

Studio dell'oscillatore Cross Coupled

A cura di Giacomo Parmeggiani

Sommario

Sommario

| | |
|--|-----------|
| Introduzione | 2 |
| Circuito RLC..... | 3 |
| Il fattore di merito Q | 6 |
| Considerazioni sul circuito RLC..... | 7 |
| Cross-coupled pair | 9 |
| Studio del circuito non lineare | 12 |
| Approccio qualitativo | 12 |
| Approccio matematicamente rigoroso | 15 |
| Misura accurata del periodo di oscillazione | 19 |
| La caratteristica $i = gV$ | 19 |
| Analisi nodale modificata non lineare | 20 |
| Misura del periodo di oscillazione..... | 23 |
| Realizzazione del prototipo e misure di laboratorio | 26 |

Introduzione

I circuiti oscillanti hanno da sempre attratto la mia attenzione. Sono dei circuiti particolari perché non hanno un ingresso al quale applicare un segnale da elaborare, filtrandolo o amplificandolo. Al contrario, essi sono in grado di generare autonomamente un segnale, ossia sono capaci di far variare continuativamente delle tensioni o delle correnti al loro interno. Questo comportamento non è per nulla banale: quasi tutti i sistemi che compongono la realtà che ci circonda tendono a tornare, prima o poi, alla condizione di equilibrio, tipicamente di quiete. Ad esempio, un diapason che viene colpito tenderà inizialmente ad oscillare, producendo un suono, ma l'intensità di questo tenderà a calare sempre di più, fino ad annullarsi dopo un certo lasso di tempo. Ciò accade perché in natura non esistono sistemi senza perdite: ad ogni oscillazione ci sarà una perdita di energia, che tipicamente è dissipata in calore.

Lo scopo di questo studio è quello di analizzare un oscillatore sinusoidale, realizzato con uno stadio non lineare a MOSFET. Si partirà dallo studio del circuito risonante RLC, per poi introdurre un sistema per evitare che le oscillazioni si smorzino: la coppia cross-coupled di transistor. Infine si ricaverà con buona accuratezza il periodo delle oscillazioni, obiettivo raggiunto con metodi di analisi numerica.

Questo documento è accompagnato da un pacchetto contenente tutti i file correlati, tra cui gli script e le funzioni di MATLAB, gli schemi elettronici disegnati con Orcad, grafici e altro.

Per verificare realmente quanto studiato durante la preparazione di questo documento, ho anche realizzato fisicamente il circuito elettronico, sottoponendolo a misure di laboratorio.

Circuito RLC

Il circuito più classico in grado di produrre un segnale sinusoidale è la rete risonante RLC (Figura 1). Purtroppo la presenza della resistenza tenderà a smorzare le oscillazioni con il passare del tempo. L'idea alla base di questo circuito consiste nel collegare un condensatore e un induttore tra di loro (tralasciando per il momento la presenza della resistenza). In questo modo l'energia del sistema continuerà ad essere scambiata tra due elementi, trasformandosi da campo elettrico nel condensatore, ossia tensione ai suoi capi, in campo magnetico nell'induttore, ossia corrente attraverso di esso, e viceversa. Andando a studiare l'equazione differenziale che governa il circuito, si ricava che l'andamento temporale della tensione e della corrente nel circuito è proprio di tipo sinusoidale, con frequenza che dipende dai valori dell'induttanza e della capacità. Per far iniziare l'oscillazione è necessario fornire l'energia iniziale, ad esempio caricando ad una certa tensione il condensatore prima di connetterlo all'induttore.

Purtroppo, questo sistema, come tutti i sistemi reali, è con perdite: ad ogni periodo, parte dell'energia inizialmente fornita al sistema viene persa. Il contributo principale è spesso la resistenza del filo di rame con cui è stato realizzato l'induttore. Il modello con solo una capacità e induttanza non è pertanto corretto, bisogna quindi aggiungere una resistenza in serie all'induttanza.

Nell'intero documento verranno usati sempre gli stessi valori per i componenti del circuito RLC, in particolare $R=1.6\Omega$, $C=47nF$, $L=100\mu H$, gli stessi valori riportati in figura 1.

Da quanto detto in precedenza, ci si può aspettare che l'andamento dei parametri del circuito, come ad esempio la corrente, sia sempre di tipo sinusoidale, ma con ampiezza che tende a ridursi col passare del tempo. Ora sarà studiato analiticamente questo comportamento, in particolare saranno calcolati gli andamenti della tensione ai capi del condensatore e la corrente nell'induttore (le variabili di stato del circuito) quando viene data come condizione iniziale una tensione di 2V ai capi del condensatore.

Come rappresentato in figura, si indichino con V_C la tensione ai capi del condensatore, V_L la tensione ai capi dell'induttore e i la corrente attraverso il circuito. La convenzione usata è

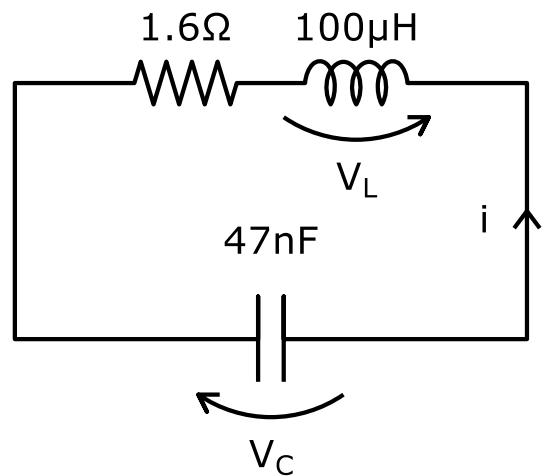


Figura 1 - Circuito risonante RLC serie

quella degli utilizzatori e il verso delle tensioni è scelto in modo che la corrente nei due elementi reattivi sia nello stesso verso.

Le relazioni costitutive degli elementi reattivi sono le seguenti:

$$\begin{cases} i = C \frac{dV_C}{dt} \\ V_L = L \frac{di}{dt} \end{cases}$$

Scrivendo V_L in funzione delle variabili di stato ed esplicitando le espressioni per le derivate si ottiene il seguente sistema del secondo ordine.

$$\begin{cases} \frac{dV_C}{dt} = \frac{1}{C} \cdot i \\ \frac{di}{dt} = -\frac{1}{L} \cdot (R \cdot i + V_C) \end{cases}$$

In alternativa, si può rappresentare il sistema con un'unica equazione del secondo ordine, dove la variabile è, ad esempio, V_C . Così facendo si ottiene la seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^2V_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot V_C = 0$$

Tale equazione può essere riscritta utilizzando i parametri ω_0 , detta pulsazione caratteristica e $Q = \frac{\omega_0 L}{R}$, detto fattore di merito, il cui significato sarà chiarito in seguito.

$$\frac{d^2V_C}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \cdot \frac{dV_C}{dt} + \omega_0^2 \cdot V_C = 0$$

Per trovare le soluzioni di quest'equazione differenziale omogenea del secondo ordine bisogna risolvere l'equazione caratteristica ad essa associata:

$$\lambda^2 + \frac{\omega_0}{Q} \cdot \lambda + \omega_0^2 = 0;$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} \pm \sqrt{(\frac{\omega_0}{Q})^2 - 4\omega_0^2}}{2} = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} \pm \omega_0 \sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4}}{2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} \simeq -\alpha \pm j\omega_0$$

Nell'ultimo passaggio è stato introdotto il coefficiente α , pari a $\frac{\omega_0}{2Q}$. In più è stata fatta l'approssimazione di considerare trascurabile il termine $\frac{1}{4Q^2}$ rispetto a 1, ipotesi spesso valida e utile per dare un significato ai parametri ω_0 e α che sono stati introdotti. Con quest'approssimazione, resta la radice quadrata di -1, pari a j , l'unità immaginaria. L'equazione caratteristica presenta dunque due soluzioni complesse coniugate, il che significa che la soluzione dell'equazione differenziale è la somma di due esponenziali complessi, ossia la somma di una sinusoide e una cosinusoide modulate da un esponenziale decrescente, essendo α positivo:

$$V_C(t) = e^{-\alpha t} \cdot [A \cdot \cos(\omega_0 t) + B \cdot \sin(\omega_0 t)]$$

Da quest'espressione risulta chiaro il significato dei parametri ω_0 e α : il primo è la pulsazione con cui oscilla la tensione ai capi dell'induttore (il valore preciso, sarà un po' minore se il fattore Q non è infinito, ma non di molto); il secondo è il coefficiente di smorzamento e indica di quanto si attenua l'ampiezza dell'oscillazione con il passare del tempo.

Con i parametri di riferimento del circuito studiato, si ottiene che la pulsazione approssimata è di 461265,6 rad/s, mentre senza effettuare alcuna approssimazione questa risulta 461196,2 rad/s, 73,4KHz in termini di frequenza, 13,62μs in termini di periodo.

Il coefficiente di smorzamento vale 8000Np/s, ovvero 8Np/ms. Questo significa che l'ampiezza si attenua di un fattore $e^{-8} = 1/2981$ ogni millisecondo. È interessante calcolare di quanto si attenua l'oscillazione in un periodo, almeno approssimativamente. Nota la durata di un periodo, si ricava che l'ampiezza si attenua di un fattore $e^{-0.10896} \simeq 0.897$, pari al 10.3%. I coefficienti A e B vanno determinati tenendo conto delle condizioni al contorno, in questo caso le seguenti:

$$V_C(0) = 2V$$

$$i_L(0) = 0 \rightarrow \frac{dV_C}{dt} = 0$$

Svolgendo i conti, si ottiene che l'andamento della tensione ai capi del condensatore è descritto dalla seguente espressione:

$$V_C(t) = 2 \cdot \cos(2\pi \cdot 73,4\text{KHz} \cdot t) \quad [V]$$

Il grafico di tale espressione è mostrato in Figura 2.

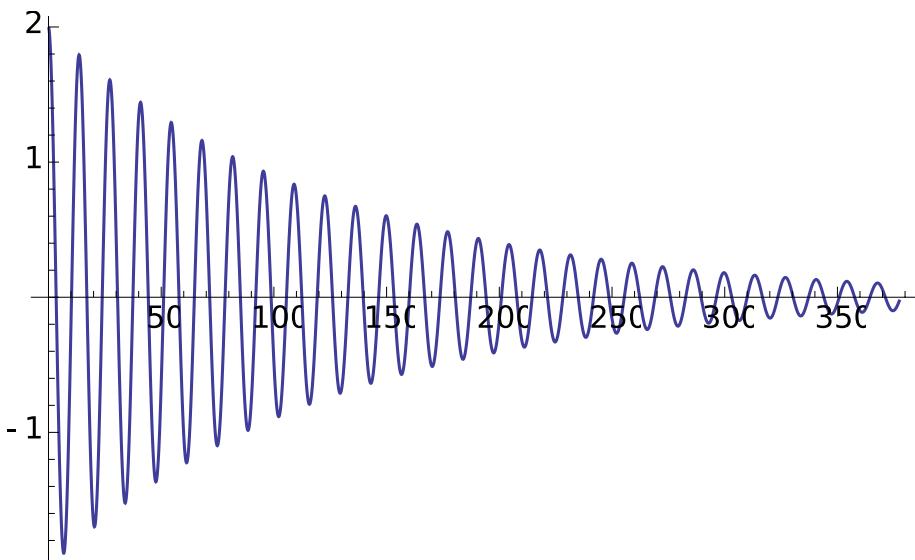


Figura 2 - Andamento della tensione ai capi del condensatore. L'asse dei tempi è in microsecondi

Il fattore di merito Q

Il fattore di merito Q esprime la bontà della rete risonante e tiene conto di quanta energia viene dissipata per ogni ciclo, ed è proprio questa dissipazione ad essere responsabile della attenuazione dell'ampiezza e della riduzione della frequenza dell'oscillazione. La definizione di tale parametro si può applicare per qualsiasi tipo di sistema risonante, non necessariamente elettronico. Il parametro Q è definito come il rapporto tra l'energia immagazzinata nel sistema e l'energia dissipata per ogni ciclo di oscillazione, il tutto moltiplicato per 2π . In questo particolare circuito, si può scrivere l'energia immagazzinata come $\frac{1}{2} L i^2$, considerando l'istante in cui è tutta immagazzinata dall'induttore. La potenza dissipata dal resistore è pari a $\frac{1}{2} R i^2$, da cui è possibile calcolare l'energia dissipata in un

periodo moltiplicando questa potenza per un periodo di oscillazione, ossia $\frac{2\pi}{\omega_0}$. Facendone il rapporto e semplificando l'equazione si ottiene $\frac{\omega_0 L}{R}$, che coincide con il valore che era stato introdotto precedentemente come definizione.

Considerazioni sul circuito RLC

Come già detto, nessun sistema è senza perdite e di conseguenza pensare di costruire un oscillatore con solo un condensatore e induttore è di fatto un'utopia. Si tratterebbe di costruire una macchina a moto perpetuo.

Il fatto che esista una resistenza parassita che, dissipando energia, smorza le oscillazioni non deve però scoraggiare. Sarebbe sufficiente un sistema che possa fornire istante per istante esattamente la stessa quantità di energia che la resistenza dissipata. È estremamente importante che l'energia che si fornisce al sistema sia esattamente pari a quella dissipata. Se così non fosse, l'ampiezza dell'oscillazione non resterebbe costante, ma tenderebbe a diminuire o, addirittura, ad aumentare nel tempo, in base al netto tra energia fornita ed energia dissipata. Chiaramente non è per nulla facile ottenere un tale risultato e l'unico modo per farlo è quello di mettere a punto un sistema che automaticamente si accorga della variazione dell'ampiezza e agisca di conseguenza, fornendo più o meno energia al sistema. Un metodo molto ingegnoso per ottenere questo risultato è stato sviluppato da William Hewlett nel suo lavoro di tesi del 1939, dal quale è nato un prodotto, l'HP200A e soprattutto, un'impresa, la Hewlett Packard (HP). Hewlett pensò di usare una lampadina come oggetto con caratteristica V-I non lineare: aumentando la corrente attraverso di essa il filamento si scalda aumentando la sua resistenza elettrica. La lampadina venne inserita in una configurazione (che oggi chiameremmo non invertente ad operazionale) e serviva a regolare il guadagno dell'anello di retroazione. Veniva sfruttata la costante termica del filamento, molto più lunga del periodo dell'oscillazione, per filtrare passa basso il segnale generato, di fatto misurandone la potenza. Il filamento di conseguenza si scaldava in funzione dell'ampiezza dell'oscillazione e, conseguentemente, la resistenza aumentava. Questo aumento provocava una riduzione del guadagno e quindi una riduzione dell'ampiezza di oscillazione. Il processo era chiaramente costituito da una reazione negativa che portava presto il sistema all'equilibrio in termini di ampiezza di oscillazione. Ciò che mi affascina particolarmente di questa soluzione è l'idea di aver usato una lampadina, oggetto nato per soddisfare un bisogno totalmente differente, per risolvere ingegnosamente un problema.

Un'altra idea per sostenere le oscillazioni di una rete risonante LC è quella di inserire nel circuito una resistenza negativa. Se si fosse capaci di costruirla, questa si combinerebbe con quella del circuito, annullandone l'effetto. Logicamente, questa resistenza negativa deve essere maggiore in modulo di quella parassita solamente all'avvio del circuito, per far crescere l'ampiezza dell'oscillazione. Quando l'ampiezza ha raggiunto un certo valore, la resistenza deve necessariamente variare, portandosi ad un valore esattamente uguale, ma di segno opposto, al valore della resistenza parassita. Per ottenere ciò, è sempre richiesto che il sistema sia non lineare.

Cross-coupled pair

La coppia cross-coupled è un interessante circuito per implementare una resistenza negativa, almeno su piccolo segnale. La topologia è molto semplice: sono sufficienti due transistor (ad esempio dei MOSFET) e due resistenze di polarizzazione a formare uno stadio differenziale, dove però l'uscita di un lato è collegata all'ingresso dell'altro (Figura 3). Il valore di R_D è 560Ω , mentre la corrente I_B erogata dal generatore di coda è di $2.5mA$.

La corrente, in funzione della tensione applicata, è mostrata in (Figura 5).

Si ricorda che la pendenza, punto per punto, rappresenta la conduttanza del bipolo. Si può osservare che, per tensioni sufficientemente piccole, la conduttanza è negativa (aumentando la tensione, la corrente diminuisce), mentre con l'aumentare della tensione la conduttanza tende ad annullarsi, ossia la resistenza diventa infinita, per poi crescere ancora diventando positiva. È molto importante osservare che nel tratto a pendenza negativa, il segno della corrente è negativo. Questo significa che il bipolo, in quella regione di funzionamento, detta *regione attiva*, eroga potenza.

Per capire meglio questa caratteristica, si può studiare il circuito linearizzandolo nell'origine, studiandone quindi il comportamento su piccolo segnale, dove per segnale si intende il segnale sonda V_t usato per misurare la resistenza. Il generatore sonda e le due giunzioni gate-source dei due MOSFET formano una maglia. Essendo il circuito simmetrico, la tensione V_t si distribuirà equamente sui due transistor. Di conseguenza ognuno di essi inizierà ad erogare una corrente di piccolo segnale pari a $\frac{g_m}{2}V_t$. Il segno della corrente è tale per cui essa è iniettata nel morsetto positivo del generatore sonda e assorbita da quello negativo. Ciò vuol dire che il generatore sonda sta assorbendo della potenza, ossia sta leggendo una resistenza negativa, pari a $-2/g_m$. Questo significa che la corrente può essere scritta in funzione della tensione nel seguente modo: $i = -\frac{g_m}{2}V_t$.

Per g_m si intende la trasconduttanza del transistor e può essere espressa in funzione della corrente di polarizzazione del dispositivo e delle sue proprietà elettriche e geometriche:

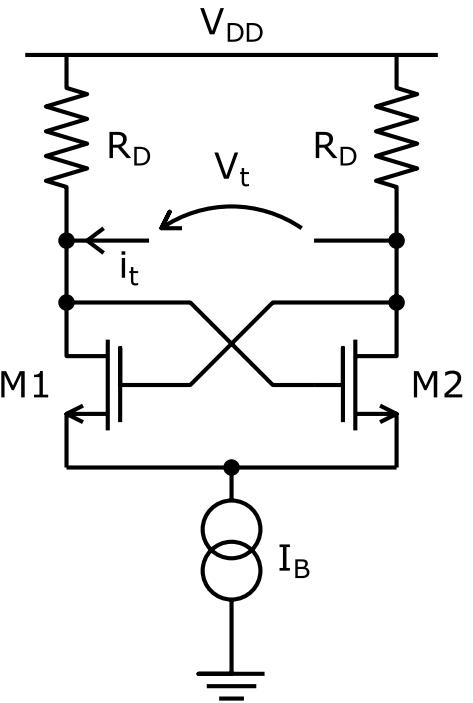


Figura 3 - Cross coupled transistors. Si tratta di uno stadio differenziale con gli ingressi di ciascun ramo collegati all'uscita del ramo opposto

$$g_m = \sqrt{2\mu_n C'_{ox} \frac{W}{L} I_D}$$

Per valori grandi della tensione sonda, uno dei due transistor si spegne e l'altro è costretto a portare tutta la corrente del generatore di coda, I_B . Ciò avviene perché il generatore di corrente varia la tensione del morsetto di source in modo tale che il MOSFET acceso abbia la corretta tensione di comando necessaria a sviluppare la corrente richiesta.

Il circuito da studiare si riduce di conseguenza a quello mostrato in Figura 4. È possibile calcolare molto facilmente l'equivalente Thevenin: la tensione a vuoto ($i_t=0$) è data da $V_{DD} - (V_{DD} - R_D I_B) = R_D I_B$, mentre la corrente di corto circuito è $-\frac{1}{2} I_B$, ossia la corrente del generatore di coda si ripartisce equamente nelle due resistenze uguali tra loro. Tale corrente è negativa, essendo assorbita dal generatore di coda dal morsetto negativo del generatore di sonda. Chiaramente per $V_t = 0$ il regime di funzionamento è quello a resistenza negativa, qui si è solamente voluto trovare facilmente due punti per poi scrivere l'equazione caratteristica del bipolo. Essa risulta, facendo l'interpolazione lineare dei due punti, la seguente:

$$\begin{cases} i = -\frac{1}{2} I_B + \frac{1}{2R} V & \text{per } V \gg 0 \\ i = +\frac{1}{2} I_B - \frac{1}{2R} V & \text{per } V \ll 0 \end{cases}$$

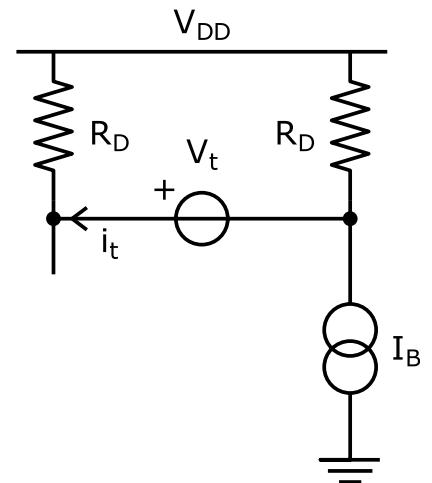


Figura 4 - Circuito usato per lo studio della resistenza di grande segnale.

La seconda espressione è stata trovata in modo duale.

Mettendo a sistema le equazioni di grande segnale con quella di piccolo segnale, si può trovare approssimativamente il punto in cui la caratteristica transisce da una regione di funzionamento all'altra, passando da una pendenza negativa ad una positiva. La tensione per cui si ottiene questa transizione è la seguente:

$$\tilde{V} \simeq \pm \frac{I_B}{g_m + \frac{1}{2R}} = \pm \frac{I_B}{2\sqrt{k_n} \sqrt{I_B} + \frac{1}{2R}}$$

$$\text{Dove } k_n = \frac{1}{2} \mu_n C'_{OX} \frac{W}{L}.$$

Alla luce di quanto detto, il circuito complessivo appena studiato, comprensivo di alimentazione e generatore di corrente, può essere visto come un singolo bipolo con la caratteristica non lineare $i = g(v)$. D'ora in avanti si utilizzerà questa rappresentazione.

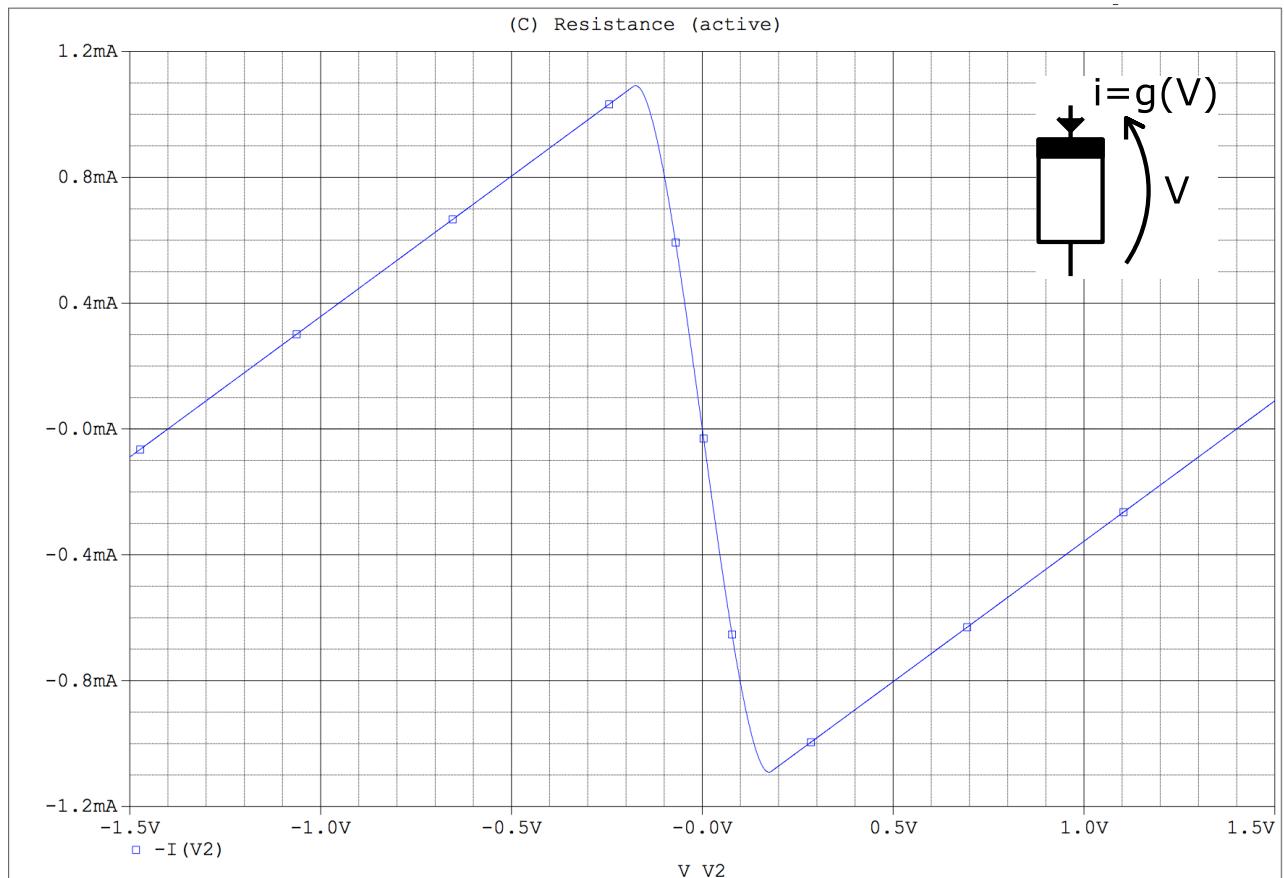


Figura 5 - Caratteristica della coppia cross-coupled di MOSFET

Studio del circuito non lineare

Collegando questo bipolo non lineare con la rete risonante è possibile realizzare un oscillatore sinusoidale (Figura 6).

Chiaramente nel modello bisogna tenere conto della resistenza parassita, altrimenti si avrebbe l'oscillatore lineare, oggetto, come detto più volte, irrealizzabile. Il sistema è governato da una coppia di equazioni differenziali non lineari che determinano il comportamento temporale delle due variabili di stato del circuito: la corrente i_L nell'induttore e la tensione V ai capi del condensatore.

Prima di studiare il circuito in modo analitico guardando le equazioni, preferisco trovare in altro modo la frequenza di oscillazione, la condizione necessaria all'inizio delle oscillazioni e la loro ampiezza a regime. In questo modo sarà possibile confrontare questi risultati con quelli dello studio matematico, quelli delle simulazioni e quelli delle misure sperimentali.

Approccio qualitativo

Essendo l'idea alla base di questo circuito quella di rimuovere l'elemento dissipativo del circuito, è ragionevole dire che il circuito oscillatorà come un circuito risonante LC puro, quindi alla frequenza $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$. Con i valori di riferimento, ossia $C = 47nF$ e $L = 100\mu H$, la frequenza risulta pari a 73.41KHz.

Il circuito risonante è formato dal parallelo tra il condensatore e la serie dell'induttore con la sua resistenza parassita. Siccome il tutto andrà collegato in parallelo al bipolo non lineare, è utile ricorrere ad un equivalente parallelo per il circuito risonante. Questo sarà composto dal parallelo tra un condensatore (che sarà sempre lo stesso, essendo già in parallelo), un induttore e un resistore (Figura 7).

Si può dimostrare che, se il fattore di merito della rete è sufficientemente alto, alla frequenza di

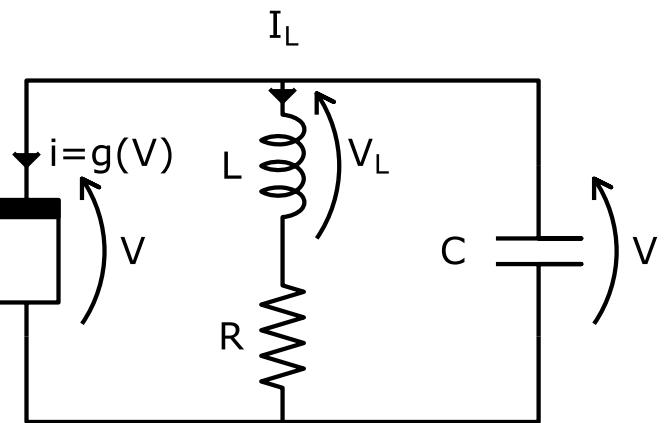


Figura 6 - Circuito non lineare dell'oscillatore

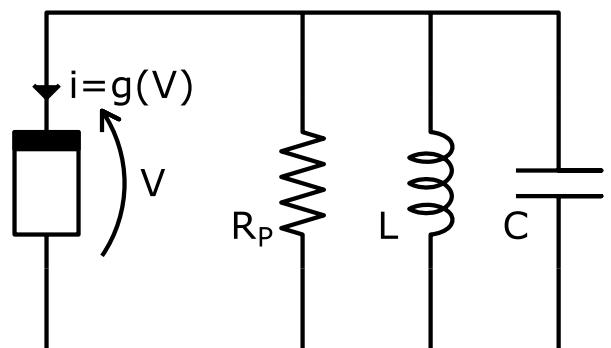


Figura 7 - Circuito risonante nell'equivalente parallelo.

risonanza $2\pi\omega_0 = 2\pi\frac{1}{\sqrt{LC}}$ il valore dell'induttore nella configurazione parallelo è circa lo stesso della configurazione serie. Il resistore, invece, è aumentato di un fattore pari circa al quadrato del fattore di merito, ossia $R_P = \frac{L}{RC}$.

All'accensione del circuito la tensione ai capi della rete risonante è molto piccola e vale dunque l'approssimazione di piccolo segnale (il circuito è approssimabile con un circuito lineare). Affinché le oscillazioni abbiano inizio, è necessario fornire dell'energia alla rete risonante, ossia la resistenza totale connessa ai suoi capi deve essere negativa. In altre parole, l'equivalente parallelo tra la resistenza equivalente R_P e la resistenza di piccolo segnale del bipolo non lineare deve essere di segno negativo. Essendo un circuito parallelo, risulta più facile sommare le conduttanze:

$$\begin{aligned} -\frac{g_m}{2} + \frac{1}{R_P} &< 0; \\ -\frac{g_m}{2} + \frac{RC}{L} &< 0; \\ g_m > \frac{2RC}{L} \end{aligned}$$

Per calcolare l'ampiezza di oscillazione, ossia la tensione ai capi della rete risonante, non è più possibile adottare il modello di piccolo segnale. Questo è ovvio. Se così non fosse, il circuito sarebbe lineare, la coppia di transistori continuerebbe a fornire energia e la tensione continuerebbe a crescere.

Si può osservare che in condizioni di regime si ha ai capi dei morsetti di *drain* dei due transistori un segnale sinusoidale di ampiezza \tilde{V} , che è proprio la grandezza da ricavare. Questa tensione farà sì che i due transistori saranno alternativamente accesi o completamente spenti, ossia l'andamento della corrente al loro interno è ben approssimato da un'onda quadra con valori che vanno da 0 a I_B , come visibile nella figura 8.

La tensione \tilde{V} porterà il parallelo tra induttore e condensatore in risonanza, e questi componenti, mostrando in questa condizione una resistenza infinita,

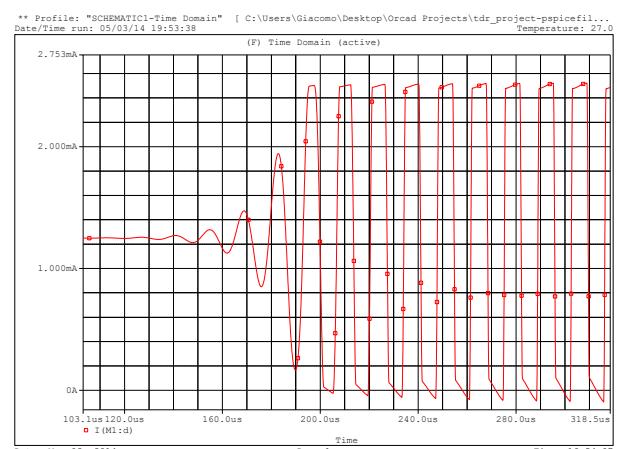


Figura 8 - Andamento della corrente nei transistori.

lasceranno “visibile” solamente la resistenza equivalente parallelo, R_P . La corrente I_B richiesta dal transistor acceso dovrà provenire dalle alimentazioni tramite le resistenze di polarizzazione R_D (si faccia di nuovo riferimento al circuito di figura 4).

La porzione di corrente che scorre attraverso R_P è data dal rapporto di partizione $\frac{R_D}{2R_D+R_P} I_B \frac{4}{\pi}$, avendo considerato solamente la prima armonica dell’onda quadra. La tensione ai capi della rete risonante è calcolabile con la legge di Ohm: è il prodotto tra la corrente appena ricavata e la resistenza equivalente parallelo. Usando i valori del circuito di riferimento, si ottiene che l’ampiezza di oscillazione è circa la seguente:

$$\tilde{V} = \frac{R_D}{2R_D + \frac{L}{RC}} \cdot I_B \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \frac{L}{RC} = 967mV$$

I risultati così ottenuti sono chiaramente delle stime e servono principalmente per avere un’idea su che parametri intervenire per variare le caratteristiche del circuito. Simulando il circuito su PSPice, l’ampiezza di oscillazione è di 960mV (Figura 9), valore che non si discosta molto dal valore ottenuto in modo approssimativo.

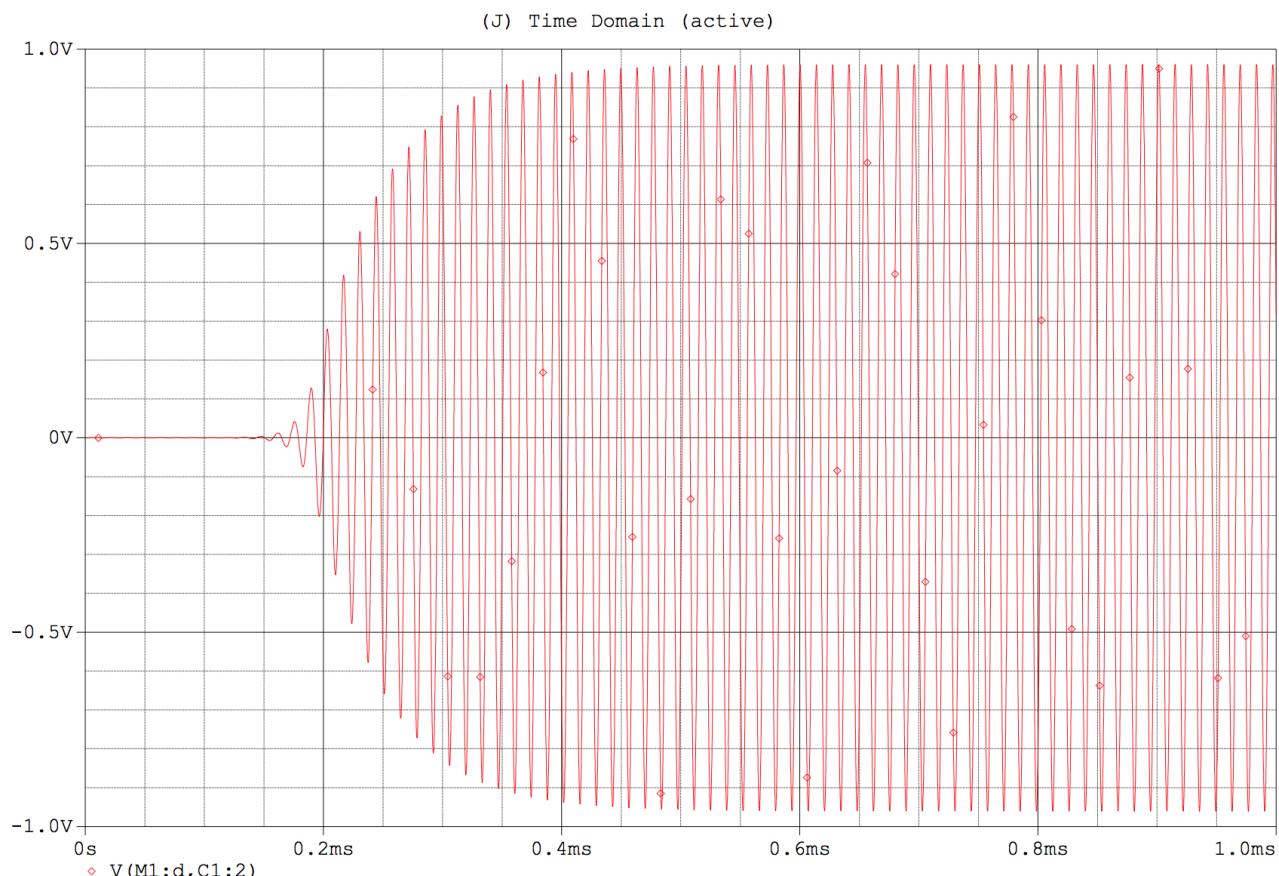


Figura 9 - Simulazione della tensione V ai capi del bipolo non lineare.

Approccio matematicamente rigoroso

Per studiare invece il circuito in modo più rigoroso, bisogna partire dalle equazioni costitutive dei due elementi reattivi. Applicando su esse le leggi di Kirchhoff e di Ohm si ottiene il seguente sistema del secondo ordine:

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = \frac{1}{C} [-g(v) - I_L] \\ \frac{dI_L}{dt} = \frac{1}{L} [V - RI_L] \end{cases}$$

Annullando contemporaneamente entrambe le derivate, si possono ricavare i punti di equilibrio del sistema, in questo caso le intersezioni tra la curva $I_L = -g(v)$ e la retta $I_L = \frac{V}{R}$. Queste due curve sono dette *nullcline* e possono essere rappresentate su un piano V – I_L , detto piano di stato (Figura 10). Esse indicano i punti di tale piano nei quali una delle due variabili di stato non varia rispetto al tempo.

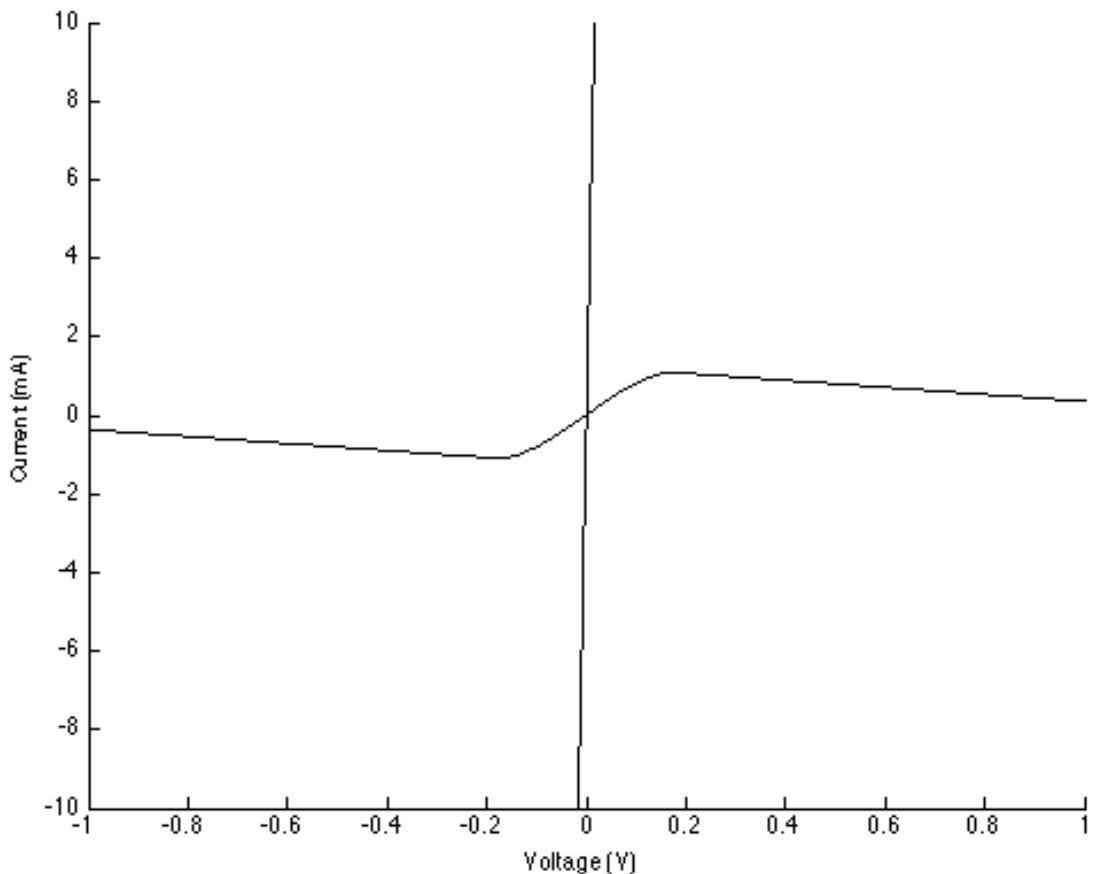


Figura 10 - Piano di stato con le due nullcline.

L'origine è certamente un punto di equilibrio e al variare della resistenza parassita R o della transconduttanza dei transistor ci potrebbero essere o meno altre due intersezioni, ma, come si vedrà in seguito, se così fosse l'oscillazione non potrebbe sostenersi.

Per garantire l'inizio dell'oscillazione, l'origine deve essere un punto di equilibrio instabile, in modo che un piccolo disturbo, o anche semplicemente il rumore termico, possa scatenare l'allontanamento delle variabili di stato dall'origine del piano di stato.

Oltre a ciò, l'origine deve essere un fuoco, ossia le traiettorie descritte dalle due variabili di stato allontanandosi dall'origine devono essere a spirale. Questo per garantire un comportamento periodico, poiché, come si vedrà, il moto a spirale tenderà ad assestarsi su una traiettoria chiusa ben precisa, generalmente ellittica, detta *ciclo limite*. Quando le variabili di stato si muovono lungo questa ellissi, significa che il sistema ha un comportamento oscillatorio. Infatti, il valore delle variabili di stato si ripete uguale a se stesso periodicamente, ossia, guardandone l'andamento nel tempo, questo è oscillante.

Quindi, le condizioni da imporre sulla natura dell'origine in realtà sono due: deve essere un fuoco e deve essere instabile. Per procedere in questo senso, è necessario linearizzare il circuito nell'intorno dell'origine e studiarne il comportamento.

La matrice Jacobiana del sistema, che rappresenta la migliore approssimazione lineare nell'intorno di un punto, in questo caso l'origine, è la seguente:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{V}}{\partial V} & \frac{\partial \dot{V}}{\partial I_L} \\ \frac{\partial \dot{I}_L}{\partial V} & \frac{\partial \dot{I}_L}{\partial I_L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g'(V) & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}$$

Trovo gli autovalori del sistema linearizzato per imporre i vincoli su di essi.

$$\begin{aligned} \text{Det}(\lambda I - J) &= 0 \\ \text{Det} \begin{bmatrix} \lambda + \frac{g'(V)}{C} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & \lambda + \frac{R}{L} \end{bmatrix} &= 0 \\ \left(\lambda + \frac{g'(V)}{C} \right) \left(\lambda + \frac{R}{L} \right) + \frac{1}{LC} &= 0 \\ \lambda^2 + \lambda \left(\frac{R}{L} + \frac{g'(V)}{C} \right) + \frac{g'(V) \cdot R}{LC} + \frac{1}{LC} &= 0 \end{aligned}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\left(\frac{R}{L} + \frac{g'(V)}{C}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L} + \frac{g'(V)}{C}\right)^2 - 4 \frac{g'(V) \cdot R + 1}{LC}}}{2}$$

La prima condizione richiesta è che l'origine sia un punto di equilibrio instabile, ossia che la parte reale delle sue frequenze naturali sia positiva. In questo modo l'andamento delle variabili di stato sarà modulato da un'esponenziale crescente, e quindi il comportamento sarà divergente. Imponendo tale condizione:

$$\begin{aligned} -\left(\frac{R}{L} + \frac{g'(V)}{C}\right) &> 0 \\ \frac{R}{L} + \frac{g'(V)}{C} &< 0 \\ g'(V) &< -R \frac{C}{L} \end{aligned}$$

È interessante notare che considerando $g'(V)$ essere, almeno nell'intorno dell'origine, pari a $-\frac{2}{g_m}$, si riottiene la stessa relazione ottenuta precedentemente, quando si sono solamente fatte considerazioni sul segno complessivo della resistenza in parallelo all'induttore e al condensatore.

Il fatto che l'origine sia instabile non è sufficiente. È necessario anche che si tratti di un *fuoco* instabile, ossia che le frequenze naturali siano complesse e coniugate per garantire un andamento sinusoidale delle variabili di stato. Ciò si traduce nell'imporre che l'argomento della radice nella formula precedente sia negativo.

$$\left(\frac{R}{L} + \frac{g'(V)}{C}\right)^2 - 4 \frac{g'(V) \cdot R + 1}{LC} < 0$$

Risolvendo la disequazione si ottiene quindi un secondo vincolo che deve essere rispettato, assieme a quello trovato in precedenza:

$$\begin{cases} \frac{2RC}{L} - 4\sqrt{\frac{C}{L}} < g'(V) < \frac{2RC}{L} + 4\sqrt{\frac{C}{L}} \\ g'(V) < -\frac{RC}{L} \end{cases}$$

È importante notare che ci potrebbero essere dei casi in cui, per qualsiasi valore di $g'(V)$, il sistema non oscillatorà. Per garantire che ci possa essere un intervallo di valori per cui ciò avvenga, il circuito risonante deve avere un fattore di merito maggiore di $3/4$. Questa condizione è ricavabile combinando la coppia di disequazioni appena scritte, ponendo il seguente vincolo tra i parametri del circuito:

$$\frac{2RC}{L} - 4 \sqrt{\frac{C}{L}} < -\frac{RC}{L}$$

Ammesso che il circuito sia instabile in un intorno dell'origine, è altrettanto necessario che, non appena il sistema inizi ad allontanarsi dall'origine del piano di stato, la resistenza del bipolo non lineare si riduca in modulo, altrimenti il sistema divergerebbe. È proprio questo il motivo per cui è necessario un circuito non lineare per realizzare un oscillatore.

Come detto all'inizio del paragrafo, potrebbe succedere che le nullcline si intersechino in 3 punti del piano di fase. Affinché ciò succeda, la resistenza parassita R deve essere maggiore del modulo della $g'(V)$, cosa facilmente deducibile sempre dalla figura 10.

Si può verificare, studiando la matrice Jacobiana del sistema nei due nuovi punti di equilibrio, che questi sono stabili. Ammesso che l'origine sia instabile, cosa che dipende anche dal valore dell'induttanza e della capacità, il sistema si porterà quindi in uno dei due punti di equilibrio, senza mostrare un comportamento oscillatorio.

Misura accurata del periodo di oscillazione

Per misurare accuratamente il periodo di oscillazione del circuito bisogna necessariamente ricorrere a metodi numerici, andando ad analizzare le equazioni differenziali non lineari che governano il circuito (Figura 11).

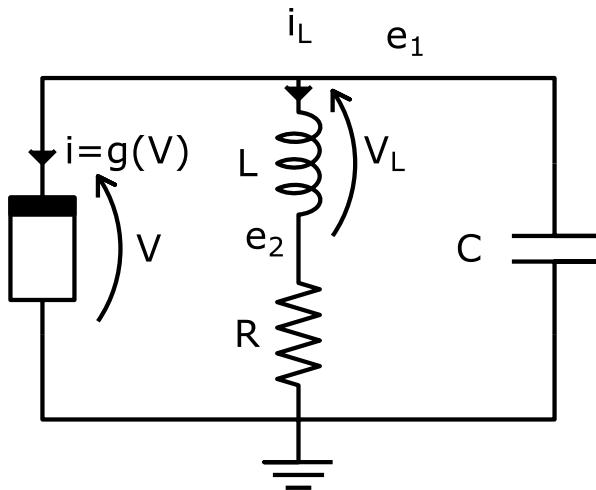


Figura 11 - Circuit non lineare da studiare con il metodo dell'analisi nodale modificata.

I valori dei parametri sono quelli di riferimento, ovvero $R=1.6\Omega$, $C=47nF$, $L=100\mu H$, mentre il bipolo non lineare ha la caratteristica $i=g(v)$ ricavata precedentemente.

La caratteristica $i = g(V)$

La prima cosa da fare per risolvere numericamente questo sistema è la caratterizzazione del bipolo non lineare sintetizzato dalla coppia di transistor. A tal fine ho simulato su PSpice il circuito non lineare, applicando ai suoi capi un generatore sonda di tensione. Ho dunque rappresentato, ed esportato in formato .csv, la corrente *assorbita* dal circuito in funzione della tensione forzata dal generatore. In questo modo ho generato più file con diversi intervalli di tensione e diversi gradi di accuratezza di ciascuna delle variabili. Questo perché, chiaramente, per poter misurare con buona precisione il periodo di oscillazione, bisogna innanzitutto conoscere con quantomeno la stessa precisione anche i parametri del circuito.

Una volta generato il file .csv, ho importato i dati in esso contenuti in MATLAB, dove ho implementato una funzione (file: *g.m*) con l'obiettivo di fornire la corrente del bipolo in funzione della tensione. Chiaramente, i valori di tensione sono discreti e non necessariamente coincidenti con quelli richiesti alla funzione. Quindi, quest'ultima si occupa anche di

approssimare la corrente mediante interpolazione lineare. Per i dettagli su come utilizzare tale funzione, si faccia riferimento al commento nel suo codice di implementazione.

Oltre alla caratteristica $i=g(v)$ è necessaria, per poter applicare i metodi di Eulero e di Newton, anche della derivata della caratteristica, ricavata numericamente da $i=g(v)$. A questo scopo, ho scritto un semplice script MATLAB che si occupa di caricare in memoria i dati della caratteristica e anche di calcolarne la derivata numerica. Lo script si chiama *setup.m* e deve essere eseguito prima di poter fare qualsiasi operazione, poiché inizializza le variabili necessarie all'esecuzione degli altri script.

Analisi nodale modificata non lineare

Il sistema è non lineare e quindi risolubile in modo accurato solo numericamente.

A tal fine si può procedere scrivendo la matrice dell'analisi nodale modificata, sempre facendo riferimento al circuito di figura 11.

$$\begin{cases} \text{Nodo 1: } g(e_1) + i_L + C \frac{de_1}{dt} = 0 \\ \text{Nodo 2: } -i_L + \frac{1}{R} e_2 = 0 \\ \text{eq. agg: } e_1 - e_2 = L \frac{di_L}{dt} \end{cases}$$

Applicando il metodo di Eulero, con passo h , è possibile approssimare le derivate temporali come differenze finite, ottenendo il seguente sistema (primo passo del metodo di Eulero):

$$\begin{cases} g(e_1(h)) + i_L(h) + \frac{C}{h}(e_1(h) - e_1(0)) = 0 \\ -i_L(h) + \frac{1}{R} e_2(h) = 0 \\ e_1(h) - e_2(h) - \frac{L}{h}(i_L(h) - i_L(0)) = 0 \end{cases}$$

Si tratta di un sistema non lineare le cui incognite sono $e_1(h), e_2(h), i_L(h)$, mentre $e_1(0)$ e $i_L(0)$ rappresentano le condizioni iniziali (sono le variabili di stato). Dopo aver trovato le soluzioni, in particolare $e_1(h)$ e $i_L(h)$, posso usarle come nuove condizioni iniziali per determinare le condizioni delle variabili dopo un istante $2h$, e così via.

Per poter risolvere il sistema non lineare del singolo passo di Eulero è necessario ricorrere all'algoritmo di Newton, il quale richiederà qualche iterazione prima di trovare una soluzione con sufficiente accuratezza.

Esprimendo il sistema da risolvere come $F(x) = 0$, allora il metodo di Newton corrisponde nel risolvere qualche volta il seguente sistema lineare, aggiustando ogni volta le soluzioni approssimate.

$$J_F^{(n)} \cdot \Delta x = -F^{(n)} \quad \text{con } \Delta x = x^{(n+1)} - x^{(n)}$$

Come apice tra parentesi è stata indicata l'iterazione di Newton.

La prima ipotesi delle soluzioni, ossia $x^{(0)}$, viene scelta pari alle condizioni iniziali usate nel metodo di Eulero. Poi, ad ogni soluzione del sistema, queste vengono aggiornate.

J_F indica la matrice Jacobiana del sistema, ossia la matrice delle derivate parziali. Calcolandola per il sistema in esame ed esplicitando gli altri elementi, il sistema lineare da risolvere ad ogni passo di Newton diventa il seguente.

$$\begin{vmatrix} g'(e_1^{(0)}(h)) & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{R} & -1 \\ 1 & -1 & -\frac{L}{h} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Delta e_1(h) \\ \Delta e_2(h) \\ \Delta i_L(h) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g(e_1^{(0)}(h)) + i_L^{(0)}(h) + \frac{C}{h}[e_1^{(0)}(h) - e_1(0)] \\ -i_L^{(0)}(h) + \frac{1}{R}e_2^{(0)}(h) \\ e_1^{(0)}(h) - e_2^{(0)}(h) - \frac{L}{h}[i_L^{(0)}(h) - i_L(0)] \end{vmatrix}$$

Si osservi come un solo elemento della matrice Jacobiana deve essere aggiornato ad ogni iterazione.

Iterando Newton finché il residuo non è sufficientemente piccolo e poi procedendo di passo in passo con Eulero fino a raggiungere l'istante finale $t=T$, si ottengono i valori approssimati delle tre variabili dell'analisi nodale in funzione di $e_1(0), e_2(0), i_L(0), T$. Con una piccola variazione della notazione, si può affermare quanto segue.

$$\begin{vmatrix} x_{1T} \\ x_{2T} \\ x_{3T} \end{vmatrix} = \Phi(x_{10}, x_{20}, x_{30}, T)$$

Dove $x_{1T} = e_1(T)$, $x_{2T} = e_2(T)$, $x_{3T} = i_L(T)$, $x_{10} = e_1(0)$, $x_{20} = e_2(0)$, $x_{30} = i_L(0)$

Quanto descritto è stato implementato in MATLAB nella funzione *tran.m*, che, di fatto, corrisponde alla funzione Φ appena introdotta, con l'unica modifica che come parametro deve essere specificato anche il passo h di Eulero. In aggiunta è stato implementato anche lo script *tranTest.m*, che si occupa di testarne il corretto funzionamento.

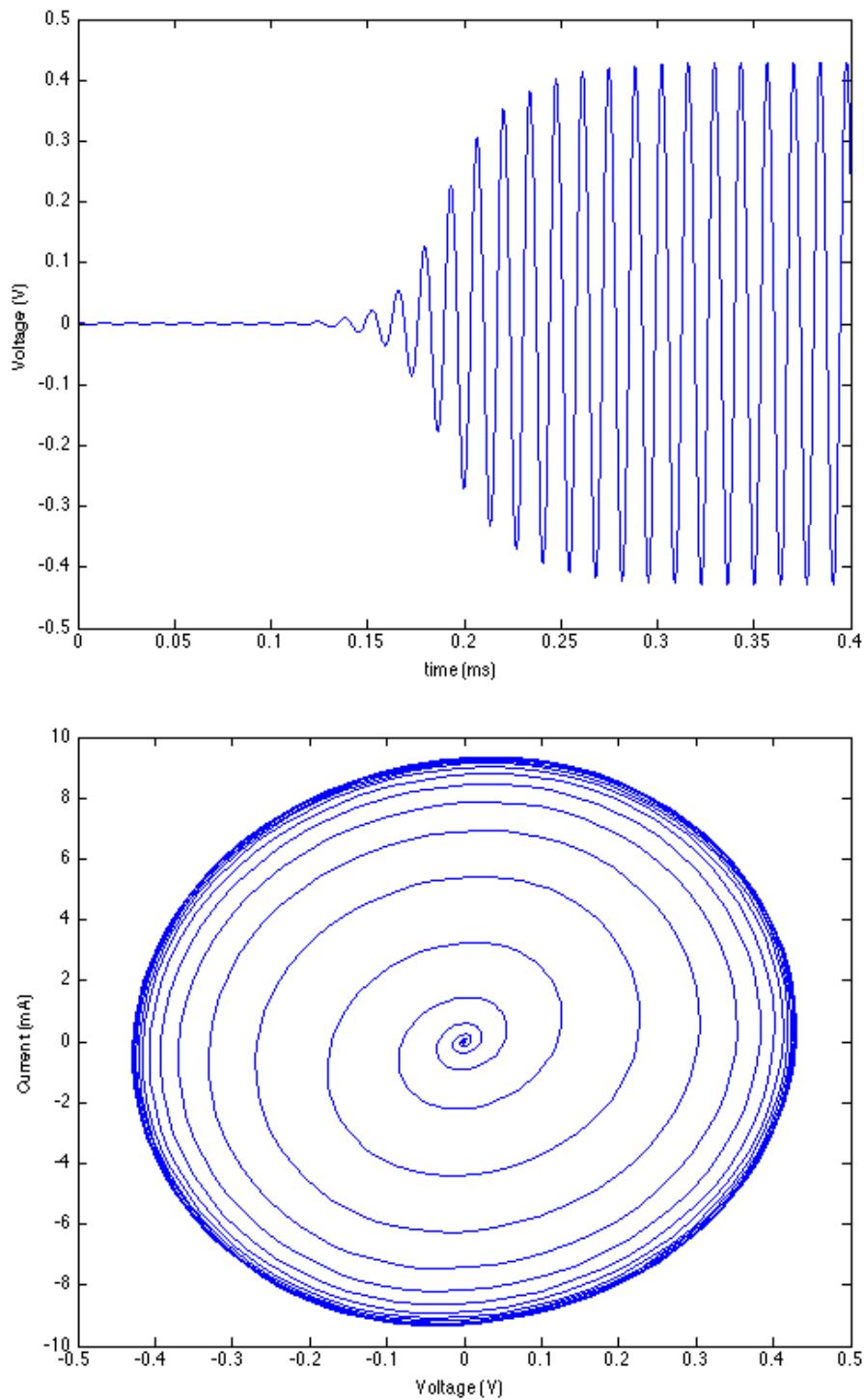


Figura 12 - In alto: Andamento della tensione nel tempo ai capi del condensatore. In basso: Ritratto di fase

Misura del periodo di oscillazione

L'idea alla base del calcolo del periodo di oscillazione è molto semplice. Bisogna imporre che le condizioni finali del sistema, raggiunte dopo un tempo T , coincidano con quelle iniziali. In questo modo il sistema continuerà ad evolvere esattamente nello stesso modo, oscillando. Quanto detto può essere espresso in termini matematici nel seguente modo.

$$\begin{vmatrix} x_{1T} \\ x_{2T} \\ x_{3T} \end{vmatrix} = \Phi(x_{10}, x_{20}, x_{30}, T) = \begin{vmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \end{vmatrix}$$

Si tratta di nuovo di un sistema non lineare, composto da tre equazioni e quattro incognite. Imponendo che una di queste assuma un valore arbitrario, viene tolto un grado di libertà e il sistema sarà risolubile. Far ciò corrisponde ad imporre una condizione di fase alla sinusoide che sarà soluzione. Ad esempio, si può porre $x_{10} = 0$, ossia imporre che all'istante iniziale la tensione ai capi del condensatore sia nulla.

Detto ciò, il problema si riduce nel risolvere il seguente sistema non lineare (saranno necessarie diverse iterazioni di Newton).

$$F := \Phi(0, x_{20}, x_{30}, T) - \begin{vmatrix} 0 \\ x_{20} \\ x_{30} \end{vmatrix} = 0$$

Le incognite sono x_{20}, x_{30}, T . La soluzione di tale sistema mediante il metodo di Newton richiede la soluzione iterativa del seguente sistema lineare.

$$J_F^{(n)} \cdot \Delta = -F^{(n)} \quad \text{con } \Delta = \begin{vmatrix} x_{20}^{(n+1)} - x_{20}^{(n)} \\ x_{30}^{(n+1)} - x_{30}^{(n)} \\ T^{(n+1)} - T^{(n)} \end{vmatrix}$$

Dove n in apice rappresenta l'indice dell'iterazione di Newton.

La matrice Jacobiana è composta dalla somma di due elementi: la Jacobiana della funzione Φ e la Jacobiana del vettore. La prima deve necessariamente essere calcolata numericamente, mentre la seconda è stata calcolata a mano una volta per tutte, restando costante ad ogni iterazione.

$$J_F = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_{X1T}}{\partial X_{20}} & \frac{\partial \Phi_{X1T}}{\partial X_{30}} & \frac{\partial \Phi_{X1T}}{\partial T} \\ \frac{\partial \Phi_{X2T}}{\partial X_{20}} & \frac{\partial \Phi_{X2T}}{\partial X_{30}} & \frac{\partial \Phi_{X2T}}{\partial T} \\ \frac{\partial \Phi_{X3T}}{\partial X_{20}} & \frac{\partial \Phi_{X3T}}{\partial X_{30}} & \frac{\partial \Phi_{X3T}}{\partial T} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Per calcolare numericamente le derivate parziali, sembrerebbe essere necessario valutare la funzione Φ ben quattro volte, ossia, tre valutazioni per ciascun incremento delle variabili, in aggiunta alla valutazione senza nessun incremento. In formule, la derivata parziale che coincide con il primo elemento della Jacobiana andrebbe calcolata nel seguente modo:

$$\frac{\partial \Phi_{X1T}}{\partial x_{20}} = \frac{\Phi_{X1T}(0, x_{20} + h, x_{30}, T) - \Phi_{X1T}(0, x_{20}, x_{30}, T)}{h}$$

E quindi, per calcolare anche le restanti derivate, dovrei calcolare ad ogni iterazione di Newton le seguenti valutazioni della funzione Φ . (Si osservi che far ciò significa risolvere molteplici passi di Eulero, ognuno dei quali richiede l'esecuzione di qualche iterazione di Newton)

$$\begin{aligned} &\Phi(0, x_{20}, x_{30}, T) \\ &\Phi(0, x_{20} + h, x_{30}, T) \\ &\Phi(0, x_{20}, x_{30} + h, T) \\ &\Phi(0, x_{20}, x_{30}, T + h) \end{aligned}$$

Si ricorda che ciascuna valutazione restituisce contemporaneamente tutti e tre i valori x_{1T}, x_{2T}, x_{3T} .

Osservando però il sistema di Newton-Eulero che costituisce il cuore di Φ , si nota che la sensibilità a x_{20} è sempre nulla. Questo è ovvio, poiché questa non è una variabile di stato del sistema e quindi non ne governa l'evoluzione futura. Come conseguenza di ciò, la prima colonna della matrice Jacobiana è nulla ed è possibile evitare una valutazione incrementale della funzione Φ .

Fortunatamente, è inutile anche il calcolo di $\Phi(0, x_{20}, x_{30}, T + h)$ poiché è già nota $\Phi(0, x_{20}, x_{30}, T - h)$, essendo la soluzione del passo precedente di Eulero all'interno della

stessa esecuzione della funzione. È possibile quindi calcolare la derivata parziale *all'indietro*, ossia quanto segue.

$$\frac{\partial \Phi_{X1T}}{\partial T} = \frac{\Phi_{X1T}(0, x_{20}, x_{30}, T) - \Phi_{X1T}(0, x_{20}, x_{30}, T - h)}{h}$$

Secondo quanto detto, ad ogni iterazione di Newton è sufficiente quindi calcolare solamente due valutazioni della funzione Φ , e questo comporta, al prim'ordine, un raddoppio della velocità di esecuzione dello script.

Infatti, calcolando solamente $\Phi(0, x_{20}, x_{30}, T)$ e $\Phi(0, x_{20}, x_{30} + h, T)$ è possibile costruire completamente J_Φ e di conseguenza J_F , grazie alle quali, oltre alla valutazione della funzione F stessa, è possibile risolvere ciascun passo di Newton ricavando il vettore Δ degli aggiornamenti delle soluzioni x_{20}, x_{30}, T .

Iterando più volte il procedimento illustrato, si può ottenere con la precisione voluta il valore di T , ossia il periodo di oscillazione.

Quando descritto in questo paragrafo è stato implementato in uno script MATLAB chiamato *period.m*. Per poterlo eseguire è necessario aver già precedentemente eseguito lo script *setup.m*. Il periodo calcolato in questo modo risulta di 13.6525088 μs (73.2466KHz)

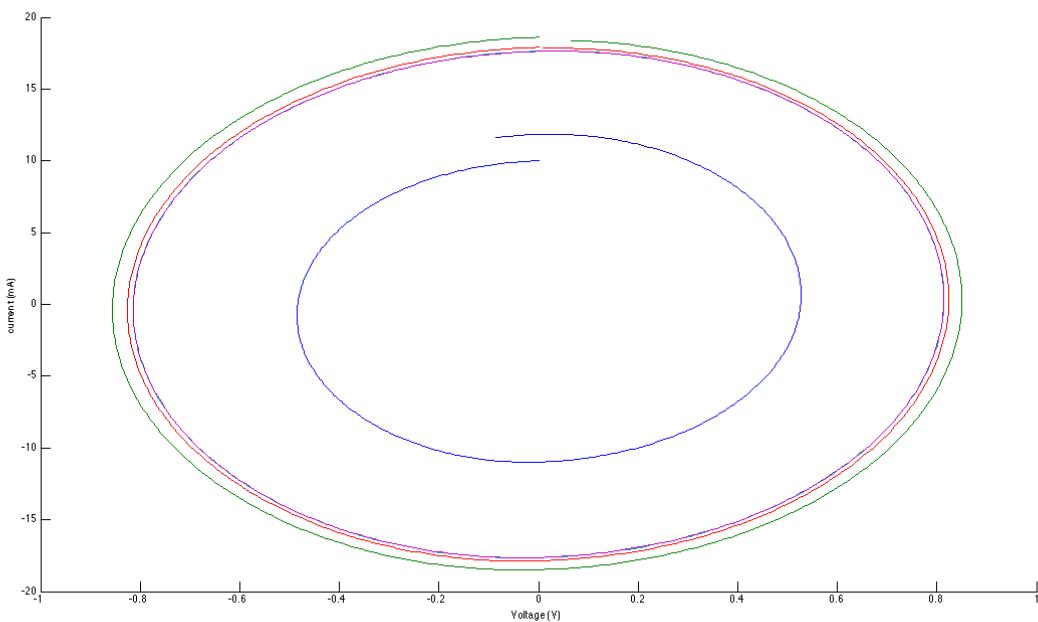


Figura 13 – Risultato dell'esecuzione dello script *period.m*. Ogni curva rappresenta l'evoluzione del sistema per ogni tentativo dell'algoritmo di Newton di determinare le condizioni iniziali e durata del periodo corretti.

Realizzazione del prototipo e misure di laboratorio

Come è mio solito fare, anche questa volta ho cercato di non limitarmi allo studio del circuito sulla carta. Vista la semplicità circuitale, ho deciso di realizzare un prototipo dell'oscillatore. Lo schema è esattamente quello studiato in precedenza, con l'aggiunta della circuiteria per realizzare il generatore di corrente (implementato con un BJT degenerato) e un amplificatore reazionato, che possa prelevare il segnale dalla coppia risonante e riproporlo a bassa impedenza in uscita. Dopo aver potuto constatare che il circuito funzionasse, cosa verificata con un frequenzimetro, ho chiesto al prof. Marco Sampietro se fosse possibile effettuare delle misure di laboratorio usando strumenti più professionali. È stato così che, assieme al prof. Marco Carminati, ho potuto visualizzare la forma d'onda e lo spettro del segnale in uscita al circuito. Di seguito sono riportati lo schema circuitale completo, le simulazioni su PSpice, le foto del circuito e gli screen degli strumenti.

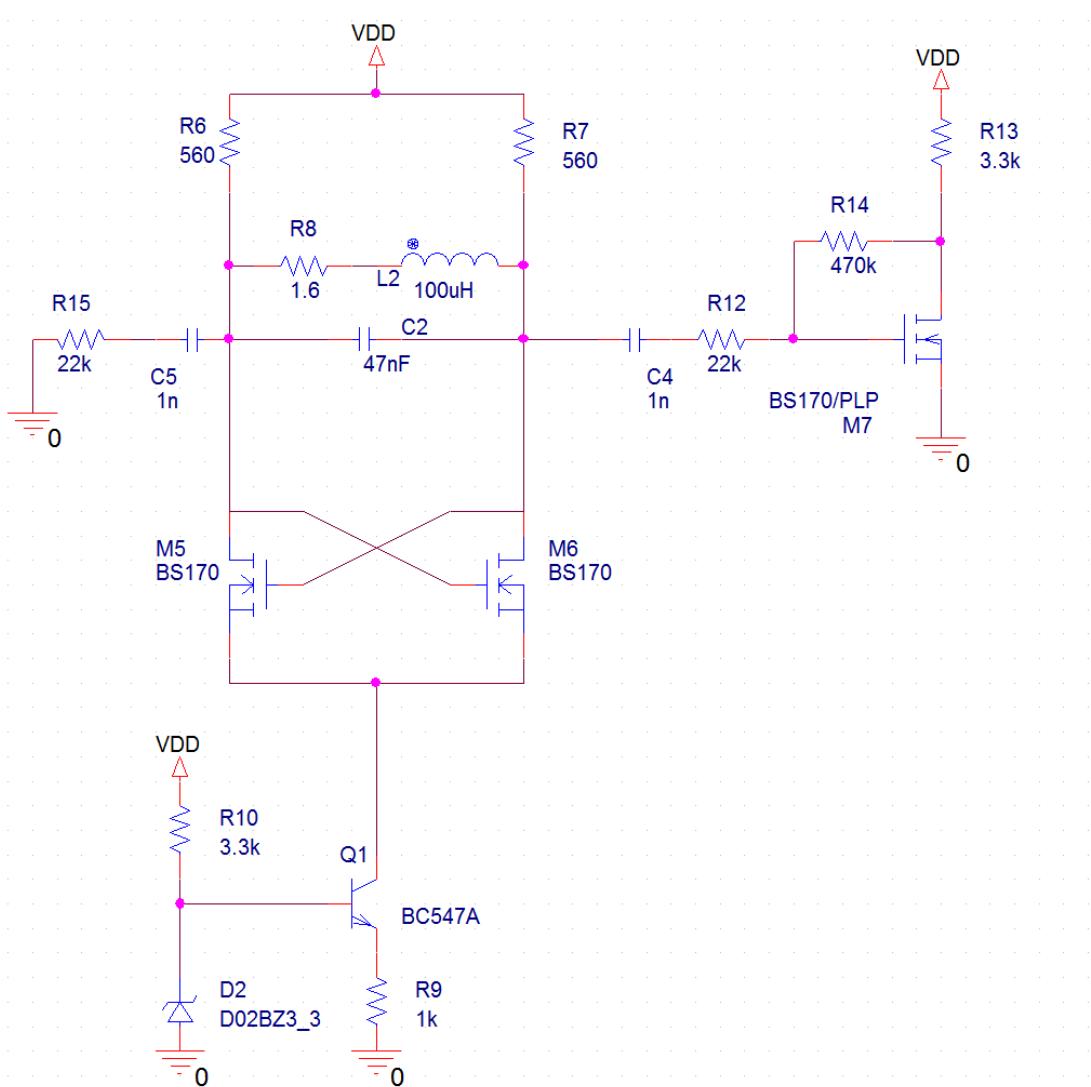


Figura 14 – schema elettrico della realizzazione pratica del circuito

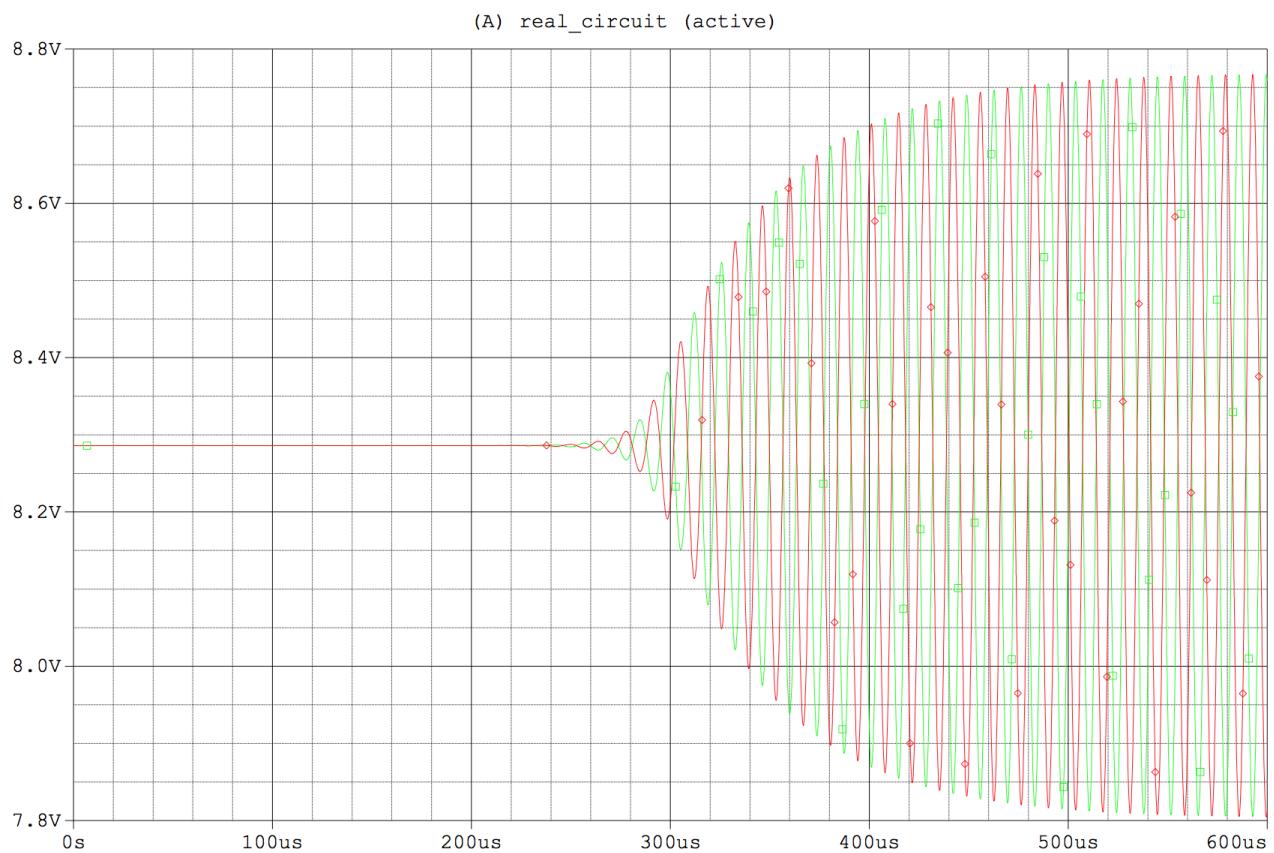


Figura 15 – Simulazione dell’andamento della tensione ai nodi di drain rispetto a massa

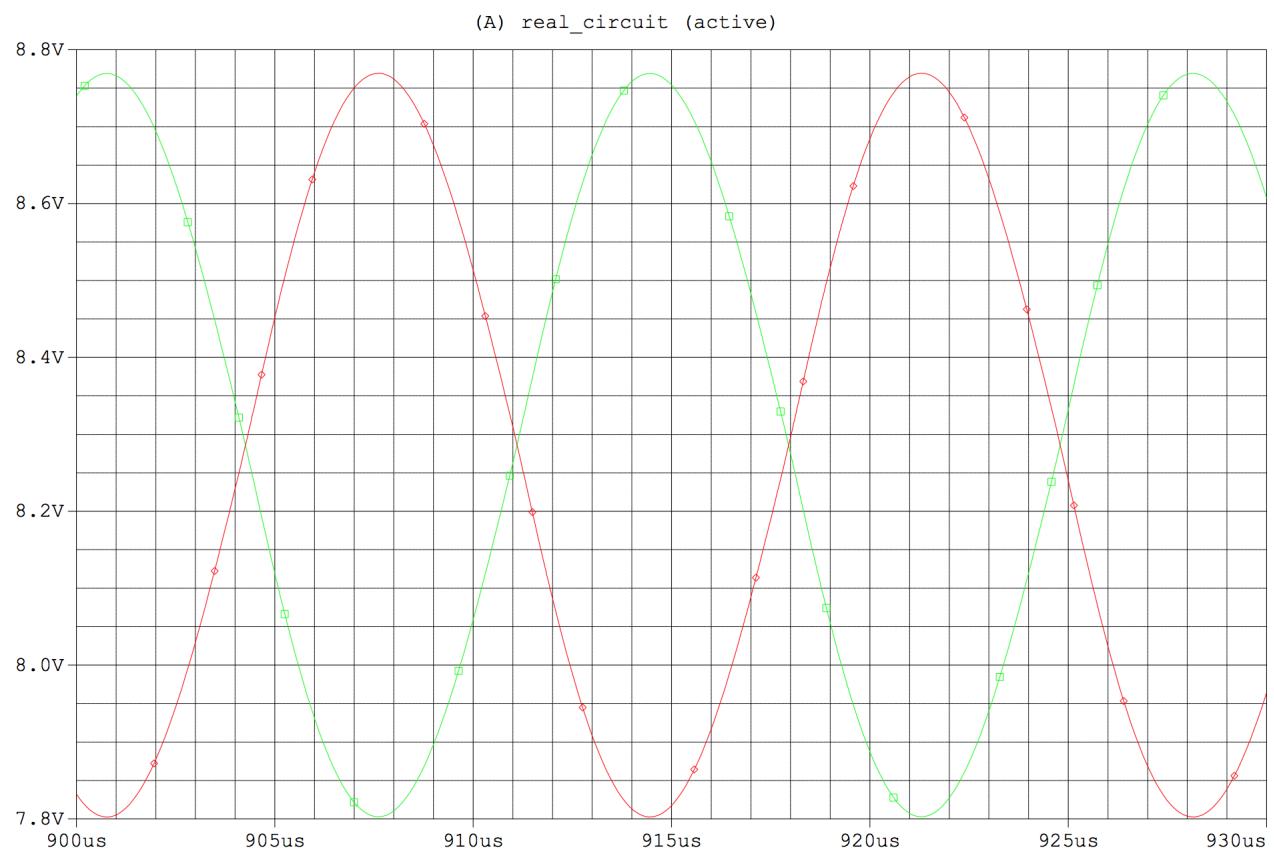


Figura 16 – Ingrandimento del segnale in uscita dopo l’avvio delle oscillazioni

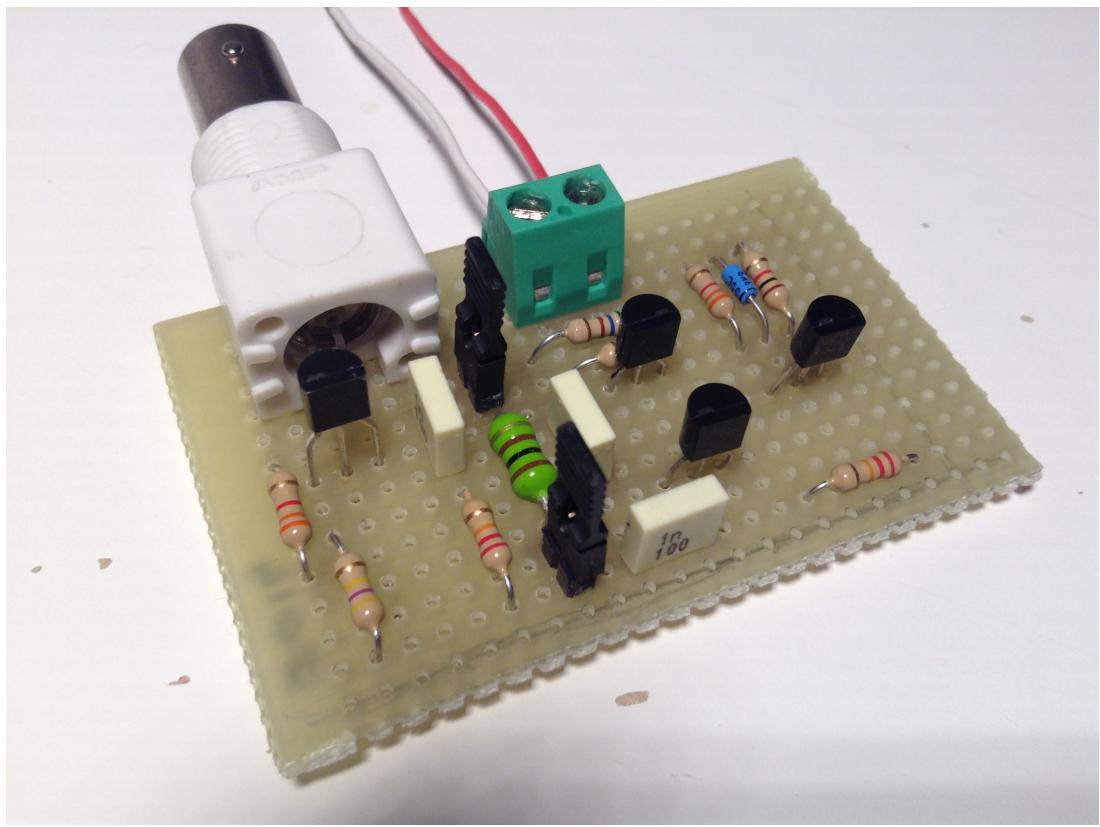


Figura 17 – Circuito elettronico assemblato

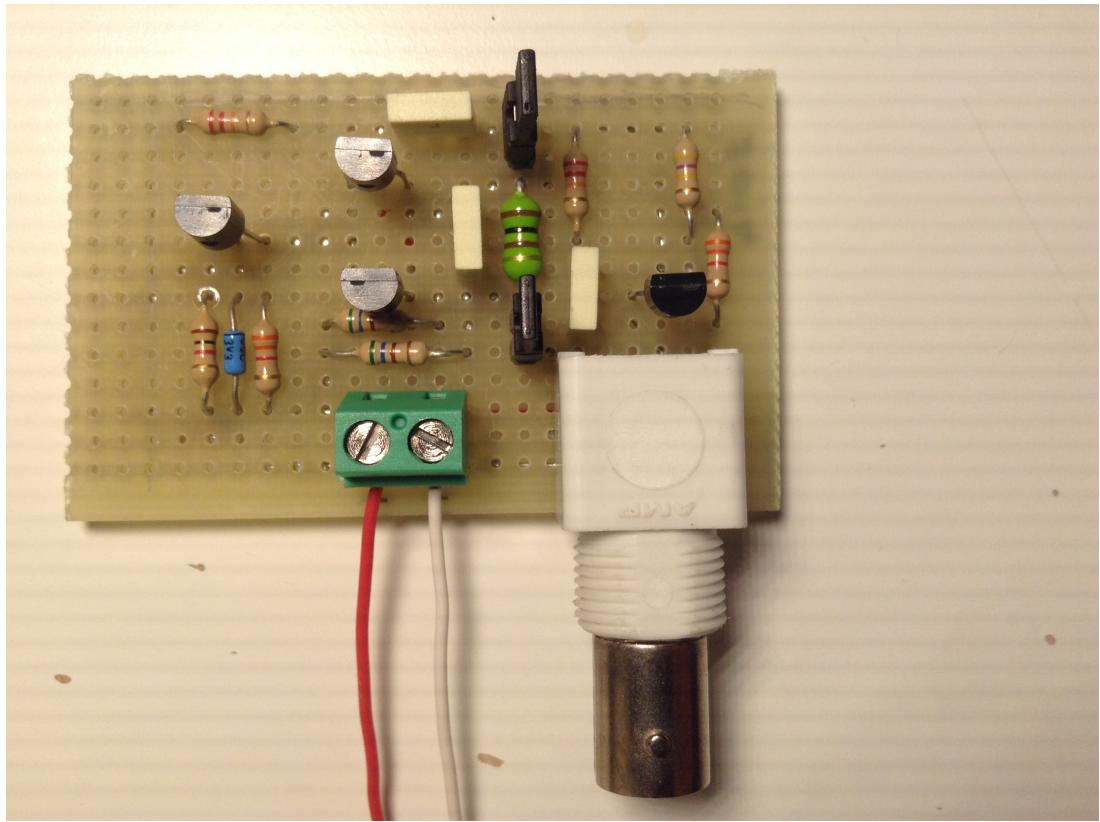


Figura 18 – Circuito elettronico assemblato

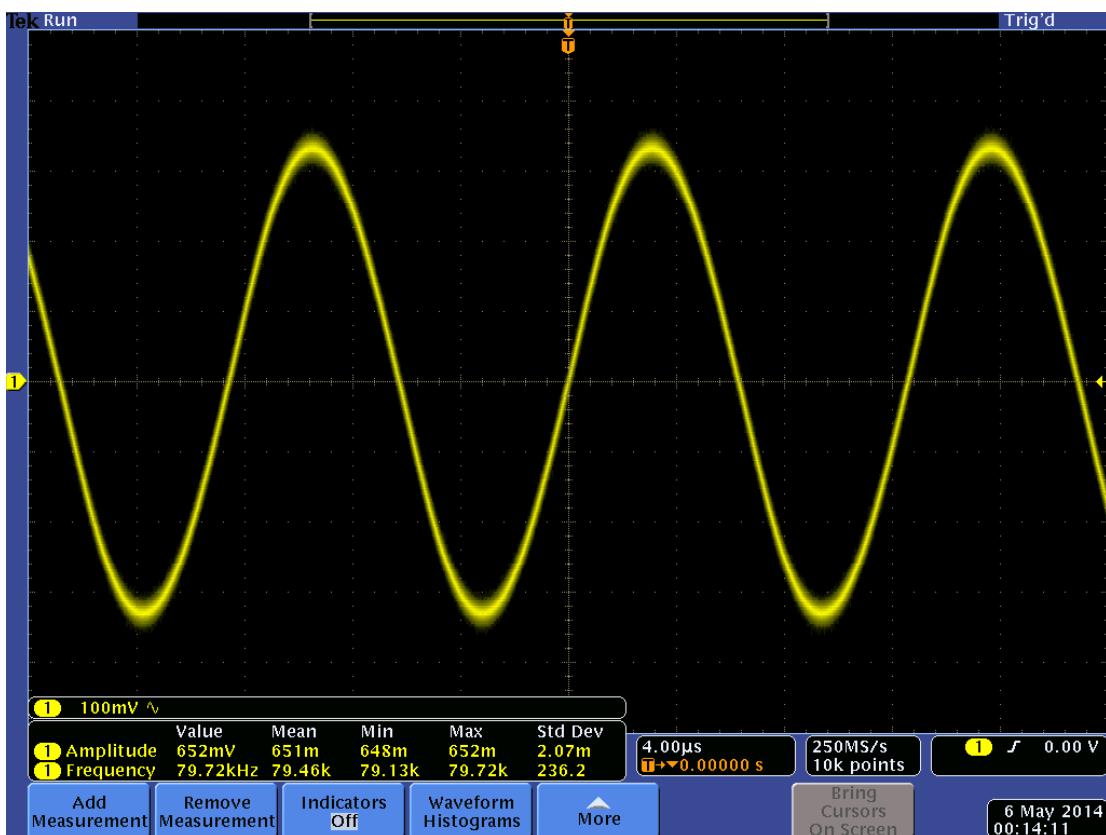


Figura 19 – Forma d’onda della tensione ad un nodo di drain rispetto a massa.

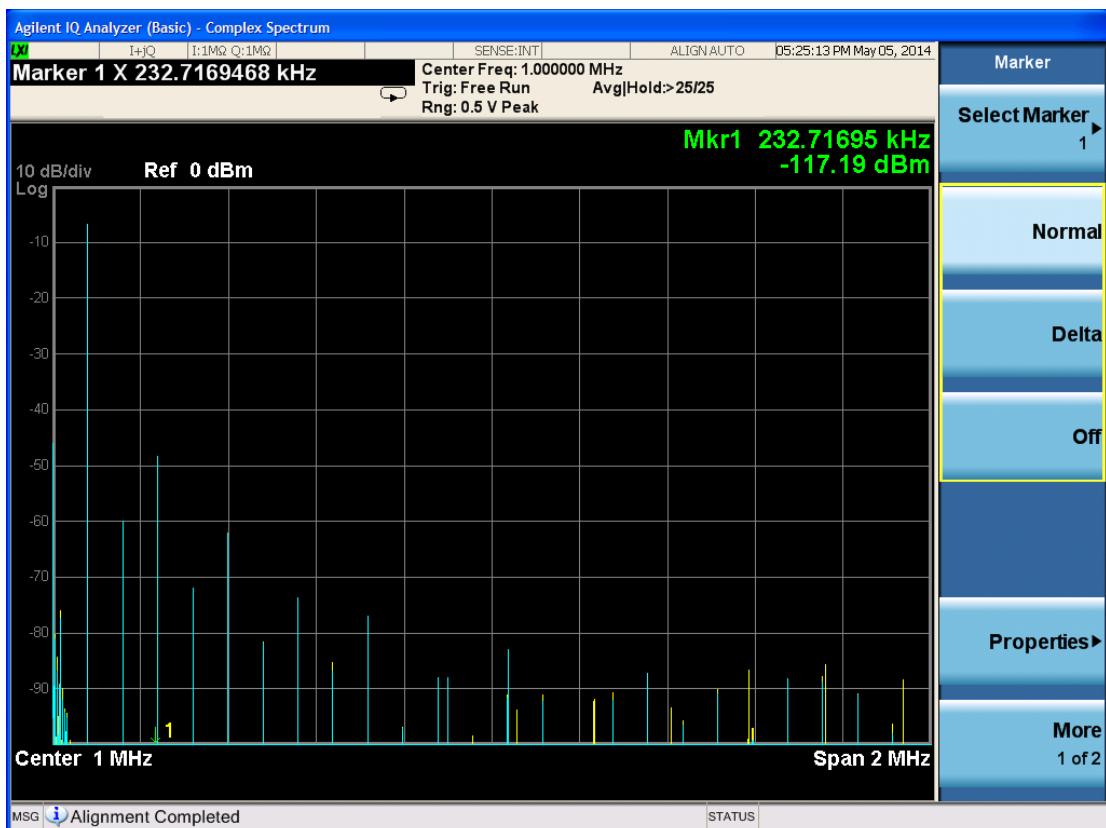


Figura 20 – Analisi dello spettro del segnale in uscita.

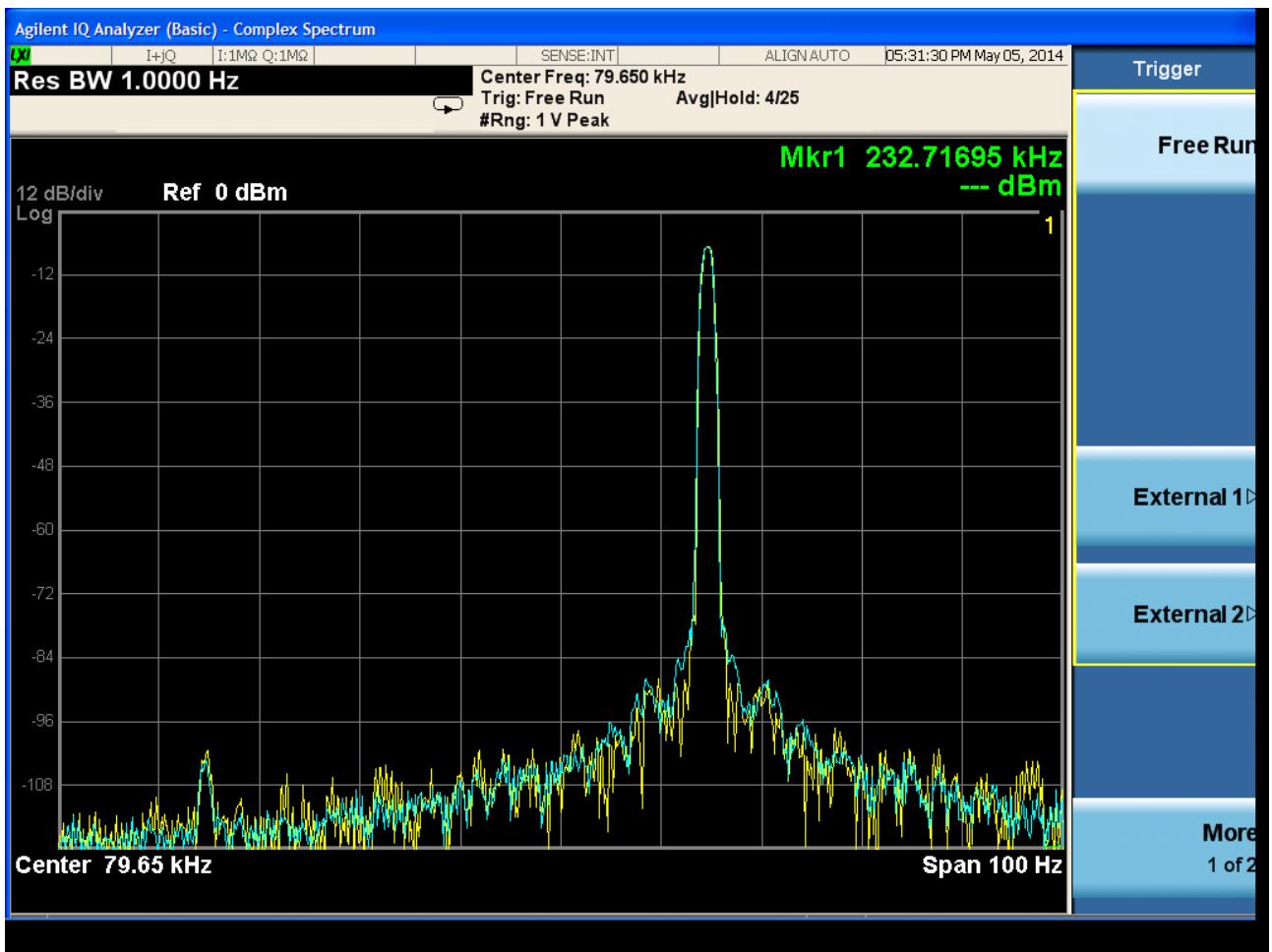


Figura 21 – Larghezza di banda della fondamentale molto ridotta.

Come si è potuto osservare dai grafici precedenti, ci sono alcune incongruenze tra i valori ricavati sulla carta e quelli misurati sperimentalmente. Questo è sicuramente conseguenza della tolleranza dei componenti utilizzati per creare la rete risonante.