Interrogation 2 - S3 - sujet a

Question :	1	2	3	4	Total
Points :	3	2	3	2	10
Note :					

Durée : 45 minutes.

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. (3 points) A est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.

Solution : Développons le déterminant de A suivant la 1ère colonne

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Le déterminant est non nul, A est inversible. Inversons A :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\equiv} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}{\equiv} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{L_2 \leftarrow L_2 + L_3}{\equiv} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 & 1 \end{array}\right).$$

Autre méthode (ou plutôt autre écriture) avec coordonnées explicites

$$\begin{cases} x + 2y - 2z & = a \\ y - z & = b \\ 2x + z & = c \end{cases} \overset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\iff} \begin{cases} x & = a - 2b \\ y - z & = b \\ 2x + z & = c \end{cases} \overset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}{\iff} \begin{cases} x & = a - 2b \\ y - z & = b \\ z & = -2a + 4b + c \end{cases}$$

$$\overset{L_2 \leftarrow L_2 + L_3}{\iff} \begin{cases} x & = a - 2b \\ y & = -2a + 5b + c \\ z & = -2a + 4b + c. \end{cases}$$

Donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. (2 points) Déterminer les valeurs propres de M.

Solution : Par définition, le polynôme caractéristique de B est

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda - 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = -(1 + \lambda)(1 - \lambda)^2.$$

Les valeurs propres de M sont ses racines, à savoir -1 et 1.

3. (3 points) Déterminer les dimensions et des bases des sous-espaces propres de M.

Solution : *Espace propre associé à la valeur propre* 1 *:*

$$(M - \mathrm{Id}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -2x = 0 \\ 2x = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff x = 0.$$

Cet espace est de dimension 2. Une base est formée des vecteurs

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Espace propre associé à la valeur propre -1 *:*

$$(M - (-\mathrm{Id})) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Cet espace est de dimension 1. Un de ses vecteurs non nul (formant une base) est

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. (2 points) M est-elle diagonalisable ? Si oui, donner une matrice de passage vers une base de diagonalisation, ainsi que son inverse.

Solution : D'après la question précédente, la somme des dimensions des espaces propres de B est $2+1=3$. Donc M est diagonalisable. De plus $\mathscr{B}'=(u,v,w)$ est une base de diagonalisation. Une matrice de passage de la base canonique vers $\mathscr{B}'$ est

$$P=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

D'après un calcul sagace,

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

et finalement,

$$D=P^{-1}MP=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$