

Transformations : symétries, translations, rotations

Groupe D2 M1 MEEF

Gabriel Pallier, Crédits : M.N Lamy, M.N Cauderlier, A. Gautreau

31 mai 2022

Aujourd'hui

Activités mentales

Symétrie

- Repères de progressivité

- Symétrie axiale

- Symétrie centrale

Rotation

Retour sur les quadrilatères

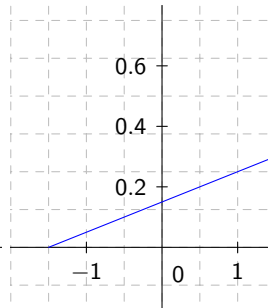
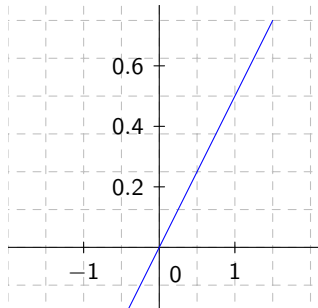
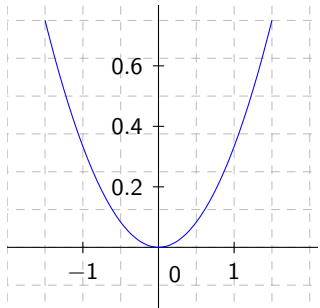
Translations

Si le temps le permet, retour sur les fonctions

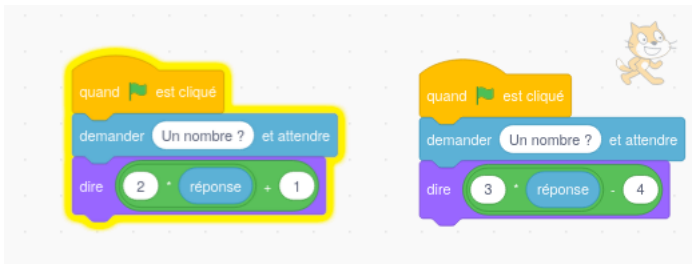
Activités mentales

Reconnaître, à partir des graphiques

Les graphiques suivants représentent-ils des fonctions linéaires ? affines ?



Image, antécédent, équation



1. Donner l'expression algébrique des fonctions f et g correspondant à ces deux programmes.
2. Quelle est l'image de 1 par f ? Par g ?
3. Quels sont les antécédents de 5 par f ? Par g ?
4. (*) Pour quel(s) nombre(s) en entrée les deux programmes donnent-ils le même résultat ?

Symétrie

Repères de progressivité au cycle 2 et CE2

CP	CE1	CE2

Source : Eduscol

Repères de progressivité au cycle 2 et CE2

CP	CE1	CE2
Les élèves perçoivent des éléments symétriques dans leur environnement proche de l'école.		

Source : Eduscol

Repères de progressivité au cycle 2 et CE2

CP	CE1	CE2
Les élèves perçoivent des éléments symétriques dans leur environnement proche de l'école.	Les élèves consolident la perception d'éléments symétriques. Elles reconnaissent si une figure présente un axe de symétrie (à trouver) visuellement ou en utilisant du papier calque , des découpages , des pliages .	

Source : Eduscol

Repères de progressivité au cycle 2 et CE2

CP	CE1	CE2
Les élèves perçoivent des éléments symétriques dans leur environnement proche de l'école.	Les élèves consolident la perception d'éléments symétriques. Elles reconnaissent si une figure présente un axe de symétrie (à trouver) visuellement ou en utilisant du papier calque , des découpages , des pliages .	Les élèves complètent une figure pour qu'elle soit symétrique par rapport à un axe donné.

Source : Eduscol

Au cycle 3

CM1	CM2	6e

Source : Repères de progression pour le cycle 3, Eduscol

NB : comparer les phrases « construction » au CE2 et CM2.

Au cycle 3

CM1	CM2	6e
Redites CE1 et CE2	Les élèves observent que deux points sont symétriques par rapport à une droite donnée lorsque le segment qui les joint coupe cette droite perpendiculairement en son milieu. [...] construisent à l'équerre et à la règle graduée, le symétrique d'un point, d'un segment, d'une figure par rapport à une droite.	

Source : Repères de progression pour le cycle 3, Eduscol

NB : comparer les phrases « construction » au CE2 et CM2.

Au cycle 3

CM1	CM2	6e
Redites CE1 et CE2	Les élèves observent que deux points sont symétriques par rapport à une droite donnée lorsque le segment qui les joint coupe cette droite perpendiculairement en son milieu. [...] construisent à l'équerre et à la règle graduée, le symétrique d'un point, d'un segment, d'une figure par rapport à une droite.	

Source : Repères de progression pour le cycle 3, Eduscol

NB : comparer les phrases « construction » au CE2 et CM2.

Au cycle 3

CM1	CM2	6e
Redites CE1 et CE2	Les élèves observent que deux points sont symétriques par rapport à une droite donnée lorsque le segment qui les joint coupe cette droite perpendiculairement en son milieu. [...] construisent à l'équerre et à la règle graduée, la symétrie d'un point, d'un segment, d'une figure par rapport à une droite.	Les élèves consolident leurs acquis de CM sur la symétrie axiale et font émerger l'image mentale de la médiatrice d'une part et certaines conservations par symétrie d'autre part .

Source : Repères de progression pour le cycle 3, Eduscol

NB : comparer les phrases « construction » au CE2 et CM2.

Symétrie axiale

Soit (\mathcal{D}) une droite du plan.

- ▶ Soit M un point qui n'est pas sur (\mathcal{D}) . Le symétrique du point M par rapport à la droite (\mathcal{D}) est le point M' tel que la droite (\mathcal{D}) est la médiatrice du segment $[MM']$.
- ▶ Lorsque le point M appartient à la droite (\mathcal{D}) , son symétrique est lui-même.

Propriétés

La symétrie axiale conserve

- ▶ Des **Grandeurs** : les longueurs, les angles, les aires
- ▶ Des **Relations** : l'alignement, le parallélisme

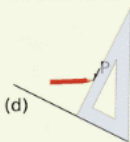
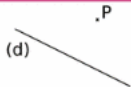
Construction à l'équerre et à la règle graduée

Méthode 2 : Construire le symétrique d'un point à l'équerre

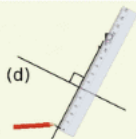
À connaître

Le **symétrique d'un point** P par rapport à une droite (d) est le point S tel que la droite (d) soit la médiatrice du segment [PS].

Exemple : Construis le point S, symétrique de P par rapport à la droite (d), en utilisant l'équerre.



On construit la droite perpendiculaire à la droite (d) passant par le point P.



On reporte la distance de P à (d) de l'autre côté de (d) sur cette perpendiculaire.



On obtient ainsi le point S tel que (d) soit la médiatrice de [PS].

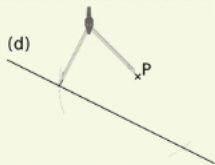
Construction au compas seul

Méthode 3 : Construire le symétrique d'un point au compas

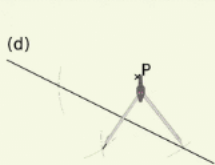
À connaître

Si A et B sont symétriques par rapport à une droite (d) alors chaque point de la droite (d) est **équidistant** de A et de B.

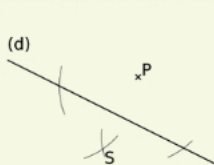
Exemple : Construis le point S, symétrique de P par rapport à la droite (d), au compas seul.



On trace un arc de cercle de centre P qui coupe l'axe en deux points.



De l'autre côté de la droite (d), on trace deux arcs de cercle de même rayon et de centre les deux points précédents.



Ces deux arcs se coupent en un point qui est le point S, symétrique de P par rapport à (d).

Les tâches des élèves sur la symétrie axiale

Les tâches des élèves sur le thème de la symétrie axiale

- ▶ Reconnaître des figures symétriques
- ▶ Compléter une figure pour qu'elle soit symétrique
- ▶ Rechercher le ou les axes de symétrie d'une figure
- ▶ Construire le symétrique d'une figure (l'axe étant fourni)

Les élèves doivent ressentir la notion de retournement lors d'une symétrie.

Des difficultés

Recherche d'un axe de symétrie. Les principales difficultés rencontrées par les élèves :

- ▶ Certains élèves n'arrivent pas à mobiliser des images mentales de pliage.
- ▶ Les axes symétrie qui ne sont ni horizontaux ni verticaux sont moins bien reconnus des élèves.
- ▶ Dans le cas où la figure est composée de figures élémentaires facilement repérables et possédant chacune un axe de symétrie, les élèves ont tendance à assimiler ces axes avec ceux de la figure complète.

Variables didactiques

Recherche d'axe de symétrie

Les outils :

- ▶ L'élève dispose de papier calque : il peut l'utiliser pour décalquer et faire divers essais de pliage.
- ▶ Il peut plier la feuille : il peut « piquer » la feuille en utilisant les points clés de la figure.
- ▶ Elle dispose d'une règle et d'une équerre et ne peut pas plier la feuille

Le support sur lequel est représentée la figure :

- ▶ La figure est présentée sur papier quadrillé ou pointé :
 - ▶ Si l'axe de symétrie correspond à une ligne du quadrillage : facilite son repérage ; le décompte des carreaux facilite la vérification.
 - ▶ Mais si l'axe ne correspond pas à une ligne du quadrillage : la présence des lignes peut induire l'élève en erreur.
- ▶ La figure est tracée sur papier blanc : obligation de faire appel à des images mentales.

Variables didactiques, suite

Recherche d'axe de symétrie

Les caractéristiques de la figure

- ▶ L'orientation de l'axe : l'élève reconnaîtra plus facilement un axe horizontal ou vertical qu'un axe oblique.
- ▶ Le nombre d'axes de symétrie : si plusieurs axes de symétrie, l'élève après en avoir trouvé un peut considérer que sa tâche est terminée et donc ne pas trouver les autres.

La familiarité que l'élève a avec la figure (en fin de cycle 3, la détermination d'axes de symétrie de figures usuelles est automatique).

Les figures élémentaires qui constituent la figure :

- ▶ Si la figure est composée de 2 éléments isolés qui sont symétriques, l'élève reconnaîtra facilement l'existence de l'axe.
- ▶ Si la figure peut être partagée par une droite en 2 parties superposables, l'élève risque de reconnaître un axe de symétrie alors que ce n'est pas forcément le cas. (Ex : diagonale d'un parallélogramme).

Le fait que l'axe de symétrie coupe la figure, ou pas.

Exercice 1

Exercice 1 :

Pour chaque couple de figures ci-dessous, dis sans justifier si les deux figures sont symétriques.

Couple 1



Couple 2



Couple 3



Couple 4



Couple 5



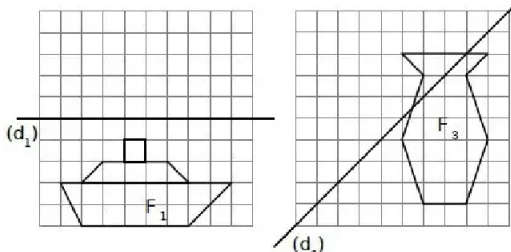
Exercice 2

Exercice 2 :

En utilisant le support quadrillé, tracer la figure :

F2 symétrique de la figure F1 par rapport à la droite (d1)

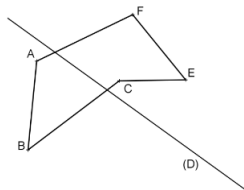
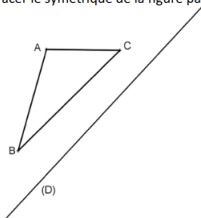
F4 symétrique de la figure F3 par rapport à la droite (d2)



Exercice 3

Exercice 3 :

Tracer le symétrique de la figure par rapport à la droite (D) en laissant apparents les traits de construction.



Symétrie centrale

Notion au programme de 5e, on n'analysera pas sa didactique ici.

Soit O un point du plan

- ▶ Soit M un point qui n'est pas O . Le symétrique du point M par rapport au point O est le point M' tel que le point O est le milieu du segment $[MM']$.
- ▶ Lorsque le point M est égal à O , son symétrique est lui-même.

Propriétés

La symétrie axiale conserve

- ▶ Des **Grandeurs** : les longueurs, les angles, les aires
- ▶ Des **Relations** : l'alignement, le parallélisme

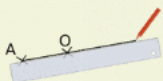
Construction de la symétrie centrale

Méthode 1 : Construire le symétrique d'un point

À connaître

Deux points A et A' sont symétriques par rapport à O lorsque O est le milieu du segment $[AA']$.

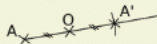
Exemple : Trace le point A' tel que les points A et A' soient symétriques par rapport à O .



On trace la demi-droite $[AO)$.



On trace un arc de cercle de centre O et de rayon OA . Il coupe la demi-droite $[AO)$ en un point.



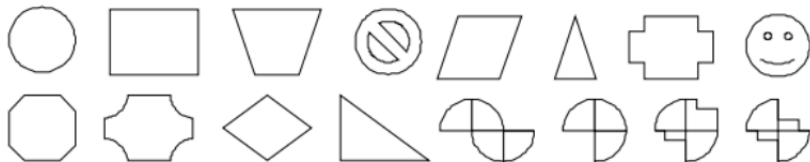
On place le point A' à l'intersection de la demi-droite $[AO)$ et de l'arc de cercle. On code la figure.

Centre de symétrie

Lorsque le symétrique d'une figure par rapport à un point est la figure elle-même, on dit que ce point est le centre de symétrie de la figure.

Exercice 4

Pour chaque figure indiquer la position du centre de symétrie s'il existe.



Rotation

Rotation

Soit O un point du plan et α un angle.

Une rotation de centre O et d'angle α permet de faire tourner une figure autour du point O d'un angle α sans la déformer.

Quizz

Nous avons déjà rencontré des rotations. Lesquelles sont elles ?

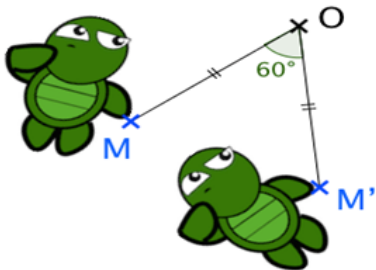
Quizz

Nous avons déjà rencontré des rotations. Lesquelles sont elles ?
Les symétries centrales sont des rotations d'angle 180° .

Rotation, suite

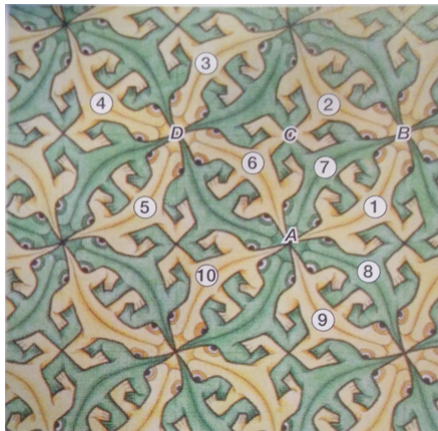
M' est l'image de M par la rotation de centre O et d'angle 60° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre signifie que :

- ▶ $\widehat{MOM'} = 60^\circ$ dans le sens de la flèche.
- ▶ $OM = OM'$.



Source de l'image : maths-et-tiques.fr

Exercice

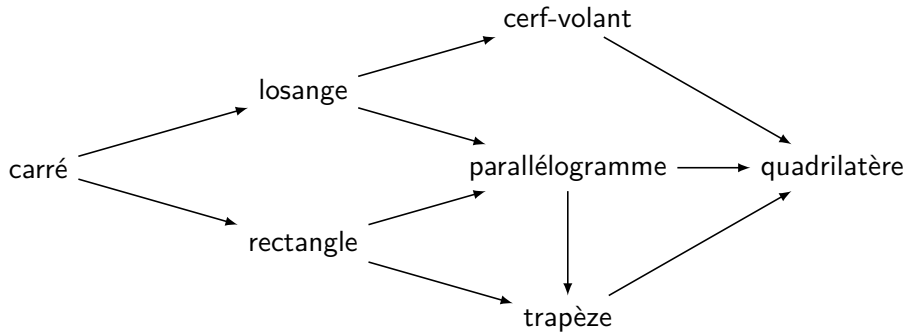


Source : Transmath 5e-4e-3e

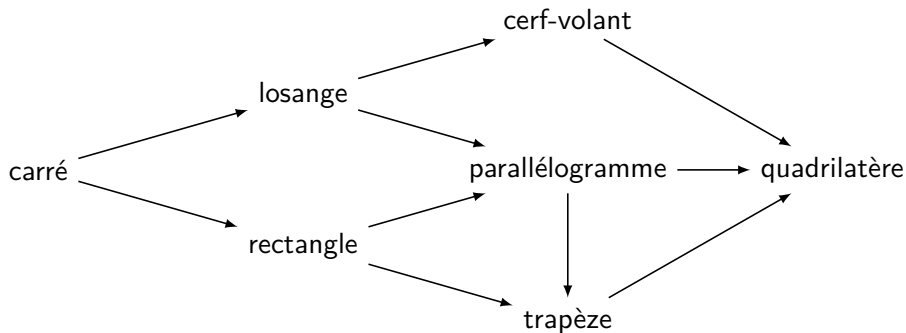
1. La rotation de centre A et d'angle 90° dans le sens des aiguilles d'une montre, transforme le lézard 6 en le lézard 1. Pour cette rotation, quelle est l'image : **a.** du lézard 9 ? **b.** du lézard 5 ?
2. Dans chaque cas, donner une rotation qui transforme : **a.** 6 en 3 ; **b.** 1 en 10 ; **c.** 6 en 2

Retour sur les quadrilatères

Quadrilatères

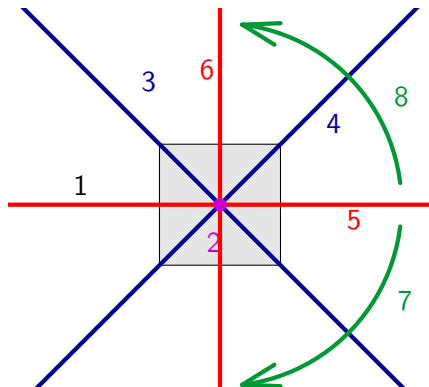


Exercice

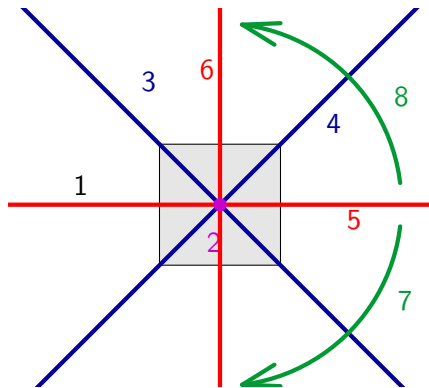


Pour chacun des quadrilatères, identifier toutes les transformations (symétries axiales et centrales, rotations) qui le laissent invariant.

Le carré



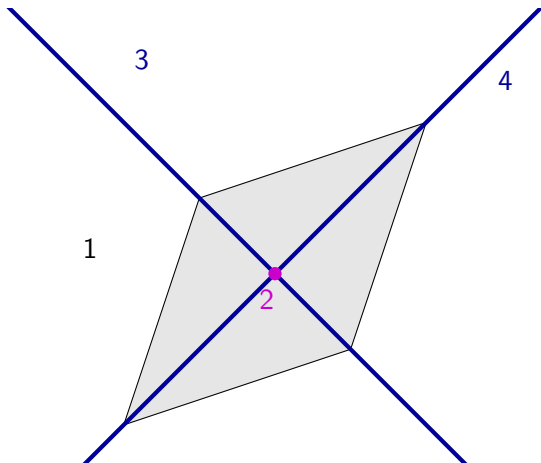
Le carré



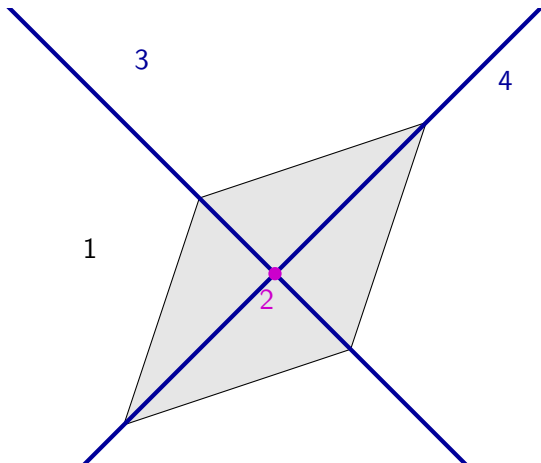
Il y a 8 transformations qui laissent le carré invariant :

- Une symétrie centrale, 2.
- Quatre symétries axiales, 3, 4, 5 et 6.
- Deux rotations d'angle 90° , 7 et 8.
- Celle qui ne fait rien, la paresseuse, 1.

Le losange



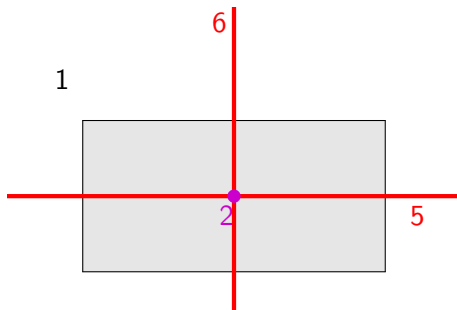
Le losange



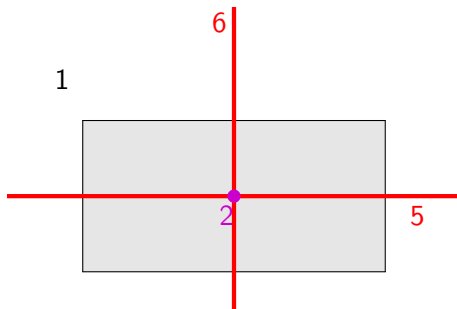
Il y a 4 transformations qui laissent le losange invariant :

- Une symétrie centrale, 2 ;
- Deux symétries axiales, 3 et 4 ;
- Celle qui ne fait rien, 1 ;

Le rectangle



Le rectangle

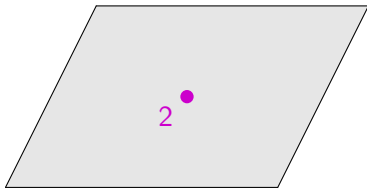


Il y a 4 transformations qui laissent le rectangle invariant :

- ▶ Une symétrie centrale, 2 ;
- ▶ Deux symétries axiales, 5 et 6 ;
- ▶ Celle qui ne fait rien, 1 ;

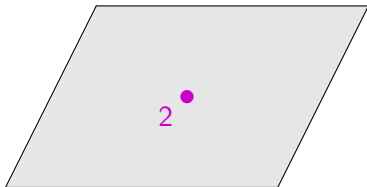
Le parallélogramme

1



Le parallélogramme

1

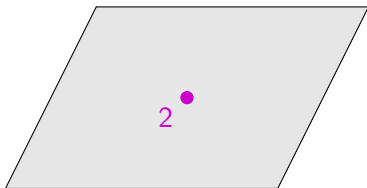


Il y a 2 transformations qui laissent le rectangle invariant :

- Une symétrie centrale, 2 ;
- Celle qui ne fait rien, 1 ;

Le parallélogramme

1



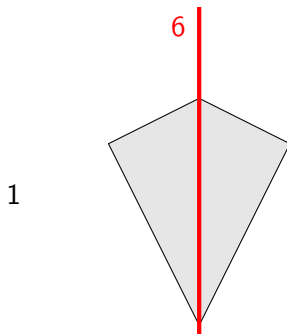
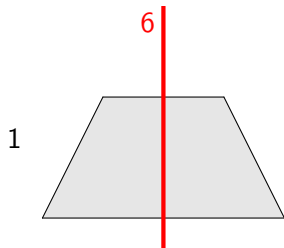
Il y a 2 transformations qui laissent le rectangle invariant :

- ▶ Une symétrie centrale, 2 ;
- ▶ Celle qui ne fait rien, 1 ;

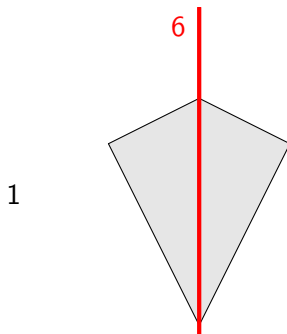
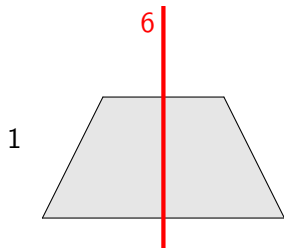
Propriété

Si un quadrilatère possède un centre de symétrie alors c'est un parallélogramme.

Le trapèze symétrique et le cerf-volant



Le trapèze symétrique et le cerf-volant



Il y a 2 transformations qui laissent le trapèze symétrique et le cerf-volant invariants

- Une symétrie axiale, 6 ;
- Celle qui ne fait rien, 1.

Translations

Translation

Une translation permet de faire glisser une figure parallèlement à une droite sans déformer ni retourner cette figure.

L'existence et les propriétés des translations s'appuient sur les propriétés du **parallélogramme**.

Translation

Une translation permet de faire glisser une figure parallèlement à une droite sans déformer ni retourner cette figure.

L'existence et les propriétés des translations s'appuient sur les propriétés du **parallélogramme**.

Propriété

Étant donnée une paire de points distincts A et A' du plan, il existe une unique transformation préservant grandeurs et relations qui envoie A sur A' et **déplace tous les points**.

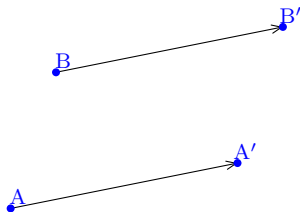
Translation

Une translation permet de faire glisser une figure parallèlement à une droite sans déformer ni retourner cette figure.

L'existence et les propriétés des translations s'appuient sur les propriétés du **parallélogramme**.

Propriété

Étant donnée une paire de points distincts A et A' du plan, il existe une unique transformation préservant grandeurs et relations qui envoie A sur A' et **déplace tous les points**.



Si le temps le permet, retour sur les fonctions