Grafos
Minimum Spanning Tree & Shortest Paths

MSc Edson Ticona Zegarra

Taller avanzado 2025

Contenido

Contenido

Grafo de expansión

- Dado un grafo $G = (V, E)$ y un subgrafo $G' = (V', E')$, tal que $G' \subset G$, se dice que G' es un subgrafo de expansión si todos los vértices de V' se expanden a todo G, es decir si $V' = V$

Grafo de expansión

- Dado un grafo $G = (V, E)$ y un subgrafo $G' = (V', E')$, tal que $G' \subset G$, se dice que G' es un subgrafo de expansión si todos los vértices de V' se expanden a todo G, es decir si $V' = V$
- Llamamos a un grafo G de *edge-maximal* con cierta propiedad si G cumple con la propiedad pero el grafo $G + xy$ no, para cualquier par de vértices $x, y \in G$

Grafo de expansión

- Dado un grafo $G = (V, E)$ y un subgrafo $G' = (V', E')$, tal que $G' \subset G$, se dice que G' es un subgrafo de expansión si todos los vértices de V' se expanden a todo G, es decir si $V' = V$
- Llamamos a un grafo G de *edge-maximal* con cierta propiedad si G cumple con la propiedad pero el grafo $G + xy$ no, para cualquier par de vértices $x, y \in G$
- En general hablamos de *maximal* o *minimal* con cierta propiedad, se refiere a la relación de subgrafo

Árbol de expansión mínimo

- Llamamos de árbol de expansión a todo subgrafo $T \in G$ tal que T es un árbol y T es un subgrafo de expansión

Árbol de expansión mínimo

- Llamamos de árbol de expansión a todo subgrafo $T \in G$ tal que T es un árbol y T es un subgrafo de expansión
- Para un grafo con pesos, entre todos los posibles árboles de expansión, se llama a T de árbol de expansión mínimo si la suma de los pesos de las aristas de T es la menor de todas

Árbol de expansión mínimo

- Llamamos de árbol de expansión a todo subgrafo $T \in G$ tal que T es un árbol y T es un subgrafo de expansión
- Para un grafo con pesos, entre todos los posibles árboles de expansión, se llama a T de árbol de expansión mínimo si la suma de los pesos de las aristas de T es la menor de todas
- Formalmente,

$$\min \sum_{e \in E} w(e)$$

Árbol de expansión mínimo

- Llamamos de árbol de expansión a todo subgrafo $T \in G$ tal que T es un árbol y T es un subgrafo de expansión
- Para un grafo con pesos, entre todos los posibles árboles de expansión, se llama a T de árbol de expansión mínimo si la suma de los pesos de las aristas de T es la menor de todas
- Formalmente,

$$\min \sum_{e \in E} w(e)$$

- donde $w(e)$ representa el peso de la arista e

Minimum Spanning Tree (MST)

- El problema del árbol de expansión mínimo, en inglés *minimum spanning tree (MST)* admite solución por un algoritmo greedy

Minimum Spanning Tree (MST)

- El problema del árbol de expansión mínimo, en inglés *minimum spanning tree (MST)* admite solución por un algoritmo greedy
- La idea es construir el MST agregando arista por arista, siempre que sea una arista *segura* de peso mínimo

Minimum Spanning Tree (MST)

- El problema del árbol de expansión mínimo, en inglés *minimum spanning tree (MST)* admite solución por un algoritmo greedy
- La idea es construir el MST agregando arista por arista, siempre que sea una arista *segura* de peso mínimo
- Una arista segura es aquella que mantiene la propiedad

Algoritmo de Prim

- El algoritmo de Prim inicia de un vértice arbitrario, dicho vértice provee diversas opciones en cuanto a cuál arista agregar a continuación

Algoritmo de Prim

- El algoritmo de Prim inicia de un vértice arbitrario, dicho vértice provee diversas opciones en cuanto a cuál arista agregar a continuación
- Siempre se agrega la menor disponible al componente creado hasta el momento

Prim

input : $G = (V, E)$ es el grafo
output: T es el MST
$Q.insert(V)$ **for** $v \in V$ **do**
    if $e.isSafe()$ **then**
        $T.push(e)$
    end
end

Prim

- Complejidad $O()$

Algoritmo de Kruskal

- El algoritmo de Kruskal inicia por la arista de menor peso

Algoritmo de Kruskal

- El algoritmo de Kruskal inicia por la arista de menor peso
- Se continue con la siguiente arista de menor peso, si dicha arista no pertenece al mismo componente se crea otro componente

Algoritmo de Kruskal

- El algoritmo de Kruskal inicia por la arista de menor peso
- Se continue con la siguiente arista de menor peso, si dicha arista no pertenece al mismo componente se crea otro componente
- Eventualmente una arista va a unir un par de componentes desconectados

Kruskal

```
Sort(E)
for e ∈ E do
    if e.isSafe() then
        T.push(e)
    end
    toVisit.pop()
end
```

Kruskal

- Complejidad $O()$

Caminos mínimos

- Dado un grafo con pesos, se busca minimizar la suma de los pesos de las aristas del camino entre s y t

Caminos mínimos

- Dado un grafo con pesos, se busca minimizar la suma de los pesos de las aristas del camino entre s y t
- Formalmente,

$$\min \sum_{e \in P} w(e)$$

Caminos mínimos

- Dado un grafo con pesos, se busca minimizar la suma de los pesos de las aristas del camino entre s y t
- Formalmente,

$$\min \sum_{e \in P} w(e)$$

- Tal que P es un camino entre s y t