RÉDIGER DES MATHÉMATIQUES

GABRIEL PALLIER

Problème 2 de l'épreuve 2018-2

Le sujet est disponible à l'adresse https://capes-math.org/data/uploads/ecrits/EP2_2018_sujet.pdf.

Partie A : Constructions à la règle et au compas. L'énoncé demande de supposer que (O, I, J) est un repère **orthonormé**. Cependant, il n'est pas vraiment nécessaire que (O, I, J) soit orthonormé dans cette partie. Je ne le supposerai qu'à partir de la question **VI**, et seulement pour des raisons de commodité : à partir de la question **VI** il sera utile d'avoir un repère orthonormé sous la main (qu'on pourrait construire au besoin). Malgré tout, des résolutions différentes (inapplicables en général) peuvent être proposées si (O, I, J) est de plus supposé orthonormé ; je les décrirai le cas échéant, à la suite de la résolution générale.

I. On donne les programmes de constructions tels que dans une trace écrite dans un cahier de Sixième (pour **1** et **2**) ou de Cinquième (pour **3** et [1] **4**). On donne ensuite une justification des procédures de construction des questions **3** et **4**, qui n'est pas exigible en Sixième ; celle de la question **3** est en substance abordable en Cinquième. Les commentaires en italique ne font pas partie de la trace écrite.

1. Programme de construction :

(1) À l'aide du compas pointé en A puis en B, tracer deux arcs de cercles de même rayon, qui se coupent. Nommer C l'intersection de ces deux arcs de cercle. *On prendra un écartement du compas ni trop grand, ni trop petit afin que cette intersection soit facile à marquer, l'écartement idéal étant d'environ les trois quarts de la longueur AB.*

(2) A l'aide du compas pointé en A puis en B, tracer deux arcs de cercles de même rayon, ne passant pas par C, qui se coupent. Nommer C' leur intersection. *Même remarque qu'à la première étape. On fera en sorte que C et C' soient suffisamment éloignés, notamment en positionnant C et C' de part et d'autre de la droite (AB), comme sur la Figure 1.*

(3) Tracer la droite (CC'). C'est la médiatrice de $[AB]$.

(4) Marquer le point où (CC') et $[AB]$ se coupent. C'est le milieu de $[AB]$.

2. Programme de construction :

(1) A l'aide du compas pointé en C, tracer deux arcs de cercle de même rayon, qui coupent (AB) en deux points que l'on appelle A' et B'. *On prendra un écartement suffisamment grand pour que ces deux points soient assez éloignés l'un de l'autre.*

Date : 27 janvier 2022.

1. Sauf que les bissectrices ne sont actuellement plus au programme.

(2) Répéter les étapes (2) et (3) du programme de construction de la médiatrice partant de A' et B'. *Le point C est déjà construit.* La droite (CC') est la perpendiculaire à (AB) passant par C.

3. Programme de construction :

(1) A l'aide du compas pointé en A, prendre l'écartement correspondant à la longueur AB.

(2) Pointer le compas en C, et tracer un arc de cercle. *Cet arc doit être tracé dans la direction approximative de la parallèle à (AB), et le sens de A vers B.*

(3) A l'aide du compas pointé en A, prendre l'écartement correspondant à la longueur AC.

(4) Pointer le compas en B, et tracer un arc de cercle qui coupe le précédent. Nomer D l'intersection.

(5) Tracer la droite (CD). C'est la parallèle à (AB) passant par C.

Justification : (Voir la figure 5.) La construction s'appuie sur le fait que dans un quadrilatère, si les côtés opposés sont de même longueurs, alors ils sont parallèles (et le quadrilatère en question est un parallélogramme). En effet, avec les notations précédentes, ABC d'une part et BCD d'autre part ont les longueurs de leurs côtés deux à deux égales ; ils sont donc égaux (isométriques) d'après le premier cas d'égalité des triangles. Il s'ensuit que $\widehat{ABC} = \widehat{DCB}$. Or les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{DCB}$ sont alterne-internes pour la sécante (BC) aux droites (AB) et (CD). Donc (AB) et (CD) sont parallèles.

Il existe un autre programme de construction, qui consiste à tracer deux perpendiculaires successives en utilisant la procédure de la question **I.2**. Cette manière de faire est plus longue mais tout aussi correcte.

4. Programme de construction :

(1) À l'aide du compas, tracer un cercle de centre A, coupant $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ en quatre points distincts. On nommera ces points P, Q, R, S dans l'ordre quand on parcourt le cercle.

(2) En reproduisant les étapes (2) et (3) de la question **I.1**, tracer les médiatrices de $[PQ]$ d'une part et de $[QR]$ d'autre part. Ce sont les bissectrices de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

Justification : On prendra pour définition d'une bissectrice de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, une droite dont tous les points sont équidistants de $\mathcal{D}$ et de $\mathcal{D}'$. Dans la construction pécédente, $\mathcal{M}$ désigne la médiatrice de $[PQ]$ et $\mathcal{M}'$ la médiatrice de $[RS]$. Soit K le milieu de $[PQ]$. D'après le cas côté-angle-côté d'égalité des triangles, les triangles PKA et QKA sont égaux. Donnons-nous maintenant M un point de $\mathcal{M}$, et supposons (sans perte de généralité) que M se situe sur la demi-droite $[OK)$. Soit U le projeté orthogonal de M sur (OP) et V le projeté orthogonal de M sur (AQ). Les angles $\widehat{MAU}$ et $\widehat{MAV}$ sont égaux, donc les triangles rectangles MUA et MVA sont semblables ; de plus ils partagent leur hypoténuse MA, donc ils sont égaux. En particulier, leurs côtés homologue MU et MV sont de même longueur, ce qu'il fallait démontrer.

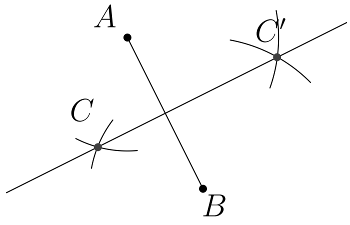

FIGURE 1. (**I.1**) Construction de la médiatrice de $[AB]$ à la règle et au compas.

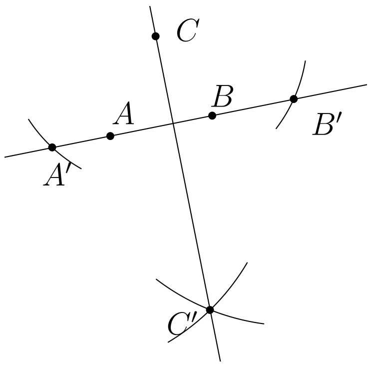

FIGURE 2. (**I.2**) Construction de la perpendiculaire à (AB) passant par C à la règle et au compas.

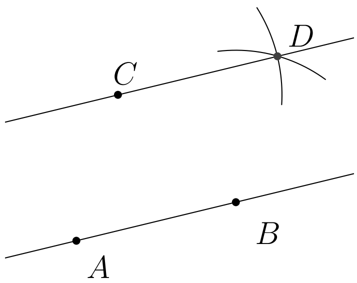

FIGURE 3. (**I.3**) Construction de la parallèle à (AB) passant par C à la règle et au compas.

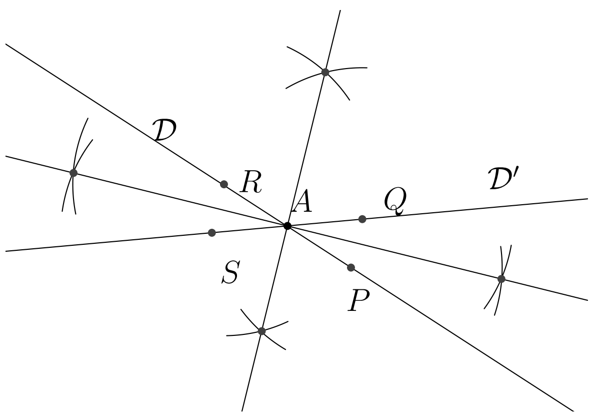

FIGURE 4. (**I.4**) Construction des bissectrices de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ à la règle et au compas.

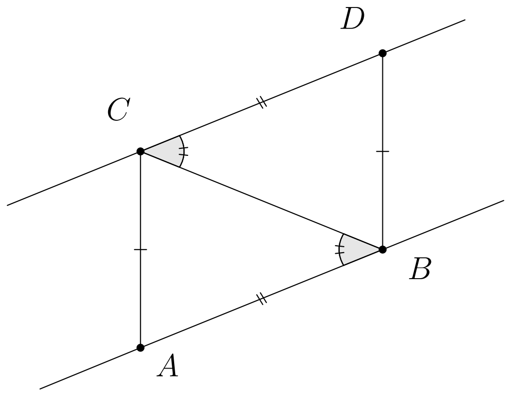

Figure 5. Justification de la procédure de construction de la parallèle à (AB) passant par C.

II. Le nombre x est constructible par définition. Pour montrer que y est constructible, il suffit de montrer que le point de coordonnées $(y;y)$ (par exemple) est constructible. Construisons la parallèle $\mathcal{H}$ à (OI) passant par J et la parallèle $\mathcal{L}$ à (OJ) passant par I. Marquons $T(1;1)$ leur intersection. La parallèle à (OI) passant par M coupe (OT) au point de coordonnées $(y;y)$.

Résolution dans le cas où (O, I, J) **est orthonormé :** Le point de coordonnées $(y;y)$ est l'intersection de l'une des bissectrices de (OI) et (OJ) et de la perpendiculaire à (OJ) passant par M. Il est donc constructible d'après les questions **I.2** et **I.4**.

III. Soit y tel qu'il existe un point constructible M de coordonnées $(x;y)$. La parallèle à (OJ) passant par M intersecte (OI) au point de coordonnées $(x;0)$. D'autre part, d'après la question **II**, le point M' de coordonnées $(x;x)$ est constructible. Il reste à construire la parallèle à (OI) passant par M' (c'est possible de nouveau d'après la question **I.3**), elle intersecte (OJ) au point de coordonnées $(0;x)$ qui est donc constructible.

Résolution dans le cas où (O, I, J) **est orthonormé :** D'après la question **I.2.**, les droites perpendiculaires à (OI) et à (OJ) passant par M' tel que défini plus haut sont constructibles à la règle et au compas. Or ces droites intersectent (OI) et (OJ) en les points de coordonnées $(x;0)$ et $(0;x)$ respectivement. Donc ces points sont constructibles.

IV. 1. Nous allons construire le symétrique du point $M(x;0)$ par rapport à O.

(1) Tracer la droite (OI).

(2) Placer la pointe du compas en O et prendre pour écartement la longueur OM.

(3) Tracer l'arc de cercle de rayon OM ; il intersecte (OI) au points M et M'. M' est le symétrique de M par rapport à O.

2. Soient $M(x;0)$ et $N(y;0)$ deux points du plan repéré par (O, I, J). Construisons le point $S(x+y;0)$.

(1) Tracer la droite (OI).

(2) A l'aide du compas, prendre pour écartement la longueur ON.

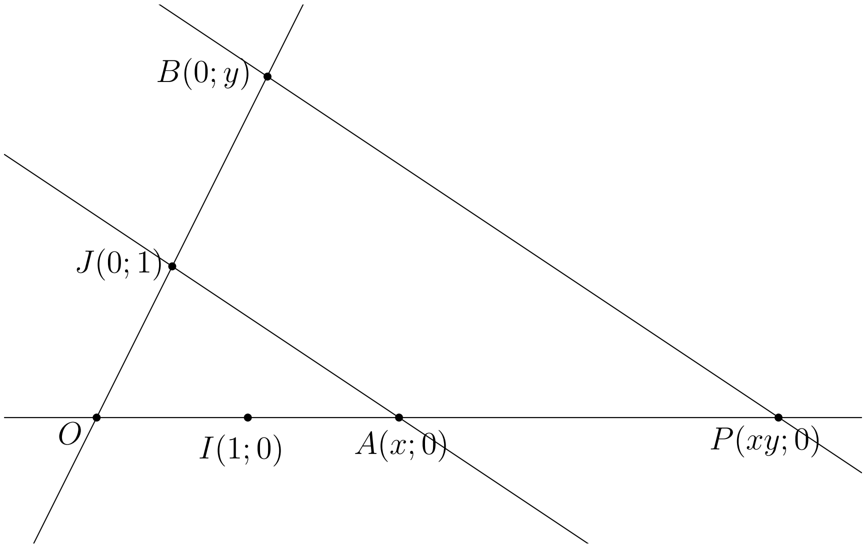

FIGURE 6. Construction du point P d'abscisse xy et d'ordonnée nulle à partir des points $A(x;0)$ et $B(0;y)$.

(3) Pointer le compas en M, et tracer l'arc de cercle qui coupe (OI) du côté de M qui est celui de I par rapport à O. Marquer l'intersection S.

Pour construire le point $D(x-y;0)$ on reprend les deux premières étapes de la construction. La 3e étape est remplacée par

(3') Pointer le compas en M, et tracer l'arc de cercle qui coupe (OI) du côté de M qui est celui de O par rapport à I. Marquer l'intersection D.

3. Soient $A(x;0)$ et $B(0;y)$ deux points du plan repéré par (O,I,J). Construisons le point $P(xy;0)$.

(1) Tracer la droite (OI).

(2) Tracer la droite (AJ).

(3) Tracer la droite parallèle à (AJ) passant par B, en procédant comme dans la question **I.3**. Elle coupe (OI) en P ; marquer cette intersection.

D'après le théorème de Thalès,

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OJ}} = y,$$

donc $OP = y \cdot OA = xy$.

4. Soient $A(x;0)$ et $B(0;y)$ deux points du plan repéré par (O,I,J). Construisons le point $Q(xy;0)$.

(1) Tracer la droite (OI).

(2) Tracer la droite (AB).

(3) Tracer la droite parallèle à (AB) passant par J, en procédant comme dans la question **I.3**. Elle coupe (OI) en Q ; marquer cette intersection.

D'après le théorème de Thalès,

$$\frac{\overline{OQ}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OJ}}{\overline{OB}} = \frac{1}{y},$$

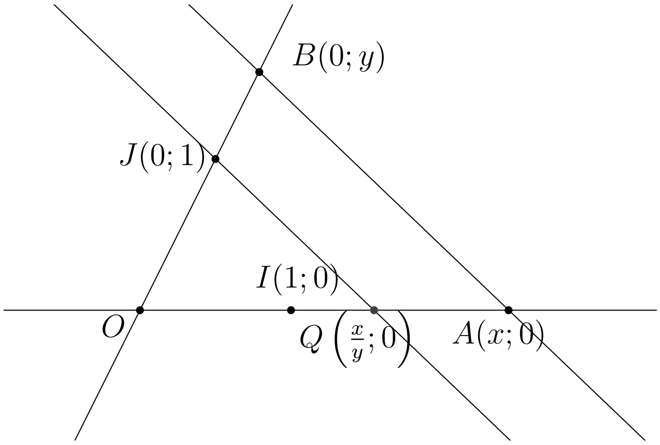

FIGURE 7. Construction du point Q d'abscisse x/y et d'ordonnée nulle à partir des points $A(x;0)$ et $B(0;y)$.

donc $OQ = OA \cdot \frac{1}{y} = \frac{x}{y}$.

V. Sans perte de généralité on peut supposer que x et y sont non nuls. La construction de la question **IV.1** s'applique encore quand $x < 0$. D'après la question **IV**, $|x+y|$, $|xy|$ et $|x/y|$ sont constructibles. De plus, $|x|-|y|$ est constructible. Donc $x+y$, $x-y$, xy et x/y sont constructibles.

A partir d'ici, on supposera que (O, I, J) est orthonormé.

VI. **1.** Le point $I(1;0)$ est constructible et le point $M(x;0)$ sont constructibles.

2. O et A sont constructibles, donc $\mathcal{C}$ est constructible.

3. $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont constructibles, donc B est constructible.

4. D'une part, $\tan\theta = \frac{BI}{OI} = BI$. D'autre part $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{BI}{AI} = \frac{BI}{x}$. Or $\tan\theta\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = 1$. Donc $BI \cdot BI/x = 1$. Donc $BI = \sqrt{x}$.

5. D'après **VI.4**, le point $B(1;\sqrt{x})$ est constructible. Donc $\sqrt{x}$ est constructible.

VII. Il est clair que 0 est constructible. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, n est constructible.

Initialisation : I est constructible, donc 1 est constructible.

Hérédité : Supposons que n est constructible. D'après **VI.1**, $1+n$ est constructible.

Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, n est constructible : si $n \in \mathbf{N}$ c'est déjà montré, sinon $-n$ est constructible et cela résulte de la question **IV.1**. Finalement, d'après la question **V**, tout nombre rationnel est constructible.

VIII. 2 est constructible d'après la question **VII**. Donc $\sqrt{2}$ est constructible d'après la question **VI.5**. Puis, $\sqrt[4]{2}$ est constructible d'après la question **VI.5**. Pour la construction, on s'appuie sur la question **VI**.

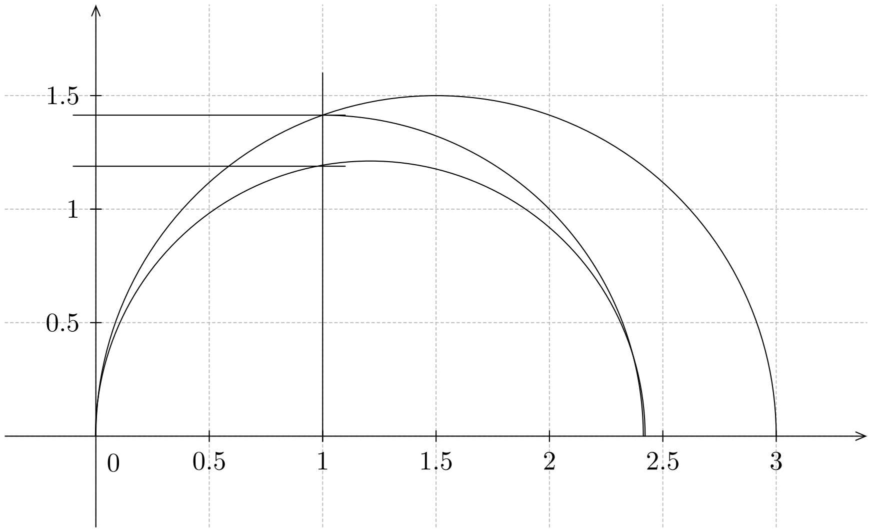

FIGURE 8. Construction de $\sqrt{2}$ et $\sqrt[4]{2}$ à la règle et au compas.

Partie B : Polygones réguliers.

IX. 1. Soit $z \in \mathbf{C}$ tel que $z^n = 1$. On pose $z = \rho e^{i\theta}$. Alors $\rho^n e^{in\theta} = 1$, donc $\rho^n = 1$ et $n\theta = 2k\pi$ pour un certain $k \in \mathbf{Z}$. Donc, quitte à poser $\omega = e^{2\pi i/n}$,

$$z \in \{1, \omega, \dots, \omega^{n-1}\}.$$

Réciproquement tous ces nombres sont solution.

2. Soit M_k le point d'affixe ω^k pour $k \in [\![1, \dots, n-1]\!]$. Montrons que $M_0 \dots M_{n-1}$ est un polygone régulier de centre O. Il s'agit de vérifier la définition donnée par l'énoncé.

— D'une part, pour tout k, $OM_k = |\omega^k| = |\omega|^k = 1$.

— D'autre part, avec la convention que $M_n = M_0$, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$

$$\left(\widehat{\overrightarrow{OM_k}, \overrightarrow{OM_{k+1}}}\right) \equiv \arg \frac{\omega^{k+1}}{\omega^k} \equiv \frac{2\pi}{n} \quad \text{mod. } 2\pi.$$

X. 1. M_1 a pour coordonnées $(\cos(2\pi/n); \sin(2\pi/n))$.

2. M_1 est l'intersection du cercle de rayon 1 avec la perpendiculaire à (OI) passant par B.

XI. Si B est constructible à la règle et au compas, M_1 aussi d'après la question **X.2**. Donnons alors un protocole de construction pour $M_2, \dots, M_{n-1}$. Notons $\mathbb{U}$ le cercle de centre O et de rayon 1. Pour k allant de 1 à $n-2$ dans cet ordre, on répète le procédé suivant.

(k) Le cercle de centre M_k passant par M_{k-1} coupe le cercle $\mathbb{U}$ en deux points, qui sont M_{k-1} et M_{k+1}. Ainsi, M_{k+1} est constructible à partir de la donnée de M_{k-1} et de M_k.

XII. Si $n = 3$ alors B est le point d'affixe $-1/2$. Si $n = 4$ alors B est le point O. Si $n = 6$ alors B est le point d'affixe $1/2$ et M_1 le point de coordonnées $(1/2, \sqrt{3}/2)$.

XIII. 1. D'après la formule d'Euler, $\alpha = 2\cos(2\pi/5)$.

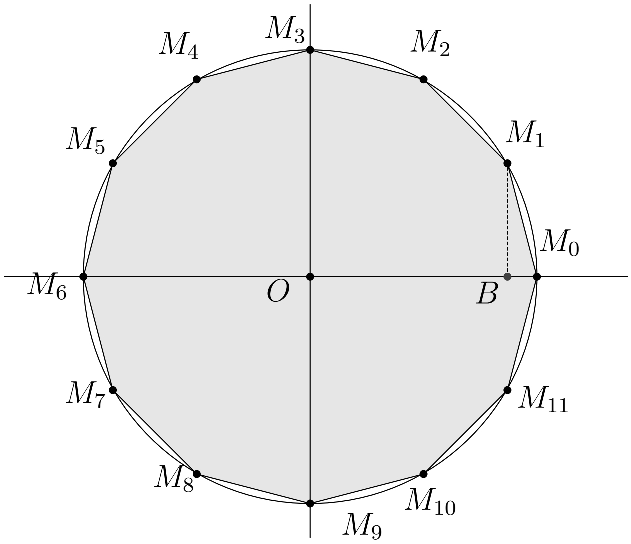

FIGURE 9. Le dodécagone régulier.

2. Calculons :

$$(1-\omega)(1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4) = 1-\omega^5 = 0.$$

Donc $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4 = 0$.

3. Etant donné que ω est de module 1 et que $\omega^5 = 1$, $\omega^4 = \omega^{-1} = \overline{\omega}$. Donc $\alpha = \omega^4$. Puis

$$\alpha^2 = (\omega+\omega^4)^2 = \omega^2 + 2\omega^5 + \omega^8 = \omega^2 + \omega^3 = 2.$$

4. D'après les question **XIII.3** et **XIII.2**,

$$\begin{aligned} -1+\alpha+\alpha^2 &= -1+\omega+\omega^4+\omega^2+\omega^3+2 \\ &= -1+1+1+\omega+\omega^4+\omega^2+\omega^3 \\ &= 0. \end{aligned}$$

On en déduit que α est la solution positive de l'équation $-1+x+x^2=0$; puis que

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\alpha}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$

5. B est constructible donc d'après la question **XI**, $M_0, \ldots, M_4$ le sont aussi.

XIV. 1. D'après le théorème de Pythagore appliqué dans le triangle BOJ rectangle en O, $BJ = \frac{\sqrt{5}}{2}$. D'après la question **XIII**, D a pour affixe $\cos(2\pi/5)$.

2. On a représenté la construction de $M_0M_1M_2M_3M_4$ sur la Figure 10.

COMPLÉMENTS

Extraits du rapport de jury. *Ces deux problèmes*[2] *pouvaient permettre d'apprécier, outre les qualités scientifiques des candidats, leur aptitude à se placer dans une optique professionnelle, notamment avec des références explicites [...] à une classe de collège (problème 2,* **IV***).*

2. NdR : les problèmes 1 et 2 de l'épreuve écrite 2.

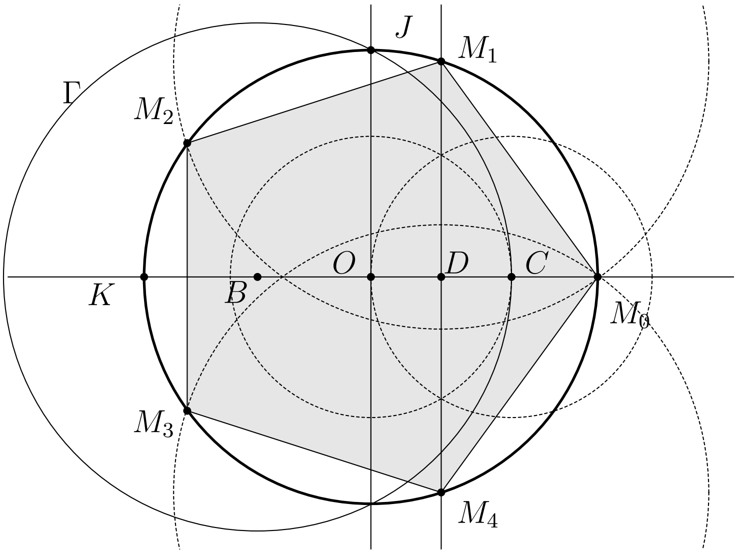

Figure 10. Construction du pentagone régulier à la règle et au compas.

Les définitions (point constructible, nombre constructible, polygone régulier) n'ont pas été bien lues et assimilées par les candidats. Lorsqu'elles semblent avoir été lues, les candidats ne les utilisent pas à bon escient. En particulier, beaucoup de candidats n'ont pas compris ce que le jury attendait d'eux : la constructibilité d'un point n'est que très rarement justifiée à partir, le cas échéant, de points déjà construits. Aussi, même si les programmes de construction sont correctement rédigés, les candidats ne démontrent que très rarement que les constructions qu'ils proposent correspondent aux objets géométriques demandés. Les constructions géométriques sont très mal réalisées ; beaucoup de candidats ne semblent pas avoir à leur disposition leur matériel de géométrie (règle, compas).

De nombreux candidats ont confondu le point de coordonnées $(x;0)$ *et le réel* x*. Les notations de géométrie élémentaire ne sont pas maîtrisées : point, segment, demi-droite, droite, longueur.*

*Le théorème de Thalès est bien utilisé (***A.IV.3***).*

Les calculs sur les nombres complexes sont très diversement maitrisés. Peu de candidats se montrent capables de résoudre l'équation $z^n = 1$*. Beaucoup se contentent de donner les solutions* $\mathrm{e}^{2ik\pi/n}$ *sans faire la résolution, ni même préciser les valeurs possibles pour* k*. Enfin, la somme des racines* n*-ièmes de l'unité (dans le problème,* n *était égal à* 5*) ne semble pas être un résultat connu.*

La réussite aux épreuves écrites nécessite que la préparation des candidats prenne en compte les éléments suivants :

— *maîtriser et énoncer avec précision, lorsqu'elles sont utilisées, les connaissances mathématiques de base, indispensables à la prise de recul sur les notions enseignées ;*
— *rédiger clairement et de manière rigoureuse une démonstration simple, ce qui est une composante essentielle du métier de professeur de mathématiques ;*
— *exposer avec toute la précision voulue, en mentionnant clairement les étapes successives, les raisonnements, plus particulièrement ceux qui relèvent du collège ou du lycée.*

On rappelle aussi l'importance du respect des notations, de la nécessité de conclure une argumentation, mais aussi l'intérêt de la lisibilité d'une copie.

Des médiatrices et des bissectrices. On rappelle la définition géométrique (qui est celle du cahier de cours au collège) et la définition ensembliste, ou par les distances (qui est vue comme une propriété, ou comme une seconde caractérisation).

Définition « constructiviste »	**Définition « ensembliste »**
La médiatrice du segment $[AB]$, c'est la droite perpendiculaire à $[AB]$ passant par le milieu de $[AB]$.	La médiatrice de $[AB]$, c'est l'ensemble des points équidistants de A et de B.
La bissectrice du secteur angulaire délimité par $[OA)$ et $[OB)$, c'est la demi-droite qui partage ce secteur angulaire en deux secteurs angulaires égaux (ou de même angle).	La bissectrice du secteur angulaire délimité par $[OA)$ et $[OB)$, c'est l'ensemble des points du secteur angulaire (au sens ensembliste) qui sont équidistants de $[OA)$ et de $[OB)$.

La définition ensembliste est celle qui permet de montrer le plus directement que les médiatrices, resp. les bissectrices sont concourantes au centre du cercle circonscrit, resp. au centre du cercle inscrit.

Propriétés des parallélogrammes. A la justification de la question **I.3** on est passé de l'une à l'autre des caractérisations du parallélogramme. Rappelons-les sans démonstration.

Proposition. *Soit $ABCD$ un quadrilatère non croisé. S'équivalent*

(1) Les côtés opposés de $ABCD$ sont de même longueur (c'est-à-dire, $AB = CD$ et $BC = DA$).

(2) Les côtés opposés de $ABCD$ sont parallèles.

(3) $ABCD$ possède une paire de côtés opposés parallèles et de même longueur.

(4) Les diagonales de $ABCD$ s'intersectent en leurs milieux.

Pour aller un peu plus loin. Un ouvrage pour vous. *Théorie des corps : La règle et le compas*, J.-C. Carréga, (Hermann, 2001, Collection formation des enseignants). Il y est notamment montré que la trisection de l'angle et la duplication du cube ne sont pas possible à la règle et au compas, ce qui contrairement à la preuve de l'impossibilité de la quadrature du cercle avec ces mêmes outils, est de nos jours plutôt accessible (j'insiste !).

La « reconstruction » des opérations menée dans la question **IV** fait partie d'une équivalence profonde entre la théorie des plans affines que vous avez étudiée au collège et celle des corps que vous avez étudiée au premier cycle universitaire. Expliciter cette équivalence n'est pas un objectif de la préparation au CAPES ; cependant il est bon de savoir qu'elle existe, afin de réconcilier ces deux points de vue : ce que vous savez de la géométrie affine depuis le collège, et ce qu'on vous apprend à l'université.

Constructions à la règle trop courte et au compas à ouverture limitée. Dans nos constructions la règle et le compas sont toujours supposées idéaux : la règle est infiniment longue et le compas peut être d'un écartement arbitrairement petit ou arbitrairement grand. Que se passe-t-il avec une règle trop petite et un compas d'ouverture limitée ? On pourra consulter l'article de X. Caruso qui répond à ces questions.

https://xavier.caruso.ovh/papers/publis/troppetit.pdf

Sur la constructibilité des n-gones. On peut montrer que le n-gone régulier est constructible si et seulement si c'est le produit d'une puissance de 2 et de nombres premiers de Fermat distincts (on dit que p est un nombre premier de Fermat s'il est premier et de la forme $2^{2^k}+1$ pour un certain $k \geqslant 0$).

Les 24 valeurs de n comprises entre 3 et 99 pour lesquelles le n-gone régulier est constructible sont tabulées ci-dessous. On peut observer qu'elles sont de plus en plus espacées. Les nombres de Fermat sont en gras, suivis de la valeur de k correspondante.

3 ($k=0$)	8	16	30	48	68
4	10	**17** ($k=2$)	32	51	80
5 ($k=1$)	12	20	34	60	85
6	15	24	40	64	96

On attribue généralement à Gauss (alors âgé de 19 ans) la construction du 17-gone régulier, ce qui équivaut à l'expression de

$$\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) = \frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}}{16}.$$

Le 96-gone et la méthode d'Archimède. Un fait de gloire d'Archimède est d'avoir détenu la meilleure approximation de π de l'Antiquité grecque. Je vous conseille à ce sujet le document ressource suivant.

https://media.eduscol.education.fr/ftp_eduscol/2019/Ressources/Mathematiques/RA19_Lycee_G_1_MATH_Algorithmique_et_Programmation_activite_10.html

Concrètement, Archimède a mesuré les périmètres d'un n-gone inscrit et exinscrit du cercle, pour $n = 96$ (la plus grande valeur de la table précédente, et celle de la dernière colonne pour laquelle la construction est la moins difficile). On montre en effet (à l'aide du théorème de l'angle au centre) que le périmètre du n-gone inscrit du cercle de diamètre 1 est $n\sin(\pi/n)$ et celui du polygone exinscrit est $n\tan(\pi/n)$.

On omet en revanche souvent de signaler que l'encadrement de π qui est obtenu par cette méthode est un encadrement par des nombres *constructibles, mais pas rationnels.* Le problème qui se pose dès lors est en fait un problème d'approximation diophantienne : l'approximation par des rationnels de ces nombres constructibles, par excès ou par défaut. Les bornes que l'on retient d'Archimède sont $223/71 < \pi < 22/7$. Les voici sous forme décimale, comparées au périmètres des polygones considérés par Archimède, ainsi qu'à la valeur approchée de π.

$223/71$	**3,14**084507042
$96\sin(\pi/96)$	**3,141**03195089
π	**3,14159265359**
$96\tan(\pi/96)$	**3,14**271459965
$22/7$	**3,14**285714286

La méthode d'Archimède n'est pas la plus précise ni la plus ingénieuse de l'Antiquité. Au IIIe siècle après J.-C., Liu Hui a conçu une méthode lui demandant seulement de construire un 96-gone et à l'aide de considérations sur les aires, d'estimer π à $3927/1250 = 3,1416$, et, au Ve siècle, l'astronome Zhu Chongzhi estima π à $355/113 \approx 3.1415929$, un record qui devait tenir près de neuf cent ans.

La constructibilité au sens des origamis. Les constructions par origami permettent de construire tous les nombres constructibles à la règle et au compas, mais aussi d'autres. En particulier la trisection de l'angle et la duplication du cube sont possibles ! Pour une introduction bien écrite, voir *Solving Cubics With Creases : The Work of Beloch and Lill* par Thomas C. Hull (*American Math Monthly*, April 2011). Dans les énoncés suivants, on désigne par μ_x le polynôme minimal de x (à coefficients dans $\mathbf{Q}$).

Théorème 1 (Constructibilité à la règle et au compas)**.** *Soit x un nombre réel. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(1) x est constructible à la règle et au compas.

(2) $\deg \mu_x = 2^s$ pour un certain $s \geqslant 0$.

Si, de plus, $x = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ pour un certain $n \geqslant 3$, alors les conditions suivantes sont équivalentes à

$$n = 2^t p_1 \cdots p_d$$

où les p_i sont premiers, distincts, et il existe r_i tel que $p_i - 1 = 2^{r_i}$ pour tout i.

Théorème 2 (Constructibilité par origami)**.** *Soit x un nombre réel. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(1) x est constructible par origami (sans plis simultanés).

(2) $\deg \mu_x = 2^r 3^s$ pour certains $r, s \geqslant 0$

Si, de plus, $x = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ pour un certain $n \geqslant 3$, alors les conditions suivantes sont équivalentes à

$$n = 2^u 3^v p_1 \cdots p_d$$

où les p_i sont premiers, distincts, et il existe r_i, s_i tels que $p_i - 1 = 2^{r_i} 3^{s_i}$ pour tout i.

(On peut montrer que si p est premier et $p-1$ une puissance de 2, alors p est un nombre de Fermat ; mais j'ai préféré garder la forme ci-dessus pour aider la comparaison.) Dans les deux théorèmes le sens (2) implique (1) peut se démontrer à l'aide de la théorie de Galois ; dans le cas origami, il faut montrer en outre que tous les groupes d'ordre $2^r 3^s$ ont la propriété dite d'être résoluble (ce qui demande un peu plus de théorie des groupes que dans le cas de la règle et du compas seuls).