FORMES QUADRATIQUES

Cours de Claudine Picaronny donné en janvier-février 2015 à l'ENS Cachan, rédigé par G.Pallier. Quelques remarques et exercices ont été ajoutés. Toutes les erreurs sont imputables au rédacteur.

Table des matières

1. Formes bilinéaires symétriques

Une référence pour ce cours est le chapitre 5 de [Per96]. Toutefois la portée est ici un peu moins générale. En particulier on se contente d'étudier les formes bilinéaires, et pas les formes hermitiennes, ni les formes alternées.

1.1. **Orthogonalité, dualité.** Soient k un corps, E un k-ev de dimension $n < \infty$.

Définition 1. Une forme bilinéaire symétrique sur E est une application $\beta : E \times E \to k$ telle que

$$\forall (x,y) \in E \times E, \qquad \beta(x,-), \beta(-,y) \quad \in E^{\star} \tag{1}$$

$$\forall (x,y) \in E \times E \quad \beta(x,y) = \beta(y,x). \tag{2}$$

Une forme bilinaire symétrique définit une notion d'orthogonalité : pour tous $x, y \in E$, on écrit $x \perp y$ si $\beta(x,y) = 0$. Si $X \subset E$ on écrira

$$X^{\perp} := \{y \in E,\ \forall x \in X, x \perp y\}. \tag{3}$$

C'est un espace vectoriel appelé orthogonal de X. De plus, nous avons

$$X^{\perp} = \bigcap_{x \in X} \{x\}^{\perp}; \tag{4}$$

$$\mathrm{Vect}(X) \subset X^{\perp\perp}. \tag{5}$$

Remarque 1. Si l'on n'impose pas la symétrie à β il existe a priori deux notions d'orthogonalité, l'une à droite et l'autre à gauche. La relation $\perp$ est toutefois symétrique si l'on exige $\beta(x,y) = 0 \implies \beta(y,x) = 0$ comme dans [Per96].

Définition 2. On appelle $E^{\perp}$ le noyau de β, noté $\ker \beta$. Lorsque $\ker \beta = \{0\}$ on dit que β est non dégénérée. Le rang de β est la codimension de $E^{\perp}$ dans E.

Remarque 2. Une forme bilinéaire symétrique β définit une application linéaire $\overline{\beta}$ de E dans $E^{\star}$:

$$\begin{aligned} \overline{\beta} : E &\to E^{\star} \\ x &\mapsto \{y \mapsto B(x,y)\}. \end{aligned}$$

Le noyau de $\overline{\beta}$ est exactement $\ker\beta$. Si β est non dégénérée, $\overline{\beta}$ est injectif. Comme nous sommes en dimension finie, $\dim E = \dim E^\star$ et $\overline{\beta}$ est alors bijectif. En résumé, on a un isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_2(E) & \simeq & \mathcal{L}(E, E^\star) \\ \beta & \mapsto & \overline{\beta} \end{array}$$

qui envoie les non dégénérées sur les isomorphismes. Le crochet de dualité est transporté sur β.

1.2. **Restriction.**

Proposition 1. *Soit β une forme bilinéaire symétrique non dégénérée, F un sous-espace vectoriel de E. Alors l'application linéaire π_F qui fait commuter le diagramme suivant*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\overline{\beta}} & E^\star \\ \uparrow\iota & & \downarrow\iota^\star \\ F & \xrightarrow[\pi_F]{} & F^\star \end{array}$$

est un morphisme surjectif de noyau $F^\perp$.

Démonstration. ι est injective, donc $\iota^\star$ (restriction) est surjective, et $\overline{\beta}$ est surjective donc π_F est surjective. De plus par définition

$$\begin{aligned} \ker\pi_F &= \left\{x \in E, \forall y \in F, \overline{\beta}(x)(y) = 0\right\} \\ &= \{x \in E, \forall y \in F, \beta(x, y) = 0\} \\ &= F^\perp. \quad \square \end{aligned}$$

Corollaire 1. *Si β est non dégénérée, alors pour tout sous espace F nous avons*
(i) $\dim F + \dim F^\perp = n$
(ii) $F = F^{\perp\perp}$.

Démonstration. (i) est le théorème du rang appliqué à l'application π_F. (ii) est dû à l'inclusion $F \subset F^{\perp\perp}$ et à la complémentarité des dimensions dans E. $\square$

Proposition 2. *Soit F un sous-espace de E. Une forme bilinéaire symétrique β sur E définit par restriction une forme linéaire β_F sur F, dont le noyau est $F \cap F^\perp$*

Démonstration. Par définition

$$\ker\beta_F = \{x \in F,\ \forall y \in F,\ \beta(x, y) = 0\} = F \cap F^\perp. \quad \square$$

Attention. Les formes définies positives restent dégénérées quand restreintes à un sous-espace, mais ce n'est pas un fait général pour les formes bilinéaires symétriques non dégénérées. Par exemple $\beta(x, y) = xy$ sur $\mathbb{R}^2$.

1.3. **Isotropie (définitions).**

Définition 3. On dit que F est isotrope (pour β) si β_F est dégénérée, ce qui équivaut à $F \cap F^\perp \neq \{0\}$. F est totalement isotrope si $\beta_F = 0$, ce qui équivaut à $F \subset F^\perp$.

Remarque 3. totalement isotrope $\Longrightarrow$ isotrope. Pour une droite vectorielle D, les deux notions sont équivalentes.

Définition 4. On dit que $x \in E$ non nul est isotrope si Kx est isotrope. x est isotrope ssi $\beta(x, x) = 0$. L'ensemble des vecteurs isotropes (augmenté de 0) forme un cône appelé cône isotrope de la forme β.

Exemple 1. $E = k^2$, $\beta(x, y) = x_1y_1 - x_2y_2$. Alors $\beta(x, x) = x_1^2 - x_2^2$; il y a deux droites isotropes

Proposition 3. *On suppose β non dégénérée. Soit F un sous-espace de E, il y a équivalence entre*

(1) β_F est non dégénérée
(2) $F \cap F^{\perp} = \{0\}$
(3) $E = F \oplus F^{\perp}$
(4) $\beta_{F^{\perp}}$ est non dégénérée.

Démonstration. (1) $\implies$ (2) $\implies$ (3) $\implies$ (1) sont contenues dans les preuves précédentes. Le corollaire 1 donne que (2) et (3) sont vraies pour F si et seulement si elles sont vraies pour $F^{\perp}$, et donc (2) $\iff$ (4). □

1.4. **Ecriture matricielle. Mise sous carrés.** Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots e_n)$ une base de E. Si x et y se décomposent sur cette base sous la forme $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ et $y = y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n$ alors

$$\beta(x, y) = \sum_{i,j} x_i y_j \beta(e_i, e_j) = {}^t X \left(\beta(e_i, e_j)\right)_{i,j} Y,$$

où X et Y sont les vecteurs colonnes contenant les coordonées de x et y respectivement.

La matrice $S = (\beta(e_i, e_j))$ est symétrique. Elle est appelée matrice de la forme bilinéaire symétrique β dans la base $\mathscr{B}$. La matrice de β sur une base $\mathscr{B}'$ est alors de la forme

$$S' = {}^t PSP,$$

où P est la matrice de passage de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{B}'$ (qui contient en colonne les coordonnées des vecteurs de $\mathscr{B}$ dans $\mathscr{B}'$)

Remarque 4. En termes d'action de groupe : $\mathbf{GL}(n, k)$ agit par congruence sur $\mathcal{S}_n(k)$, via

$$P.S = {}^t PSP.$$

L'ensemble des matrices d'une forme quadratique est une orbite pour cette action : c'est une classe de congruence.

Attention. Ne pas confondre la relation de congruence et celle de similitude.

Une équation du sous-espace $\ker \beta$ dans la base $\mathscr{B}$ est

$$\{y \in E \mid SY = 0\} = \{y \in E \mid Y \in \ker S\},$$

où Y contient les coordonnées de y dans $\mathscr{B}$. En particulier, β est non dégénérée ssi S est inversible. Dans ce cas, on constate que toutes les matrices de B ont un même déterminant modulo $k^{\star 2}$.

Définition 5. Le discriminant $\Delta(\beta)$ est la classe du déterminant d'une matrice de β, modulo $k^{\star 2}$.

Remarque 5. Si F est un supplémentaire de $\ker \beta$ alors β_F est non dégénérée. On peut alors éventuellement défnir le discriminant de F comme le discriminant de β_F (qui ne dépend pas du supplémentaire choisi).

Définition 6. La base $\mathscr{B}$ est dite orthogonale pour la forme bilinéaire symétrique β si la matrice de β dans $\mathscr{B}$ est diagonale. Ceci équivaut à $\beta(e_i, e_j) = 0$ si $i \neq j$.

Exemple 2. $k = \mathbb{F}_2$. On considère la forme bilinéaire symétrique de matrice dans la base canonique

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Alors, pour tous $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 2x_1 x_2 = 0.$$

Une telle forme bilinéaire symétrique ne peut pas admettre de base orthogonale.

En fait, la caractéristique 2 est la seule obstruction :

Théorème 1. *Soit k un corps de caractéristique $\neq 2$. Alors une forme bilinéaire symétrique admet une base orthogonale.*

1ère démonstration. Par récurrence sur $n = \dim E$; c'est clair pour $n = 1$.

Si $\beta = 0$ alors toute base est orthogonale pour β. Dans le cas contraire montrons le lemme suivant

Lemme 1. *Si β est non nulle, il existe $e \in E$ tel que $\beta(e, e) \neq 0$.*

Démonstration. $\beta(e+f, e+f) = \beta(e,e) + 2\beta(e,f) + \beta(f,f)$. Puisque 2 est inversible dans k, pour tout $x \in E$

$$\beta(x,x) = 0 \implies \beta = 0. \qquad \square$$

Soit donc e tel que $\beta(e,e) \neq 0$ et

$$\begin{aligned} H &= \{ke\}^{\perp} \\ &= \{x \in E,\ \beta(x,e) = 0\}. \end{aligned}$$

Alors H est un hyperplan et

$$E = \{ke\} \overset{\perp}{\oplus} H.$$

On conclut par hypothèse de récurrence.

2ème démonstration : algorithme de « mise sous carré » de Gauss. Soit β une forme bilinéaire symétrique donnée dans les coordonnées par le polynôme homogène de degré 2

$$\beta(x,x) = \sum_i a_i x_i^2 + \sum_{i<j} b_{ij} x_i x_j.$$

On cherche à écrire $\beta(x,x) = \sum \lambda_i x_i^2$. On procède encore par récurrence sur n.

1er cas : $\exists i, a_i \neq 0$. Quitte à permuter, on peut supposer que c'est a_1. On écrit $\beta(x,x)$ sous la forme $P(x_1, \dots x_n)$ où P est un polynôme homogène de degré 2 en n indéterminées

$$a_1 x_1^2 + x_1 \sum_{j=2}^{n} b_{1j} x_j + Q_1(x_2, \dots, x_n)$$

où Q_1 est un polynôme homogène de degré 2 en $n-1$ indéterminées. On cherche à faire apparaître le début d'un carré :

$$a_1 \left(x_1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{b_{1j}}{2} x_j \right)^2 - a_1 \left(\sum_{j=2}^{n} \frac{b_{1j}}{2} x_j \right)^2 + Q_1(x_2, \dots, x_n).$$

Posons $\varphi_1(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{b_{1j}}{2} x_j$. Par hypothèse de récurrence il existe $\varphi_2, \dots \varphi_r$ formes linéaires en $x_2, \dots x_n$ linéairement indépendantes et telles que

$$Q_1(x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \varphi_k(x_2, \dots x_n)^2.$$

Remarque 6. La matrice des φ_i dans la base des $e_i^\star = \mathrm{d}x_i$ est de la forme

$$T = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \star & [\varphi_2] & [\varphi_r] & \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \mathrm{d}x_1 \\ \vdots \end{array}.$$

2ème cas : a_i est nul pour tout i. Quitte à permuter les variables on peut suppose que $b_{12} \neq 0$ (sinon il n'y a rien à montrer).

$$\begin{aligned}
& b_{12}x_1x_2 + x_1\sum_{j=3}^{n} b_{1j}x_j + x_2\sum_{j=3}^{n} b_{2j}x_j + Q_2\left(x_3,\ldots,x_n\right) \\
= \; & b_{12}\left(x_1 + \sum_{j=3}^{n}\frac{b_{2j}}{b_{12}}x_j\right)\left(x_2 + \sum_{j=3}^{n}\frac{b_{1j}}{b_{12}}x_j\right) - \frac{1}{b_{12}}\left(\sum_{j=3}^{n}\frac{b_{1j}}{b_{12}}x_j\right)\left(\sum_{j=3}^{n}\frac{b_{2j}}{b_{12}}x_j\right) \\
& +Q_2\left(x_3,\ldots,x_n\right) \\
= \; & \frac{b_{12}}{4}\left(x_1 + x_2 + \sum_{j=3}^{n}\frac{b_{1j}+b_{2j}}{b_{12}}x_j\right)^2 - \frac{b_{12}}{4}\left(x_1 - x_2 + \sum_{j=3}^{n}\frac{b_{2j}-b_{1j}}{b_{12}}x_j\right)^2 \\
& +Q_3\left(x_3,\ldots,x_n\right)
\end{aligned}$$

où Q_3 est un polynôme homogène de degré 2 en les $n-2$ variables $x_3,\ldots x_n$ que l'on peut mettre sous carrés par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}
\varphi_1\left(x_1,\ldots x_n\right) &= x_1 + x_2 + \sum_{j=3}^{n}\frac{b_{1j}+b_{2j}}{b_{12}}x_j \\
\varphi_2\left(x_1,\ldots x_n\right) &= x_1 - x_2 + \sum_{j=3}^{n}\frac{b_{2j}-b_{1j}}{b_{12}}x_j \\
Q\left(x_1,\ldots x_n\right) &= \sum_{i=3}^{r}\beta_i\varphi_i\left(x_3,\ldots x_n\right).
\end{aligned}$$

Remarque 7. La matrice des φ_i dans la base des $e_i^\star = \mathrm{d}x_i$ est de la forme

$$T = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \star & \star & [\varphi_3] & \cdots & [\varphi_r] & \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \mathrm{d}x_1 \\ \vdots \\ \end{array}$$

1.5. **Orthogonalisation simultanée.** La référence est [RDO88] tome 2, pages 35-36.

Théorème 2. *Soient φ et ψ, φ non dégénérée et $d_\varphi, d_\psi : E \to E^\star$ associés. Il existe une base de E à la fois φ-orthogonale et ψ-orthogonale ssi $u = d_\varphi^{-1} \circ d_\psi$ est diagonalisable.*

2. Formes quadratiques

A partir d'ici, k est de caractéristique $\neq 2$

2.1. **Définitions.**

Définition 7. Une forme bilinéaire symétrique β définit une unique application $q : E \to k$, $x \mapsto \beta\left(x,x\right)$ appelée forme quadratique associée à β.

On a montré plus haut que q caractérise β (ceci fait l'objet du lemme 19). β est parfois appelée forme polaire associée à q. On parle de noyau, caractère non dégénéré, discriminant, base orthogonale, matrices... de la forme q comme de sa forme polaire. Enfin, on dit que q représente le scalaire λ s'il existe $x \in E$ non nul tel que $q\left(x\right) = \lambda$. On désignera aussi occasionnellement le couple $\left(E,q\right)$ par E.

Le groupe linéaire de E agit sur l'ensemble des formes quadratiques par

$$\forall u \in \mathbf{GL}\left(E\right),\ u.q = q \circ u^{-1}.$$

(Le u^{-1} est là pour avoir une action à gauche.) Le stabilisateur de q pour cet action est noté $\mathcal{O}(q)$ et appelé groupe orthogonal de q.

Définition 8. On dit que deux formes quadratiques q et q' sont équivalentes s'il existe u un automorphisme de E tel que $q \circ u^{-1} = q'$, autrement dit si q et q' sont dans une même orbite pour l'action précédente. L'ensemble des u tels que $q \circ u^{-1} = q'$ forme une classe (à gauche) dans $\mathbf{GL}(E)/\mathcal{O}(q)$.

Remarque 8. Deux formes quadratiques équivalentes représentent les mêmes scalaires. En outre elles possèdent le même ensemble de matrices ; donc la même matrice, dans des bases éventuellement différentes.

Proposition 4. *Soit $\mathcal{R}$ un système de représentants de $k^\star/k^{\star 2}$. Alors, toute forme quadratique non dégénérée admet une matrice diagonale à coefficients dans $\mathcal{R}$.*

Corollaire 2. *Il y a un nombre fini de classes d'équivalence de $fqnd$ sur E ssi $k^{\star 2}$ est d'indice fini dans $k^\star$.*

2.2. Classification des formes quadratiques.

2.2.1. *Le cas $k = \mathbb{C}$ (et les corps quadratiquement clos).* Il y a une seule classe de formes quadratiques non dégénérées. Les formes quadratiques sont entièrement classifiées par leur rang $r \in \{0, \dots, n\}$. Il existe $n+1$ classes de formes sur $\mathbb{C}^n$.

Remarque 9. Ceci est vrai plus généralement, lorsque $k^\times = k^{\times 2}$, ce qui est toujours valable quand k est algébriquement clos, mais aussi par exemple pour le corps K des nombres complexes constructibles à la règle et au compas (qui est la plus petite extension de $\mathbb{Q}$ dans laquelle chaque élément non nul admet deux racines carrées). De tels corps sont dits quadratiquement clos.

Remarque 10. On peut montrer que $\mathbb{C}$ est quadratiquement clos seulement à l'aide des écritures algébriques des nombres complexes : pas besoin de l'exponentielle complexe.

2.2.2. *Le cas $k = \mathbb{R}$ (et les corps euclidiens).* On a l'isomorphisme de groupes $\mathbb{R}^\times/\mathbb{R}^{\times 2} \simeq \mathbb{Z}^\times = \{\pm 1\}$. Quitte à permuter les vecteurs d'une base orthonormale fournie par la proposition 4, toute forme quadratique non dégénérée q admet une matrice de la forme

$$I_{r,s} = \begin{pmatrix} I_r & (0) \\ (0) & -I_s \end{pmatrix}, \quad r + s = n.$$

Définition 9. ($k = \mathbb{R}$) Soit q une forme quadratique ; q est dite définie positive si $q(x) > 0$ dès que $x \neq 0$; elle est définie négative si $-q$ est définie positive. On écrit $q > 0$ (resp. $q < 0$) le fait que q est définie positive (resp. négative).

Une forme définie positive est non dégénérée (elle est même anisotrope).

Exemple 3. $E = \mathbb{R}^n$, q donnée par

$$q\left(\sum_i x_i e_i\right) = \sum_i x_i^2$$

est appelée forme euclidienne attachée à la base canonique.

Soit q une forme quadratique définie positive. Sur une base orthogonale, elle admet une matrice de la forme $I_{r,s}$. Or, elle ne représente pas -1, donc $s = 0$. Il existe donc une unique classe d'équivalence de formes définies positives.

Proposition 5. *Soit q une fqnd sur un espace vectoriel réel. Alors il existe un unique couple (r,s) avec $r+s=n$ tel que q admette dans une certaine base la matrice*

$$I_{r,s}=\begin{pmatrix} I_r & 0_{r\times s} \\ 0_{s\times r} & -I_s \end{pmatrix}$$

Précisément

$$\begin{aligned} r &= \max\{\dim F,\ F \text{ sev de } E,\ q_F>0\} \\ s &= \max\{\dim F,\ F \text{ sev de } E,\ q_F<0\}. \end{aligned}$$

Remarque 11. Cette proposition reste valable si q est non dégénérée, à condition de considérer les matrices

$$I_{r,s,n}=\begin{pmatrix} I_r & & (0) \\ & -I_s & \\ (0) & & 0_{n-r-s} \end{pmatrix}.$$

Pour la preuve, remarquons que l'existence est déjà acquise via le théorème d'existence d'une base orthogonale ; nous voulons seulement montrer l'unicité. Commençons par le

Lemme 2. *Soient F et G deux sev tels que $q_F>0$ et $q_G<0$. Alors $F+G=F\oplus G$, ie F et G sont en somme directe.*

Démonstration. Soit $x\in F\cap G$; alors $q(x)\geqslant 0$ puisque $x\in F$, mais aussi $q(x)\leqslant 0$ puisque $x\in G$; donc x est isotrope ; mais puisque $q_F>0$, $x=0$. □

Soit donc $E=F_0\oplus G_0$ une décomposition avec $q_{F_0}>0$ et q_{G_0} (on sait qu'une telle décomposition existe). S'il existe un sev F tel que $\dim F\geqslant \dim F_0$ et sur lequel q est définie positive, alors en vertu du lemme

$$F+G_0=F\oplus G_0,$$

donc $\dim F=\dim F_0$, on a démontré l'unicité.

Le nombre de classes de formes sur E est donc exactement le nombre de couples d'entiers naturels (r,s) avec $r+s\leqslant n$, soit $n(n+1)/2$. Le couple (r,s) est appelé signature de la forme quadratique q. Il s'obtient (par exemple) à l'aide de l'algorithme de mise sous carrés de Gauss.

Remarque 12. Il existe une notion de forme définie positive sur tout corps ordonnés ; en outre ces corps sont réels (*ie*, -1 n'est pas somme de carrés). Un corps réel k est euclidien si $k^{\times 2}$ est d'indice 2 dans $k^\times$. Sur un corps euclidien, la classification des formes quadratiques est la même que sur $\mathbb{R}$. Par exemple il en est ainsi du corps K_0 des réels constructibles à la règle et au compas.

Remarque : Réduction simultanée de deux formes quadratiques sur un corps euclidien. Il existe un théorème de réduction simultanée pour deux formes quadratiques q et q' si $q>0$ sur un corps euclidien. En particulier deux formes quadratiques définies positives admettent une base orthogonale (mais pas orthonormée) en commun. Cf, par exemple, [Tau21], exercice 1 du thème XIII (sous forme matricielle).

2.2.3. *Le cas $k=\mathbb{F}_q$ (q impair).* On sait dans ce cas que $k^\times/k^{\times 2}$ est d'ordre 2. Si α est un non carré de $\mathbb{F}_q^\times$ on peut alors prendre $\mathcal{R}=\{1,\alpha\}$

Proposition 6. *Soit q une forme quadratique de rang $\geqslant 2$ sur k. Alors q représente tous les scalaires*

Démonstration. Soit $\mu\in\mathbb{F}_q$ quelconque. Dans une base orthogonale pour q on peut écrire

$$q\left(\sum_i x_i e_i\right)=a_1x_1^2+a_2x_2^2+\cdots$$

et on peut supposer $a_1, a_2 \neq 0$. Les ensembles

$$\begin{aligned} S_1 &= \left\{a_1 x^2, x \in \mathbb{F}_q\right\} \\ S_2 &= \left\{\mu - a_2 x^2, x \in \mathbb{F}_q\right\} \end{aligned}$$

sont tous deux de cardinal $\frac{q+1}{2}$ (car a_1 et a_2 sont non nuls) ; d'après le principe des tiroirs ils possèdent une intersection non vide. □

Remarque 13. Il s'agit également d'une conséquence directe du théorème de Chevalley-Warning appliqué à q et à μ.

Théorème 3. *(k corps fini) Soit q une forme quadratique non dégénérée sur E. Alors q admet comme matrice soit I_n, soit*

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

et ces deux cas s'exluent mutuellement selon la valeur du discriminant $\Delta(q)$. En particulier, les formes sont entièrement classifiées par leur discriminant.

Corollaire 3. *(k fini) Deux formes quadratiques non dégénérées sont équivalente ssi elles ont même discriminant. En particulier, il y a deux classes d'équivalence par rang.*

Démonstration. Par récurrence sur $\dim E$. Pour $n = 1$ c'est toujours vrai (quel que soit le corps d'ailleurs). Soit q un fqnd sur E ; d'après la proposition il existe $v \in E$ tel que $q(v) = 1$. Ainsi

$$E = \langle v \rangle \oplus \langle v \rangle^{\perp}$$

Alors $q_{\langle v \rangle^{\perp}}$ est non dégénérée, et on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence ; de plus

$$\Delta\left(q_{\langle v \rangle^{\perp}}\right) = \Delta(q).$$ □

2.2.4. *Le cas $k = \mathbb{Q}$.* C'est nettement plus difficile que dans les cas précédents ; en effet d'après le théorème fondamental de l'arithmétique

$$\mathbb{Q}^{\times}/\mathbb{Q}^{\times 2} \simeq \mathbb{Z}^{\times} \times \prod_{p \in \mathcal{P}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des nombres premiers, de sorte que $\mathbb{Q}^{\times}/\mathbb{Q}^{\times 2}$ est infini (et possède même la puissance du continu).

D'après le théorème d'Ostrosky [Col11], toutes les valeurs absolues sur $\mathbb{Q}$ sont la valeur absolue usuelle ou la valeur absolue p-adique

$$|r|_p = 2^{-\nu_p(r)}$$

et les complétions pour ces valeurs absolue sont $\mathbb{Q}_\infty = \mathbb{R}$ et les $\mathbb{Q}_p$ corps p-adiques. La classification des formes quadratiques sur les $\mathbb{Q}_p$ (avec $p \in \mathcal{P} \cup \{\infty\}$) permet en retour la classification sur $\mathbb{Q}$. C'est le principe de Hasse notamment le th. de Hasse-Minkowski [Ser70, Chapitre 4].

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Q}_p & \cdots & \mathbb{Q}_\infty = \mathbb{R} \\ \mathbb{Q} \arrow[u, dash] \arrow[urr, dash] & & \end{tikzcd}$$

2.2.5. *Résumé.* Le tableau suivant récapitule l'influence du corps de base sur la classification des formes quadratiques dans les cas étudiés

Corps	Invariants (en dim n)	Nombre de classes d'équivalence
$\mathbb{C}$	rang $r \in \{0, \ldots, n\}$	$n+1$
$\mathbb{R}$	signature $(r, s)\,,\ r+s \leqslant n$	$n\,(n+1)\,/2$
$\mathbb{F}_q$	rang et discriminant : r, Δ	$2n+1$
$\mathbb{Q}$	beaucoup (symboles sur les $\mathbb{Q}_p$ etc.)	∞

Table 1. Aperçu de la classification des formes quadratiques

3. Isotropie (car $k \neq 2$)

3.1. **Indice, Lagrangiens.** On appellera ici un sous-espace vectoriel totalement isotrope, un seti pour abréger. On rappelle que cela signifie $F \subset F^{\perp}$. Si F est un seti de q, on a nécessairement

$$\dim F \leqslant \left\lfloor \frac{\dim E}{2} \right\rfloor .$$

Définition 10. On appelle indice de la forme quadratique non dégénérée q et on note $\nu\,(q)$ le maximum de la dimension d'un seti. Si $\nu\,(q) = 0$ on dit que q est anisotrope.

Exemple 4. $k = \mathbb{R}$, q une forme définie positive. Alors q est anisotrope.

Définition 11. Soit (V, q) de dimension paire $2n$. Alors un seti de dimension n est appelé un Lagrangien.

3.2. **Plans hyperboliques.**

Définition 12. Soit (P, q) un plan. On dit que P est hyperbolique s'il existe une base sur laquelle la matrice de q est

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposition 7. *On a l'équivalence des assertions*

(i) P est hyperbolique ;

(ii) q admet la matrice $I_{1,1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

(iii) Q est non dégénérée et admet un vecteur isotrope.

Démonstration. Pour l'équivalence (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) il s'agit de montrer que $I_{1,1}$ et J sont congruentes. On peut aussi remarquer que

$$X^2 - Y^2 = 2xy$$

avec $x = \frac{X-Y}{2}$, $y = X + Y$. Pour (i) $\Longrightarrow$ (iii) observons que $\det J = -1 \neq 0$ et donc q est non dégénérée et que les deux vecteurs de base sont isotropes.

Supposons (iii) et soit $e \in P$ isotrope pour q. On note β la forme bilinéaire symétrique associée à q. Comme q est non dégénérée, il existe $g \in P$ tel que $\beta\,(e, g) \neq 0$. Quitte à diviser g par $\beta\,(e, g)$, on peut supposer $\beta\,(e, g) = 1$, et comme $\beta\,(e, e) = 0$, le couple $(e, g + \lambda e)$ forme une base pour tout λ, et vérifie $\beta\,(e, g + \lambda e) = 1$. Il reste à trouver λ pour que $q\,(g + \lambda e) = 1$, mais

$$q\,(g + \lambda e) = q\,(g) + \lambda^2 q\,(e) + 2\lambda = q\,(g) + 2\lambda$$

donc $\lambda = -q\,(g)\,/2$ convient. $\square$

Remarque 14. Si $k = \mathbb{R}$ (ou un corps euclidien) l'implication (iii) $\Longrightarrow$ (ii) est immédiate à la suite de la classification énoncée plus haut : q est de rang 2 et elle n'est ni définie positive, ni définie négative. Donc sa signature est $(1, 1)$.

Les deux droites isotropes d'un plan hyperbolique sont ses deux Lagrangiens.

3.3. **Espaces hyperboliques.**

Théorème 4. *Soit (E, q) un espace vectoriel muni d'une forme quadratique. Les propriétés suivantes s'équivalent :*

(i) E est somme directe de plans hyperboliques (pour les restrictions de q)

(ii) q admet l'une des matrices suivantes (où $\equiv$ désigne la relation de congruence) :

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_r \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ I_r & 0 \end{pmatrix} \equiv \operatorname{diag}(J, \dots, J).$$

(iii) q est non dégénérée et possède un Lagrangien

On dit alors que (E, q) est un espace hyperbolique.

Remarque 15. Cette proposition contient le cas précédent du plan hyperbolique.

Au vu de la preuve précédente, (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) est clair. (i) $\Longrightarrow$ (iii) également : prendre le sous-espace engendré par les r premiers vecteurs de base de la deuxième matrice. (iii) $\Longrightarrow$ (ii) se démontre par récurrence sur r : le cas $r = 1$ étant acquis, il s'agit d'établir le

Lemme 3. *Sous l'hypothèse (iii), il existe (e_i) une base du Lagrangien, complétée en $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots f_n)$ telle que pour tous i, j on ait*

$$\beta(e_i, f_j) = \delta_{ij} \tag{6}$$

$$\beta(f_i, f_i) = \beta(e_i, e_i) = 0 \tag{7}$$

Démonstration. $\operatorname{Vect}(e_1, \dots e_{k-1}) \subsetneq \operatorname{Vect}(e_1, \dots e_k)$ donc

$$\{e_1, \dots e_k\}^\perp \subsetneq \{e_1, \dots e_{k-1}\}^\perp.$$

Ainsi, il existe g dans E tel que $g \in \{e_1, \dots e_{k-1}\}^\perp \setminus \{e_1, \dots e_k\}^\perp$, c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} \beta(g, e_i) &= 0 \text{ tant que } i \leqslant k-1 \\ \beta(g, e_k) &\neq 0. \end{aligned}$$

Quitte à diviser g par $\beta(g, e_k)$ on peut supposer $\beta(g, e_k) = 1$.

$$\begin{aligned} \forall \lambda &\in \mathbb{K},\ \beta(g + \lambda e_k, e_k) = 1 \\ \beta(g + \lambda e_k, e_i) = 0 & \qquad i \in \{1, \dots k-1\}. \end{aligned}$$

On a $\beta(g + \lambda e_k, g + \lambda e_k) = q(g) + 2\lambda$. Soit donc $\lambda_0 = -q(g)/2$, on pose alors $f_k = g + \lambda_0 e_k$. On vérifie alors les relations (6) et (7) □

Ceci achève la preuve du théorème de caractérisation des espaces hyperboliques. En fait, le lemme précédent nous donne un peu mieux, à savoir la

Proposition 8. *Soit q une forme quadratique non dégénérée sur E. Soit F un seti maximal pour l'inclusion. Alors il existe deux sous espaces vectoriels H et A tels que $E = H \overset{\perp}{\oplus} A$ avec H hyperbolique contenant F comme Lagrangien, et (A, q) anisotrope.*

De plus, on a l'unicité de la dimension de H dans une telle écriture. C'est par exemple une conséquence du résultat suivant (théorème de Witt [Per96, Chapitre 8]) que nous ne démontrerons pas :

Théorème. *Soient F et F' deux sous-espaces vectoriels, soit $u : F \to F'$ un isomorphisme tel que $\forall x \in F,\ q(u(x)) = q(x)$. Alors $\exists \hat{u} \in \mathcal{O}(q)$ tel que $\hat{u}_{|F} = u$.*

En revanche, l'existence de la décomposition $H \oplus A$ donne le

Corollaire 4. *(E, q) est hyperbolique ssi il admet un Lagrangien.*

Démonstration. Le sens direct découle de la définition. Pour le sens indirect, soit L un Lagrangien. Soit H un sous-espace de dimension $2 \dim L$ tel que q_H est hyperbolique (qui existe d'après le lemme 3) Alors $\dim H = \dim E$ donc $H = E$ ey q esy hyperbolique. □

Exemple 5. q dont une matrice est

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ {}^t B & 0 \end{pmatrix}.$$

avec $\det B \neq 0$, est hyperbolique.

3.4. **Influence du corps de base.**

3.4.1. *Les corps quadratiquement clos.*

Lemme 4. *Une forme quadratique anisotrope est de rang* 1.

Démonstration. Tout nombre est un carré ! □

Proposition 9. *Soit F un setim. Soit H hyperbolique admettant F comme Lagrangien. Soit $E = H \oplus A$ la décomposition de E associée, où q_A est anisotrope. Alors* $\dim A$ *est le reste de* $\dim E$ *dans la division par* 2.

Corollaire 5. $\dim F = \nu(q) = \left\lfloor \frac{\dim E}{2} \right\rfloor$. *De plus il s'agit de la dimension commune de tous les setim.*

3.4.2. $k = \mathbb{R}$.

Lemme 5. *On suppose $k = \mathbb{R}$. Une forme anisotrope est soit définie positive, soit définie négative.*

Démonstration. Montrons la contraposée. Soient u et v non nuls tels que $q(u) q(v) \leqslant 0$. On peut supposer que u et v sont linéairement indépendants (sinon ils sont isotropes) et on considère l'ensemble des

$$v_t = (1 - t) v + tu$$

qui sont donc tous non nuls. D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $t^\star$ tel que $v_{t^\star}$ est isotrope. □

Remarque 16. C'est aussi une conséquence immédiate de la classification. Une fqnd ni définie positive ni définie négative admet un plan hyperbolique, donc un vecteur isotrope.

Proposition 10. *Soit F un setim. H un sous-espace hyperbolique admettant F comme Lagrangien et $E = H \oplus A$ la décomposition associée. Alors*

$$\dim F = \min(r, s)$$

En particulier :
— Si $r > s$ alors q_A est définie positive
— Si $r = s$ alors $A = \{0\}$ et q est hyperbolique
— Si $r < s$ alors q_A est définie négative.

Corollaire 6. *Tous les setim ont même dimension ;* $\nu(q) = \min(r, s)$.

3.4.3. *Corps finis ($k = \mathbb{F}_\ell$, où ℓ puissance d'un nombre premier impair).* On a démontré plus haut qu'une forme quadratique de rang 3 n'est pas anisotrope (conséquence du principe des tiroirs).

Proposition 11. *Supposons* $\dim E$ *impaire. Soit F un setim, $E = H \oplus A$ la décomposition associée (où F est un Lagrangien de H). Alors*

$$\dim F = \frac{\dim E - 1}{2}$$

et A est une droite vectorielle.

Démonstration. $\dim A$ est impair (même parité que $\dim E$) et $\dim A \in \{0, 1, 2\}$. □

Le cas de dimension paire est plus délicat :

Proposition 12. *Supposons* $\dim E = 2m$. *Il y a deux possibilités*
- *Soit E est hyperbolique : tous les setim ont dimension m*
- *Soit E est non hyperbolique, et tous les setim ont dimension $m - 1$.*

4. Exercices d'application

4.1. Mise sous carrés.

Exercice 1. Mettre sous carrés le polynôme homogène

$$P(x, y, z, t) = xy + xt + yz + 2zt.$$

Solution.

$$\begin{aligned} xy + xt + yz + 2zt &= (x+z)(y+t) - zt + 2zt \\ &= \frac{1}{4}(x+z+y+t)^2 - \frac{1}{4}(x-y+z-t)^2 + zt \\ &= \frac{1}{4}\left[(x+y+z+t)^2 - (x-y+z-t)^2 + (z+t)^2 - (z-t)^2\right] \end{aligned}$$

En termes matriciels, ceci s'écrit

$${}^tP \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Avec

$$P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. [Tau21] Soit $\mathbb{K}$ un corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On pose

$$E(\mathbb{K}) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3, x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz = 0\right\}$$

Est-ce que $E(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^3$?

Solution. La mise sous carrés de Gauss donne

$$\begin{aligned} x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz &= (x+y+z)^2 + (x-y)^2 \\ &= X^2 + Y^2 \end{aligned}$$

avec $X = x + y + z$, $Y = x - y$ et $Z = z$, donc
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $E(\mathbb{K})$ est une droite vectorielle (d'équation $X = Y = 0$)
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $E(\mathbb{K})$ est l'ensemble d'équation

$$X = \pm iY$$

soit l'union de deux plans vectoriels ; ce n'est pas un sous-espace vectoriel.

4.2. **Formes quadratiques réelles. Signature.**

Exercice 3. [Tau21] Quelle est la signature de la forme quadratique réelle donnée dans un système de coordonnées par

$$q(x_1, \dots x_n) = \sum_{i \neq j} x_i x_j$$

Solution 1. Une matrice de cette forme quadratique est

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Posons

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}).$$

Alors

$$P^{-1}QP = \begin{pmatrix} n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

donc la signature de Q est $(1, n-1)$.

Exercice 4. Soit, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $q(A) = \text{tr } A^2$. Montrer que q est une forme quadratique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa signature.

Solution. L'application $(A, B) \mapsto \text{tr } (AB)$ est bien une forme bilinéaire symétrique donc q est une forme quadratique. Ecrivons $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sous la forme

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

On considère la base $\mathcal{B}_\mathcal{S}$ de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ formée des $\frac{1}{\sqrt{2}}(E_{ij} + E_{ji})$ et la base $\mathcal{B}_\mathcal{A}$ de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ formée des $\frac{1}{\sqrt{2}}(E_{ij} - E_{ji})$. Dans la base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_\mathcal{S} \smile \mathcal{B}_\mathcal{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice de q est

$$\begin{pmatrix} I_{n(n+1)/2} & \\ & -I_{n(n-1)/2} \end{pmatrix}$$

Donc q est non dégénérée (ce que l'on pouvait voir directement) et de signature $\left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2}\right)$.

Remarque 17. L'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se décompose aussi sous la forme

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{T}_n^-(\mathbb{R})$$

où $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ est l'espace des matrices diagonales, qui est anisotrope pour q, et $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{R})$) est l'espace des matrices triangulaires supérieures strictes (resp. inférieures strictes) qui est un Lagrangien de l'espace hyperbolique

$$\mathcal{H} = \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{T}_n^-(\mathbb{R})$$

4.3. **Isotropie.**

Exercice 5. [Per96] Soit (P, q) un plan. Montrer que q est hyperbolique ssi P possède exactement deux droites isotropes.

Solution. Si q est hyperbolique, soit (e_1, e_2) une base dans laquelle la matrice de q est J. Alors

$$q\,(xe_1 + ye_2) = 2xy = 0 \iff x = 0 \text{ ou } y = 0$$

Réciproquement, supposons que q admet exactement deux droites isotropes distinctes Δ_1 et Δ_2. Soient e_1 et e_2 non nuls pris respectivement dans Δ_1 et Δ_2 et β la forme bilinéaire symétrique associée ; alors $\beta\,(e_1, e_2) = \alpha$ donc quitte à diviser e_1 par α la matrice de q dans la base (e_1, e_2) est J.

4.4. **Matrices symétriques.**

Exercice 6. Soit A la matrice symétrique réelle définie par $a_{i,j} = \min\,(i, j)$. Montrer que A est définie positive.

Solution 1. Par récurrence sur n : c'est visible pour $n = 1$ (et même pour $n = 2$ si l'on veut) puis on pose

$$P = T_{n-1,n}\,(-1)$$

On vérifie alors que ${}^tPA_nP$ possède une forme diagonale par blocs

$${}^tPA_nP = \begin{pmatrix} A_{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution 2. Soit B telle que $b_{i,j} = 1$ si $j \geqslant i$ et 0 sinon, alors on remarque que $A = {}^tBB$.

Exercice 7. (Caractéristaion de Sylvester) Soit S une matrice symétrique réelle d'ordre n. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes

(i): S est définie positive

(ii): Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $\Delta_k\,(S) > 0$, où

$$\Delta_k\,(S) = \det\,(s_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant k}$$

Solution. Par récurrence sur n :

L'équivalence de (i) et (ii) est clairement valable pour $n = 1$

— (i) $\Longrightarrow$ (ii) au rang n : Supposons $S \in \mathcal{S}_n^{>0}\,(\mathbb{R})$. Alors $\Delta_n\,(S) > 0$ (c'est le produit des valeurs propres de S) et la sous-matrice formée des $(n-1)$ premières lignes et colonnes est encore définie positive ; d'après l'hypothèse de récurrence (i) $\Longrightarrow$ (ii) au rang $n-1$, et $\Delta_k\,(S) > 0$ pour $k \leqslant n-1$, donc (ii).

— (ii) $\Longrightarrow$ (i) au rang n : S se présente sous la forme

$$S = \begin{pmatrix} S' & \star \\ \star & s_{n,n} \end{pmatrix}$$

où $s_{n,n} > 0$. Posons alors

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{s_{n,1}}{s_{n,n}} & \cdots & \cdots & -\frac{s_{n,n-1}}{s_{n,n}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Ceci donne

$$SP = \begin{pmatrix} \star & \star \\ 0 & s_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Puis, comme S est symétrique,

$${}^tPSP = \begin{pmatrix} S'' & 0 \\ 0 & s_{n,n} \end{pmatrix}$$

où S'' est définie positive (vérifier que S'' est > 0, cela revient à explrimer $\Delta_n > 0$) donc définie positive par hypothèse de récurrence. On en déduit ce que l'on souhaitait.

Exercice 8. Soit n un entier naturel. Déterminer les composantes connexes par arcs de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$.

Références

[Col11] P. Colmez. *Éléments d'analyse et d'algèbre (et de théorie des nombres)*. Mathématiques (École polytechnique (France))). Éd. de l'École Polytechnique, 2011.

[Per96] D. Perrin. *Cours d'algèbre*. CAPES-agrég mathématiques. Ellipses, 1996.

[RDO88] Edmond Ramis, Claude Deschamps, and Jacques Odoux. *Algèbre*. Cours de mathématiques spéciales : classes préparatoires et enseignement supérieur. Masson, 1988.

[Ser70] Jean-Pierre Serre. *Cours d'arithmétique : par Jean-Pierre Serre*. SUP. Le mathématicien. Presses universitaires de France, 1970.

[Tau21] P. Tauvel. *Corps commutatifs et théorie de Galois : Cours et exercices*. Calvage et Mounet, 2021.