ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES,
ECOLES NATIONALES SUPERIEURES DE L'AERONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCEES, DES TELECOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TELECOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ECOLE POLYTECHNIQUE
(Option T.A.)

CONCOURS D'ADMISSION 1990 — MATHEMATIQUES — DEUXIEME EPREUVE

OPTION P' — (Durée de l'épreuve : 4 heures)

NOTATIONS

- p désignera un entier naturel strictement positif. $p \in \mathbb{N}^*$.

- $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est l'espace des matrices carrées d'ordre p à termes réels ; ${}^tM$ est la matrice transposée de M ; I_p la matrice unité d'ordre p .

- O(p) est le groupe des matrices orthogonales d'ordre p :

$$O(p) = \left\{ P \mid P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \ , \ {}^tPP = I_p \right\} .$$

- S(p) est l'espace des matrices symétriques d'ordre p :

$$S(p) = \left\{ M \mid M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \ , \ {}^tM = M \right\} .$$

- $\mathcal{F}_p$ est l'ensemble des matrices suivant :

$$\mathcal{F}_p = \left\{ A \mid A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \ , \ {}^tA + A = 0 \ , \ A^2 = -I_p \right\} .$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$; J_n désignera la matrice de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ définie par sa décomposition par blocs :

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} .$$

- L'espace vectoriel $\mathbb{C}^p$ est un espace préhilbertien grâce au produit scalaire ${}^t\overline{Y}X$ où X et Y désignent des vecteurs de $\mathbb{C}^p$ considérés comme des matrices colonnes.

  $\overline{Y}$ désigne le vecteur dont les coordonnées sont les nombres complexes conjugués des coordonnées du vecteur Y .

- L'espace vectoriel $\mathbb{C}^p$ peut être considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2p .

PARTIE I

Dans cette partie, on se propose de montrer que, pour toute matrice A de $\mathcal{F}_{2n}$, il existe une matrice P de O(2n) telle que ${}^tPAP = J_n$.

I.1.a. Démontrer que pour que l'ensemble $\mathcal{F}_p$ ne soit pas vide, il est nécessaire que l'entier p soit pair.

b. Vérifier que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$ la matrice J_n appartient à $\mathcal{F}_{2n}$.

c. Démontrer que pour toute matrice A de $\mathcal{F}_{2n}$ et toute matrice P de O(2n) la matrice ${}^tPAP$ appartient à $\mathcal{F}_{2n}$.

Soit $A \in \mathcal{F}_{2n}$; désignons encore par A l'endomorphisme de $\mathbb{C}^{2n}$ défini par $X \mapsto AX$ où X est un vecteur de $\mathbb{C}^{2n}$ (considéré comme une matrice colonne).

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

I.2.a. Démontrer que l'endomorphisme A n'admet que deux valeurs propres ; les déterminer.

b. Soient E_+ et E_- les sous-espaces propres associés ; démontrer que pour tout vecteur X de $\mathbb{C}^{2n}$, les vecteurs $AX + iX$ et $AX - iX$ sont des éléments propres de A.

En déduire que l'espace $\mathbb{C}^{2n}$ est égal à la somme directe de E_+ et de E_-.

c. Soit u l'application $X \mapsto \overline{X}$ de $\mathbb{C}^{2n}$ dans lui-même ; vérifier que u est $\mathbb{R}$-linéaire.

Que dire de $u(E_+)$ et de $u(E_-)$? En déduire les dimensions de E_+ et de E_- en tant que $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.

d. Etablir que pour deux vecteurs X et Y de $\mathbb{C}^{2n}$ appartenant tous les deux à E_+ ou à E_-, il vient : ${}^tYX = 0$.

I.3. Etablir l'existence d'une famille de vecteurs $(X_1, \dots, X_n)$ de $\mathbb{C}^{2n}$ qui ait les propriétés :

α . La suite $\left(X_1, \dots, X_n, \overline{X}_1, \dots, \overline{X}_n\right)$ est une base de $\mathbb{C}^{2n}$ constituée de vecteurs propres de A .

β . pour tous entiers $j, k = 1, 2, \dots, n$,

$${}^t\overline{X}_j X_k = \delta_{jk}, \quad \delta_{jk} = 1 \text{ si } j = k, \ 0 \text{ si } j \neq k \quad ; \quad {}^tX_j X_k = 0 .$$

I.4. En déduire qu'il existe une base $Y_1, Y_2, \dots, Y_{2n}$ de $\mathbb{R}^{2n}$ telle que :

α . pour tout $j = 1, 2, \dots, n$ $\quad AY_j = Y_{j+n}$

$$AY_{j+n} = -Y_j$$

β . pour tous entiers $j, k = 1, 2, \dots, 2n$ $\quad {}^tY_j Y_k = \delta_{jk}$.

I.5. En déduire que pour toute matrice A appartenant à $\mathcal{F}_{2n}$, il existe une matrice P de $O(2n)$ telle que ${}^tPAP = J_n$.

PARTIE II

Caractérisation de fonctions intégrales premières d'un système différentiel

Dans toute cette partie, A désigne une matrice de $\mathcal{F}_{2n}$.

Soient $S^+(A)$ et $S^-(A)$ les sous-ensembles de $S(2n)$ des matrices symétriques qui commutent ou anticommutent respectivement par rapport à A :

$$S^+(A) = \{M \mid M \in S(2n) \ , \ MA = AM\} ,$$

$$S^-(A) = \{M \mid M \in S(2n) \ , \ MA = -AM\} .$$

Etant données deux matrices M_1 et M_2 de $S(2n)$, $\{M_1, M_2\}_A$ désigne la matrice définie par :

$$(1) \qquad \{M_1, M_2\}_A = \frac{1}{2}(M_1AM_2 - M_2AM_1) .$$

II.1.a. Etablir que la relation (1) définit, dans $S(2n)$, une loi de composition interne bilinéaire alternée.

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

b. Vérifier que pour tout triplet (M_1, M_2, M_3) de matrices de $S(2n)$, il vient :

$$\{M_1, \{M_2, M_3\}_A\}_A + \{M_2, \{M_3, M_1\}_A\}_A + \{M_3, \{M_1, M_2\}_A\}_A = 0 .$$

II.2.a. Soit P une matrice de $O(2n)$; démontrer que l'application $\varphi : M \mapsto {}^tPMP$ est un endomorphisme de $S(2n)$. Est-ce que φ est inversible ?

b. Etablir une relation entre les deux applications :

$$(M_1, M_2) \mapsto \{M_1, M_2\}_A \quad \text{et} \quad (M_1, M_2) \mapsto \{M_1, M_2\}_{J_n} .$$

II.3.a. Etablir que l'espace vectoriel $S(2n)$ est égal à la somme directe des sous-espaces vectoriels $S^+(A)$ et $S^-(A)$ (considérer pour une matrice M de $S(2n)$ la matrice AMA):

$$S(2n) = S^+(A) \oplus S^-(A) .$$

b. Soient M_1 et M_2 deux matrices de $S(2n)$.
Etablir que si M_1 et M_2 appartiennent à $S^+(A)$ ou à $S^-(A)$, $\{M_1, M_2\}_A$ appartient à $S^+(A)$ ou à $S^-(A)$. Envisager les différents cas possibles.

II.4. Soit M_o une matrice donnée de $S(2n)$ $(M_o \neq 0)$.

Soit $C(M_o)$ l'ensemble suivant : $C(M_o) = \left\{M \mid M \in S(2n) \mid \{M_o , M\}_A = 0\right\}$.

a. Démontrer que $C(M_o)$ est un sous-espace vectoriel de $S(2n)$, de dimension au moins égale à 1. Démontrer que ce sous-espace vectoriel $C(M_o)$ est stable pour la loi de composition (1) .

b. La matrice M_o est supposée appartenir à $S^+(A)$ ou à $S^-(A)$. Etablir que le sous-espace $C(M_o)$ est égal à la somme directe de deux sous-espaces vectoriels :

$$(2) \qquad C(M_o) = \left(C(M_o) \cap S^+(A)\right) \oplus \left(C(M_o) \cap S^-(A)\right) .$$

c. Exemple. Supposons $n = 1$; déterminer les espaces $S(2)$, $S^+(A)$ et $S^-(A)$.

La matrice A est prise égale à J_1 et la matrice M_o à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer $C(M_o)$. Est-ce que la propriété (2) établie en b. est encore vraie lorsque la matrice M_o n'appartient ni à $S^+(A)$ ni à $S^-(A)$?

II.5. Soit le système linéaire à coefficients constants : (3) $\quad \dfrac{dX}{dt}(t) = UX(t)$,

· $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2n}$, X est continûment dérivable. U est une matrice d'ordre $2n$ égale au produit d'une matrice A de $\mathcal{F}_{2n}$ et d'une matrice M_o de $S(2n)$.

Soit f une fonction définie dans $\mathbb{R}^{2n}$ et à valeurs réelles ; la fonction f est dite <u>intégrale première</u> du système (3) si pour toute solution $t \mapsto X(t)$ de (3) la fonction composée $t \mapsto (f \circ X)(t)$ est constante.

Etablir que si $M \in S(2n)$, la forme quadratique $X \mapsto {}^tXMX$ est une intégrale première si et seulement si M appartient à $C(M_o)$.

T.S.V.P.

PARTIE III

Etude d'un exemple

Dans toute cette partie, la matrice A est supposée égale à J_n . Les matrices M de S(2n) seront écrites par blocs : $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ {}^t\beta & \delta \end{pmatrix}$ où α et δ appartiennent à S(n) et β à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

III.1. Donner l'expression générale des matrices qui appartiennent à $S^+(J_n)$ puis de celles à $S^-(J_n)$.

Quelles sont les dimensions de chacun de ces sous-espaces vectoriels ?

III.2. Soit M_o une matrice appartenant à $S^-(J_n)$.

a. Soit M une matrice donnée appartenant à $S^+(J_n)$; démontrer que M appartient à $C(M_o)$ si et seulement si $M_oM + MM_o = 0$.

Donner pour une matrice appartenant à $S^-(J_n)$ la condition analogue.

b. La matrice M_o est définie par : $M_o = \begin{pmatrix} I_n & \mu_o \\ \mu_o & -I_n \end{pmatrix}$ où μ_o est une matrice de S(n) telle que $(\mu_o)^2 = k\, I_n$ (k est un réel positif). Déterminer les matrices qui appartiennent aux sous-espaces vectoriels $C(M_o) \cap S^+(J_n)$ et $C(M_o) \cap S^-(J_n)$. En déduire la dimension du sous-espace vectoriel $C(M_o)$.

c. Dans cette question, n = 2 ; la matrice μ_o est la matrice : $\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer une base de $C(M_o)$.

III.3. Soit le système différentiel :

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{3}\, y + z$$
$$\frac{dy}{dt} = -\sqrt{3}\, x + w$$
$$\frac{dz}{dt} = x + \sqrt{3}\, w$$
$$\frac{dw}{dt} = y + \sqrt{3}\, z$$

x, y, z, w sont quatre fonctions réelles continûment dérivables définies sur $\mathbb{R}$.

Déterminer les intégrales premières de ce système qui sont des formes quadratiques.

FIN DU PROBLEME