\ \hline \ & \ & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-2} \ & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline \ & \ & \ \\ \hline \ & \ & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2} \ & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1} \ & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}\ : \lambda' = (3,2,1,1)$$

Les partitions sont munies de l'ordre total lexigographique : $\lambda > \mu$ si le premier $\lambda_i - \mu_i$ non nul est strictement positif.

Tableaux de Young Ce sont des diagrammes de Ferrers numérotés, plus précisément :

Définition 1. *Soit λ une partition de d. Un tableau de Young de λ est la donnée d'une indexation par $\{1 \dots d\}$ des cases de son diagramme de Ferrers. On note $\mathcal{T}_\lambda$ l'ensemble des tableaux de Young de λ.*

Par exemple, un tableau de Young de $(4,2,1)$ est :

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 7 & 3 \\ \hline 6 & 4 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-2} 5 & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Observons que, l'action tautologique de $\mathfrak{S}_d$ sur l'ensemble $\{1 \dots d\}$ détermine une action $\mathfrak{S}_d \curvearrowright \mathcal{T}_\lambda$, où pour tout $T \in \mathcal{T}_\lambda$ et $g \in \mathfrak{S}_d$ le tableau $g.T$ contient le nombre $g(i)$ dans la case où T contenait i. Soit T un tableau de λ. On distingue deux sous-groupes particuliers associés à T dans $\mathfrak{S}_d$:

— Le sous-groupe P_λ des éléments qui préservent les lignes de T dans l'action précédente.

— Le sous-groupe Q_λ des éléments qui préservent les lignes de T dans l'action précédente.

Les groupes P_λ et Q_λ dépendent du tableau T choisi. Toutefois, remplacer T par $g.T$ revient à les remplacer par les sous-groupes $gP_\lambda g^{-1}$ et $gQ_\lambda g^{-1}$ qui leur sont respectivement conjugués.

Remarque 1. $P_\lambda \cap Q_\lambda = \{\mathrm{id}\}$. En effet, laisser chaque nombre dans sa ligne et dans sa colonne, c'est encore fixer le contenu de chaque case.

A partir de ces deux sous-groupes, on construit deux éléments de l'algèbre de groupe $A = \mathbb{C}[\mathfrak{S}_d]$ par :

$$a_\lambda = \sum_{g \in P_\lambda} g \qquad b_\lambda = \sum_{g \in Q_\lambda} \varepsilon(g) g$$

Ces éléments engendrent des idéaux à gauche Aa_λ et Ab_λ de l'algèbre de groupe, auxquelles sont associées des représentations, induites sur $\mathfrak{S}_d$ par des représentations de P_λ et Q_λ qui sont respectivement triviale et alternée, ainsi que l'exprime la proposition suivante :

Proposition 1. *Pour tout* $(p, q) \in P_\lambda \times Q_\lambda$ *on a :*

$$pa_\lambda = a_\lambda p = a_\lambda \tag{1}$$

$$\varepsilon(q) q b_\lambda = b_\lambda \varepsilon(q) q = b_\lambda \tag{2}$$

Preuve. C'est un calcul direct :

$$p \sum_{g \in P_\lambda} g = \sum_{g \in P_\lambda} pg = \sum_{h \in P_\lambda} h = a_\lambda$$

$$\varepsilon(q) q \sum_{g \in Q_\lambda} \varepsilon(g) g = \sum_{g \in Q_\lambda} \varepsilon(q) q \varepsilon(g) g = \sum_{h \in Q_\lambda} \varepsilon(q) \varepsilon(q^{-1} h) h = \sum_{h \in Q_\lambda} h = b_\lambda$$

□

Remarque 2. Il découle de la proposition précédente que : $a_\lambda^2 = |P_\lambda| a_\lambda$ et $b_\lambda^2 = |Q_\lambda| b_\lambda$.

Définition 2. *Soit* λ *une partition,* T *un de ses tableaux de Young. Le symétriseur de Young associé à* T *est l'élément* $c_\lambda = a_\lambda b_\lambda$*. L'idéal à gauche de* A *engendré par* c_λ *est par définition :*

$$V_\lambda := Ac_\lambda$$

1.2 Représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_d$: énoncé et formule des équerres

Les représentations V_λ forment un système complet des représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_d$. Plus précisément, nous avons le :

Théorème 1. *Soit* $d \geqslant 1$ *un entier naturel. Pour tout* λ *partition de* d*, on définit un symmétriseur* c_λ *et une représentation* V_λ *de* $\mathfrak{S}_d$ *comme dans la sous-section précédente. Alors*

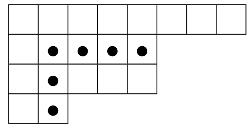
1. $c_\lambda^2 = n_\lambda c_\lambda$ *pour un certain* $n_\lambda \in \mathbb{N}$ *non nul.*
2. *Les* V_λ *sont irréductibles*
3. *Si* $\lambda \neq \mu$ *alors* V_λ *et* V_μ *son non isomorphes*

Remarque 3. 2. et 3. entraînent que toute représentation irréductible de $\mathfrak{S}_d$ est de la forme V_λ. En effet, nous savons qu'il y a exactement autant de représentations irréductibles que de classes de conjuguaison, donc autant que de partitions de d.

Les nombres n_λ sont liées aux dimensions de V_λ par :

$$n_\lambda \dim V_\lambda = d! \tag{3}$$

Par ailleurs, ils admettent une interprétation combinatoire que voici. Une équerre dans un diagramme de Ferrers est la donnée de l'ensemble des cases situées soit en-dessous, soit à droite d'une case donnée. Ainsi par exemple les cases pointées du diagramme suivant forment une équerre.



Théorème 2 (Formule des équerres)**.** *n_λ est le produit des cardinaux des équerres du diagramme de λ.*

1.3 Exemples

Exemple 1 (Représentation triviale). Soit $\lambda = (d)$ la partition à une seule part, dont un tableau est :

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline\end{array} \cdots \begin{array}{|c|c|}\hline d\text{ -1} & d \\ \hline\end{array}$$

On trouve $P_\lambda = \mathfrak{S}_d$ et $Q_\lambda = \{e\}$, donc $V_{(d)} = U_{(d)}$ est la représentation triviale. On peut vérifier la formule des équerres, avec $n_\lambda = 1 \cdot 2 \cdots d = d!$.

Exemple 2 (Représentation alternée). Soit $\lambda = (1, 1, \dots 1)$ la partition en d parts. Dans ce cas $P_\lambda = \{e\}$ et $Q_\lambda = \mathfrak{S}_d$, donc $V_{(1,1,\dots 1)} = W_{(1,1,\dots 1)}$ est la représentation alternée.

Exemple 3 (Représentation standard). Déterminons la représentation de $\mathfrak{S}_3$ associée à la partition $(2, 1)$: On se donne le tableau

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$$

On a : $P_\lambda = \{e, (12)\}$ et $Q_\lambda = \{e, (13)\}$, puis $a_\lambda = e + (12)$ et $b_\lambda = e - (13)$; enfin

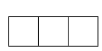
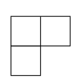
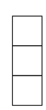
$$c_\lambda = e + (12) - (13) - (132)$$

Calculons Ac_λ : pour cela remarquons que :

$$\begin{aligned}
(12)c_\lambda &= (a_\lambda - e)c_\lambda = (|P_\lambda| - 1)c_\lambda = c_\lambda \\
(123)c_\lambda &= (13)(12)c_\lambda = (13)c_\lambda \\
(13)c_\lambda + (23)c_\lambda &= (13) + (123) - 1 - (23) + (23) + (132) - (123) - (12) = -c_\lambda \\
(132)c_\lambda &= (13)(23)c_\lambda = (13)((13)c_\lambda + c_\lambda) = c_\lambda + (13)c_\lambda
\end{aligned}$$

Il en ressort que $V_\lambda = \mathbb{C}c_\lambda + \mathbb{C}(13)c_\lambda$ et que V_λ est la représentation standard de $\mathfrak{S}_3$.

Notons qu'avec ces trois exemples, nous avons collecté toutes les représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_3$, et ainsi vérifié le théorème pour $d = 3$: si $\mathbf{1}$ désigne sa représentation triviale et Δ sa représentation standard, on a la correspondance :

$\mathbf{1}$:  Δ :  ε : 

On vérifie aussi la formule des équerres : dans $V(d)$ et dans $V_{(1,1,\dots 1)}$ il y a une équerre de taille k pour tout k allant de 1 à d, donc $n_\lambda = d!$ et $\dim V_\lambda = 1$. Pour $(2, 1)$, on calcule : $n_\lambda = 1{\cdot}1{\cdot}3$ et $\dim V_\lambda = 6/3 = 2$.

Remarque 4. C'est un fait plus général (nous le démontrerons plus loin) que la représentation $V_{\lambda'}$ s'obtient en tensorisant V_λ par la représentation alternée ε.

2 Preuve du théorème 1

2.1 Un lemme combinatoire

L'énoncé suivant constitue l'ingrédient combinatoire de la preuve du théorème 1.

Lemme 1. *Soient λ et μ deux partitions de l'entier d, T_λ et T_μ deux tableaux de Young. On suppose que :*
- *$\lambda \geqslant \mu$*
- *Aucune paire de nombres $\{i, k\} \subset \{1, \dots d\}$ n'apparaît à la fois dans la même colonne de T_μ et dans la même ligne de T_λ*

Alors $\lambda = \mu$, et il existe $p \in P_\lambda$, $q \in Q_\lambda$ tels que

$$T_\lambda = pq.T_\mu$$

Remarque 5. De tels p et q sont nécessairement uniques, car on a vu plus haut que $P_\lambda \cap Q_\lambda$ est triviale, et d'autre part $\mathfrak{S}_d \curvearrowright \mathcal{T}_\lambda$ est libre.

Démonstration. La preuve est algorithmique : on va construire p et q graduellement. $\lambda \geqslant \mu$ entraîne en particulier $\lambda_1 \geqslant \mu_1$. La première ligne de T_λ comporte λ_1 nombre ; d'après la seconde hypothèse ceux-ci doivent se situer dans des colonnes distinctes de T_μ. Donc $\mu_1 \geqslant \lambda_1$. De plus, il existe $q_1' \in Q_\mu$ tel que les contenu des premières lignes de $q_1'.T\mu$ et T_λ sont exactement les mêmes (mêmes nombres, mais pas à la même place). Le même raisonnement permet d'établir que $\lambda_2 = \mu_2$ et qu'il existe $q_2' \in Q_\mu$ tel que $q_2'q_1'.T_\mu$ possède les mêmes nombres que T_λ dans ses première et deuxième ligne. Finalement, si s est le nombre de parts de λ, on trouve $q_1' \dots q_s'$ telles que $q_s'q_{s-1}' \cdots q_1'.T_\mu$ a les mêmes contenus de lignes que T_λ (avec un ordre éventuellement différent à chaque fois). Finalement, il existe $p \in P_\lambda$ tel que $T_\lambda = pq.T_\mu$. ☐

On déduit de ce lemme une première conséquence :

Proposition 2. *Soient λ et μ deux partitions de d, a_λ et b_μ associés à des tableaux de Young de λ et μ. Alors si $\lambda > \mu$, on a :*

$$a_\lambda A b_\mu = (0)$$

Démonstration. On se ramène à montrer l'identité suivante : pour tout $g \in \mathfrak{S}_d$

$$a_\lambda g b_\mu g^{-1} = 0 \tag{4}$$

En effet, si $a = \sum \alpha_g g$ est un élément quelconque de A, alors on aura

$$a_\lambda a b_\mu = a_\lambda \sum_{g \in \mathfrak{S}_d} \alpha_g g b_\mu = a_\lambda \sum_{g \in \mathfrak{S}_d} g b_\mu g^{-1} \alpha_g g \overset{(4)}{=} 0$$

En fait, pour atteindre (4) pour tout g il suffit de montrer $a_\lambda b_\mu = 0$, car alors changer le tableau de Young $T_m u$ en $g.T_\mu$ donne l'identité pour g quelconque. Par hypothèse $\lambda > \mu$, donc d'après la contraposée du lemme combinatoire, il existe i et k, $i \neq k$ situés dans une même ligne de $T\lambda$ et une même colonne de $T\mu$. Soit t la transposition qui les échange : $t = (i, k)$. Alors $t \in P_\lambda \cap Q_\mu$, d'où (proposition 1) :

$$a_\lambda = a_\lambda t$$

$$b_\mu = \varepsilon(t) t b_\mu = -t b_\mu$$

Donc $a_\lambda b_\mu = a_\lambda t(-tb_\mu) = -a_\lambda b_\mu$, puisque $t^2 = e$. On a ainsi $a_\lambda b_\mu = 0$ comme souhaité, ce qui conclut la preuve. $\square$

2.2 Caractérisation du symétriseur de Young

Il découle de la proposition 1 que c_λ vérifie, pour tout $(p, q) \in P_\lambda \times Q_\lambda$, $pc_\lambda\varepsilon(q)q = c_\lambda$. En fait, lui et ses multiples scalaires sont les seuls à vérifier cette identité :

Lemme 2. *Soit $c \in A$. Alors $c \in \mathbb{C}c_\lambda$ si et seulement si pour tout $(p, q) \in P_\lambda \times Q_\lambda$, on a*

$$pc\varepsilon(q)q = c \tag{5}$$

Démonstration. Le sens direct a déjà été démontré. Réciproquement soit $c \in A$ qui vérifie (5) pour tout $(p, q) \in P_\lambda \times Q_\lambda$. Décomposons c sous la forme $\sum \gamma_g g$ dans A. Alors

$$\sum_{g\in\mathfrak{S}_d} \varepsilon(q)\gamma_g pgq = \sum_{g\in G} \gamma_g g \tag{6}$$

Comme $P_\lambda \cap Q_\lambda = \{e\}$, l'application $P_\lambda \times Q_\lambda$ qui à (p, q) associe pq est injective. L'équation précédente entraîne donc

$$\varepsilon(q)\gamma_e = \gamma_{pq}$$

pour tout $(p, q) \in P_\lambda \times Q_\lambda$. Ceci est aussi vérifié par c_λ ; on en déduit que c coïncide avec un multiple de c_λ sur l'ensemble $P_\lambda Q_\lambda = \{h \in \mathfrak{S}_d : h = pq, (p, q) \in P_\lambda \times Q_\lambda\}$. Puisque c_λ est supporté sur $P_\lambda Q_\lambda$, il reste à montrer que $\gamma_{g_0} = 0$ quand $g_0 \in \mathfrak{S}_d \setminus P_\lambda Q_\lambda$. Soit donc un tel g_0. D'après le lemme combinatoire, il existe j et k, $j \neq k$, dans une même ligne de T_λ et une même colonne de $g_0 T_\lambda$. Soit t la transposition qui les échange : $t = (j, k)$. Alors $t \in P_\lambda \cap (g_0 Q_\lambda q_0^{-1})$. Posons $p = t$ et $q = g_0^{-1} t g_0$, et évaluons (6) avec p et q : cela donne $pg_0 q = tg_0 g_0^{-1} tg_0 = g_0$, mais alors $\varepsilon(q)\gamma_{g_0} = \gamma_{g_0}$, or $\varepsilon(q) = \varepsilon(t) = -1$, donc γ_{g_0} est bien nul. $\square$

Proposition 3. *Pour tout $x \in A$, $c_\lambda x c_\lambda \in \mathbb{C}c_\lambda$. En particulier, $c_\lambda^2 = n_\lambda c_\lambda$ pour un certain $n_\lambda \in \mathbb{C}$.*

Démonstration. Pour tout $x \in A$, $c = c_\lambda x c_\lambda$ vérifie l'équation (5). D'après le lemme 2, c'est un multiple scalaire de c_λ. En particulier, avec $x = e$ on obtient que $c_\lambda^2 \in \mathbb{C}c_\lambda$. $\square$

2.3 Fin de la preuve

(a) V_λ est irréductible : Donnons-nous $W \subseteq V_\lambda$ une sous-représentation, soit un idéal à gauche de A contenu dans V_λ. D'après la dernière proposition, on a que $c_\lambda W \subseteq c_\lambda V_\lambda = \mathbb{C}c_\lambda$. De deux choses l'une :

— Ou bien $c_\lambda W = \mathbb{C}c_\lambda$; mais alors vu que W est un idéal à gauche, $V_\lambda = Ac_\lambda \subseteq W$, et $W = V_\lambda$.

— Ou bien $c_\lambda W = 0$. En particulier $W^2 \subseteq V_\lambda W = Ac_\lambda W = 0$. D'après le lemme de complète réductibilité de Maschke, il existe un projecteur $\mathfrak{S}_d$-équivariant de A sur W, qui est représenté dans $\mathrm{End}_A(A)$ comme la multiplication à droite par un idempotent $\pi \in A$. L'annulation $W^2 = 0$ entraîne alors $0 = \pi^2 = \pi$, d'où $W = 0$.

En particulier, le dernier argument appliqué à $W = V_\lambda$ indique que $c_\lambda V_\lambda = \mathbb{C}c_\lambda$.

(b) Quand $\lambda > \mu$, V_λ et V_μ sont non isomorphes : D'une part $c_\lambda V_\lambda = \mathbb{C}c_\lambda$ d'après ce qui précède, d'autre part $c_\lambda V_\mu = c_\lambda A c_\mu \subseteq a_\lambda A b_\mu = (0)$ d'après la proposition 2. Donc V_λ et V_μ ne peuvent pas être isomorphes.

(c) $c_\lambda^2 = n_\lambda c_\lambda$ avec $n_\lambda \dim V = d!$: On a déjà établi l'existence d'un tel $n_\lambda \in C$. Soit γ la multiplication à droite par c_λ, vue comme endomorphisme de A. Alors quitte à compléter une base de V_λ par une base de $\ker \gamma$, et à calculer la trace dans cette base complétée et dans celle des $\{g\}_{g\in\mathfrak{S}_d}$,

$$\mathrm{Tr}\gamma = d! = n_\lambda \dim V_\lambda$$

2.4 Représentation $V_{\lambda'}$

Nous sommes à présent en mesure de démontrer une affirmation faite à la fin de 1.3 :

Proposition 4 ([1], exercice 4.4)**.** *Soit λ une partition de d. Alors*

$$V_{\lambda'} = V_\lambda \otimes \varepsilon \tag{7}$$

Pour démontrer ceci, commençons par établir un

Lemme 3. *Les représentations $V_\lambda = Aa_\lambda b_\lambda$ et $Ab_\lambda a_\lambda$ sont isomorphes.*

Démonstration. On a deux applications obtenues par multiplication à droite :

$$\begin{aligned} r_{a_\lambda} &: V_\lambda \to Ab_\lambda a_\lambda \\ r_{b_\lambda} &: Ab_\lambda a_\lambda \to V_\lambda \end{aligned}$$

qui sont des homomorphismes de A-module. De plus, d'après le théorème 1, pour tout $x = yc_\lambda \in V$ on a

$$r_{b_\lambda} r_{a_\lambda} x = yc_\lambda c_\lambda = n_\lambda y c_\lambda = n_\lambda x$$

avec $n_\lambda \neq 0$. Montrons de même que $d_\lambda = b_\lambda a_\lambda$ est multiple scalaire d'un idempotent : en reprenant la preuve du lemme 2, on obtient que si d vérifie $\varepsilon(q)qdp = d$ pour tout $(p,q) \in P_\lambda \times Q_\lambda$ alors $d \in \mathbb{C}d_\lambda$. En particulier $d_\lambda^2 = m_\lambda c_\lambda$ avec $m_\lambda \in \mathbb{C}$. Maintenant, si l'on pose $V'_\lambda = Ad_\lambda$ alors $d_\lambda V'_\lambda$ ne peut pas être nul, sinon on aurait $V'^2_\lambda = 0$ puis $V'_\lambda = 0$ par l'argument à la fin de 2.3(b). Donc d_λ/m_λ est un idempotent ; il s'ensuit que $r_{a_\lambda} r_{b_\lambda}$ et $r_{b_\lambda} r_{a_\lambda}$ sont des isomorphismes, donc finalement $V_\lambda \simeq V'$. □

Finalement, si l'on choisit pour λ' le tableau de Young symétrique de celui utilisé pour λ, alors $P_{\lambda'} = Q_\lambda$ et $Q_{\lambda'} = P_\lambda$, donc :

$$\begin{aligned} b_\lambda a_\lambda &= \left(\sum_{q\in Q_\lambda} \varepsilon(q) q \right) \left(\sum_{p\in P\lambda} p \right) \\ &= \sum_{(p,q)\in P_\lambda \times Q_\lambda} \varepsilon(q) qp \\ &= \sum_{(q',p')\in Q_{\lambda'} \times P_{\lambda'}} \varepsilon(p') p' q' \end{aligned}$$

Tandis que pour comparaison, en faisant porter les sommes sur $P_{\lambda'} \times Q_{\lambda'}$:

$$c_{\lambda'} = a_{\lambda'} b_{\lambda'} = \sum_{(p,q)} \varepsilon(q) pq = \sum_{(p,q)} \varepsilon(p)\varepsilon(pq) pq$$

Finalement, soient $\rho : A \to \mathrm{End}(Ab_\lambda a_\lambda)$ et $\rho' : A \to \mathrm{End}(V_{\lambda'})$ les morphismes structurels. D'après le calcul précédent il y a une bijection linéaire

$$\begin{aligned} \psi : Ab_\lambda a_\lambda &\to V_{\lambda'} \\ \sum_{g\in\mathfrak{S}_d} \alpha_g g &\mapsto \sum_{g\in\mathfrak{S}_d} \varepsilon(g)\alpha_g g \end{aligned}$$

Pour tout $g \in \mathfrak{S}_d$ on a alors :

$$\rho'(g)\left(\psi \sum_{h\in\mathfrak{S}_d} \alpha_h h\right) = g \sum_{h\in\mathfrak{S}_d} \alpha_h h = \varepsilon(g) \sum_{h\in\mathfrak{S}_d} \varepsilon(gh)\alpha_h gh = \varepsilon(g)\psi\left(\rho(g) \sum_{h\in\mathfrak{S}_d} \alpha_h h\right)$$

Autrement dit, $\psi^{-1}\rho'(g)\psi = \varepsilon\rho(g)$, d'où $V_{\lambda'} \simeq V_\lambda \otimes \varepsilon$.

3 Complément : Formule de Frobenius

3.1 Enoncé

On décrit ici une formule exprimant le caractère χ_λ de la représentation V_λ.

Les classes de conjuguaisons de $\mathfrak{S}_d$ sont indicées par les d-uples $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_d)$ d'entiers naturels tel que $\sum_\alpha \alpha i_\alpha = d$; on note $C_\mathbf{i}$ la classe de conjuguaison de $\mathfrak{S}_d$ correspondante, formée par les permutations possédant i_α cycles de longueur α. On cherche à exprimer les $\chi_\lambda(C_\mathbf{i})$.

Soit $k \geqslant \lambda'_1$ (c'est-à-dire plus grand que le nombre de parts de λ). On considère les polynômes de $\mathbb{C}[x_1, \ldots x_k]$ suivants :

$$\begin{aligned} P_j(x_1, \ldots x_k) &= x_1^j + \cdots + x_k^j \\ \Delta(x_1, \ldots x_k) &= \prod_{i<j}(x_i - x_j) \end{aligned}$$

Enfin, soit $(\ell_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ définie à partir de λ par :

$$\ell_i := \lambda_i + k - i$$

La suite (λ_i) étant décroissante, la suite (ℓ_i) l'est strictement. La correspondance $(\lambda_i) \leftrightarrow (\ell_i)$ est bijective. Pour tout $P \in \mathbb{C}[x_1, \ldots x_k]$ on note $P_{(\jmath_1, \ldots \jmath_k)}$ le coefficient du monôme $x_1^{\jmath_1} \cdots x_k^{\jmath_k}$ dans P.

Théorème 3 (Formule de Frobenius)**.** *Avec les notations précédentes, le caractère de χ_λ vérifie :*

$$\chi_\lambda(C_\mathbf{i}) = \left[\Delta(x_1, \ldots x_k) \prod_{j=1}^{d} P_j(x_1, \ldots x_k)^{i_j}\right]_{(\ell_1, \ldots \ell_k)} \tag{8}$$

3.2 Application : formule des équerres

Les dimensions des représentations irréductibles se lisent dans la première colonne des tables de caractère : l'évaluation sur la classe $\{e\}$. La formule de Frobenius permet d'exprimer $\dim V_\lambda = \chi_\lambda(C_{(d)})$ (le neutre de $\mathfrak{S}_d$, c'est d 1-cycles). Ainsi

$$\dim V_\lambda = \left[\Delta(x_1,\dots x_k)(x_1+\dots+x_k)^d\right]_{(\ell_1,\dots\ell_k)}$$

Développons Δ : cela donne

$$\Delta(x_1,\dots x_k) = \begin{vmatrix} 1 & x_k & \cdots & x_k^{k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^{k-1} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) x_k^{\sigma(1)-1}\cdots x_1^{\sigma(k)-1}$$

La raison pour laquelle nous développons le déterminant de Vandermonde dans le sens allant de x_k à x_1 apparaîtra plus clairement dans la suite.

D'autre part

$$P_1^d = \sum_{r_i\geqslant 0,\, r_1+\dots+r_k=d} \frac{d!}{r_1!,\dots,r_k!} x_1^{r_1}\cdots x_k^{r_k}$$

Finalement

$$\begin{aligned}\left[\Delta(x_1,\dots x_k)(x_1+\dots+x_k)^d\right]_{(\ell_1,\dots\ell_k)} &= \sum_{r_i,s_i\geqslant 0,\, r_i+s_i=\ell_i} \left[\Delta(x_1,\dots x_k)\right]_{(s_1,\dots s_k)} \left[P_1^d\right]_{(r_1,\dots r_k)} \\ &= \sum_{\sigma\in S} \frac{\varepsilon(\sigma)d!}{(\ell_1-\sigma(k)+1)!\cdots(\ell_k-\sigma(1)+1)!}\end{aligned}$$

où S est l'ensemble des $\sigma\in\mathfrak{S}_k$ telles que tous les termes $\ell_{k-i+1}-\sigma(i)+1$ apparaissant aux dénominateurs dans la somme précédente sont $\geqslant 0$.

Références

[1] W. Fulton, J. Harris, *Representation theory, A First Course*, Readings in Mathematics, GTM **129**, Springer Verlag, 1991.

[2] M.A. Najmark, A.I. Stern (trad. du russe par E. Hewitt et A. Hewitt), *Theory of Group Representations*, Grundlehren der math. Wissenschaften **246**, Springer Verlag, 1982.

[3] J.P. Serre, *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann, 1998.