

Interrogation 2 - S3 - sujet b

Question :	1	2	3	4	Total
Points :	3	2	3	2	10
Note :					

Durée : 45 minutes.

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. (3 points) A est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.

Solution : Développons le déterminant de A suivant la 1ère ligne

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Le déterminant est non nul, A est inversible. Inversons A :

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Autre méthode (ou plutôt autre écriture) avec coordonnées explicites

$$\begin{aligned} \begin{cases} x - z &= a \\ 3x + y &= b \\ 6x + 2y + z &= c \end{cases} &\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2} \begin{cases} x - z &= a \\ 3x + y &= b \\ z &= -2b + c \end{cases} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_3} \begin{cases} x &= a - 2b + c \\ 3x + y &= b \\ z &= -2b + c \end{cases} \\ &\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1} \begin{cases} x &= a - 2b + c \\ y &= -3a + 7b - 3c \\ z &= -2b + c. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 7 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. (2 points) Déterminer les valeurs propres de M .

Solution : Par définition, le polynôme caractéristique de M est

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda - 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 + \lambda)^2(1 - \lambda).$$

Les valeurs propres de M sont ses racines, à savoir -1 et 1 .

3. (3 points) Déterminer les dimensions et des bases des sous-espaces propres de M .

Solution : *Espace propre associé à la valeur propre 1 :*

$$(M - \text{Id}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -2x = 0 \\ -2y = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0. \end{cases}$$

Cet espace est de dimension 1. Un de ses vecteurs non nul (formant une base) est

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Espace propre associé à la valeur propre -1 :

$$(M - (-\text{Id})) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff -2y + 2z = 0 \iff y = z.$$

Cet espace est de dimension 2. Une base est formée des vecteurs

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. (2 points) M est-elle diagonalisable ? Si oui, donner une matrice de passage P vers une

base de diagonalisation de M , son inverse P^{-1} , la matrice diagonale D obtenue, et enfin écrire une relation entre P , P^{-1} , D et M .

Solution : D'après la question précédente, la somme des dimensions des espaces propres de M est $1 + 2 = 3$. Donc M est diagonalisable. De plus $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de diagonalisation. Une matrice de passage de la base canonique vers \mathcal{B}' est

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'après un savant calcul,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et finalement

$$D = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$