Exercice

Exercice 1 Entiers, décimaux, fractions

Au tableau et au dos de cette feuille, on a représenté des poupées russes avec pour étiquettes suivantes (de la plus petite à la plus grande)

— les nombres entiers ;
— les nombres décimaux ;
— les nombres qu'on peut représenter comme des fractions (aussi appelés nombres rationnels) ;
— tous les nombres réels

Vous allez recevoir un nombre.

1. Placer votre nombre au tableau.
2. Mise en commun : est-on d'accord sur le placement de tous nos nombres ?

$\frac{22}{7}$	$3,14$	$12/4$	$0,33333333...$	$7,0$	$0,0002$
$355/113$	$1,999999...$	$\sqrt{2}$	2022	0	$\sqrt{4}$
$6,27999999...$	$35/2$	$577/408$	1 million	treize quarts	168

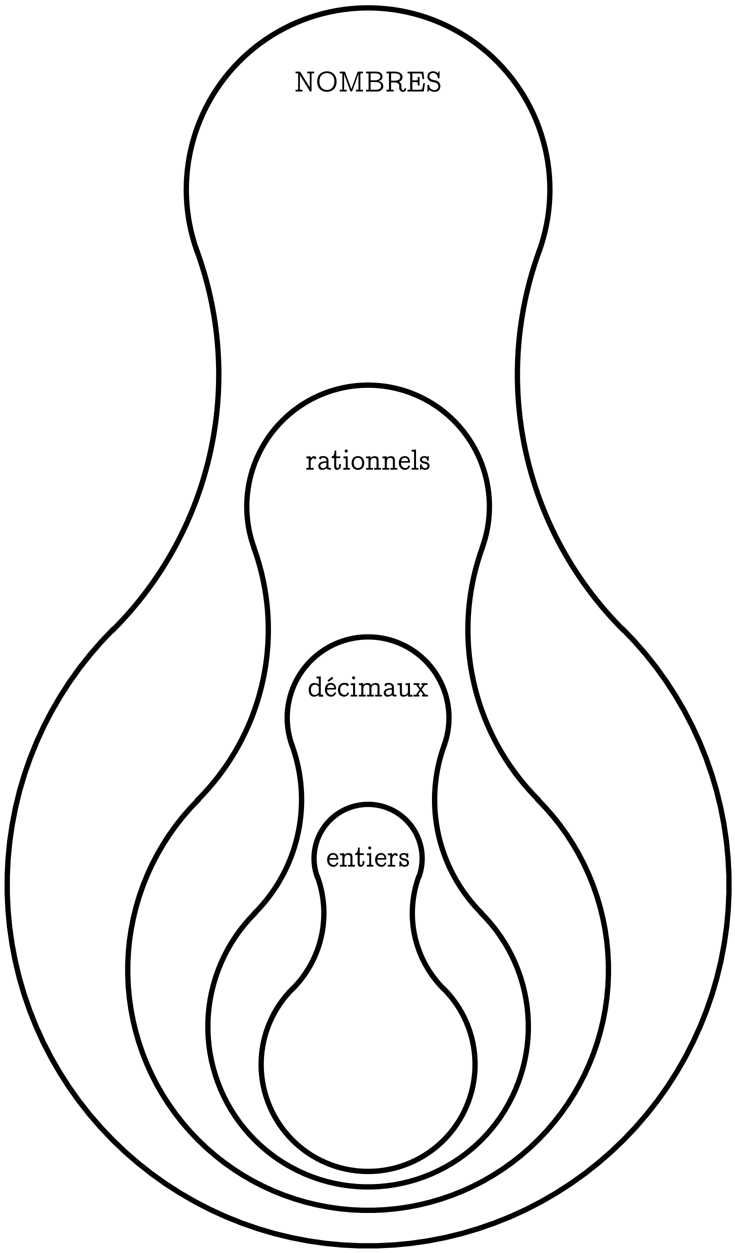
Exercice 2 Le format A4

1. Ecouter l'extrait de podcast sur les origines du format A4.
2. Quelle est l'aire d'une feuille A4 en cm^2 ? en millimètres carrés ? On procèdera de deux manières différentes :
   a) En s'aidant de la largeur et de la longueur, on exprimera le résultat sous forme de nombre décimal.
   b) En utilisant une information contenue dans le podcast, on exprimera le résultat sous forme de fraction.
3. La chambre de Léo est comme suit. Le sol a une forme carrée de côté 3,5m. Les murs sont de hauteur 2,3m. Il y a une fenêtre rectangulaire de côté 90cm et de hauteur 1,30m, et une porte de côté 90cm et de hauteur 2 mètres.
   a) Faire un croquis.
   b) Combien de feuilles A4 faut-il pour recouvrir les murs de la chambre de Léo ?
4. *En avance sur la proportionnalité, à regarder seulement si vous avez tout fini.*
   * a) Calculer $29,7^2 - 2 \times 21^2$ à l'aide de la calculatrice. Que constatez-vous ? Pourquoi ?
   * b) Léa veut obtenir une feuille rectangulaire de longueur $29,7$ cm telle que quand elle la coupe en trois dans le sens de la largeur, elle obtient trois plus petites feuilles à la même échelle. Quelle largeur doit-elle choisir ?

Exercice 3 Vrai ou faux ?

1. Vrai ou faux ?
   A. Entre deux entiers, je peux toujours en intercaler un troisième.
   B. Entre deux fractions qui représentent des nombres différents, on peut toujours intercaler une fraction.
   C. Entre deux fractions qui représentent des nombres différents, on peut toujours intercaler un nombre décimal.

2. Pour B., expliquer si c'est possible comment faire pour intercaler une fraction entre 355/113 et 22/7.

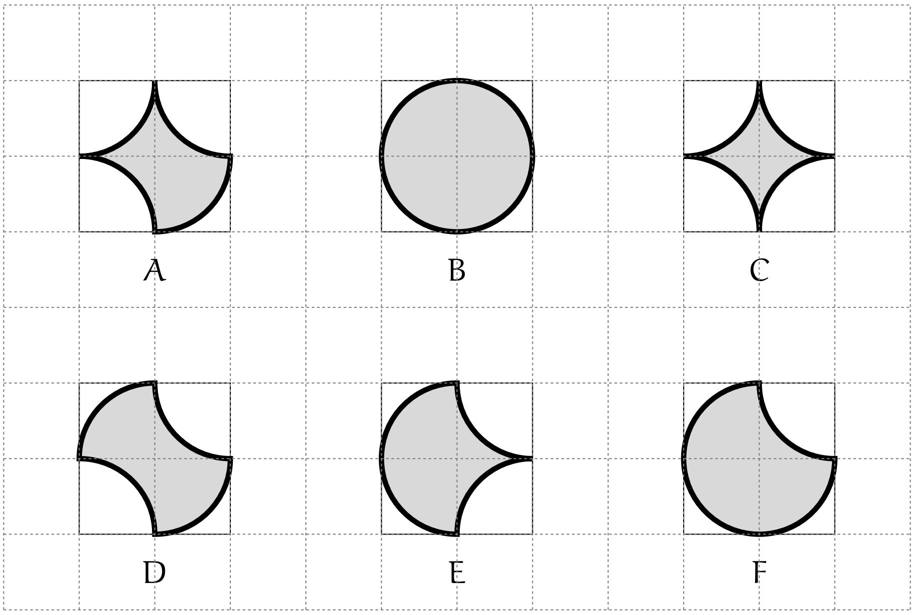


Exercice 4 (*CRPE Toulouse 1999, Dijon, Reims 2005*[1])

Partie I

1. Notre version est fortement inspirée de celle de Catherine Marchetti-Jacques, Fiche didactique CRPE maths 2014 disponible en ligne.

Un enseignant de CM2 décide de conduire des activités de mathématiques autour du matériel ci-dessous. Il s'agit de surfaces planes limitées par des arcs de cercle et inscrites dans des carrés de même dimension (de côté 4cm, mais cela n'est pas dit aux élèves). Il est sous-entendu que les centres et les rayons des arcs de cercle sont tels qu'ils sont perçus. Le matériel usuel de géométrie est mis à leur libre disposition à des fins de vérification si nécessaire.



1. L'enseignant veut faire ranger les formes selon leur **aire**.
   a) *Situation préliminaire à l'utilisation d'unité*. Décrivez une procédure possible.
   b) L'enseignant introduit deux unités de mesures, Q et S, qui sont les aires des figures ci-dessous dans des carrés de côté 2cm.

   i – Dans le cadre d'un jeu du portrait, comment décririez-vous ces deux surfaces ?
   ii – L'enseignant demande aux élèves d'exprimer les aires de A,B,C,D,E,F en fonction des unités d'aire Q et S.
   iii – L'enseignant précise que l'aire de Q est plus grande que celle de S, et demande de ranger les formes A,B,C,D,E et F par aire croissante. Donner les réponses attendues, justifier.
   iv – Comment peut-on faire constater aux élèves que Aire(S) $<$ Aire(Q) ?
2. A présent l'enseignant souhaite comparer les **périmètres** des différentes surfaces.
   a) Quelle est la réponse spontanée et erronée qui sera vraisemblablement fournie par un bon nombre d'élèves ? Pourquoi ?
   b) L'enseignant propose alors aux élèves de comparer aire et périmètre des figures B et C. Justifier son choix.
   c) Proposez une procédure simple, pouvant être utilisé par les élèves pour effectuer cette comparaison. Quelle est la réponse correcte attendue ?

3. L'enseignant demande alors aux élèves s'il est possible de dessiner une figure ayant la même aire que la figure B, avec un périmètre différent.
   a) Quel est son objectif ?
   b) Donnez une réponse possible en expliquant votre démarche.

Partie II

Ce document a été distribué à des élèves. Dans les annexes officielles, les mesures effectuées sur la photocopie donnée aux élèves correspondent aux résultats utilisés par les élèves

Les triangles A,B,C et D sont superposables.
L'aire de chacun est 6 cm^2

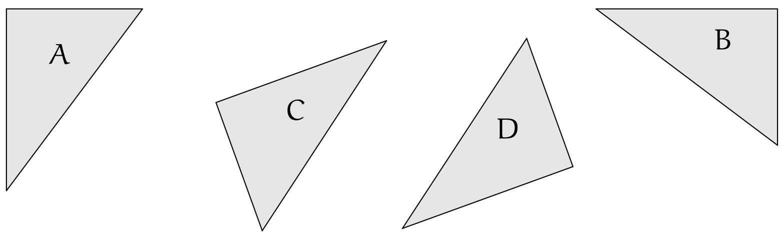


Figure 1

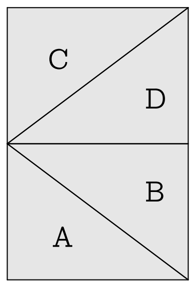
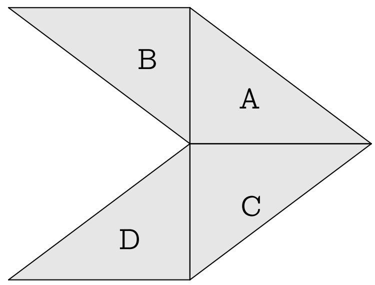


Figure 2



Ecrire les calculs permettant de trouver

a) Le périmètre de la figure 1

b) L'aire de la figure 1

c) Le périmètre de la figure 2

d) L'aire de la figure 2

1. Quelle est la règle implicite utilisée par l'élève A ?
2. Explicitez les connaissances sur lesquelles s'appuie l'élève B pour répondre aux questions a et c, puis celles qu'elle utilise pour répondre aux questions b et d
3. Interpréter la non-réponse en d) de l'élève C.
4. Donner deux interprétations possibles pour chacune des réponses b et d de l'élève D.

5. Au vu des productions de l'élève E, quelles connaissances a-t-elle des notions de périmètre et d'aire ?

Élève A : $(3+5+4)\times 4 = 42$ cm.

Élève B : a) $(3,2+4,8)\times 2 = 16$

b) $3,2\times 4,8 = 15,36$

c) $3,2+4+4+3,2+4+4 = 22,4$

d) A et C on le met dans le trou entre B et D on obtiendra la même figure que la précédente, alors c'e $= 15,36$.

Élève C : b) $6\times 4 = 24$

d) je ne sais pas calculer

Élève D : b) $6\times 4 = 24$

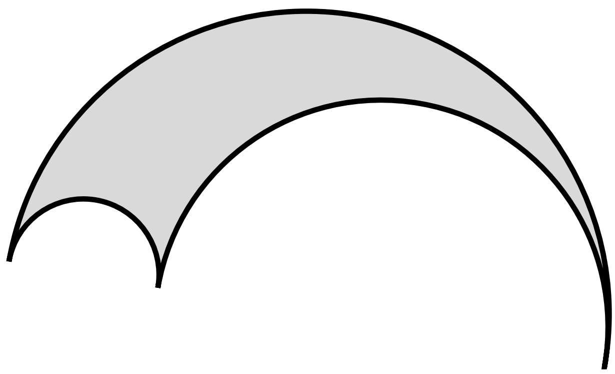
d) $6\times 4 = 24$

Élève E : a) $(3,2\times 2)+(4,8\times 2) = 6,4+9,6 = 16$

b) $9,6\times 6,4 = 61,44$

Exercice 5

La figure suivante est composée de trois demi-cercles de rayons 3, 9 et 12 cm, dont les centres sont alignés.



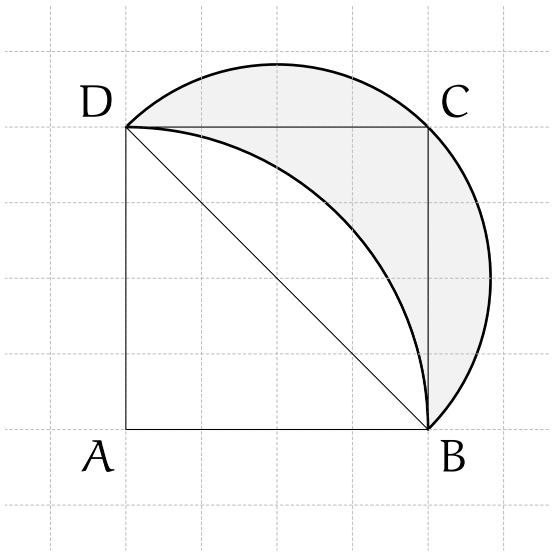
1. Calculer son périmètre, valeur exacte en cm, arrondie au mm près.
2. Calculer son aire, valeur exacte en cm^2, arrondie au mm^2 près.

* Exercice 6 Les lunes d'Hippocrate

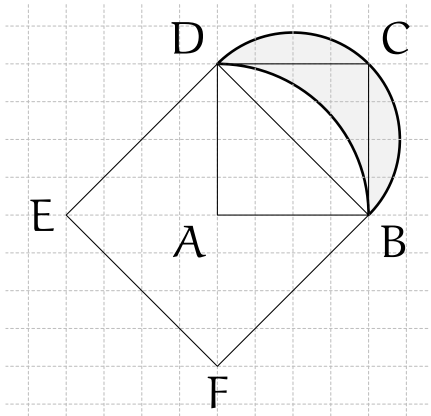
Prérequis pour cet exercice :
— Théorème de Pythagore (non absolument nécessaire, mais recommandé).
— Agrandissements et réductions.

Dans la figure ci-dessous, $ABCD$ est un carré. On forme une lunule dite d'Hippocrate [2] à partir de deux arcs de cercle. Le premier arc de cercle a pour centre A et pour rayon AB. Le second est une portion du cercle de diamètre $[BD]$.

2. Il s'agit d'Hippocrate de Chios, à ne pas confondre avec Hippocrate de Cos, le médecin.



1. On forme le carré $BDEF$ comme suit :



Comparer les aires du carré $BDEF$ et du triangle ABD. En déduire que

$$\text{Aire}(BDEF) = 2 \times \text{Aire}(ABCD),$$

puis que

$$\frac{BD}{CD} = \sqrt{2}.$$

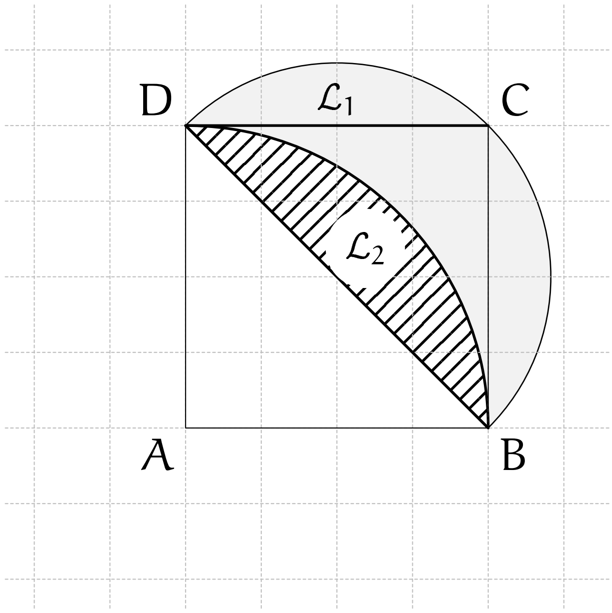
2. On considère les deux surfaces suivantes :

(1) La portion $\mathcal{L}_1$ de la lune située au-dessus du segment BC.

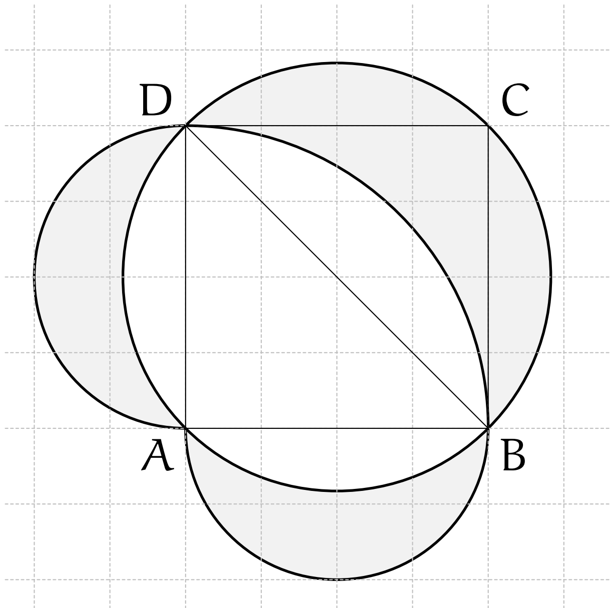
(2) La portion $\mathcal{L}_2$ du triangle BCD située en dessous de la lune.

Quel est le rapport d'agrandissement permettant de passer de $\mathcal{L}_1$ à $\mathcal{L}_2$? En déduire que

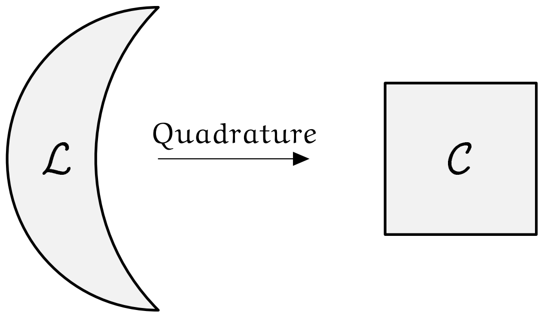
$$\text{Aire}(\mathcal{L}_2) = 2 \times \text{Aire}(\mathcal{L}_1).$$



3. Montrer que l'aire de la lune est égale à celle du triangle ABD (on pourra procéder par découpage et recollement).
4. On a formé deux petites lunes en complétant le cercle circonscrit au carré, et en traçant deux demi-dercles de diamètres AB et AC. Montrer que l'aire de la grande lune est égale à la somme des aires des petites lunes.

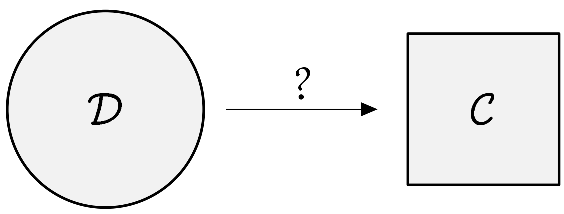


5. Étant donné une lune d'Hippocrate $\mathcal{L}$, décrire un procédé permettant de construire à l'aide de a règle et du compas un carré ayant la même aire. On dit qu'on a réalisé la quadrature de la lune.



Le problème historique de la quadrature du disque (ou de la « pleine lune ») s'est révélé impossible à la règle et au compas.

> *L'Académie a pris, cette année, la résolution de ne plus examiner aucune solution des problèmes de la duplication du cube, de la trisection de l'angle ou de la quadrature du cercle. [...] Il existe un bruit populaire que les gouvernements ont promis des récompenses considérables à celui qui parviendrait à résoudre le problème de la quadrature du cercle, que ce problème est l'objet des recherches des géomètres les plus célèbres ; sur la foi de ces bruits, une foule d'homme beaucoup plus grande qu'on ne le croit renonce à des occupation utiles pour se livrer à la recherche de ce problème, souvent sans l'entendre, et toujours sans avoir les connaissances nécessaires pour en tenter la solution avec succès. [...] L'humanité exigeait donc que l'Académie, persuadée de l'inutilité absolue de l'examen qu'elle aurait pu faire des solutions de la quadrature du cercle, cherchât à détruire, par une déclaration publique, des opinions populaires qui ont été funestes à plusieurs familles.*
>
> Académie Royale des Sciences, Comptes-Rendus, année 1775.

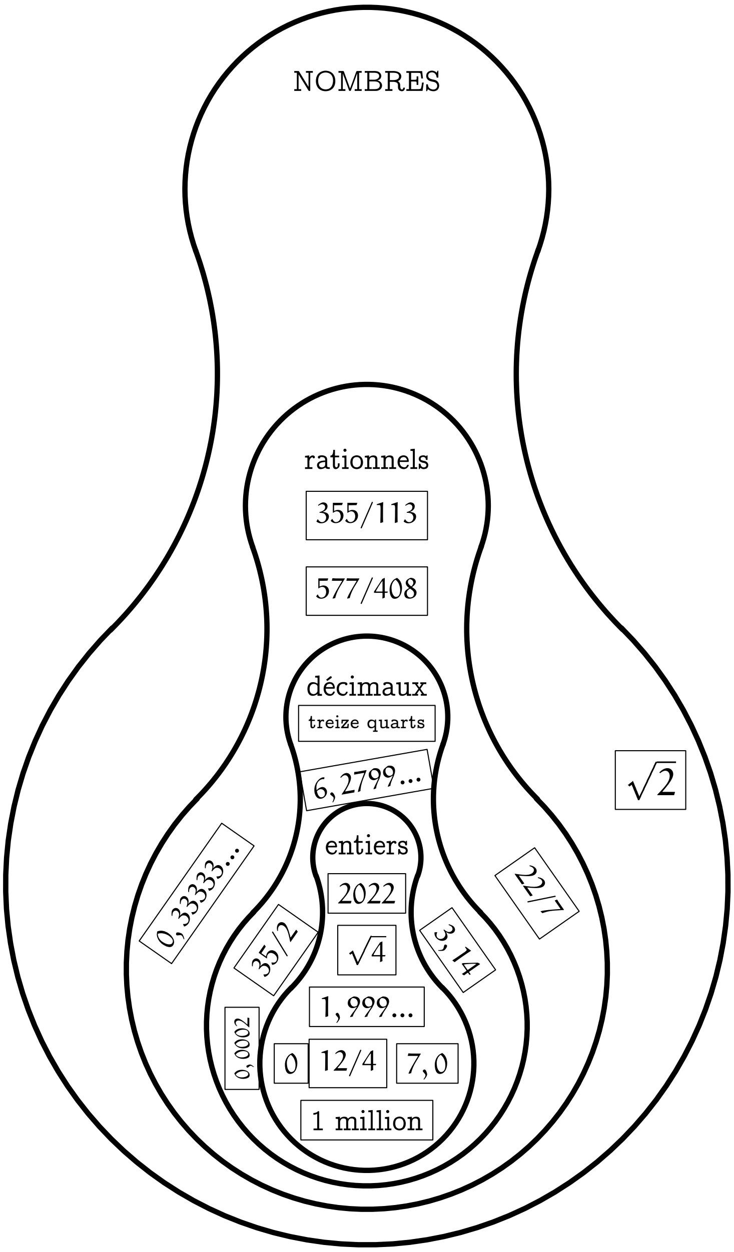


Solution de l'exercice 1

Les étiquettes qui représentent des nombres entiers sont $12/4 = 3$, $7,0 = 7$, $1,99999... = 2$, 2022, 0, $\sqrt{4} = 2$, 1 million = 1000000, 168.

Les étiquettes qui représentent des nombres décimaux non entiers sont : $3,14$, $0,0002$, $6,279999999...$, $35/2$, treize quarts.

L'étiquette $\sqrt{2}$ représente un nombre qui n'est pas rationnel (mais nous n'avons pas encore les moyens de le démontrer).



Solution de l'exercice 2

1. Dans vos oreilles !

2. a) L'aire de la feuille $A4$ est

$$29,7\,\text{cm} \times 21\,\text{cm} = 623,7\text{cm}^2.$$

C'est aussi

$$297\,\text{mm} \times 210\,\text{mm} = 62\,370\,\text{mm}^2.$$

On peut passer d'une unité de mesure à l'autre en utilisant le tableau de conversion :

	DM	**M**	**C**	**D**	**U**	**d**	**c**	**m**
Aire en cm^2			6	2	3	7		
Aire en mm^2	6	2	3	7				

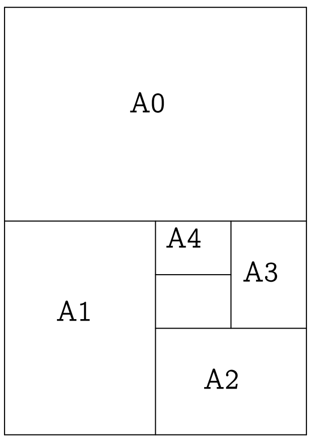
b) D'après le podcast, l'aire de la feuille $A0$ est $1\,\text{m}^2$. On a donc les aires suivantes

Format	Aire en mètres carrés
A0	1
A1	1/2
A2	1/4
A3	1/8
A4	1/16

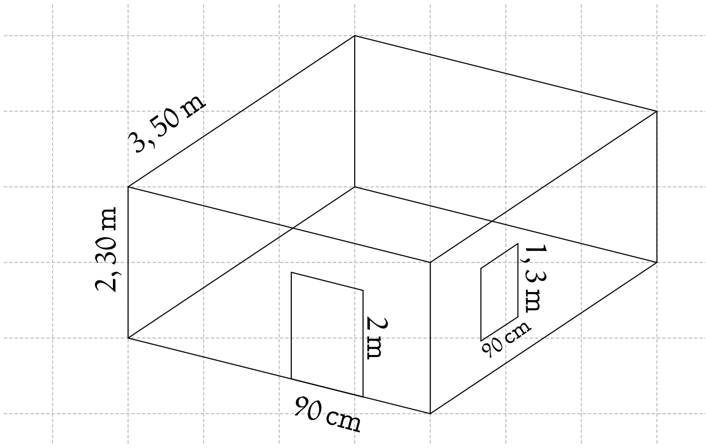
Il reste à traduire un seizième de mètre carré en centimètres carrés. On trouve

$$0,0625\,\text{m}^2 = 625\,\text{cm}^2$$

ce qui est légèrement différent !
On a dessiné ci-dessous à l'échelle les différents formats.



3. a) Voici un dessin en perspective cavalière (pas à l'échelle).



La chambre de Léo

b) Calculons l'aire des murs de la chambre.

(1) S'il n'y avait ni porte, ni fenêtre, cette aire serait
$$4 \times 2,30\,\mathrm{m} \times 3,50\,\mathrm{m} = 32,2\,\mathrm{m}^2.$$

(2) L'aire de la porte est
$$2\,\mathrm{m} \times 0,90\,\mathrm{m} = 1,8\,\mathrm{m}^2.$$

(3) L'aire de la fenêtre est
$$1,3\,\mathrm{m} \times 0,90\,\mathrm{m} = 1,17\,\mathrm{m}^2.$$

L'aire recherchée est donc
$$32,2\,\mathrm{m}^2 - 1,8\,\mathrm{m}^2 - 1,17\,\mathrm{m}^2 = 29,23\,\mathrm{m}^2.$$

Attention à ne pas confondre cette aire avec l'aire du sol, qui est elle égale à $12,25\,\mathrm{m}^2$. On peut ensuite conclure de deux manières différentes :
Premier calcul. On calcule que
$$29,23\,\mathrm{m}^2 \div 0,0625\,\mathrm{m}^2 = 467,68$$

Second calcul. On sait que 16 feuilles A4 couvrent exactement un mètre carré. On fait donc la multiplication
$$29,23 \times 16 = 467,68.$$

On trouve donc que 468 feuilles A4 sont nécessaires pour recouvrir les murs de la chambre.

Remarque : *Diviser par* $1/16$*, c'est comme multiplier par* 16*.*

4. a) On remarque que $29,7^2 - 2 \cdot 21^2 = 0,09$, ce qui est très petit. Cela est dû au fait que
$$\frac{29,7}{21} \approx \sqrt{2}$$
comme il est dit dans le podcast. Donc le carré de $29,7$ est presque le double de celui de 21.

b) On trouve $29,7/\sqrt{3} \approx 17,1\,\mathrm{cm}$.

Solution de l'exercice 3

1. A. Non B. Oui C. Oui

2. On commence par réduire au même dénominateur

$$\frac{22}{7} = \frac{22 \times 113}{7 \times 113} = \frac{2486}{791}$$

tandis que

$$\frac{355}{113} = \frac{355 \times 7}{113 \times 7} = \frac{2485}{791}$$

Ensuite, on remarque par exemple que

$$\frac{2485}{791} = \frac{24850}{7910} < \frac{24851}{7910} < \frac{24860}{7910} = \frac{2486}{791}.$$

Solution de l'exercice 4

Partie I

1. a) La technique de la superposition : une surface est plus grande pour l'aire qu'une autre si on arive à poser la première sur la deuxième sans dépasser ou, de manière équivalente, si on arrive à recouvrir complètement la seconde à l'aide de la première. Avec cette technique, on peut trouver que
— B recouvre F, donc B est plus grande que F.
— F recouvre D, donc F (et B) sont plus grandes que D.
— F recouvre aussi E, donc F (et B) sont plus grandes que E.
— D recouvre A, donc D (et aussi F et B) sont plus grandes que A.
— E également recouvre A.
— A recouvre C, donc A, E,D, F et B sont plus grandes que C.
On a résumé toutes ces relations "recouvre" par des flèches sur la figure suivante.

$$\begin{tikzcd}
 & & D \arrow[dr] & & \\
B \arrow[r] & F \arrow[ur] \arrow[dr] & & A \arrow[r] & C \\
 & & E \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Cela permet de ranger toutes les surfaces sauf la paire formée par D et E de la plus grande à la moins grande.

b) i – Q est un quart de disque. S est la surface qui reste quand on enlève à un carré un quart de disque formé sur deux côtés adjacents.

ii – Par S et Q on désigne les aires des surfaces S et Q.

$$\begin{aligned}
\text{Aire}(A) &= 3S + Q \\
\text{Aire}(B) &= 4Q \\
\text{Aire}(C) &= 4S \\
\text{Aire}(D) &= 2S + 2Q \\
\text{Aire}(E) &= 2S + 2Q \\
\text{Aire}(F) &= S + 3Q.
\end{aligned}$$

iii – Afin de comparer deux surfaces en utilisant les décompositions de la question précédente, nous devons d'abord voir ce qu'elles ont en commun. *Il y a là une analogie, qui n'est d'ailleurs pas complètement formelle, avec le fait que pour comparer deux fractions une méthode est de les mettre préliminairement au même dénominateur.* Illustrons ceci sur l'exemple de F et D :

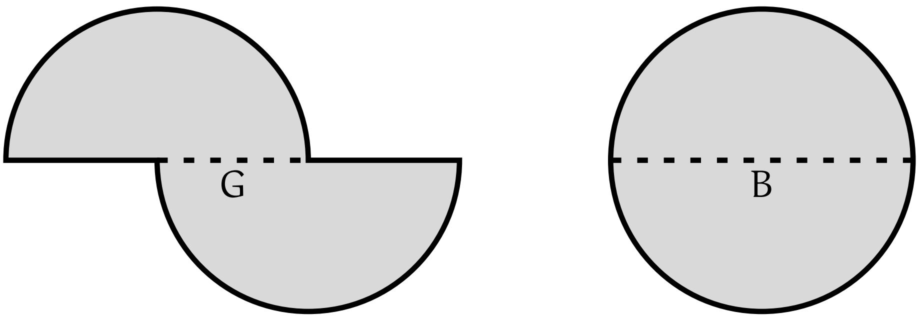
$$\begin{aligned}\mathrm{Aire}(D) &= 2S + 2Q = S + S + 2Q \\ &< Q + S + 2Q \\ &= S + 3Q = \mathrm{Aire}(F).\end{aligned}$$

Ici la partie commune est $S + 2Q$.
Finalement on montre ainsi que

$$\mathrm{Aire}(C) < \mathrm{Aire}(A) < \mathrm{Aire}(D) = \mathrm{Aire}(E) < \mathrm{Aire}(F) < \mathrm{Aire}(B).$$

iv – On peut utiliser la technique du recouvrement évoquée à la question 1.a).

2. a) La réponse spontanée est que l'ordre est le même. Quand on dit que A est plus grande que C, par exemple, il est sous-entendu que c'est pour l'aire.
   b) Les surfaces C et B sont extrêmes du point de vue de l'aire, ce sont la plus petite et la plus grande respectivement. Constater qu'elles ont même périmètre pourra d'autant mieux remettre en question la conception éventuelle que l'aire et le périmètre sont fonction l'un de l'autre.
   c) Il s'agit de découper le périmètre de chaque surface en quatre quarts de cercles de même rayon, et de faire ainsi constater que les périmètres sont tous les mêmes.
3. a) Il s'agit de remettre en question la conception éventuelle que l'aire détermine le périmètre (après avoir réfuté que le périmètre détermine l'aire à la question précédente).
   b) Voici deux surfaces de même aire et de périmètres différents.



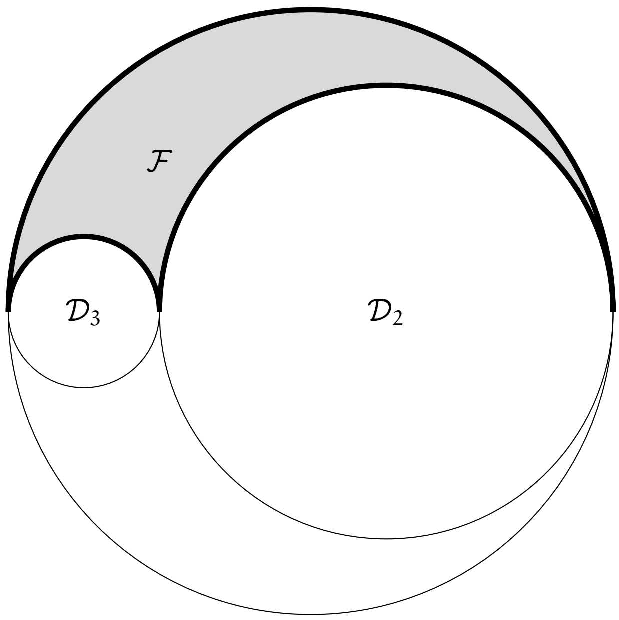
Partie II

1. La règle implicite est que le périmètre d'un recollement est égale à la somme des périmètres de ses parties. Un tel principe vaut pour les aires, mais pas pour les périmètres.
2. Les mesures utilisées par l'élèves B s'appuient sur un instrument (règle graduée). Ce n'est pas ce qui est prévu dans le contrat didactique pour cet exercice.
   Pour les questions a) et c) l'élève B utilise la définition du périmètre d'un domaine polygonal (somme des longueurs des côtés).
   Pour la question b), l'élève B utilise la formule donnant l'aire d'un rectangle à partir des longueur de ses côtés ; pour la question d) un découpage et recollement qui ramène au cas de la question b).
3. Pour la question d) un calcul ne suffirait pas, il faut procéder par exemple comme l'élève B (ou par somme). *Dans les séquences sur les grandeurs et mesure, il est recommandé de manipuler toujours d'abord les grandeurs en tant que telles, c'est à dire sans unités et a fortiori sans formules. Les mesures viennent ensuite.*.

Solution de l'exercice 5

1. Soient $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ le grand, le moyen et le petit cercle à partir desquels est formé le périmètre de la figure de l'exercice. Alors le périmètre recherché est

$$\frac{1}{2}\left(2\pi \times 4\,\text{cm}\right) + \frac{1}{2}\left(2\pi \times 3\,\text{cm}\right) + \frac{1}{2}\left(2\pi \times 1\,\text{cm}\right) 1 = 8\pi\,\text{cm} = 25,1\,\text{cm}.$$



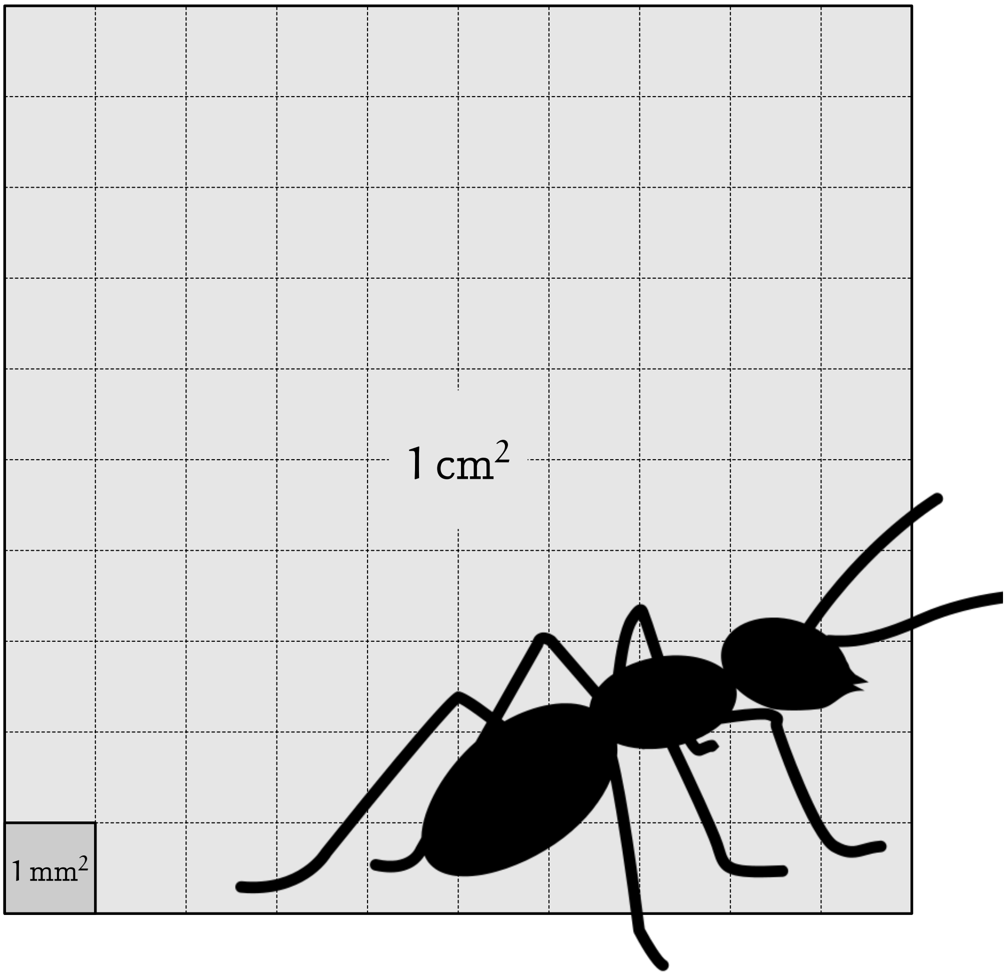
2. Soient $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ le grand, le moyen et le petit disque à partir desquels sont formés la figure de l'exercice. Alors par découpage

$$\begin{aligned}
\mathrm{Aire}(\mathcal{F}) &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{Aire}(\mathcal{D}_1) - \mathrm{Aire}(\mathcal{D}_2) - \mathrm{Aire}(\mathcal{D}_3)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\pi(4\,\text{cm})^2 - \pi(3\,\text{cm})^2 - \pi(1\,\text{cm})^2\right)\\
&= \frac{\pi}{2}\left(16 - 9 - 1\right)\ \text{cm}^2\\
&= 3\pi\,\text{cm}^2\\
&= 9,42\,\text{cm}^2.
\end{aligned}$$

Quelques précisions : quand le périmètre est demandé au millimètre près, on se contente du chiffre des dizièmes du résultat approximé et exprimé en centimètre. Quand l'aire est demandée au millimètre carré près, on doit donner le chiffre des centièmes du résultat approximé et exprimé en centimètre carrés. En effet

$$\begin{aligned}
1\,\text{mm} &= 0,1\,\text{cm}\\
1\,\text{mm}^2 &= 0,01\,\text{cm}^2.
\end{aligned}$$

Ces conversions peuvent se comprendre à l'aide du dessin suivant : dans un centimètre carré, on peut placer $10 \times 10 = 100$ millimètres carrés.

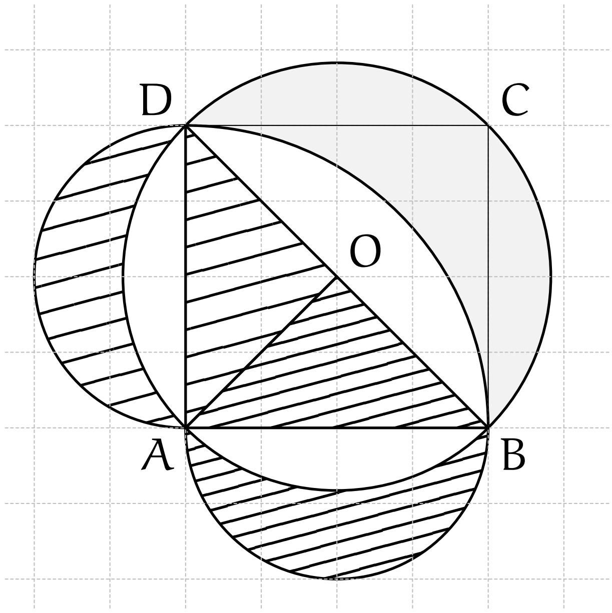


L'exercice suivant explore encore un peu plus loin l'effet d'un agrandissement sur les aires (notion de cycle 4).

Solution de l'exercice 6

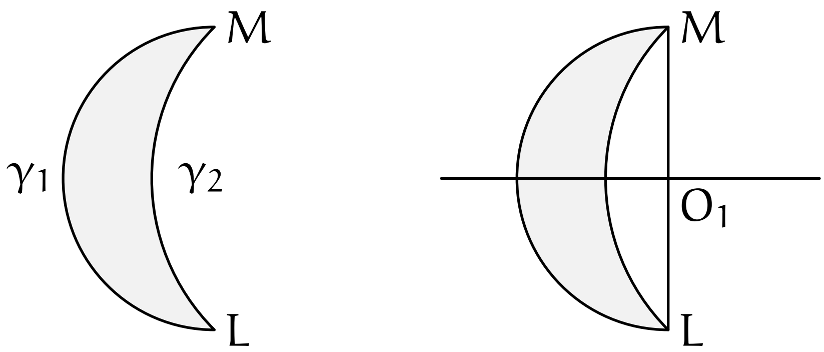
1. Par découpage,
$$\begin{aligned}\mathrm{Aire}(BDEF) &= \mathrm{Aire}(ABD) + \mathrm{Aire}(ADE) + \mathrm{Aire}(AEF) + \mathrm{Aire}(AFB)\\ &= 4 \times \mathrm{Aire}(ABD)\end{aligned}$$
tandis que $\mathrm{Aire}(ABCD) = \mathrm{Aire}(ABD) + \mathrm{Aire}(CDB) = 2 \times \mathrm{Aire}(ABD)$. On en déduit que $\mathrm{Aire}(BDEF) = 2 \times \mathrm{Aire}(ABCD)$. Donc
$$\left(\frac{BD}{CD}\right)^2 = \frac{BD^2}{CD^2} = \frac{\mathrm{Aire}(BDEF)}{\mathrm{Aire}(ABCD)} = 2.$$
Ceci prouve que $\frac{BD}{CD} = \sqrt{2}$.
2. Le rapport d'agrandissement est $\sqrt{2}$. On en déduit que
$$\frac{\mathrm{Aire}(\mathcal{L}_2)}{\mathrm{Aire}(\mathcal{L}_1)} = \sqrt{2}^2 = 2.$$
3. Notons $\mathcal{L}$ la lune d'Hippocrate. Par découpage et recollement,
$$\mathrm{Aire}(\mathcal{L}) + \mathrm{Aire}(\mathcal{L}_2) - 2 \times \mathrm{Aire}(\mathcal{L}_1) = \mathrm{Aire}(BCD) = \mathrm{Aire}(ABD).$$

4. Soit O le milieu de [AB]. L'aire de la lune formée sur [AD] est égale à celle du triangle AOD. L'aire de la lune formée sur [AB] est égale à celle du triangle AOB (voir ci-dessous).

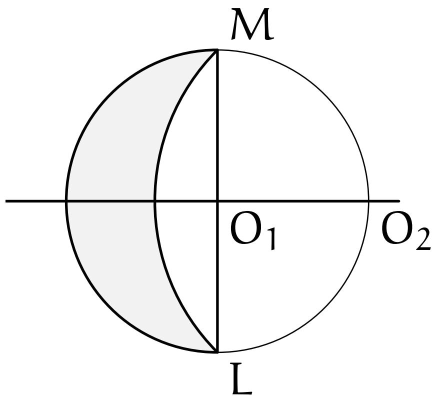


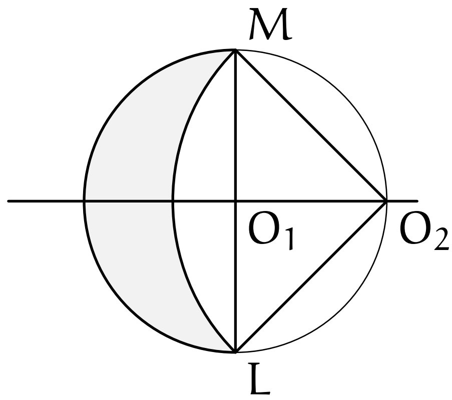
5. La lune $\mathcal{L}$ est délimitée par deux arcs de cercles γ_1 et γ_2 comme ci-dessous. D'après les questions précédentes, on sait tracer un triangle dont l'aire est celle de la lune. Ce triangle a pour sommets les deux extrémités communes L et M des arcs γ_1 et γ_2, et le centre O_2 de γ_2.

   A l'aide de la règle et du compas, nous pouvons tracer le segment [LM] d'une part, la médiatrice de L et M d'autre part. Ce segment et cette droite s'intersectent au point O_1 centre de l'arc γ_1.



   Le cercle de centre O_1 et de rayon O_1L prolonge l'arc γ_1 et intersecte la médiatrice de L et M en deux points, l'un étant situé sur l'arc γ_1 et le second étant le point O_2. Le point O_2 est ainsi construit.





D'après la question 3, l'aire de la lune est égale à celle du triangle LO_2M.

Soit N le point tel que MO_1O_2N est un carré (on peut construire N en construisant la parallèle à O_1O_2 passant par M avec la méthode du parallélogramme vue dans la fiche de géométrie plane). Alors $Aire(MO_2N) = Aire(O_1O_2L)$, donc

$$Aire(\mathcal{L}) = Aire(MO_1O_2N).$$