Solución de recurrencias

Guillermo Palma

Universidad Simón Bolívar
Departamento de Computación y T.I.

CI-2612: Algoritmos y Estructuras II

Plan

Pasos para resolver una recurrencia usando el método de sustitución

- Se propone una solución
  - La solución propuesta es del tipo $T(n) = O(f(n))$
  - Hipótesis inductiva: $T(k) \leq c\ f(k)$, para todo $k < n$
  - Se quiere probar: $T(n) \leq c\ f(n)$, para algún $c > 0$ y $n \geq n_0$
- Se prueba la solución propuesta por inducción. La idea es usar la hipótesis inductiva para encontrar valores para las constantes c y n_o, para los cuales se cumple la tesis a probar.

Ejemplo del método de sustitución

Recurrencia: $T(n) = 2T(n/2) + n$

Solución

- *Se propone*: $T(n) = O(n \log n)$
- *Hipótesis inductiva* : $T(n/2) \leq c\ (n/2) \log(n/2)$
- *Se quiere probar*: $T(n) \leq c\ n \log(n)$, para algún c y $n \geq n_0$

Prueba por inducción

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2T(n/2) + n \leq 2c(n/2)\log(n/2) + n \\
&= cn\log n - cn + n \leq cn\log n
\end{aligned}
$$

Se tiene que si $-cn + n \leq 0$ entonces $c \geq 1$

Pasos para resolver una recurrencia usando el método del árbol de recursión

- Cada nodo representa el costo de la función en los diferentes niveles de recursión
- Se suma el costo de todos los niveles del árbol para obtener el costo de la función

Ejemplo del método del árbol de recursión

Recurrencia: $W(n) = 2\ W(n/2) + n^2$

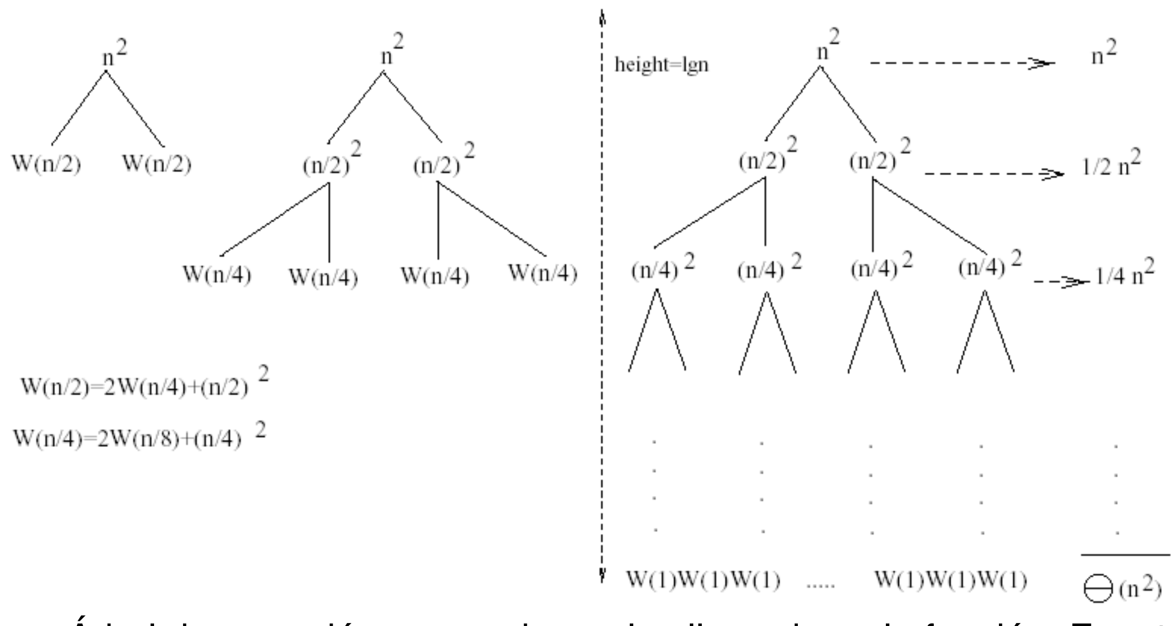

Figura: Árbol de recursión generado por las llamadas a la función. Fuente [1]

Ejemplo del método del árbol de recursión

Recurrencia: $W(n) = 2\ W(n/2) + n^2$

- El tamaño del problema de la entrada de la recurrencia a nivel i es $n/2^i$
- El tamaño del problema de la entrada de la recurrencia es 1 cuando $1 = n/2^i$, esto es cuando el nivel i es $i = \log n$
- El número de nodos al nivel i es $i = 2^i$
- El costo del problema al nivel i es $(n/2^i)^2$.
- $W(n) = \sum_{i=0}^{\log n - 1} \frac{n^2}{2^i} + 2^{\log n} W(1) = n^2 \sum_{i=0}^{\log n - 1} \frac{1}{2^i} + n \leq n^2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} + O(n) = n^2(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}) + O(n) = n^2(1+1) + O(n) = 2n^2 + O(n)$
- Por lo tanto, $W(n) = O(n^2)$

Método maestro

Ecuación de recurrencia del método maestro

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

donde $a \geq 1$, $b > 1$ y $f(n)$ positiva

- Caso 1: $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$ para $\epsilon > 0$ entonces $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
- Caso 2: $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ entonces $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$
- Caso 3: $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$ para $\epsilon > 0$ y si $af(n/b) \leq cf(n)$ para algún $c < 1$, entonces $T(n) = \Theta(f(n))$

Ejemplo del método maestro

- Recurrencia $T(n) = 2T(n/2) + n$
- $a = 2$, $b = 2$ y $\log_2 2 = 1$
- Se compara $n^{\log_2 2}$ con $f(n) = n$
- $f(n) = \Theta(n)$, esto es caso 2
- $T(n) = \Theta(n \log n)$

Referencias

T. Cormen, C. Leirserson, R. Rivest, and C. Stein.
Introduction to Algorithms.
McGraw Hill, 3ra edition, 2009.