Quicksort

Guillermo Palma

Universidad Simón Bolívar
Departamento de Computación y T.I.

CI-2612: Algoritmos y Estructuras II

Plan

1. Descripción de Quicksort
2. Rendimiento de Quicksort
3. Una versión aleatoria de Quicksort

Sobre Quicksort

- Algoritmo de ordenamiento que aplica la técnica Divide-and-conquer
- Inventado por Tony Hoare (1961)
- Popularizado por Robert Sedgewick (1976)
- El algoritmo en la práctica es más rápido que los otros algoritmos de ordenamientos basados en comparación de claves (Heapsort, Mergesort, Insertionsort, etc.)
- Tiempo del peor caso es $\Theta(n^2)$
- Tiempo del caso promedio $\Theta(n \log n)$

Idea de Quicksort

Divide

$A[p\,..\,r]$ se divide en $A[p\,..\,q-1]$ y $A[q+1\,..\,q]$, tal que todos los elementos $A[p\,..\,q-1]$ son menores o igual a $A[q]$ y todos elementos $A[p\,..\,q-1]$ son mayores o iguales a $A[q]$

Conquer

Se ordenan $A[p\,..\,q-1]$ y $A[q+1\,..\,q]$ con llamadas recursivas a Quicksort

Combine

Como los subarreglos que se obtienes están ordenados, el arreglo $A[p\,..\,r]$ termina estando ordenado

Procedimiento Quicksort

Procedimiento QUICKSORT(A, p, r)

inicio
  si $p < r$ **entonces**
    $q \leftarrow$ `PARTITION`(A, p, r) ;
    `QUICKSORT`$(A, p, q - 1)$;
    `QUICKSORT`$(A, q + 1, r)$;

- La llamada inicial del algoritmo es `QUICKSORT`$(A, 1, A.length)$.
- Recurrencia $T(n) = T(q) + T(n - q) + n$

Partición de un arreglo

Función PARTITION(A, p, r)

inicio
  $x \leftarrow A[r]$;
  $i \leftarrow p - 1$;
  para $j \leftarrow p$ **a** $r - 1$ **hacer**
    si $A[j] \leq x$ **entonces**
      $i \leftarrow i + 1$;
      `SWAP`$(A[i], A[j])$;
  `SWAP`$(A[i + 1], A[r])$;
  retornar $i + 1$;

Tiempo de ejecución: $\Theta(n)$, donde $n = r - p + 1$

Invariante en la partición del arreglo

En las líneas 4-7 de la función PARTITION, se encuentra el ciclo **para** y en él se cumple que:

- Si $p \leq k \leq i$, entonces $A[k] \leq x$
- Si $i + 1 \leq k \leq j - 1$, entonces $A[k] > x$
- Si $k = r$, entonces $A[k] = x$

Invariante en la partición del arreglo

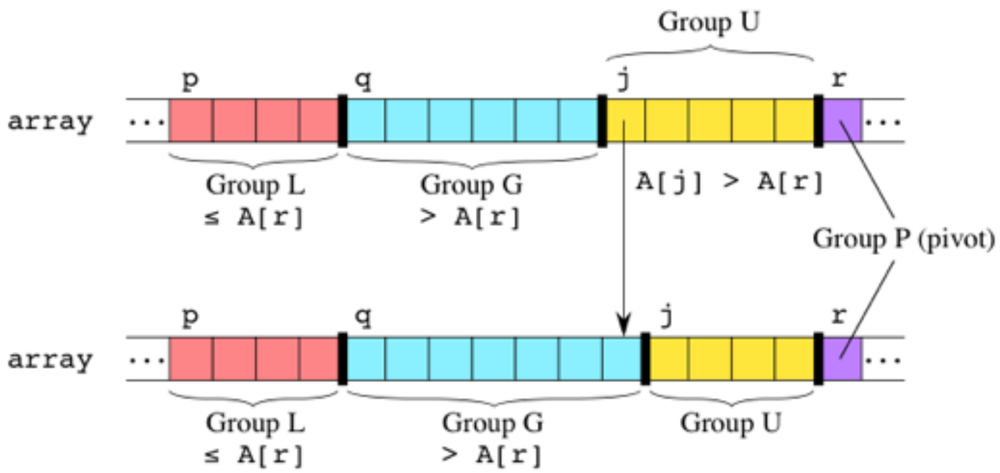


Figura: Caso $A[j] > A[r]$. Fuente: [1]

Invariante en la partición del arreglo

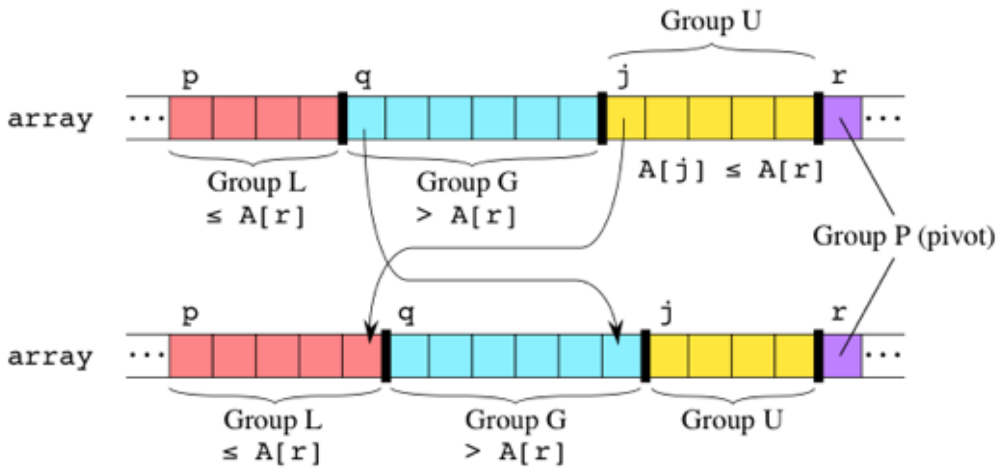


Figura: Caso $A[j] \leq A[r]$. Fuente: [1]

Ejemplo de la partición del arreglo

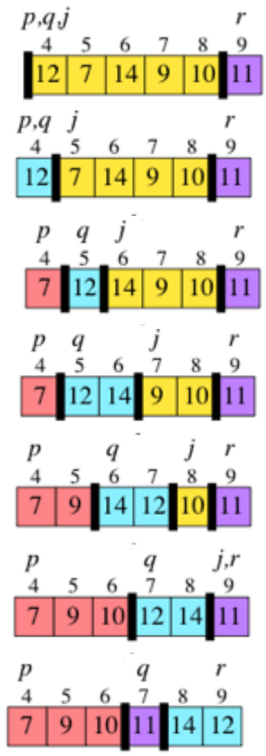


Figura: Ilustración de la función `Partition`. Fuente: [1]

Ejemplo de Quicksort

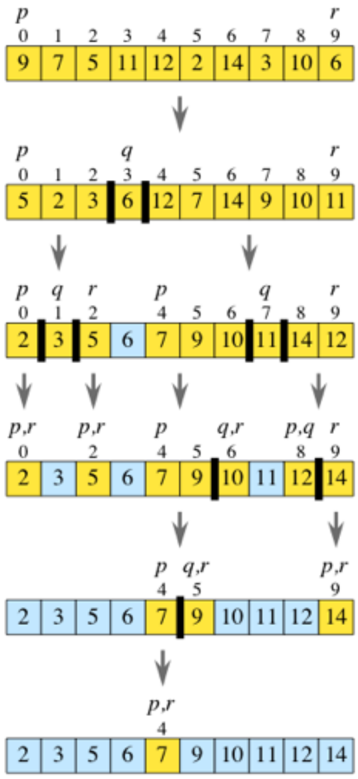


Figura: Ilustración del algoritmo `Quicksort`. Fuente: [1]

Tiempo del peor caso de la partición

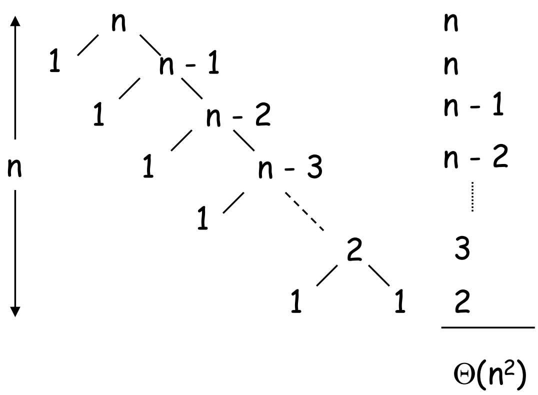


Figura: Árbol de recursión de `Quicksort` con una partición de 1 a $n - 1$ [1]

- El subarreglo de un lado del pivote q tiene 1 elemento y el otro subarreglo $n - 1$ elementos
- Recurrencia: $q = 1$, entonces $T(n) = T(1) + T(n-1) + n$
- $T(1) = \Theta(1)$
- $T(n) = T(n-1) + n = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + n = \Theta(n^2)$
- Por lo tanto el peor caso es $\Theta(n^2)$

Tiempo del mejor caso de la partición

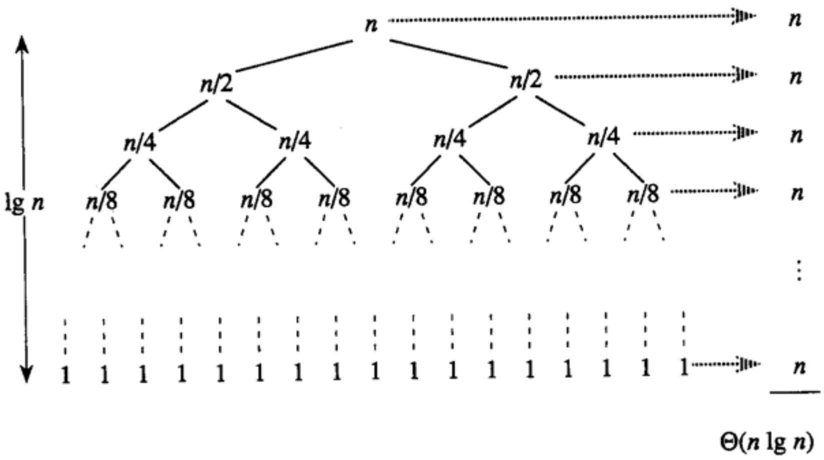


Figura: Árbol de recursión de `Quicksort` con una partición de $n/2$ [1]

- Los subarreglos izquierdo y derecho del pivote q tienen el mismo tamaño, esto es $n/2$
- Recurrencia: $q = n/2$, entonces $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n)$
- $T(n) = \Theta(n \log n)$
- Por lo tanto el mejor caso es $\Theta(n \log n)$

Tiempo de un caso entre el mejor y el peor caso

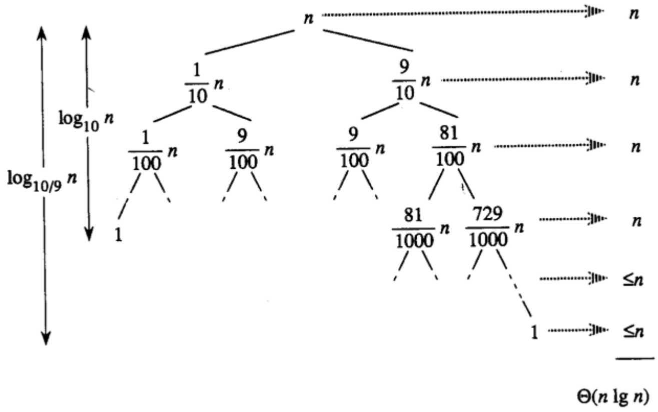
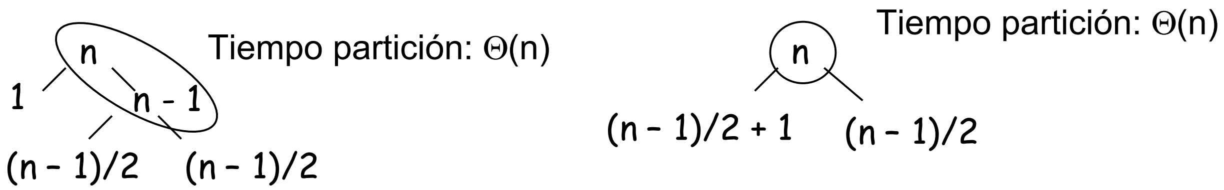


Figura: Árbol de recursión de `Quicksort` con una partición de 9 a 1 [1]

- Los subarreglos izquierdo y derecho del pivote q tienen una diferencia de 9 a 1.
- Recurrencia: $T(n) = T(9n/10) + T(n/10) + \Theta(n)$
- Cota superior: $T(n) \leq n \sum_{i=0}^{\log_{10/9}} 1 = n(\log_{10/9} n + 1) = C1 n \log n$
- Cota inferior: $T(n) \geq n \sum_{i=0}^{\log_{10}} 1 = n(\log_{10} n + 1) = C2 n \log n$
- Por lo tanto $T(n) = \Theta(n \log n)$

Intuición del caso promedio



Se alterna entre buenas y malas particiones

Patición casi balanceada

Figura: A la izquierda dos niveles del árbol de recursión de `Quicksort`, a la derecha un nivel. Fuente: [2]

- Todas las permutaciones del arreglo de entrada son igualmente probables
- En una entrada aleatoria, una partición que pueden ser balanceada (buena) o no balanceada (mala)
- Se encuentran buenos y malos pivotes, aleatoriamente distribuidos en el árbol
- El tiempo de Quicksort cuando las llamadas recursivas alternan entre balanceadas o no balanceadas particiones es $O(n \log n)$

Partición Aleatoria

Función RANDOMIZED-PARTITION(A, p, r)

inicio
  $i \leftarrow$ `RANDOM`(p, r) ;
  `SWAP`$(A[r], A[i])$;
  retornar `PARTITION`(A, p, r) ;

Procedimiento Quicksort Aleatorio

Procedimiento RANDOMIZED-QUICKSORT(A, p, r)

inicio
  si $p < r$ **entonces**
    $q \leftarrow$ `RANDOMIZED-PARTITION`(A, p, r) ;
    `RANDOMIZED-QUICKSORT`$(A, p, q-1)$;
    `RANDOMIZED-QUICKSORT`$(A, q+1, r)$;

La llamada inicial del algoritmo es `RANDOMIZED-QUICKSORT`$(A, 1, A.length)$.

Referencias

- T. Cormen, D. Balkcom, and Khan Academy Team. `shorturl.at/sBNS7`, septiembre 2019.
- T. Cormen, C. Leirserson, R. Rivest, and C. Stein. *Introduction to Algorithms*. McGraw Hill, 3ra edition, 2009.