



TELETRANSPORTACIÓN CUÁNTICA Y CODIFICACIÓN SUPERDENSE

Universidad De Antioquia
Facultad De Ingeniería
Departamento De Electrónica Y Telecomunicaciones

Kevin David Martinez Zapata
Correo: kevin.martinez1@udea.edu.co
Sebastián Bernal Cuaspa
Correo: sebastian.bernalc@udea.edu.co

RESUMEN: Se busca en este laboratorio abordar los temas de teletransportación de qubits, de codificación superdensa y la mitigación de errores. Primero se analiza un estado cuántico dado para conocer los qubits $|Q_0\rangle$, $|Q_1\rangle$ y $|Q_2\rangle$. Con esos qubits se quiere mandar a Bob el qubit $|Q_2\rangle$ y con los otros dos se deduce el estado de Bell correspondiente. Así mismo, se procede a hacer la codificación superdensa con los bits clásicos correspondientes y finalmente, la mitigación de errores.

I. INTRODUCCIÓN

La teletransportación cuántica y la codificación superdensa son dos protocolos de transmisión de comunicación cuántica, en los cuales se identifica a Alice como la transmisora y a Bob como el receptor de la información, estos protocolos parten del entrelazamiento cuántico, donde dos qubits o más, a pesar de estar alejados grandes distancias, sigue habiendo interacción entre sí, o sea, se describen mediante un estado único que involucra a todos los objetos del sistema, gracias a esto es posible que “Alice” le envíe información a “Bob” ya que estos comparten un único estado llamado estado de Bell que solo ellos conocen ya que se formó cuando estaban juntos y cada uno se llevó su qubit.

El entrelazamiento es la base de tecnologías en fase de desarrollo, tales como la computación cuántica, la criptografía cuántica, y se ha utilizado en experimentos de teletransportación cuántica.

II. DESARROLLO

1.1. Asignación De Un Estado Cuántico

El estado cuántico asignado en este caso es el siguiente:

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{8} |000\rangle + \frac{3 - \sqrt{6}i}{8} |001\rangle + \frac{1}{8} |010\rangle + \frac{3 - \sqrt{6}i}{8} |011\rangle - \frac{1}{8} |100\rangle - \frac{3 - \sqrt{6}i}{8} |101\rangle - \frac{1}{8} |110\rangle - \frac{3 - \sqrt{6}i}{8} |111\rangle$$

1.2. Implementación Del Estado Asignado

Se quiere obtener los qubits $|Q_0\rangle$, $|Q_1\rangle$ y $|Q_2\rangle$, esto se logra de la siguiente forma:

$$\frac{1}{8} |000\rangle = a_1 * a_2 * a_3 (|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle)$$

$$\frac{3 - \sqrt{6}i}{8} |001\rangle = a_1 * a_2 * a_4 (|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |1\rangle)$$

$$\frac{1}{8} |010\rangle = a_1 * a_5 * a_3 (|0\rangle \otimes |1\rangle \otimes |0\rangle)$$

$$\frac{3 - \sqrt{6}i}{8} |011\rangle = a_1 * a_5 * a_4 (|0\rangle \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle)$$

$$-\frac{1}{8} |100\rangle = a_6 * a_2 * a_3 (|1\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle)$$

$$-\frac{3 - \sqrt{6}i}{8} |101\rangle = a_6 * a_2 * a_4 (|1\rangle \otimes |0\rangle \otimes |1\rangle)$$

$$-\frac{1}{8} |110\rangle = a_6 * a_5 * a_3 (|1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |0\rangle)$$

$$-\frac{3 - \sqrt{6}i}{8} |111\rangle = a_6 * a_5 * a_4 (|1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle)$$

De estas ecuaciones se puede reordenar incógnitas

$$a_6 = -a_1; a_2 = a_5; a_4 = \text{la parte imaginaria}$$

$$a_1 * a_2 * a_3 = \frac{1}{8}; \quad a_4 = (3 - \sqrt{6}i) * a_3$$

Y se obtienen los siguientes resultados:

$$a_1 = a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad a_3 = \frac{1}{4}; \quad a_4 = \frac{3 - \sqrt{6}i}{4}$$

Así se obtienen los qubits

$$|Q_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

$$|Q_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

$$|Q_2\rangle = \frac{1}{4}|0\rangle + \left(\frac{3 - \sqrt{6}i}{4}\right)|1\rangle$$

A continuación, se hace una demostración en Qiskit de como generar el circuito para el estado cuántico asignado, ver figura 1.

```
[4]: import math
desired_vector = [
    1 / 8 * complex(1, 0),
    1 / 8 * complex(3, -math.sqrt(6)),
    1 / 8 * complex(1, 0),
    1 / 8 * complex(3, -math.sqrt(6)),
    1 / 8 * complex(-1, 0),
    1 / 8 * complex(-3, math.sqrt(6)),
    1 / 8 * complex(-1, 0),
    1 / 8 * complex(-3, math.sqrt(6)),]

q = QuantumRegister(3)

qc = QuantumCircuit(q)

qc.initialize(desired_vector, [q[0],q[1],q[2]])
qc.draw()
```

[4]:

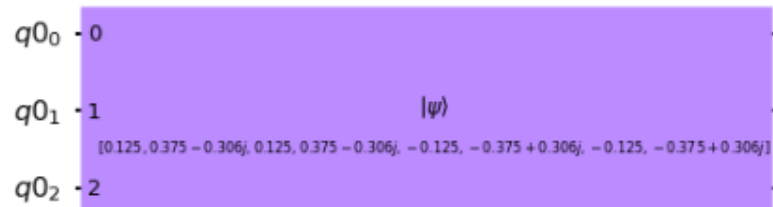


Figura 1. Circuito generador del estado cuántico asignado.

Finalmente, para corroborar que todo está bien y que es consistente, se hace la medición tomando en cuenta la probabilidad de ocurrencia de cada estado cuántico y debe dar como resultado que la suma de las amplitudes al cuadrado es igual a 1, ver figura 2.

```
[5]: backend = BasicAer.get_backend('statevector_simulator')
     job = backend.run(transpile(qc, backend))
     qc_state = job.result().get_statevector(qc)
     qc_state

[5]: array([ 0.125+0.00000000e+00j,  0.375-3.06186218e-01j,
            0.125+0.00000000e+00j,  0.375-3.06186218e-01j,
           -0.125-1.53080850e-17j, -0.375+3.06186218e-01j,
           -0.125-1.53080850e-17j, -0.375+3.06186218e-01j])

[6]: state_fidelity(desired_vector, qc_state)

[6]: 0.9999999999999996
```

Figura 2. Verificación de la consistencia del estado de Bell.

1.3. Diseño E Implementación Del Circuito Cuántico

1.3.1. Teletransportación Cuántica

Para transmitir el qubit $|Q_2\rangle$ es necesario definir un estado de Bell que es el que comparten Alice y Bob, en este caso se va a usar el estado de Bell $|\beta_{10}\rangle$.

$$\alpha = \frac{1}{4}, \beta = \frac{3 - i\sqrt{6}}{4}$$

$$|\Psi_0\rangle = |\Psi\rangle |\beta_{11}\rangle = [\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle] \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle \right]$$

$$|\Psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [\alpha|0\rangle(|00\rangle - |11\rangle) + \beta|1\rangle(|00\rangle - |11\rangle)]$$

Luego se aplica la compuerta CNOT al estado anterior.

$$|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [\alpha|0\rangle(|00\rangle - |11\rangle) + \beta|1\rangle(|10\rangle - |01\rangle)]$$

Luego se aplica la compuerta Hadamard al estado anterior:

$$|\Psi_2\rangle = H|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} [\alpha(|0\rangle + |1\rangle)(|00\rangle - |11\rangle) + \beta(|0\rangle - |1\rangle)(|10\rangle - |01\rangle)] \right]$$

$$|\Psi_2\rangle = \frac{1}{2} [\alpha|000\rangle - \alpha|011\rangle + \alpha|100\rangle - \alpha|111\rangle + \beta|010\rangle - \beta|001\rangle - \beta|110\rangle + \beta|101\rangle]$$

$$|\Psi_2\rangle = \frac{1}{2} [|00\rangle(\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) - |01\rangle(\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle) + |10\rangle(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) - |11\rangle(\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle)]$$

Es necesario analizar los cuatro casos posibles a la hora de la medición de Alice. La siguiente tabla muestra las operaciones que tiene que hacer Bob una vez Alice le manda los bits clásicos.

Medida de Alice	Estado de Bob	Operación	Resultado
00	$\alpha 0\rangle - \beta 1\rangle$	Z	$Z \Psi_3(00)\rangle = \alpha 0\rangle + \beta 1\rangle$
01	$\alpha 1\rangle - \beta 0\rangle$	ZX	$ZX \Psi_3(01)\rangle = \alpha 0\rangle + \beta 1\rangle$
10	$\alpha 0\rangle + \beta 1\rangle$	I	$I \Psi_3(10)\rangle = \alpha 0\rangle + \beta 1\rangle$
11	$\alpha 1\rangle + \beta 0\rangle$	X	$X \Psi_3(11)\rangle = \alpha 0\rangle + \beta 1\rangle$

1.3.2. Codificación Superdensa

Ahora, se quieren transmitir los bits clásicos $b_1b_0 = 11$ a Bob mediante la codificación superdensa. Para esto se hace una tabla de indica los bits que Alice quiere enviar y la respectiva operación que les debe aplicar a estos.

Bits que se quieren enviar	Operación	Resultado
00	I	$ \Psi_1(00)\rangle = I \Psi_0\rangle = \beta_{00}\rangle$
01	Z	$ \Psi_1(01)\rangle = Z \Psi_0\rangle = \beta_{10}\rangle$
10	X	$ \Psi_1(10)\rangle = X \Psi_0\rangle = \beta_{01}\rangle$
11	ZX	$ \Psi_1(11)\rangle = ZX \Psi_0\rangle = \beta_{11}\rangle$

De antemano se sabe que Alice quiere transmitir un 11, por lo tanto, el estado cuántico que va a recibir Bob es el siguiente:

$$|\Psi_1(M_1, M_2)\rangle = |\beta_{11}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$$

Como Bob ya tiene el qubit, procede a aplicarle una compuerta CNOT a este de la siguiente forma:

$$|\Psi_2\rangle = \text{CNOT}|\Psi_1(11)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |11\rangle)$$

Para la decodificación, Bob procede a finalmente aplicar la compuerta Hadamard.

$$|\Psi_3\rangle = H|\Psi_2(11)\rangle = |11\rangle$$

En este caso, se tiene que $|\Psi_3\rangle = |m_1 m_2\rangle$ teniendo presente que $m_1 = M_1$ y $m_2 = M_2$, o sea, $M_1 = 1$ y $M_2 = 1$; esto es lo que Alice efectivamente quería transmitir y Bob lo ha recuperado sin problemas.

1.3.3. Gráfico Del Circuito

A continuación, se muestra un gráfico donde se observa la teletransportación y la codificación superdensa, encerrado en verde se va a identificar la parte de la teletransportación, y en rojo la parte de la codificación superdensa, ver figura 3.

Posteriormente, se va a mostrar cual es la salida del circuito de Alice y de Bob, además de la salida de la codificación superdensa, ver figuras 5, 6 y 7 respectivamente.

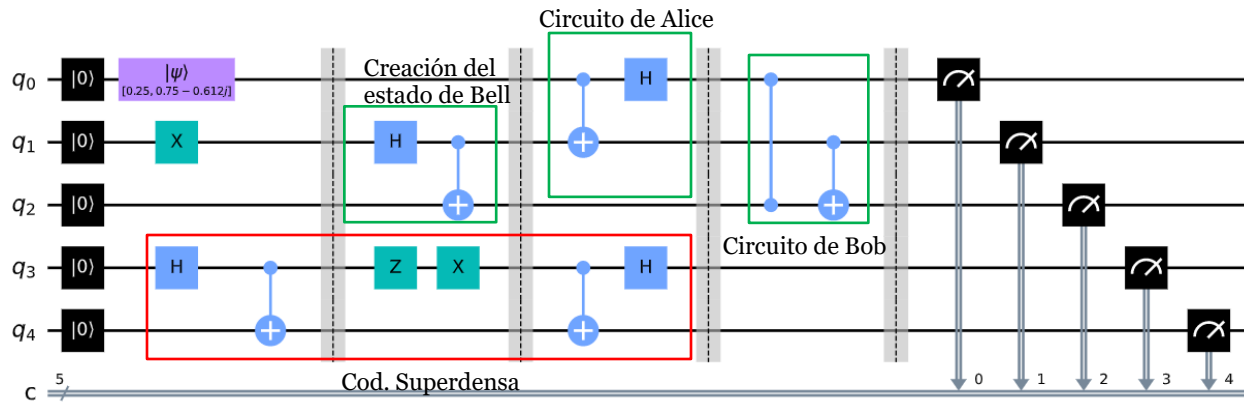


Figura 3. Circuito completo de teletransportación y codificación superdensa.

1.3.4. Implementación En Qiskit (Simulación)

El histograma del circuito completo se muestra a continuación.

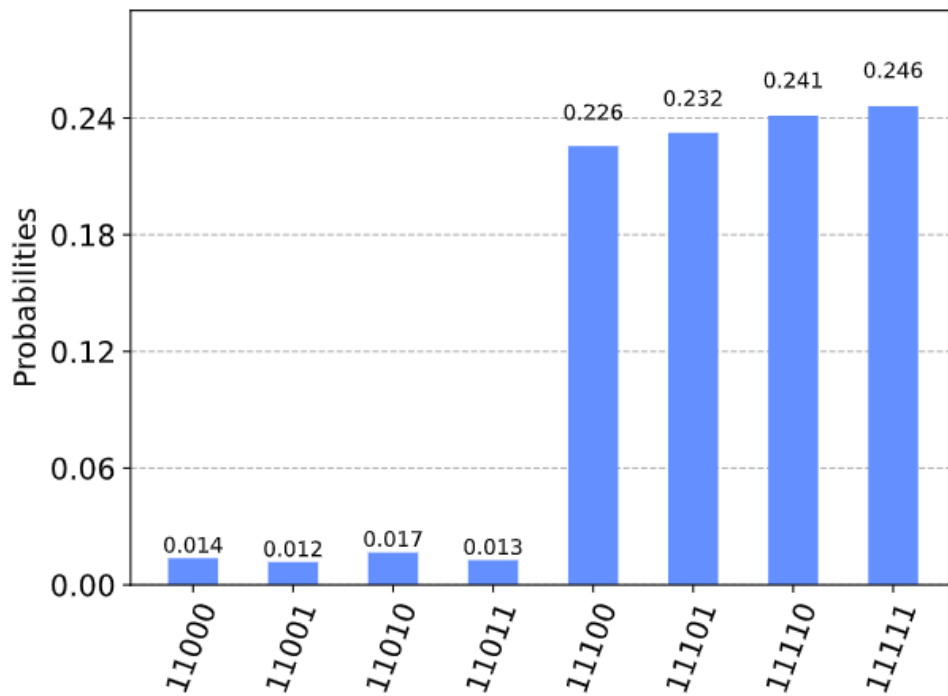


Figura 4. Histograma del circuito.

Ahora, para hacer un histograma del circuito de Alice que se encarga de entregar a Bob dos bits clásicos se hace de la siguiente forma: los dos bits menos significativos se suman en todos sus casos posibles, o sea, 00, 01, 10 y 11 para conocer las probabilidades de ocurrencia de cada uno.

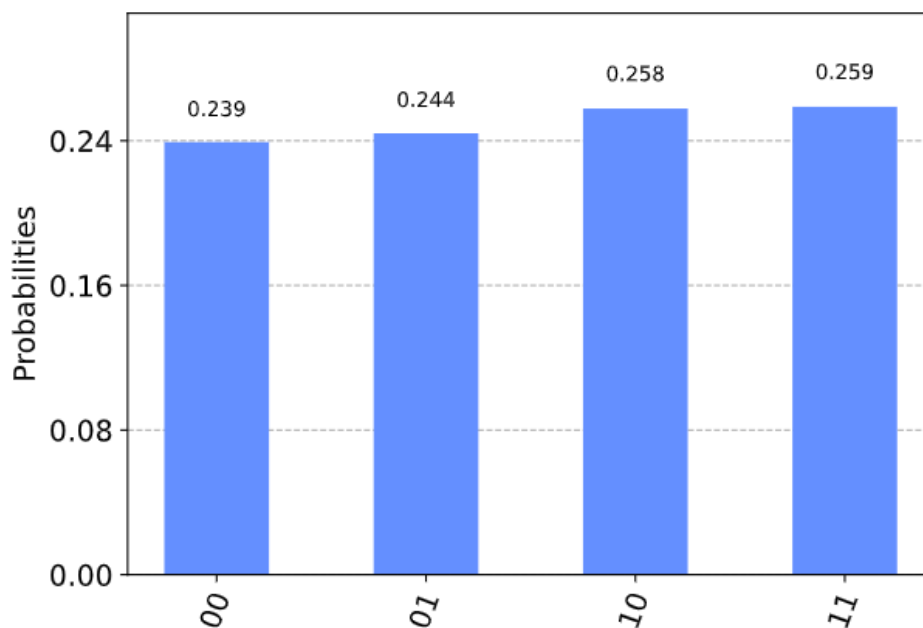


Figura 5. Histograma de la salida del circuito de Alice.

Se puede ver entonces que existen cuatro posibilidades que es lo esperado, todas con casi la misma probabilidad de ocurrencia que es del 25%, con esto, Bob puede aplicar en su circuito las compuertas correspondientes para obtener el estado cuántico que Alice le mando desde el principio.

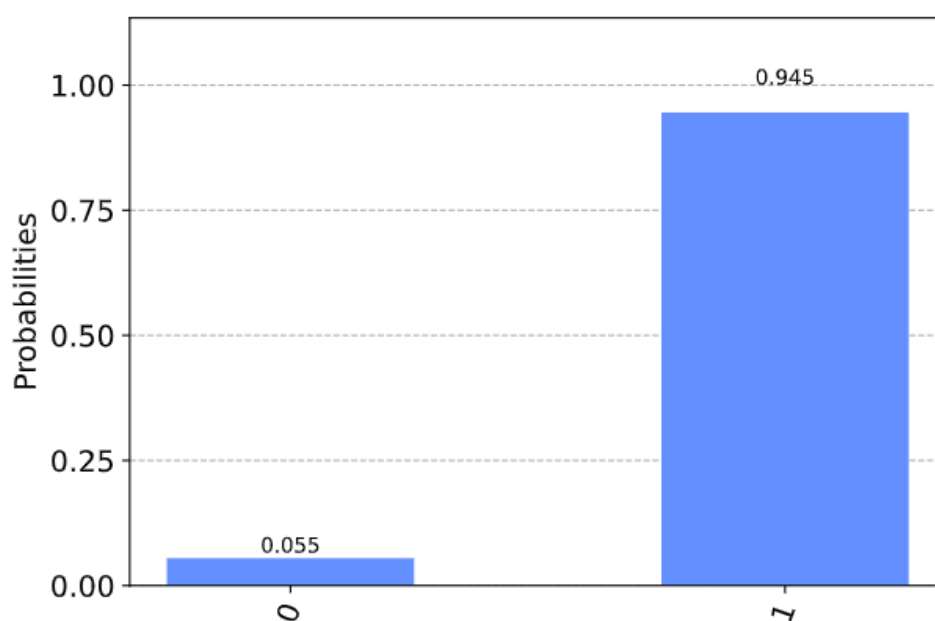


Figura 6. Histograma de la salida del circuito de Bob.

Si se mira la gráfica anterior se puede ver que es efectivamente el estado original $|\Psi\rangle$ que Alice mandó que correspondía a:

$$|\Psi_2\rangle = \frac{1}{4}|0\rangle + \left(\frac{3-i\sqrt{6}}{4}\right)|1\rangle$$

Si se saca raíz cuadrada a cada uno de los componentes se tiene la probabilidad mostrada en el histograma de la figura 6.

Para el caso de la codificación superdensa se quieren mandar en este caso los bits clásicos "11", después de atravesar todo el circuito esto es lo que se obtiene a la salida.

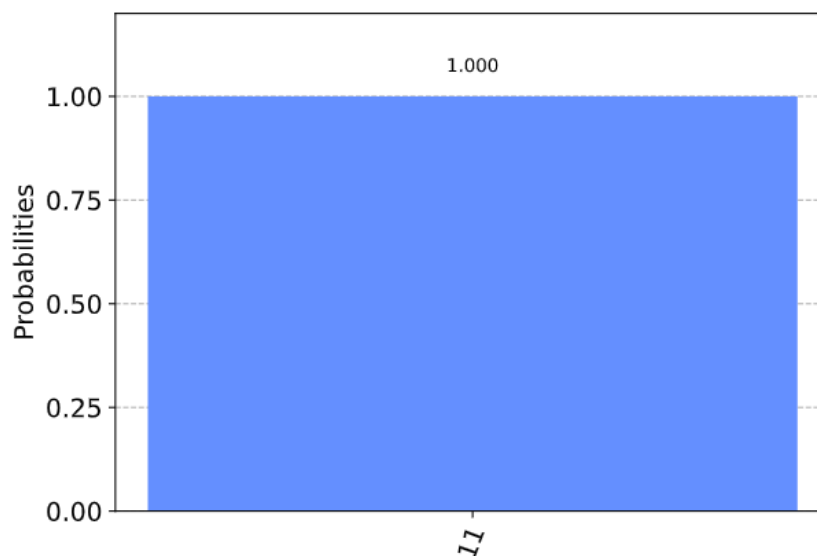


Figura 7. Histograma de la salida del circuito de codificación superdensa.

Se puede ver que es un resultado que se esperaba al igual que los anteriores debido a que es una simulación y es 100% seguro de que se va a obtener la respuesta correcta, como en este caso es 100% seguro obtener "11" a la salida.

1.3.5. Ejecución Real Del Circuito Cuántico

De la misma manera que se hizo anteriormente, se va a mostrar los resultados, pero ahora de la ejecución real hecha en una maquina real de IBM. Lo primero es mostrar la salida del circuito de la figura 3, Se van a notar cambios debió a que la ejecución es real y no una mera simulación, por lo que van a resultar más estos cuánticos que antes.

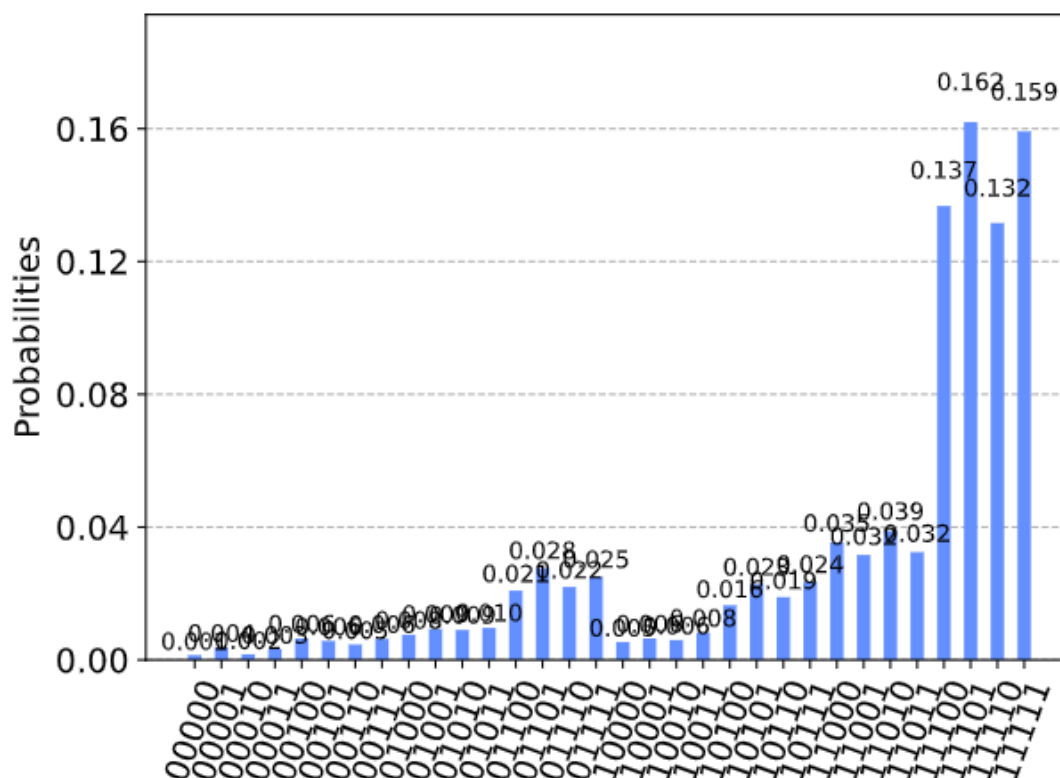


Figura 8. Salida del circuito en una ejecución real.

De la misma manera, se puede extraer la información de la salida del circuito de Alice, Bob y de la codificación superdensa.

La siguiente figura muestra la salida del circuito de Alice:

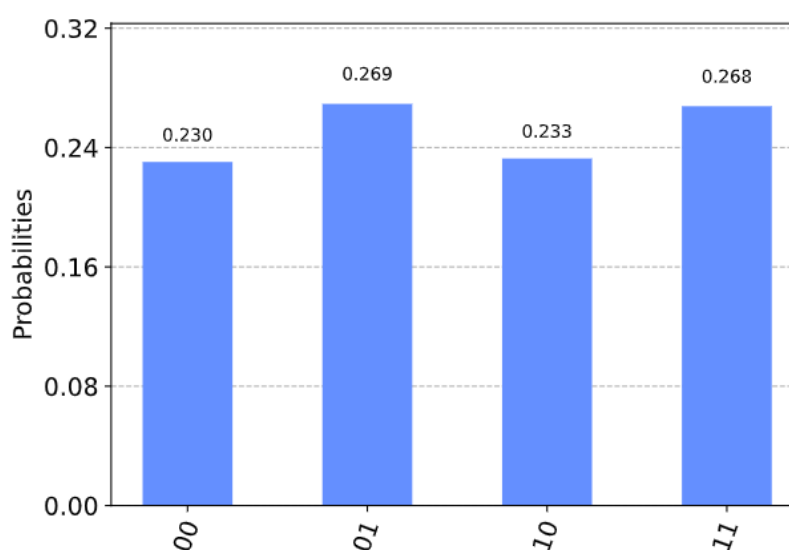


Figura 9. Salida del circuito de Alice en ejecución real.

Para este caso no se nota mucha diferencia ya que la tendencia es que todas las posibles combinaciones de 2 bits tengan la misma probabilidad de ocurrencia, pero si hay diferencias con la simulación evidentemente.

La salida del circuito de Bob es la siguiente:

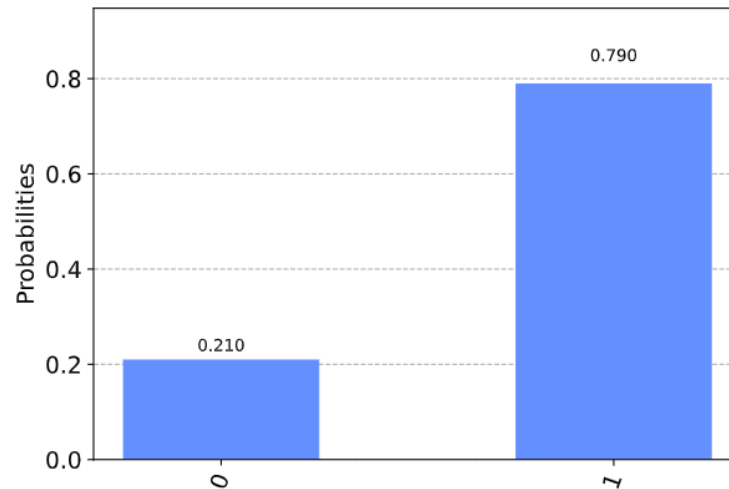


Figura 10. Salida del circuito de Bob en ejecución real.

Aquí si se puede notar mas diferencia que en la simulación, hay mucho mas error ya que el $|1\rangle$ estaba alrededor del 92% de probabilidad que es su valor real y acá este alrededor del 78%; de la misma manera para el estado $|0\rangle$. Esto es consecuencia de la ejecución real.

Finalmente, el circuito de codificación superdensa:

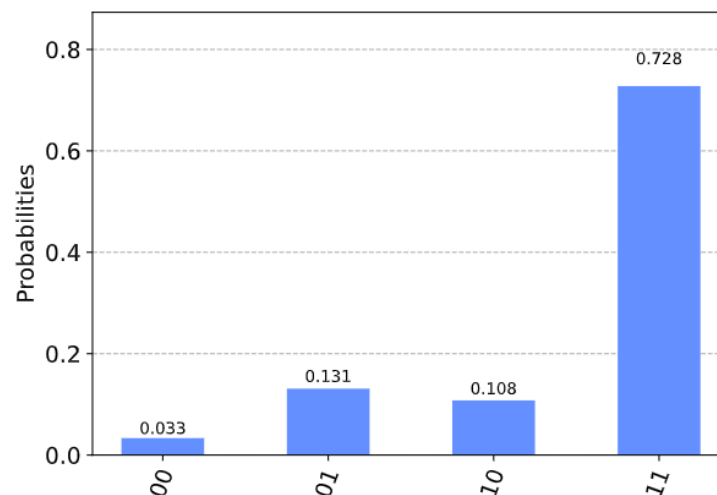


Figura 11. Codificación superdensa real.

Este caso es el que mejor muestra lo que pasa en una ejecución real; en la simulación solo había la posibilidad de obtener el estado $|11\rangle$ que es lo que se espera que reciba Bob; pero en este caso, al ser una ejecución real, existen pequeñas probabilidades de que se lleguen otros estados cuánticos que no son lo que se envió inicialmente.

Este fenómeno evidenciado por la ejecución real obliga a que se haga lo que se llama mitigación del error para aumentar las probabilidades de que la información que se quería transmitir sea la correcta.

1.3.6 Mitigación Del Error

Con el fin de reducir el error en la medición anterior se usa lo que es la mitigación de errores, aplicando el circuito correspondiente la nueva salida se ve de esta forma compara con la ejecución real:

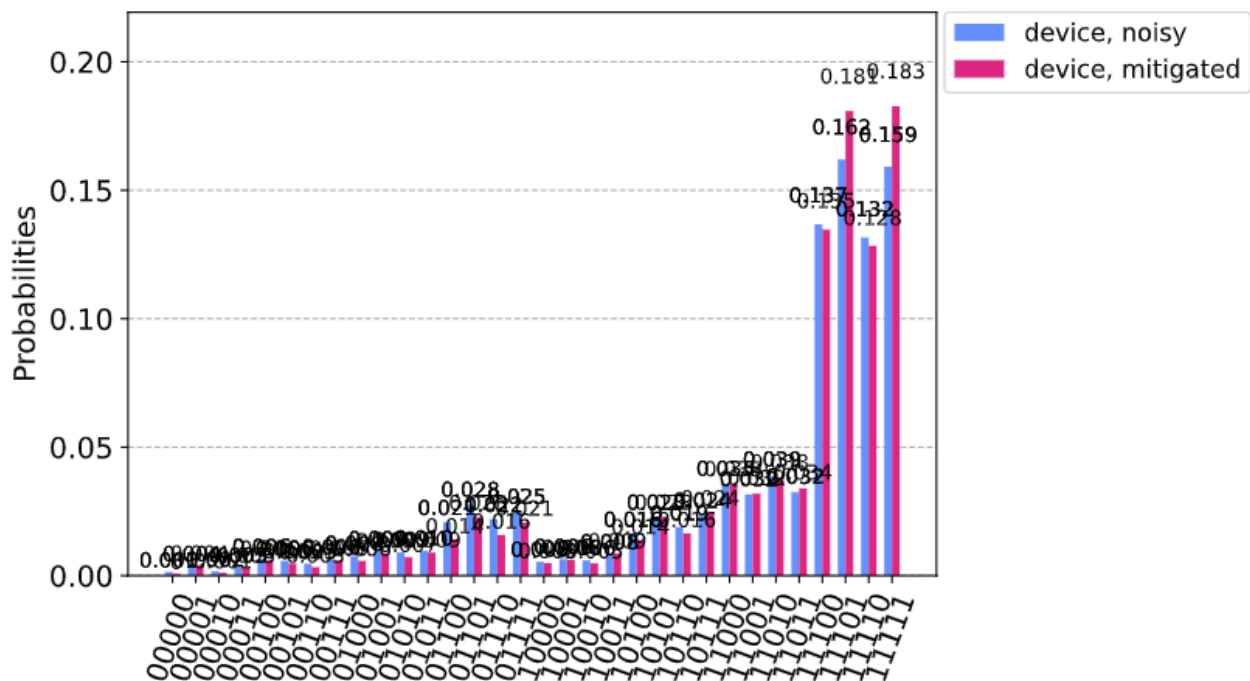


Figura 12. Mitigación de errores en el circuito.

Igualmente, se muestra el circuito de Alice antes y después de la mitigación de errores en la siguiente figura. Ver figura 13.

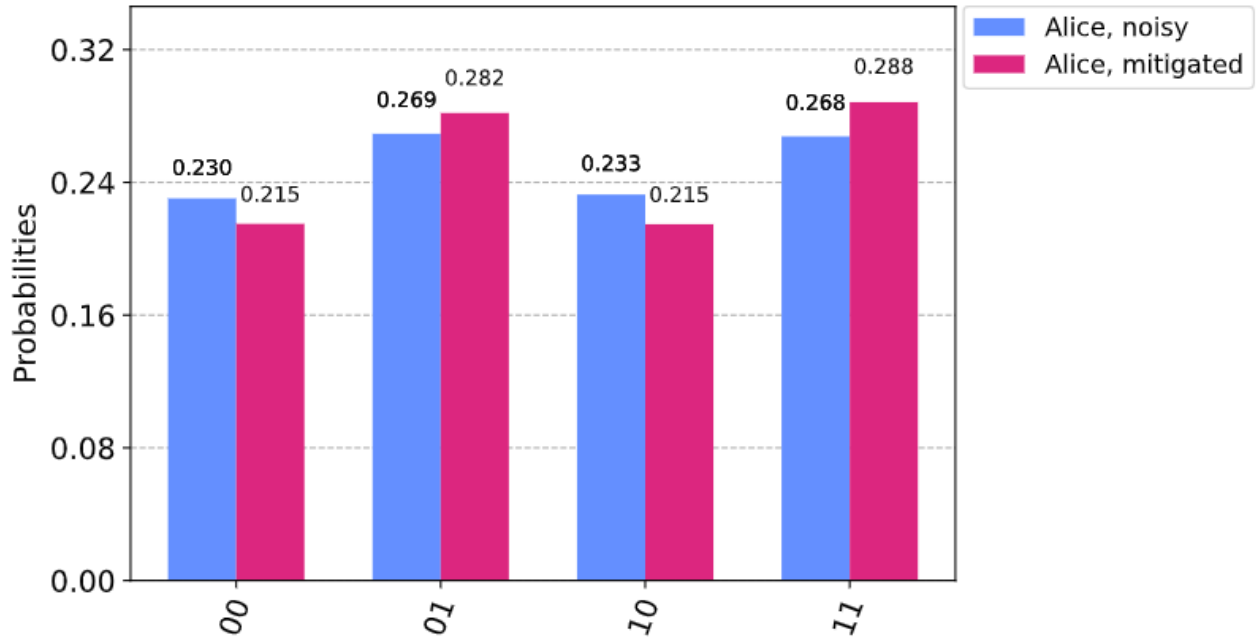


Figura 13. Mitigación de errores del circuito de Alice.

De la misma manera se tiene la mitigación de errores para el circuito de Bob en la siguiente figura. Ver figura 14.

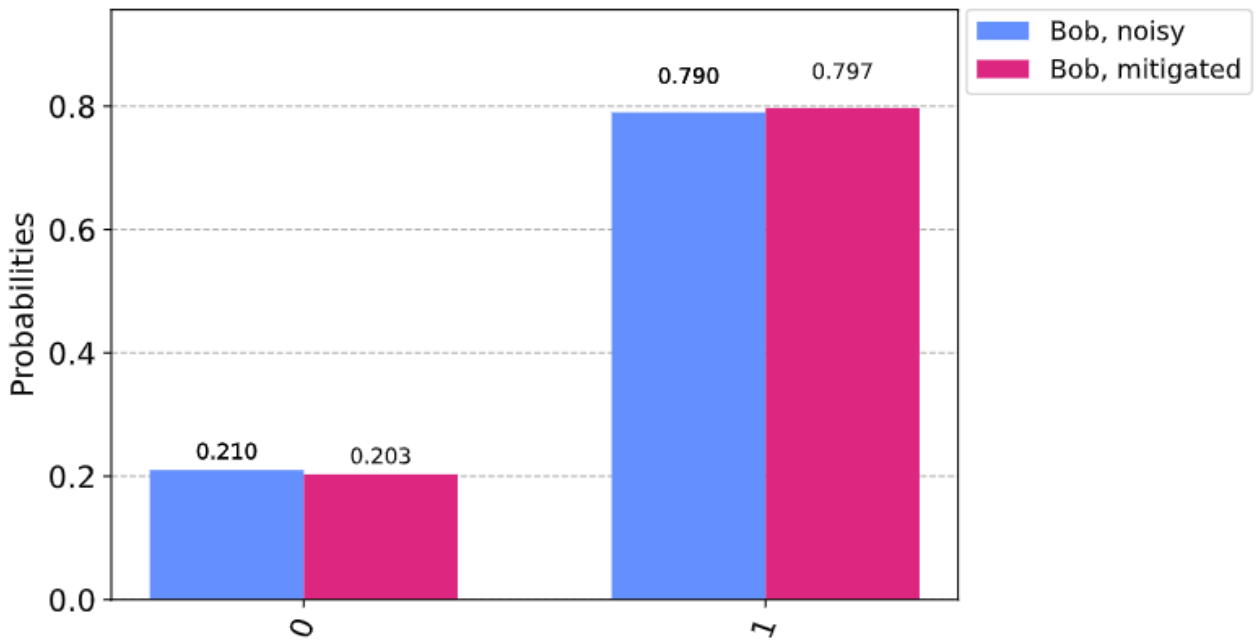


Figura 14. Mitigación de errores del circuito de Bob.

Finalmente, se tiene la mitigación de errores en la codificación superdensa en la siguiente figura. Ver figura 15.

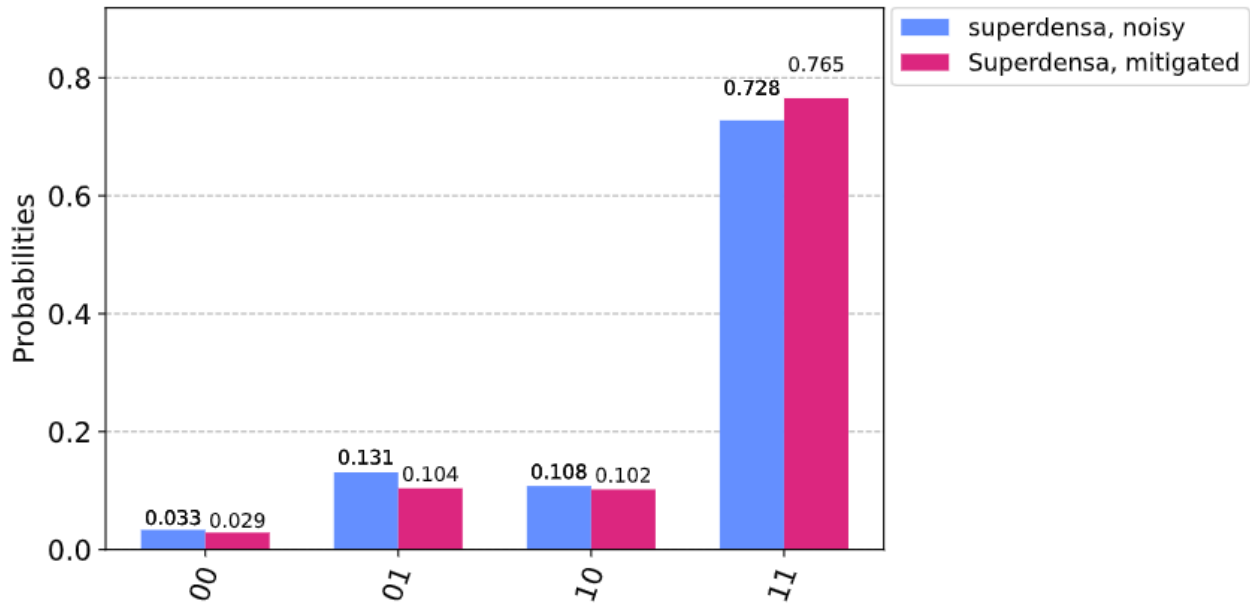


Figura 15. Mitigación de errores en la codificación superdensa.

Se puede ver que efectivamente el error disminuye un poco con respecto a los obtenidos anteriormente, se va a mostrar a continuación una tabla con el porcentaje de error con respecto a la medición ideal que sería la de la simulación.

Estado cuántico recibido por Bob. Teleportación	
Real	Mitigado
16.40%	15.66%
Bits recibidos por Bob. Codificación superdensa	
Real	Mitigado
27.2%	23.5%

Tabla 1. Porcentaje de error de la ejecución real con y sin mitigación.

Se puede ver que, aunque si mitigó algo de error, la diferencia no es mucha; se alcanzó una mejoría del 1% y 4% aproximadamente.

III. CONCLUSIONES

En la teletransportación cuántica, partiendo de cualquier estado de Bell, se debe llegar a una respuesta correcta, pero cambia la tabla de operaciones que Bob debe hacer una vez reciba los bits clásicos de Alice, o sea, el circuito de Bob cambia dependiendo de cuáles el estado de Bell que ambos comparten.

Al hacer una ejecución real del circuito resulta que todos los estados existentes tienen una probabilidad por más pequeña que sea, en el caso de la simulación por ejemplo no existía el estado $|00000\rangle$ ya que era imposible que apareciera porque los dos bits más significativos siempre eran 1, lo que daba como resultado en la codificación superdensa una probabilidad del 100% de aparición del estado $|11\rangle$, pero en la real ya había 32 estados posibles.

La mitigación de errores permitió mejorar un poco las mediciones de la ejecución real pero no son tan sorprendentes como no esperaba, mejorías entre el 1% y 4% que por ejemplo en el caso de la codificación superdensa no logra eliminar los otros tres estados posibles que en realidad no deberían ocurrir y conservan una probabilidad relativamente alta del 10% aproximadamente para el caso del 01 y el 10. O el caso del estado cuántico que recibe Bob donde el $|0\rangle$ debería tener una probabilidad del 6% aproximadamente se sube hasta el 20%, lo cual es un aumento considerable a la hora de una aplicación real.

IV. REFERENCIAS

- [1] Codificación Superdensa y Teleportación Cuántica. (n.d.). Edu.Ar. Retrieved August 21, 2022, from <http://www3.fi.mdp.edu.ar/fes/cursoQ2016/compuquant-4.pdf>
- [2] Quantum teleportation. (2022, July 6). Data 100 at UC Berkeley. <https://qiskit.org/textbook/ch-algorithms/teleportation.html>
- [3] Superdense Coding. (2022, July 6). Data 100 at UC Berkeley. <https://qiskit.org/textbook/ch-algorithms/superdense-coding.html>