Exercices — Topologie et Espaces de Matrices

Énoncés

Centrale MP 2002

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices $n \times n$ symétriques à coefficients réels, $S_n^+(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices positives, $S_n^{++}(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices définies positives et $\varphi \in \mathcal{L}(S_n(\mathbb{R}))$. On suppose que $\varphi(S_n^{++}(\mathbb{R})) = S_n^{++}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que : $\forall M \in S_n(\mathbb{R})$, $\exists A \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall \lambda > A$, $M + \lambda I_n \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\varphi \in GL(S_n(\mathbb{R}))$ et que $\varphi(S_n^+(\mathbb{R})) = S_n^+(\mathbb{R})$.
3. On suppose $n = 2$ et $\varphi(I_2) = I_2$.
   (a) Montrer que : $\forall M \in S_2(\mathbb{R})$, $\chi_{\varphi(M)} = \chi_M$.
   (b) Montrer que $\det(\varphi(M)) = \det(M)$ (i.e. φ conserve le déterminant).

Ulm MP 2012

Soit $\| \cdot \|$ une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ tel que pour tout $g \in G$: $\|g - \mathrm{id}\| < 1$. Montrer que G est réduit à $\{\mathrm{id}\}$.

Suite de matrices inversibles

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ quelconque. Montrer qu'il existe une suite de matrices inversibles convergeant vers A.

Norme de Frobenius

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\|A\| = \sqrt{\mathrm{tr}({}^tAA)}$. Montrer que c'est une norme et que : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|AB\| \leq \|A\| \times \|B\|$.

Semi-norme

Soit p une semi-norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (ie. il manque juste l'axiome $p(A) = 0 \Rightarrow A = 0$). On suppose de plus que $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$, $p(AB) \leq p(A)p(B)$. Montrer que $p = 0$ ou p est en fait une norme.

X MP* 2001

On considère l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ muni d'une norme quelconque.

1. Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Soit $D_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $D_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
3. Quel est l'intérieur de $D_n(\mathbb{C})$?

Matrices nilpotentes, ENS Ulm-Lyon-Cachan MP* 2006

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que N est nilpotente si et seulement si la matrice nulle est adhérente à l'ensemble $\{P^{-1}NP, P \in GL_n(\mathbb{C})\}$.

Spectre compact ? ENS 2014

Soit K un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\sigma(K)$ l'ensemble des valeurs propres complexes des matrices de K. Montrer que $\sigma(K)$ est compact. Que dire si on suppose seulement K borné ?

Continuité du polynôme caractéristique

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $F = \mathbb{R}_n[X]$, et $\varphi\colon E \to F,\ A \mapsto \chi_A$ (polynôme caractéristique). Montrer que φ est continue.

ENS 2017

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit la fonction $A^*\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ par

$$\forall v \in \mathbb{R}^n,\ \forall j \in [\![1, n]\!],\ [A^*v]_j = \min\{v_i + A_{ij},\ 1 \leq i \leq n\}.$$

1. Montrer que A^* est lipschitzienne.
2. Montrer que si $\lambda \in\ ]0,1[$ alors $\exists\, v_\lambda \in \mathbb{R}^n$ tel que $v_\lambda = A^*(\lambda v_\lambda)$ *(pour l'existence, on pourra introduire une suite construite par récurrence).*

GL$_n(\mathbb{R})$, densité et ouverture

On rappelle que $GL_n(\mathbb{R})$ désigne le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices inversibles. Si on identifie $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec l'ensemble des familles de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on voit qu'une matrice est inversible si et seulement si la famille forme une base de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   Rappelons que l'application déterminant

   $$\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

   est un polynôme en les coefficients de la matrice (par exemple, $\det(M) = ad - bc$ sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$) ; d'autre part, une matrice est inversible si et seulement si son déterminant n'est pas nul.
2. Montrer que toute fonction polynomiale est continue.
3. En déduire que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. On rappelle que $SL_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices de déterminant 1, et que $O_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices orthogonales (i.e. telles que $M^TM = I_d$). Les ensembles $SL_n(\mathbb{R})$ et $O_n(\mathbb{R})$ sont-ils ouverts ? fermés ?

Corrigés

Centrale MP 2002

1. Prendre A supérieur ou égal à la plus petite des valeurs propres de $-M$.

2. Surjectivité de φ : $\Im\varphi$ est un sev de $S_n(\mathbb{R})$ contenant $S_n^{++}(\mathbb{R})$ donc contenant $\mathrm{Vect}(S_n^{++}(\mathbb{R})) = S_n(\mathbb{R})$ d'après la question précédente. On en déduit que φ est un isomorphisme grâce au théorème du rang. Si $M \in S_n^+(\mathbb{R})$ alors $M = \lim_{p\to\infty}(M + I_n/p)$ donc $M \in \overline{S_n^{++}(\mathbb{R})}$.

   Réciproquement, si $M \in \overline{S_n^{++}(\mathbb{R})}$ alors $M = \lim_{p\to\infty}(M_p)$ avec M_p définie positive, donc pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a ${}^t xMx = \lim_{p\to\infty}({}^t xM_p x) \geq 0$, c'est-à-dire $M \in S_n^+(\mathbb{R})$. Ainsi : $\overline{S_n^{++}(\mathbb{R})} = S_n^+(\mathbb{R})$. Comme φ est continue (car linéaire en dimension finie) on en déduit $\varphi(S_n^+(\mathbb{R})) \subset S_n^+(\mathbb{R})$. De plus, $\varphi(S_n^{++}(\mathbb{R})) = S_n^{++}(\mathbb{R})$ soit $S_n^{++}(\mathbb{R}) = \varphi^{-1}(S_n^{++}(\mathbb{R}))$. Comme φ^{-1} est une application linéaire continue : $\varphi^{-1}(S_n^+(\mathbb{R})) \subset S_n^+(\mathbb{R})$, d'où $S_n^+(\mathbb{R}) \subset \varphi(S_n^+(\mathbb{R}))$.
3. Soit $M \in S_2(\mathbb{R})$ de valeurs propres a, b avec $a \leq b$, et soient $a' \leq b'$ les valeurs propres de $\varphi(M)$. Pour tout $\lambda > -b$ on a $M + \lambda I_2 \in S_2^{++}(\mathbb{R})$ donc $\varphi(M) + \lambda I_2 \in S_2^{++}(\mathbb{R})$ c'est-à-dire $\lambda > b'$. Ceci prouve que $b' \leq b$ et on montre l'égalité en considérant φ^{-1}. De même, en considérant $-M$ on montre que $a' = a$. Finalement $\chi_M = (X-a)(X-b) = \chi_{\varphi(M)}$. De plus, $\det(M) = ab = \det(\varphi(M))$. Remarque : soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et $A' = \varphi(A)$, $B' = \varphi(B)$, $C' = \varphi(C)$. On sait que A' est orthodiagonalisable avec pour valeurs propres 0 et 1, donc il existe $P \in O(2)$ telle que $A' = {}^t PAP$. $A' + B' = \varphi(I_2) = I_2$ d'où $B' = I_2 - A' = {}^t PBP$. Posons $C' = {}^t P \begin{pmatrix} u & v \\ v & w \end{pmatrix} P$. $0 = \mathrm{tr}(C) = \mathrm{tr}(C') = u + w$ et $-1 = \det(C) = \det(C') = uw - v^2$ donc $w = -u$ et $u^2 + v^2 = 1$. De plus, $-1 = \det(A + C) = -u - u^2 - v^2$ d'où $u = 0$ et $v = \pm 1$. Si $v = 1$ alors $C' = {}^t PCP$ et par linéarité, $\varphi(M) = {}^t PMP$ pour toute $M \in S_2(\mathbb{R})$. Si $v = -1$ on trouve de même $\varphi(M) = {}^t QMQ$ avec $Q = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in O(2)$. Réciproquement, toute application de la forme $M \mapsto {}^t PMP$ avec $P \in GL_2(\mathbb{R})$ vérifie les hypothèses de la question. Les fonctions φ linéaires vérifiant la seule condition $\varphi(S_2^{++}(\mathbb{R})) = S_2^{++}(\mathbb{R})$ sont les fonctions de la forme $M \mapsto {}^t PMP$ avec $P \in GL_2(\mathbb{R})$ (écrire $\varphi(I_2) = {}^t TT$ puis considérer $M \mapsto {}^t T^{-1}\varphi(M)T^{-1}$). Généralisation en dimension quelconque ?

Ulm MP 2012

Soit $g \in G$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de g où g est considérée comme une matrice complexe. La suite $(g^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est à valeurs dans G, donc est bornée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Il en résulte que la suite $(\lambda^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est bornée dans $\mathbb{C}$, soit : $|\lambda| = 1$. De même, $(g - \mathrm{id})^k \to 0$ quand $k \to +\infty$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ puis dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donc $(\lambda - 1)^k \to 0$, soit : $|\lambda - 1| < 1$ et plus généralement $|\lambda^p - 1| < 1$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Ceci implique $\lambda = 1$. Ainsi 1 est l'unique valeur propre de g. On écrit alors $g = \mathrm{id} + h$ avec h nilpotente, d'où $g^k = \mathrm{id} + kh + \binom{k}{2}h^2 + \ldots + \binom{k}{n-1}h^{n-1}$ est un polynôme en k à valeurs bornées quand k décrit $\mathbb{N}$. Ceci implique $h = 0$ et finalement $g = \mathrm{id}$.

Norme de Frobenius

$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik}B_{kj} \Rightarrow (AB)_{ij}^2 \leq \sum_{k=1}^n A_{ik}^2 \times \sum_{k=1}^n B_{kj}^2$.

Semi-norme

Si A est une matrice de rang $r > 0$ telle que $p(A) = 0$ alors pour toute matrice M de rang $< r$ on peut trouver P et Q telles que $M = PAQ$ d'où $P(M) = 0$. Donc p est nulle sur toute matrice de rang 1 et par inégalité triangulaire sur toute matrice.

X MP* 2001

1. $GL_n(\mathbb{C}) = \det^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ est ouvert. Il est dense car $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ quelconque est limite des matrices $A - \frac{1}{p}I$ inversibles pour presque tout entier p (A a un nombre fini de valeurs propres).
2. Toute matrice triangulaire est limite de matrices triangulaires à coefficients diagonaux distincts.

3. $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lim_{p\to\infty} \begin{pmatrix} \lambda & 1/p \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ donc une matrice triangulaire à valeurs propres non distinctes est limite de matrices non diagonalisables. Par conjugaison, la frontière de $D_n(\mathbb{C})$ contient l'ensemble des matrices ayant au moins une valeur propre multiple. Réciproquement, soit (A_k) une suite de matrices non diagonalisables convergeant vers une matrice A. Les matrices A_k ont toutes au moins une valeur propre multiple, et ces valeurs propres sont bornées (car si λ est une valeur propre de M alors $|\lambda| \leq \|M\|$ en prenant une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ subordonnée à une norme sur $\mathbb{C}^n$) donc on peut trouver une suite (z_k) de complexes convergeant vers un complexe z telle que $\chi_{A_k}(z_k) = \chi'_{A_k}(z_k) = 0$. À la limite on a $\chi_A(z) = \chi'_A(z) = 0$ ce qui prouve que A a au moins une valeur propre multiple. Conclusion : la frontière de $D_n(\mathbb{C})$ est exactement l'ensemble des matrices diagonalisables ayant au moins une valeur propre multiple et l'intérieur de $D_n(\mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices à valeurs propres distinctes.

Matrices nilpotentes, ENS Ulm-Lyon-Cachan MP* 2006

Si N est nilpotente, on peut se ramener au cas où N est triangulaire supérieure stricte.

Soit alors $P = \mathrm{diag}(1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1})$ avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Le coefficient général de $P^{-1}NP$ est $\alpha^{j-i}N_{ij} \to_{\alpha\to 0}$ 0.

Réciproquement, s'il existe une suite (N_k) de matrices semblables à N convergeant vers la matrice nulle, alors par continuité du polynôme caractéristique, on a $\chi_N = (-X)^n$ et N est nilpotente.

Spectre compact ? ENS 2014

Si (λ_p) est une suite d'éléments de $\sigma(K)$, on considère $M_p \in K$ telle que $\lambda_p \in \mathrm{Sp}(M_p)$, $X_p \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ de norme 1 (pour une norme fixée sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$) tel que $M_pX_p = \lambda_pX_p$ et on extrait des sous-suites $(M_{\phi(p)})$ convergeant vers $M \in K$ et $(X_{\phi(p)})$ convergeant vers X de norme 1. La suite $(M_{\phi(p)}X_{\phi(p)})$ converge vers MX et $\mathrm{rang}(M_{\phi(p)}X_{\phi(p)}, X_{\phi(p)}) = 1$ donc à la limite $\mathrm{rang}(MX, X) \leq 1$ car tous les déterminants 2×2 extraits de (MX, X) sont nuls. Ainsi X est vecteur propre de M et en examinant une coordonnée non nulle de X, on obtient $\lambda_{\phi(p)} \to_{p\to\infty} \lambda$, la valeur propre associée. Si K est seulement fermé alors $\sigma(K)$ ne l'est pas nécessairement. Par exemple si $K = \{M \text{ tel que } \det(M) = 1\}$ alors $\sigma(K) = \mathbb{C}^*$ pour $n \geq 2$ et $\sigma(K) = \mathbb{R}^*$ pour $n = 1$.

Continuité du polynôme caractéristique

ENS 2017

1. Pour $v, w \in \mathbb{R}^n$ et $j \in [\![1, n]\!]$, soient k, ℓ tels que $[A^*v]_j = v_k + A_{kj}$ et $[A^*w]_j = w_\ell + A_{\ell j}$. On a par définition

$$[A^*v]_j = v_k + A_{kj} \leq v_\ell + A_{\ell j} = (v_\ell - w_\ell) + (w_\ell + A_{\ell j}) = (v_\ell - w_\ell) + [A^*w]_j.$$

   On en déduit $[A^*v]_j - [A^*w]_j \leq v_\ell - w_\ell \leq \|v - w\|_\infty$ puis, $\|A^*v - A^*w\|_\infty \leq \|v - w\|_\infty$.
2. Montrer que si $\lambda \in \,]0, 1[$ alors $\exists v_\lambda \in \mathbb{R}^n$ tel que $v_\lambda = A^*(\lambda v_\lambda)$ *(pour l'existence, on pourra introduire une suite construite par récurrence).*
3. Unicité : si $A^*(\lambda v) = v$ et $A^*(\lambda w) = w$ alors $v - w = A^*(\lambda v) - A^*(\lambda w)$ d'où $\|v-w\|_\infty \leq \lambda\|v-w\|_\infty$ et $v = w$. Existence : on pose $x_0 = 0$ puis $x_{n+1} = A^*(\lambda x_n)$. Alors $\|x_{n+1} - x_n\|_\infty \leq \lambda\|x_n - x_{n-1}\|_\infty$ donc la série télescopique associée à (x_n) est absolument convergente. Par continuité de A^*, la limite x vérifie $x = A^*(\lambda x)$.

$\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, densité et ouverture

Il est sous-entendu que l'on utilise la topologie classique sur l'espace des matrices, topologie qui vient de n'importe quelle norme sur $\mathbb{R}^{n^2}$ (toutes les normes sont équivalentes en dimension finie). On peut donc choisir n'importe quelle distance qui vient d'une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et on choisira ici la norme

$$d_\infty(A,B) = \max_{i,j} |a_{ij} - b_{ij}|.$$

1. Densité de $GL_n(\mathbb{R})$: On veut montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'énoncé suggère d'identifier $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec l'espace des n-uplets de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On va en fait montrer par récurrence la propriété :

Si $v_1,\dots,v_k$ est une famille de k vecteurs de $\mathbb{R}^n$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une famille libre $v'_1,\dots,v'_k$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ telle que pour tout i, $d_\infty(v_i,v'_i) < \varepsilon$.

La propriété est triviale pour $k = 0$.

Supposons la propriété vraie au rang $k < n$, et montrons-la au rang $k+1$. Soient $v_1,\dots,v_{k+1}$ une famille de $k+1$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$, et $\varepsilon > 0$. Alors par hypothèse de récurrence, il existe une famille libre $v'_1,\dots,v'_k$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ telle que pour tout $i \le k$, $d_\infty(v_i,v'_i) < \varepsilon$. On a alors deux cas :

(i) Si $v_{k+1} \notin \mathrm{Vect}(v'_1,\dots,v'_k)$, on pose $v'_{k+1} = v_{k+1}$.

(ii) Si $v_{k+1} \in \mathrm{Vect}(v'_1,\dots,v'_k)$, on choisit un vecteur $w \notin \mathrm{Vect}(v'_1,\dots,v'_k)$ de norme inférieure à ε (possible car $k < n$), et on pose $v'_{k+1} = v_{k+1} + w$.

Dans les deux cas, la famille $v'_1,\dots,v'_{k+1}$ est libre et à distance inférieure à ε de $v_1,\dots,v_{k+1}$. La propriété est donc vraie au rang $k+1$.

Par conséquent, elle est vraie au rang n. On a donc trouvé un n-uplet de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ qui forme une famille libre (donc une base ; autrement dit la matrice associée est inversible), et à distance au plus ε de la famille initiale.

2. Continuité des polynômes : Par définition, toute fonction polynomiale est obtenue par un nombre fini de produits et de sommes de fonctions du type

$$(x_1,\dots,x_k) \mapsto x_i,$$

pour un certain i. Ces fonctions sont continues, donc toute fonction polynomiale l'est aussi.

3. Ouverture de $GL_n(\mathbb{R})$: Le déterminant est un polynôme en les coefficients de la matrice, donc continu en tant qu'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}$. Ainsi $GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert, en tant qu'image réciproque par le déterminant de l'ouvert $\mathbb{R}^*$.

4. Fermeture de $SL_n(\mathbb{R})$ et $O_n(\mathbb{R})$: De même, $SL_n(\mathbb{R})$ est l'image réciproque par le déterminant du fermé $\{1\}$, et donc est fermé. Pour $O_n(\mathbb{R})$, l'application

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \qquad A \longmapsto A^T A$$

est polynomiale coordonnée par coordonnée, donc continue. Par conséquent, l'image réciproque du fermé $\{I_d\}$, à savoir $O_n(\mathbb{R})$, est fermée.