

Árboles rojo-negro

Guillermo Palma

Universidad Simón Bolívar
Departamento de Computación y T.I.

CI-2612: Algoritmos y Estructuras de Datos II



(USB)

Árboles rojo-negro

CI-2612 enero-marzo 2020

1 / 27

Plan

- 1 Características de los árboles rojo-negro
- 2 Inserción en los árboles rojo-negro
- 3 Análisis de las operaciones



(USB)

Árboles rojo-negro

CI-2612 enero-marzo 2020

2 / 27

Sobre los árboles rojo-negro

- Son árboles binarios con un campo adicional en los nodos que es un color rojo o negro
- Se tienen reglas que indican como el árbol debe ser coloreado
- Las reglas de coloración aseguran que en el árbol no hay ningún camino que sea el doble de otro
- El árbol es balanceado
- Se garantiza que las operaciones sobre el árbol se ejecutan en tiempo $O(\log n)$
- Hay un centinela que apunta a todas las hojas NIL del árbol y a la raíz



Ejemplo de un árbol rojo-negro I

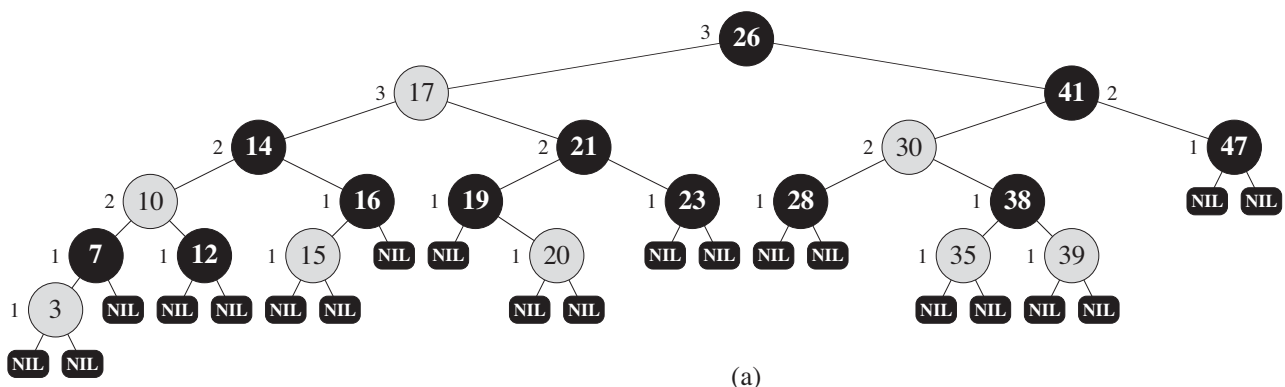


Figura: Árbol rojo-negro con todas las hojas NIL coloreadas de negro.
Fuente [1]



Ejemplo de un árbol rojo-negro II

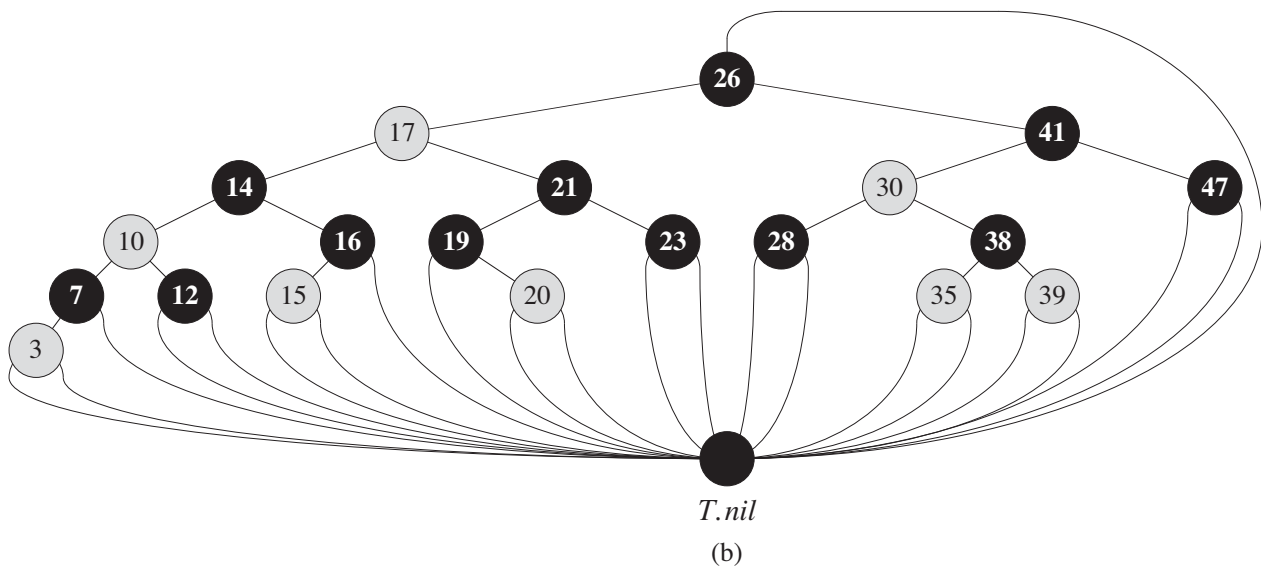


Figura: Árbol rojo-negro las hojas NIL son reemplazadas por un centinela.
Fuente [1]



Ejemplo de un árbol rojo-negro III

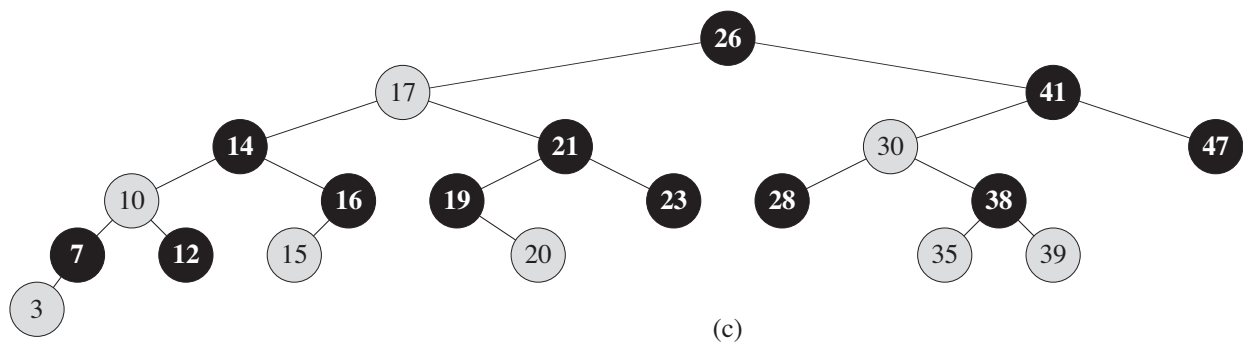


Figura: Árbol rojo-negro donde las hojas son omitidas. Fuente [1]



Propiedades de los árboles rojo-negro

Todo árbol rojo-negro debe satisfacer las siguientes propiedades:

- ① Cada nodo es coloreado de rojo o negro
- ② La raíz de color negro
- ③ Cada hoja (NIL) es de color negro
- ④ Si un nodo es de color rojo, entonces sus hijos son de color negro
- ⑤ Para cada nodo, todos los caminos desde el nodo hasta sus hojas, contienen el mismo número de nodos de color negro

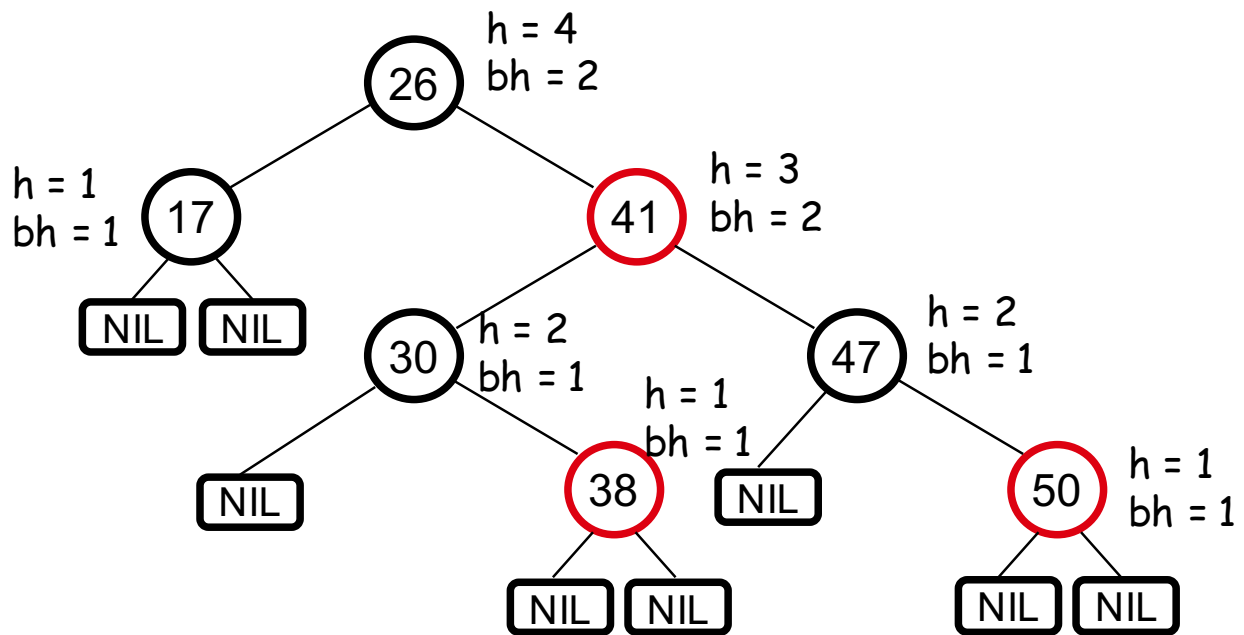


Black-height en un árbol rojo-negro

- **Height:** número de lados del camino las largo desde un nodo x hasta una hoja
- **Black-height:** número de nodos de color negro desde un nodo x hasta la hoja, sin incluir x



Ejemplo de un Black-Height en un árbol rojo-negro



Observaciones sobre los árboles rojo-negro

Observación 1

Dado cualquier nodo x con altura $h(x)$, se cumple que $bh(x) \geq \frac{h(x)}{2}$

Observación 2

Dado cualquier subárbol cuya raíz sea el nodo x , se cumple que el subárbol contiene al menos $2^{bh(x)} - 1$ nodos internos



Observaciones sobre los árboles rojo-negro

Lema

Un árbol rojo-negro con n nodos internos tiene una altura de a lo sumo $2 \log(n + 1)$



Operaciones sobre los árboles rojo-negro

- Las operaciones sobre los árboles binarios, MINIMUM, MAXIMUM, SUCCESSOR, PREDECESSOR, y SEARCH se pueden aplicar a árboles rojo-negro **sin modificación**. El tiempo de ejecución en árboles rojo-negro es $O(\log n)$
- Las operaciones sobre los árboles binarios, TREE-INSERT y TREE-DELETE se pueden aplicar a árboles rojo-negro **con modificaciones** para garantizar que se cumplan las propiedades de los mismos. El tiempo de ejecución en árboles rojo-negro es $O(\log n)$



Rotaciones sobre los árboles rojo-negro

- Operaciones para restaurar las propiedades de los árboles rojo-negro
- Se pueden colorear los nodos de otro color
- Se cambia la estructura de los subárboles
- Se mantiene la estructura y propiedades de los árboles binarios



Rotación izquierda

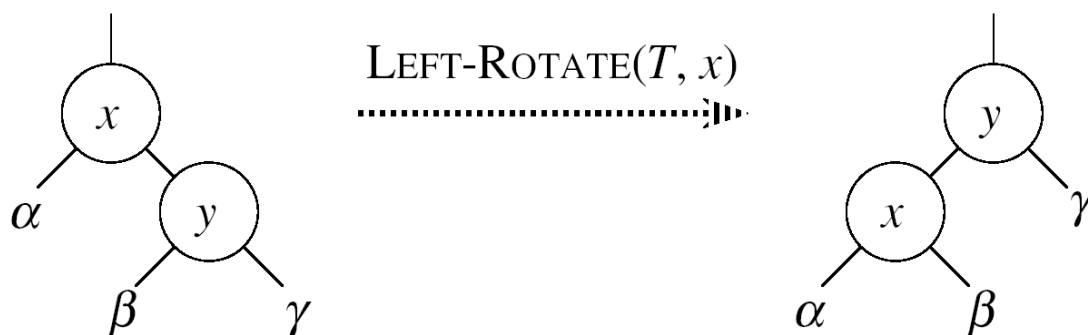


Figura: El hijo derecho x de y no es NIL . Fuente [1]



Ejemplo de rotación izquierda

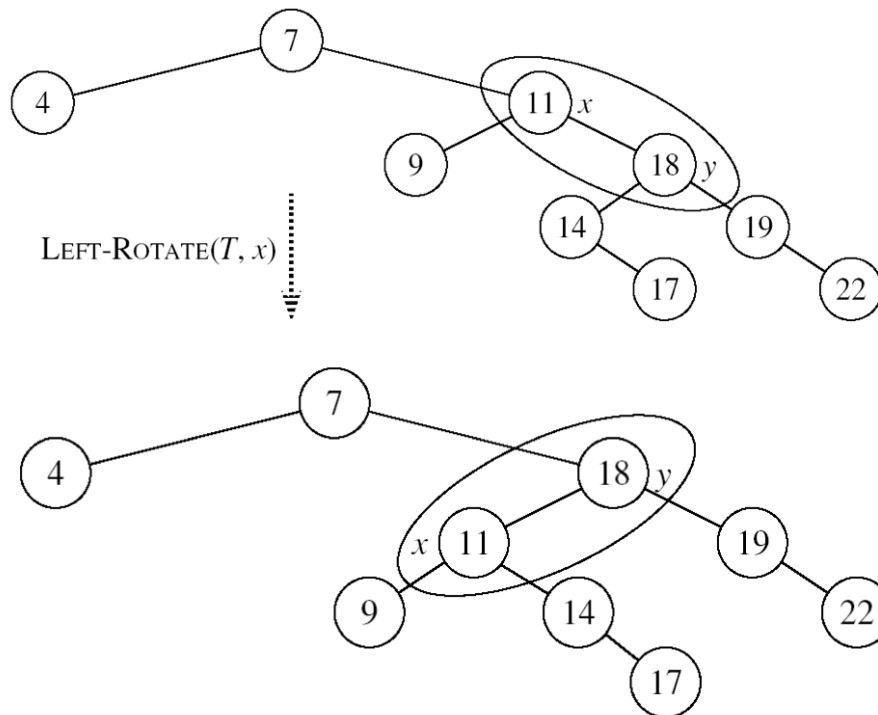


Figura: Fuente [1]



Rotación derecha

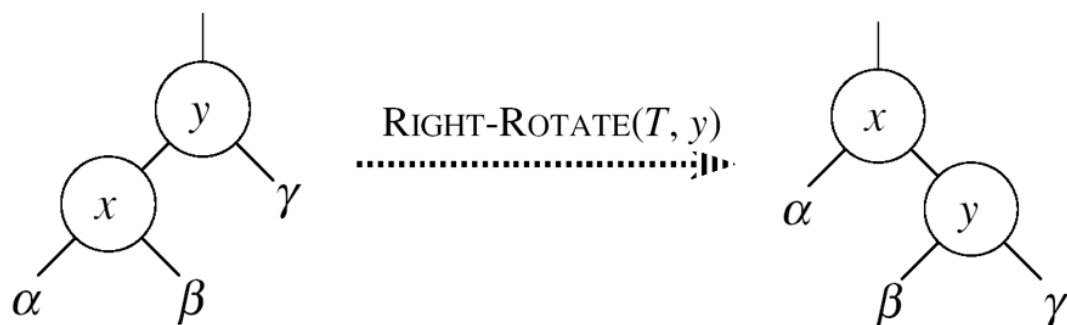


Figura: El hijo izquierdo x de y no es NIL . Fuente [1]



Inserción en los árboles rojo-negro

- Se quiere insertar un nodo con clave z en un árbol rojo-negro
- Se inserta el nodo con clave z usando como en la inserción en los árboles binarios
- Se colorea el nodo con clave z de rojo
- Se restaura las propiedades de los árboles rojo-negro con un procedimiento (RB-INSERT-FIXUP)



Ejemplo de inserción

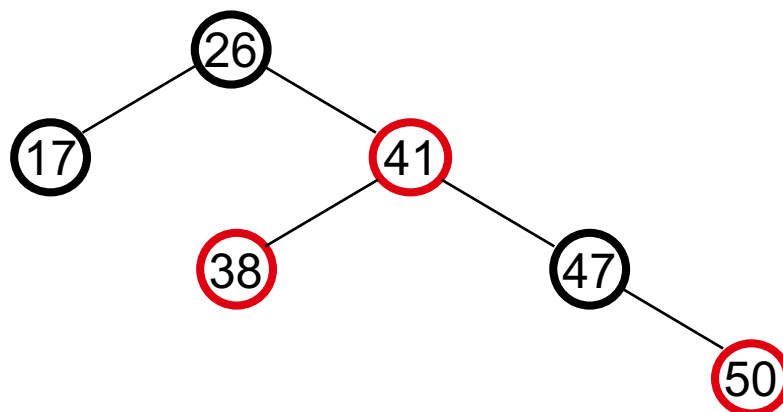


Figura: Se inserta el nodo con clave 38 en el árbol



RB-INSERT-FIXUP caso 1

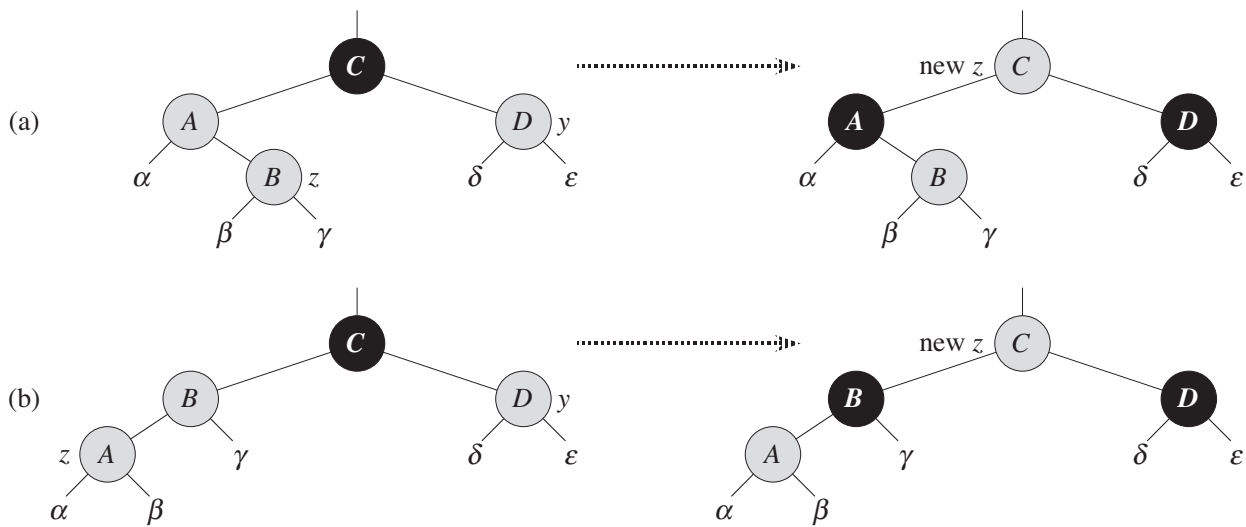


Figura: Caso 1: El tío y de z es un nodo de color rojo. Fuente [1]



RB-INSERT-FIXUP caso 2 y caso 3

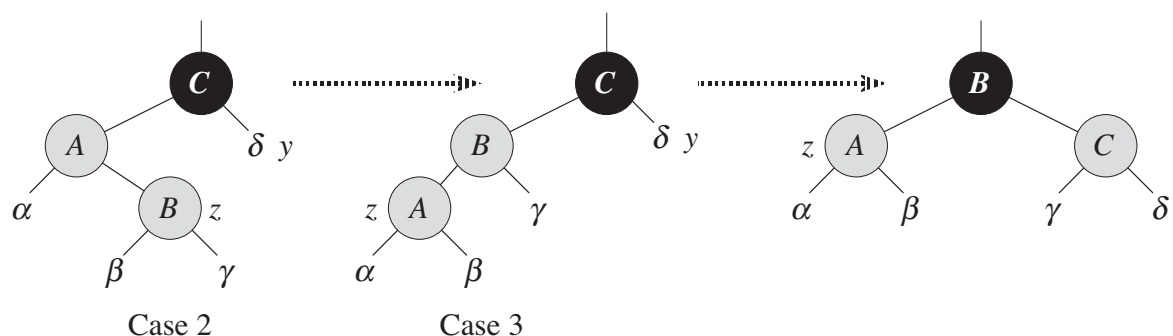


Figura: Caso 2: El tío y de z es un nodo de color negro y z es un hijo derecho. Caso 3: El tío y de z es un nodo de color negro y z es un hijo izquierdo Fuente [1]



Ejemplo completo de inserción

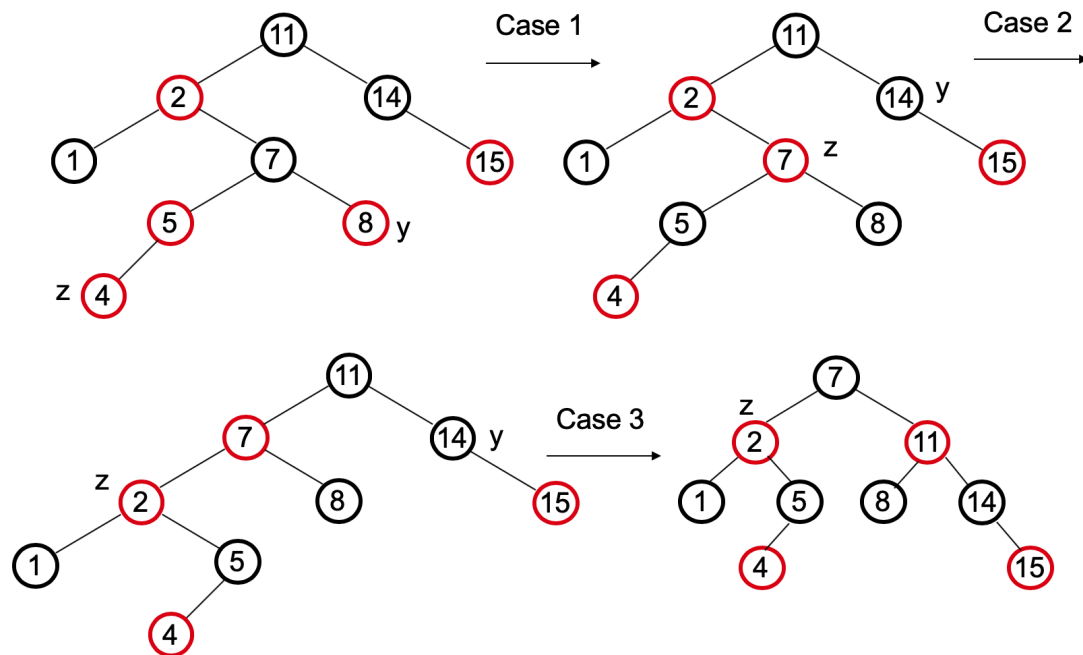


Figura: Insertando un nodo con clave igual a 4. Fuente [1]



Eliminación en los árboles rojo-negro

- Tarea: Estudiar la eliminación en los árboles rojo-negro



Análisis de las operaciones árboles rojo-negro

- Los árboles rojo-negro garantizan que dado n nodos, entonces la altura h del árbol es $O(\log n)$

Teorema

El tiempo de las operaciones de Búsqueda, Mínimo, Máximo, Sucesor, Predecesor, Inserción e Eliminación en los árboles rojo-negro son $O(h)$



Referencias



T. Cormen, C. Leirserson, R. Rivest, and C. Stein.
Introduction to Algorithms.
McGraw Hill, 3ra edition, 2009.

