Topologie et matrices

On désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et on fixe un entier $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. Tous les résultats qui suivent sont énoncés dans le cadre matriciel. Cependant, on en déduit directement leur analogue pour les parties de $\mathscr{L}(E)$ correspondantes si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n (car l'isomorphisme d'algèbres de $\mathscr{L}(E)$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ obtenu en fixant une base de E est un homéomorphisme).

1. Groupes linéaires

Rappelons qu'une matrice de transvection est une matrice de la forme

$$T(\lambda) = \mathrm{I}_n + \lambda E_{i,j} \quad \text{où} \quad \lambda \in \mathbb{K}^* \quad \text{et} \quad (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad \text{avec} \quad i \neq j.$$

Proposition 1 : *L'ensemble* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ *est une partie fermée, d'intérieur vide, non bornée et connexe par arcs de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

<u>Démonstration :</u>
1) L'application $\det : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est continue et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) = \det^{-1}(\{1\})$, donc la partie $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ est fermée dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
2) Soit $M \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$. La suite définie par $M_k = M - 2^{-k}\mathrm{I}_n$ converge vers M. Or la suite $(\det(M_k))_{k\in\mathbb{N}}$ ne peut prendre qu'un nombre fini de fois la valeur 1, sinon le polynôme χ_M serait constant (alors qu'il est de degré n). Ainsi, pour tout $k \geqslant 0$ suffisamment grand, on a $M_k \notin \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$, donc M n'est pas un point intérieur de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ et l'intérieur de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ est vide.
3) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la matrice $D_k = \mathrm{Diag}(k, 1/k, 1, \ldots, 1)$ est dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$, donc l'ensemble $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ n'est pas borné.
4) Soit $M \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$. Comme l'ensemble des matrices de transvection engendre le groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$, il existe des transvections $T(\lambda_1), \ldots, T(\lambda_r) \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ tel que $M = T(\lambda_1)\cdots T(\lambda_r)$. On définit $\gamma : [0,1] \to \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ par

$$\forall t \in [0,1], \quad \gamma(t) = T(t\lambda_1)\cdots T(t\lambda_r).$$

L'application γ est continue et on a $\gamma(0) = \mathrm{I}_n$ et $\gamma(1) = M$, d'où le résultat. □

Proposition 2 : *L'ensemble* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *est une partie ouverte, dense et non bornée de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

<u>Démonstration :</u>
1) L'application $\det : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est continue et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = \det^{-1}(\mathbb{K}^*)$, donc la partie $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est ouverte dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
2) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. La suite définie par $M_k = M - 2^{-k}\mathrm{I}_n$ converge vers M. Or la suite $(\det(M_k))_{k\in\mathbb{N}}$ ne s'annule qu'un nombre fini de fois, car $\mathrm{Sp}(M)$ est fini. Ainsi, pour tout $k \geqslant 0$ suffisamment grand, on a $M_k \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, donc M est un point adhérent à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et l'adhérence de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
3) Comme $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ n'est pas borné, il en est de même de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. □

Proposition 3 : *On a les propriétés suivantes.*

(i) *L'ensemble* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *est connexe par arcs.*
(ii) *L'ensemble* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *n'est pas connexe. Ses deux composantes connexes sont les ensembles* $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ *et* $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$ *où*

$$\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) > 0\},$$
$$\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) < 0\}.$$

<u>Démonstration :</u>
1) Soit $(M,N) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2$. L'application $\chi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \chi(z) = \det(zM + (1-z)N)$$

est polynomiale. De plus, elle est non nulle car $\chi(0) \neq 0$ et $\chi(1) \neq 0$. Elle s'annule donc sur un ensemble fini X. Comme $\mathbb{C} \setminus X$ est connexe par arcs, il existe un chemin continu $\alpha : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus X$ tel que $\alpha(0) = 0$ et $\alpha(1) = 1$. Finalement, on définit $\gamma : [0,1] \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ par

$$\forall t \in [0,1], \quad \gamma(t) = \alpha(t)M + (1-\alpha(t))N.$$

L'application γ est continue et $\gamma(0) = N$ et $\gamma(1) = M$, d'où le résultat.
2) L'application $\det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ est continue. Comme $\mathbb{R}^*$ n'est pas connexe, on en déduit que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe.

3) Montrons que $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. Soit $M \in \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$. On définit la matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}(1, \dots, 1, \det(M))$. Comme $MD^{-1} \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, il existe $S \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ tel que $M = SD$. D'après la proposition 1, il existe une application $\alpha : [0,1] \to \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ continue tel que $\alpha(0) = S$ et $\alpha(1) = \mathrm{I}_n$. On définit alors $\gamma : [0,1] \to \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ par

$$\forall t \in [0,1], \quad \gamma(t) = \alpha(t)(t\mathrm{I}_n + (1-t)D).$$

L'application γ est continue et on a $\gamma(0) = M$ et $\gamma(1) = \mathrm{I}_n$, d'où le résultat.
4) La démonstration ci-dessus s'adapte à $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$. On relie toute matrice de l'ensemble $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$ à $\mathrm{Diag}(1, \dots, 1, -1)$. On en déduit que $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$ est connexe par arcs, donc $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$ sont les composantes connexes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. □

2. Ensembles de matrices de rang fixé

Pour tout $r \in [\![0, n]\!]$, on note

$$J_r(\mathbb{K}) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid \mathrm{rang}(M) = r\}.$$

Remarquons que nous avons déjà étudié les propriétés de $J_n(\mathbb{K}) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ dans la partie précédente.

Proposition 4 : *Soit $r \in [\![0, n-1]\!]$. On a les propriétés suivantes.*

(i) L'ensemble $J_r(\mathbb{K})$ est une partie non bornée, d'intérieur vide et

$$\overline{J_r(\mathbb{K})} = \bigcup_{k=0}^{r} J_k(\mathbb{K}).$$

(ii) L'ensemble $J_r(\mathbb{K})$ est connexe par arcs.

Remarque : En particulier, si $r \in [\![0, n]\!]$, on en déduit les propriétés suivantes.
(i) L'ensemble $J_r(\mathbb{K})$ est fermé si et seulement si $r = 0$.
(ii) L'ensemble $J_r(\mathbb{K})$ est ouvert si et seulement si $r = n$.

<u>Démonstration :</u>
1) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathrm{Diag}(k \cdot \mathrm{I}_r, \mathrm{O}_{n-r}) \in J_r(\mathbb{K})$, donc $J_r(\mathbb{K})$ n'est pas une partie bornée.
2) Comme $J_r(\mathbb{K}) \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \setminus \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ d'après la proposition 2, on obtient le résultat.
3) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice vérifiant $s = \mathrm{rang}(M) \leqslant r$. Alors il existe un couple $(P, Q) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $M = P\mathrm{Diag}(\mathrm{I}_s, \mathrm{O}_{n-s})Q$. On a

$$M = \lim_{k \to +\infty} \underbrace{P\mathrm{Diag}(\mathrm{I}_s, 2^{-k}\mathrm{I}_{r-s}, \mathrm{O}_{n-k})Q}_{\in J_r(\mathbb{K})},$$

donc M est adhérent à $J_r(\mathbb{K})$. Réciproquement, soit $(M_n) \subset J_r(\mathbb{K})$ une suite convergeant vers $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $I, J \subset [\![1, n]\!]$ de cardinaux $r+1$, on a

$$\Delta_{I,J}(M) = \lim_{k \to +\infty} \Delta_{I,J}(M_k) = 0,$$

donc M est de rang au plus r.
4) On considère l'application $\varphi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})^2 \to J_r(\mathbb{C})$ définie par

$$\forall (P,Q) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})^2, \quad \varphi(P,Q) = P\mathrm{Diag}(\mathrm{I}_r, \mathrm{O}_{n-r})Q.$$

D'après la proposition 3, l'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})^2$ est connexe par arcs. Comme φ est continue, on en déduit que $J_n(\mathbb{C}) = \varphi(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})^2)$ est connexe par arcs.
5) On considère l'application $\varphi : \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})^2 \to J_r(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall (P,Q) \in \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})^2, \quad \varphi(P,Q) = P\mathrm{Diag}(\mathrm{I}_r, \mathrm{O}_{n-r})Q.$$

D'après la proposition 3, l'ensemble $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})^2$ est connexe. Comme φ est continue, on en déduit que $\varphi(\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})^2)$ est connexe.
Pour conclure, il reste à vérifier que l'on a $\varphi(\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})^2) = J_r(\mathbb{R})$. On considère une matrice $M \in J_r(\mathbb{R})$. Alors il existe un couple $(P, Q) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^2$ tel que l'on ait $M = P\mathrm{Diag}(\mathrm{I}_r, \mathrm{O}_{n-r})Q$. Comme $n - r > 0$, on a

$$M = \underbrace{P\mathrm{Diag}(\mathrm{I}_{n-1}, \det(P))}_{\tilde{P}} \mathrm{Diag}(\mathrm{I}_r, \mathrm{O}_{n-r}) \underbrace{\mathrm{Diag}(\mathrm{I}_{n-1}, \det(Q))Q}_{\tilde{Q}} = \varphi(\tilde{P}, \tilde{Q})$$

avec $(\tilde{P}, \tilde{Q}) \in \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})^2$. On conclut que $\varphi(\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})^2) = J_r(\mathbb{R})$ est connexe. □

3. Groupes orthogonaux et unitaires

Proposition 5 : *On a les propriétés suivantes.*

(i) L'ensemble $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ *est une partie compacte et d'intérieur vide de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

(ii) L'ensemble $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ *n'est pas connexe. Ses deux composantes connexes sont les ensembles* $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ *et* $\mathrm{O}_n^-(\mathbb{R}) = \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration :

1) L'application $\varphi : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(M) = M^{\mathrm{T}}M$ est continue et on a $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \varphi^{-1}(\{\mathrm{I}_n\})$, donc $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée. De plus, les colonnes de $M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, donc les coefficients de M sont dans $[-1, 1]$. On conclut que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est borné et compact.

2) On a l'inclusion $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \cup \det^{-1}(\{-1\})$. D'après le proposition 1, l'ensemble $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est d'intérieur vide. Avec une preuve analogue, on montre qu'il en est de même pour $\det^{-1}(\{-1\})$, donc $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est aussi d'intérieur vide.

3) L'application $\det : \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \to \{\pm 1\}$ est continue. Comme $\{\pm 1\}$ n'est pas connexe, on en déduit que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe.

4) Montrons que $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. Soit $M \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$. Il existe une matrice $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et des nombres $\theta_1, \ldots, \theta_r \in \mathbb{R}$ tels que

$$M = P\mathrm{Diag}(R(\theta_1), \ldots, R(\theta_r), \mathrm{I}_{n-2r})P^{-1} \quad \text{où} \quad R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. On définit alors $\gamma : [0, 1] \to \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ par

$$\forall t \in [0, 1], \quad \gamma(t) = P\mathrm{Diag}(R(t\theta_1), \ldots, R(t\theta_r), \mathrm{I}_{n-2r})P^{-1}.$$

L'application γ est continue et on a $\gamma(0) = \mathrm{I}_n$ et $\gamma(1) = M$. On a donc montré que $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

5) La démonstration ci-dessus s'adapte à $\mathrm{O}_n^-(\mathbb{R})$. On relie toute matrice de l'ensemble $\mathrm{O}_n^-(\mathbb{R})$ à $\mathrm{Diag}(1, \ldots, 1, -1)$. On en déduit que $\mathrm{O}_n^-(\mathbb{R})$ est connexe par arcs, donc $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{O}_n^-(\mathbb{R})$ sont les composantes connexes de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. □

Proposition 6 : *L'ensemble* $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ *est une partie compacte, d'intérieur vide et connexe par arcs de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration :

1) Comme $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, on obtient que $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est compact.

2) Comme $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est d'intérieur vide, il en est de même de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

3) On a montré la connexité par arcs de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ précédemment. □

Proposition 7 : *Les ensembles* $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ *et* $\mathrm{SU}_n(\mathbb{C})$ *sont des parties compactes, d'intérieurs vides et connexes par arcs de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Démonstration :

1) L'application $\varphi : \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $\varphi(M) = \overline{M}^{\mathrm{T}}M$ est continue et on a $\mathrm{U}_n(\mathbb{C}) = \varphi^{-1}(\{\mathrm{I}_n\})$, donc $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ est une partie fermée. De plus, les colonnes de $M \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ forment une base orthonormée de $\mathbb{C}^n$, donc les coefficients de M sont dans le disque unité de $\mathbb{C}$. On conclut que $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ est borné et compact. Comme $\mathrm{SU}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{U}_n(\mathbb{C}) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, on a que $\mathrm{SU}_n(\mathbb{C})$ est compact.

2) On a les inclusions

$$\mathrm{SU}_n(\mathbb{C}) \subset \mathrm{U}_n(\mathbb{C}) \subset \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \mid |\det(M)|^2 - 1 = 0\} = Z.$$

En séparant partie réelle et imaginaire, la partie Z est l'ensemble des zéros d'un polynôme complexe non nul à $2n^2$ indéterminées, donc Z est d'intérieur vide. On conclut que $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{SU}_n(\mathbb{C})$ sont d'intérieurs vides.

3) Montrons que $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs. Soit $M \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$. Il existe une matrice $P \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ et $\theta_1, \ldots, \theta_n \in \mathbb{R}$ tels que $M = P\mathrm{Diag}(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n})P^{-1}$. On définit alors $\gamma : [0, 1] \to \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ par

$$\forall t \in [0, 1], \quad \gamma(t) = P\mathrm{Diag}(e^{it\theta_1}, \ldots, e^{it\theta_n})P^{-1}.$$

L'application γ est continue et on a $\gamma(0) = \mathrm{I}_n$ et $\gamma(1) = M$. On a donc montré que $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

4) La démonstration de la connexité par arcs de $\mathrm{SU}_n(\mathbb{C})$ est analogue. Il suffit de remarquer que l'on peut choisir $\theta_n \in \mathbb{R}$ tel que $\theta_1 + \cdots + \theta_n = 0$. □

4. Ensemble des matrices diagonalisables

On définit les ensembles

$$D_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid M \text{ est diagonalisable}\},$$
$$T_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid M \text{ est trigonalisable}\},$$
$$B_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid \mathrm{Card}(\mathrm{Sp}(M)) = n\}.$$

On a les inclusions strictes $B_n(\mathbb{K}) \subset D_n(\mathbb{K}) \subset T_n(\mathbb{K})$ car $n \geqslant 2$.

Proposition 8 : *Les ensembles $B_n(\mathbb{K})$, $D_n(\mathbb{K})$ et $T_n(\mathbb{K})$ sont connexes par arcs et ils ne sont pas bornés.*

Démonstration :
1) Les trois ensembles sont des parties étoilées par rapport à la matrice nulle, donc elles sont connexes par arcs.
2) On a $M_k = \mathrm{Diag}(1^k, 2^k, \ldots, n^k) \in B_n(\mathbb{K})$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, donc les ensembles $B_n(\mathbb{K})$, $D_n(\mathbb{K})$ et $T_n(\mathbb{K})$ ne sont pas bornés. □

Lemme : *L'ensemble $\mathscr{P}_n$ des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ admettant n racines simples est un ouvert de $\mathbb{R}_n[X]$.*

Démonstration :
Soit $P \in \mathscr{P}_n$ dont on note les racines $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ avec $x_1 < \cdots < x_n$. On fixe $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$a_0 < x_1 < a_1 < x_2 < \cdots < a_{n-1} < x_n < a_n.$$

On définit l'application $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1}$ par $\varphi(P) = (P(a_0), \ldots, P(a_{n+1}))$ qui est continue. Comme P change de signe en chacune de ses racines, on a

$$P \in \varphi^{-1}\left(\prod_{i=0}^{n}(-1)^i\mathbb{R}_+^*\right) \cup \varphi^{-1}\left(\prod_{i=0}^{n}(-1)^{i+1}\mathbb{R}_+^*\right) = U$$

qui est un ouvert de $\mathbb{R}_n[X]$. Un polynôme dans U est scindé à racines simples, car il change $(n+1)$ fois de signe sur $\mathbb{R}$, donc $U \subset \mathscr{P}_n$. □

Proposition 9 : *L'intérieur de $D_n(\mathbb{K})$ est $B_n(\mathbb{K})$.*

Démonstration :
1) L'application $\chi : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par $\chi(M) = \chi_M$ est continue. En utilisant le lemme précédent, on obtient que $B_n(\mathbb{R}) = \chi^{-1}(\mathscr{P}_n)$ est une partie ouverte de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2) On utilise le résultant pour montrer que l'ensemble $B_n(\mathbb{C})$ est ouvert. L'application $\varphi : \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ définie par $\varphi(M) = \mathrm{Res}(\chi_M, \chi_M')$ est continue car polynomiale, donc $B_n(\mathbb{C}) = \varphi^{-1}(\mathbb{C}^*)$ est une partie ouverte de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
3) Soit $M \in D_n(\mathbb{K}) \setminus B_n(\mathbb{K})$. Il existe $\lambda \in \mathbb{K}$, une matrice $D \in \mathscr{M}_{n-2}(\mathbb{K})$ diagonale et une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tels que $M = P\mathrm{Diag}(\lambda \mathrm{I}_2, D)P^{-1}$. On définit la suite (M_k) par

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad M_k = P\mathrm{Diag}(\lambda \mathrm{I}_2 + 2^{-k}N, D)P^{-1} \quad \text{où} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a $M_k \notin D_n(\mathbb{K})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et la suite (M_k) converge vers M, donc M n'est pas un point intérieur de $D_n(\mathbb{K})$. □

Proposition 10 : *L'intérieur de $T_n(\mathbb{R})$ est $B_n(\mathbb{R})$.*

Démonstration :
1) On a déjà montrer que $B_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2) Soit $M \in T_n(\mathbb{R}) \setminus B_n(\mathbb{R})$. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, une matrice $T \in \mathscr{M}_{n-2}(\mathbb{R})$ triangulaire supérieur, un réel $\varepsilon \in \{0,1\}$ et une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tels que

$$M = P\mathrm{Diag}(\lambda \mathrm{I}_2 + \varepsilon N, T)P^{-1} \quad \text{où} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On définit la suite (M_k) par

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad M_k = \begin{cases} P\mathrm{Diag}(\lambda \mathrm{I}_2 + 2^{-k}N - 2^{-k}N^{\mathrm{T}}, T)P^{-1} & \text{si} \quad \varepsilon = 0, \\ P\mathrm{Diag}(\lambda \mathrm{I}_2 + N - 2^{-k}N^{\mathrm{T}}, T)P^{-1} & \text{si} \quad \varepsilon = 1. \end{cases}$$

On a $M_k \notin T_n(\mathbb{R})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et la suite (M_k) converge vers M, donc M n'est pas un point intérieur de $T_n(\mathbb{R})$. □

Proposition 11 : *L'adhérence de $B_n(\mathbb{K})$ et de $D_n(\mathbb{K})$ est $T_n(\mathbb{K})$.*

DÉMONSTRATION :
1) Soit $M \in T_n(\mathbb{K})$. Il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, une matrice T triangulaire strictement supérieure et une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que

$$M = P(\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) + T)P^{-1}.$$

On peut choisir des suites $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ convergeant vers 0 telles que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{Card}\{\lambda_i + \varepsilon_{i,k} \in \mathbb{K} \mid i \in [\![1, n]\!]\} = n.$$

On en déduit que la suite $(M_k) \subset B_n(\mathbb{K})$ définie par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad M_k = P(\mathrm{Diag}(\lambda_1 + \varepsilon_{1,k}, \dots, \lambda_n + \varepsilon_{n,k}) + T)P^{-1}$$

converge vers M.
2) Comme $T_n(\mathbb{C}) = \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, il suffit de montrer que la partie $T_n(\mathbb{R})$ est fermée dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $(M_k) \subset T_n(\mathbb{R})$ convergeant vers une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une racine de χ_M. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note λ_k la racine de χ_{M_k} la plus proche de λ. En décomposant χ_{M_k} dans $\mathbb{C}[X]$, on obtient l'inégalité

$$0 \leqslant |\lambda - \lambda_k|^n \leqslant |\chi_{M_k}(\lambda)|.$$

Comme $\lim\limits_{k \to +\infty} \chi_{M_k}(\lambda) = \chi_M(\lambda) = 0$, on en déduit que la suite réelle (λ_k) converge vers λ, donc $\lambda \in \mathbb{R}$. Finalement, χ_M est scindé sur $\mathbb{R}$ et $M \in T_n(\mathbb{R})$. $\square$

Remarque : On peut en déduire le théorème de Cayley-Hamilton dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Il est facile de vérifier que $\chi_M(M) = 0$ pour toute matrice $M \in D_n(\mathbb{C})$. Comme l'application $\mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $M \mapsto \chi_M(M)$ est polynomiale, donc continue et que $D_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on obtient $\chi_M(M) = 0$ pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

5. Topologie et réduction

Pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on désigne sa classe de similitude par

$$S_{\mathbb{K}}(M) = \left\{PMP^{-1} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})\right\}.$$

Proposition 12 : *Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. L'ensemble $S_{\mathbb{K}}(M)$ est d'intérieur vide.*

DÉMONSTRATION :
L'ensemble $S_{\mathbb{K}}(M)$ est inclus dans l'hyperplan $\{X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid \mathrm{Tr}(X) = \mathrm{Tr}(M)\}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, donc $S_{\mathbb{K}}(M)$ est d'intérieur vide. $\square$

Proposition 13 : *Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. L'ensemble $S_{\mathbb{K}}(M)$ est une partie bornée de $M_n(\mathbb{K})$ si et seulement si M est une matrice scalaire.*

DÉMONSTRATION :
1) Si M est une matrice scalaire, alors $S_{\mathbb{K}}(M) = \{M\}$, donc $S_{\mathbb{K}}(M)$ est borné.
2) Réciproquement, supposons que M n'est pas scalaire. Notons $u \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ l'endomorphisme associé à M dans la base canonique. Comme u n'est pas une homothétie, on a par un exercice classique qu'il existe un vecteur $x \in \mathbb{K}^n$ tel que $(x, u(x))$ est une famille libre de $\mathbb{K}^n$. Par le théorème de la base incomplète, il existe $v_3, \dots, v_n \in \mathbb{K}^n$ tel que $\mathscr{B} = (x, u(x), v_3, \dots, v_n)$ soit une base de $\mathbb{K}^n$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, comme $u(x) = 2^k(2^{-k}u(x))$, on a que la matrice

$$M_k = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_k}(u) \in S_{\mathbb{K}}(M) \quad \text{où} \quad \mathscr{B}_k = (x, u(x), v_3, \dots, v_n),$$

donc $S_{\mathbb{K}}(M)$ n'est pas borné (le coefficient d'indice $(2,1)$ de M_k est 2^k). $\square$

Proposition 14 : *Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. L'ensemble $S_{\mathbb{K}}(M)$ est une partie fermée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si la matrice M est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.*

DÉMONSTRATION :
1) Supposons que M est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On définit

$$\varphi : \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}_n[X] \times \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \quad \text{par} \quad \varphi(N) = (\chi_N, m_M(N))$$

qui est polynomiale, donc continue. On a $S_{\mathbb{C}}(M) = \varphi^{-1}(\{(\chi_M, 0)\})$, donc l'ensemble $S_{\mathbb{C}}(M)$ est fermé dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

2) Si $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est semblable à $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, alors par un exercice classique, elles sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Autrement dit, on a

$$S_{\mathbb{R}}(M) = S_{\mathbb{C}}(M) \cap \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$

On en déduit par le premier point que si M est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, alors la partie $S_{\mathbb{R}}(M)$ est fermée dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
3) Supposons que $S_{\mathbb{C}}(M)$ est fermée. Il existe une matrice triangulaire supérieure $T \in S_{\mathbb{C}}(M)$. On considère la suite $(M_k) \subset S_{\mathbb{C}}(M)$ définie par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad M_k = \mathrm{Diag}(1, 2, \dots, 2^n)^k \cdot T \cdot \mathrm{Diag}(1, 2, \dots, 2^n)^{-k}.$$

En notant $T = (t_{i,j})$ et $M_k = (m_{i,j}^{(k)})$, on a par un calcul direct

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad m_{i,j}^{(k)} = \frac{t_{i,j}}{2^{k(i-j)}}.$$

Donc la suite (M_k) converge vers une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Comme l'ensemble $S_{\mathbb{C}}(M)$ est fermé, la matrice $D \in S_{\mathbb{C}}(M)$, donc M est diagonalisable.
4) Supposons que $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et que $S_{\mathbb{R}}(M)$ est fermé. En utilisant la forme réelle de Jordan, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{R}$ et $(a_1, b_1), \dots, (a_r, b_r) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ tels que M est semblable à $J = \mathrm{Diag}(J_1, \dots, J_s, K_1, \dots, K_r) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ où

$$J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & \lambda_k \end{pmatrix}, \quad K_\ell = \begin{pmatrix} \Lambda_\ell & \mathrm{I}_2 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \mathrm{I}_2 \\ (0) & & & \Lambda_\ell \end{pmatrix}, \quad \Lambda_\ell = \begin{pmatrix} a_\ell & b_\ell \\ -b_\ell & a_\ell \end{pmatrix}.$$

pour tout $(k, \ell) \in [\![1, s]\!] \times [\![1, r]\!]$. La suite $(M_k) \subset S_{\mathbb{R}}(M)$ définie par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad M_k = P^k \cdot J \cdot P^{-k} \quad \text{où} \quad P = \mathrm{Diag}(1, 2, \dots, 2^s, 2^{s+1}\mathrm{I}_2, \dots, 2^{s+r}\mathrm{I}_2)$$

converge vers une matrice diagonale par blocs D dont les éléments diagonaux sont $\{\lambda_1, \dots, \lambda_s, \Lambda_1, \dots, \Lambda_r\}$. Comme chacun de ces blocs est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, la matrice D est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Comme $S_{\mathbb{R}}(M)$ est fermé, la matrice $D \in S_{\mathbb{R}}(M)$, donc M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. □

Remarques :

a) Une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ si et seulement si M est une matrice semi-simple.
b) On a montré que la partie diagonalisable dans la décomposition de Dunford dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est un point adhérent à $S_{\mathbb{K}}(M)$.
c) De façon général, l'adhérence de $S_{\mathbb{K}}(M)$ est la réunion de certaines des classes de similitude dont le polynôme caractéristique est χ_M. On peut l'exprimer plus précisément à l'aide des partitions d'un entier.

Proposition 15 : *Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. L'ensemble $S_{\mathbb{C}}(M)$ est une partie connexe par arcs de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.*

<u>Démonstration :</u>
On définit l'application $\varphi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ par

$$\forall P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \quad \varphi(P) = PMP^{-1}.$$

L'application φ est continue. D'après la proposition 3, l'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs, donc $\varphi(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})) = S_{\mathbb{C}}(M)$ est connexe par arcs. □

Proposition 16 : *Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. L'ensemble $S_{\mathbb{R}}(M)$ est connexe par arcs si et seulement si $\mathrm{Com}(M) \cap \mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R}) \neq \varnothing$. Dans le cas contraire, l'ensemble $S_{\mathbb{R}}(M)$ admet deux composantes connexes.*

<u>Démonstration :</u>
1) On définit l'application $\varphi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$\forall P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(P) = PMP^{-1}.$$

L'application φ est continue. D'après la proposition 3, on en déduit que l'ensemble $S_{\mathbb{R}}(M) = \varphi(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))$ admet au plus deux composantes connexes.
2) S'il existe $Q \in \mathrm{Com}(M) \cap \mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$, alors on a

$$\varphi(\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})) = \varphi(\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) \cdot Q) = \varphi(\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})),$$

donc $S_{\mathbb{R}}(M) = \varphi(\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}))$ est connexe par arcs d'après la proposition 3.

3) Supposons que $\mathrm{Com}(M) \subset \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$. Par passage au quotient, on obtient une bijection continue

$$\lambda : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{Com}(M) \to S_{\mathbb{R}}(M).$$

Comme $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un groupe topologique localement compact et dénombrable à l'infini qui agit continument et transitivement sur $S_{\mathbb{R}}(M)$ qui est localement compact, on a que λ est un homéomorphisme (voir [MT86, Théorème 2.3.2]). On en déduit par composition une application continue et surjective

$$S_{\mathbb{R}}(M) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{Com}(M) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) \simeq \{\pm 1\},$$

donc $S_{\mathbb{R}}(M)$ n'est pas connexe. □

Remarque : Si n est impair, alors les classes de similitudes réelles sont connexes par arcs car la matrice $-\mathrm{I}_n$ commute avec toutes les matrices et son déterminant est -1.

Proposition 17 : *Une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente si et seulement si la matrice nulle est un point adhérent de $S_{\mathbb{K}}(M)$.*

Démonstration :

1) Supposons qu'il existe une suite $(M_k) \subset S_{\mathbb{K}}(M)$ qui converge vers la matrice nulle. Alors, on a

$$\chi_M(X) = \lim_{k\to+\infty} \chi_M(X) = \lim_{k\to+\infty} \chi_{M_k}(X) = \chi_0(X) = X^n,$$

donc la matrice M est nilpotente.

2) Si M est nilpotente, alors il existe une matrice triangulaire strictement supérieure $T \in S_{\mathbb{K}}(M)$. On considère la suite $(M_k) \subset S_{\mathbb{K}}(M)$ définie par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad M_k = \mathrm{Diag}(1, 2, \dots, 2^n)^k \cdot T \cdot \mathrm{Diag}(1, 2, \dots, 2^n)^{-k}.$$

En notant $T = (t_{i,j})$ et $M_k = (m_{i,j}^{(k)})$, on a par un calcul direct

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad m_{i,j}^{(k)} = \frac{t_{i,j}}{2^{k(i-j)}}.$$

Donc la suite (M_k) converge vers la matrice nulle. □

6. Ensemble des matrices cycliques

Rappelons qu'une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est cyclique s'il existe $X \in \mathbb{K}^n$ tel que la famille $(X, MX, \dots, M^{n-1}X)$ soit une base de $\mathbb{K}^n$. Rappelons aussi que l'on a les équivalences suivantes pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

(i) La matrice M est cyclique.

(ii) La matrice M est semblable à une matrice compagnon.

(iii) On a $m_M = \chi_M$

Dans la suite, on note $C_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices cycliques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$, on note

$$C(a_0, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ (0) & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Proposition 18 : *L'ensemble $C_n(\mathbb{K})$ est une partie ouverte, dense et non bornée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.*

Démonstration :

D'après le (iii) des rappels, une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est cyclique si et seulement si la famille $(\mathrm{I}_n, M, \dots, M^{n-1})$ est de rang n. Notons $\mathscr{B}$ la base canonique de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $I \subset [\![1, n^2]\!]$, on définit l'application

$$\lambda_I : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}, \quad M \mapsto \Delta_I(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{I}_n, M, \dots, M^{n-1}))$$

où Δ_I est le mineur obtenu en gardant les lignes dont l'indice est dans I. On obtient donc l'égalité d'ensembles

$$\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \setminus C_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid \forall I \subset [\![1, n^2]\!], \quad \lambda_I(M) = 0\}.$$

Ainsi, $C_n(\mathbb{K})$ est le complémentaire des zéros d'un ensemble de polynômes non nuls à n^2 indéterminées, donc $C_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. En particulier, l'ensemble $C_n(\mathbb{K})$ n'est pas bornée. □

Proposition 19 : *L'ensemble $C_n(\mathbb{K})$ est connexe par arcs.*

DÉMONSTRATION :
1) On définit l'application $\varphi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathbb{K}^n \to \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ par

$$\varphi(P, a_0, \ldots, a_{n-1}) = P \cdot C(a_0, \ldots, a_{n-1}) \cdot P^{-1}.$$

L'application φ est continue et on a $C_n(\mathbb{K}) = \varphi(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathbb{K}^n)$. D'après la proposition 3, on en déduit que $C_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.
2) D'après la proposition 3, les ensembles $\varphi(\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{K}) \times \mathbb{K}^n)$ et $\varphi(\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{K}) \times \mathbb{K}^n)$ sont connexes par arcs et leur réunion est $C_n(\mathbb{K})$. Si n est impair, on a

$$\varphi(\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{K}) \times \mathbb{K}^n) = \varphi([\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{K}) \cdot (-\mathrm{I}_n)] \times \mathbb{K}^n) = \varphi(\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{K}) \times \mathbb{K}^n),$$

donc $C_n(\mathbb{K})$ est connexe par arcs. Si n est pair, avec $J = C(1, 0 \ldots, 0)$, on a

$$J = \varphi(\mathrm{I}_n, 1, 0, \ldots, 0) = \varphi(J, 1, 0 \ldots, 0),$$

donc $\varphi(\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{K}) \times \mathbb{K}^n) \cap \varphi(\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{K}) \times \mathbb{K}^n) \neq \varnothing$ et $C_n(\mathbb{K})$ est connexe par arcs.
□

Bibliographie

[MT86] R. MNEIMNÉ et F. TESTARD – *Introduction à la théorie des groupes de lie classique*, Hermann, 1986.