

# Algoritmos

## Divide y Vencerás

Grupo de programación competitiva

Campamento de Programación

# Contenido

Divide y Vencerás

Problemas

# Contenido

Divide y Vencerás

Problemas

# Divide y Vencerás

- ▶ Es una técnica de diseño de algoritmos en la cual dividimos un problema de tamaño  $n$  en  $a$  subproblemas de tamaño  $n/b$

# Divide y Vencerás

- ▶ Es una técnica de diseño de algoritmos en la cual dividimos un problema de tamaño  $n$  en  $a$  subproblemas de tamaño  $n/b$
- ▶ Luego, se resuelve recursivamente cada subproblema

# Divide y Vencerás

- ▶ Es una técnica de diseño de algoritmos en la cual dividimos un problema de tamaño  $n$  en  $a$  subproblemas de tamaño  $n/b$
- ▶ Luego, se resuelve recursivamente cada subproblema
- ▶ Finalmente, se combina la solución a cada subproblema para obtener la solución al problema inicial

# Complejidad

►  $T(n) = a * T(n/b) + T(f(n))$

# Complejidad

- ▶  $T(n) = a * T(n/b) + T(f(n))$
- ▶ Donde  $f(n)$  representa el tiempo necesario para combinar los subproblemas



# Contenido

Divide y Vencerás

Problemas

# Envolvente convexa: Convex Hull

## Definition

Dado un conjunto de puntos  $P$  en el plano, se busca un subconjunto que define la envolvente convexa.

# Envolvente convexa: Convex Hull

## Definition

Dado un conjunto de puntos  $P$  en el plano, se busca un subconjunto que define la envolvente convexa.

- ▶ Existen varios algoritmos para resolver este problema, ahora nos enfocamos en la solución divide y vencerás

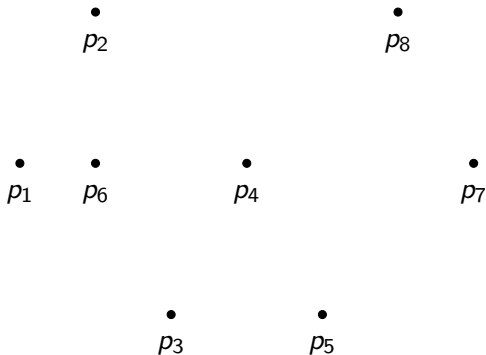
# Envolvente convexa: Convex Hull

## Definition

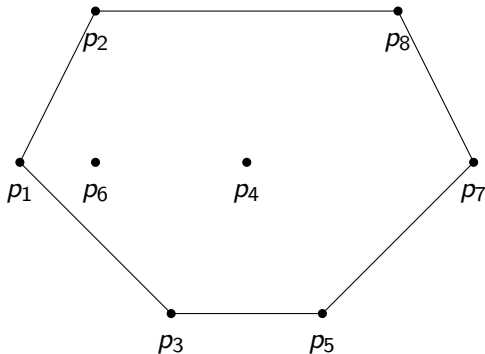
Dado un conjunto de puntos  $P$  en el plano, se busca un subconjunto que define la envolvente convexa.

- ▶ Existen varios algoritmos para resolver este problema, ahora nos enfocamos en la solución divide y vencerás
- ▶ La envolvente convexa es el polígono de menor área que contiene todos los puntos y lo representamos por  $CH(P)$

# Envolvente convexa: Convex Hull



## Envolvente convexa: Convex Hull



## Envolvente convexa: Convex Hull

**input** :  $P$  es el conjunto de  $n$  puntos

**output:**  $S$  conjunto de puntos representando la envolvente convexa

*Sort( $P$ ) por  $x$  ;*

*Left, Right  $\leftarrow$  Dividir  $P$  por la mitad;*

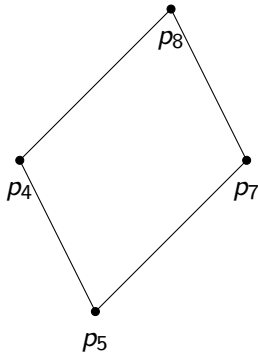
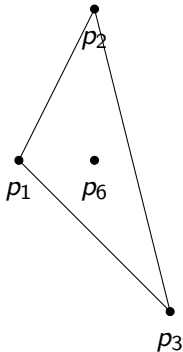
*$A \leftarrow \text{ConvexHull}(\text{Left})$  ;*

*$B \leftarrow \text{ConvexHull}(\text{Right})$  ;*

*$S \leftarrow \text{Combinar } A \text{ con } B$  ;*

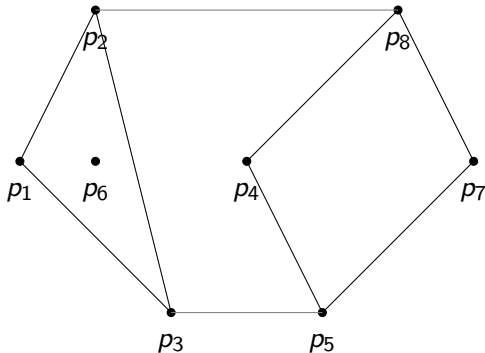
**return**  $S$

## Envolvente convexa: Convex Hull

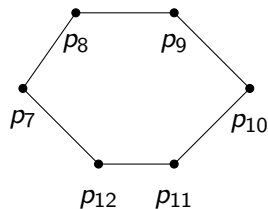
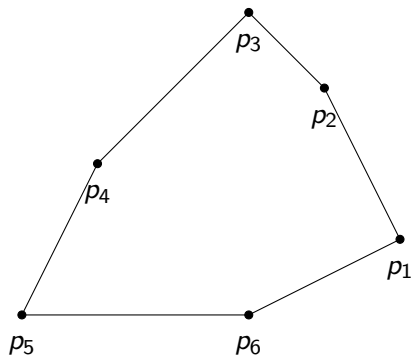




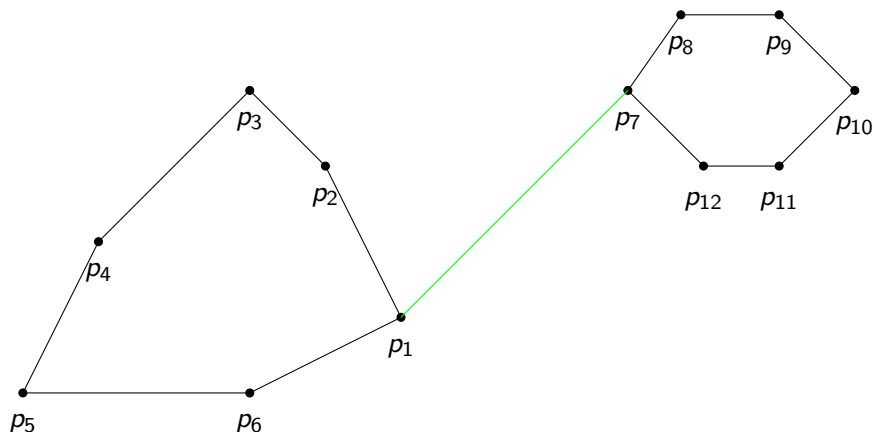
## Envolvente convexa: Convex Hull



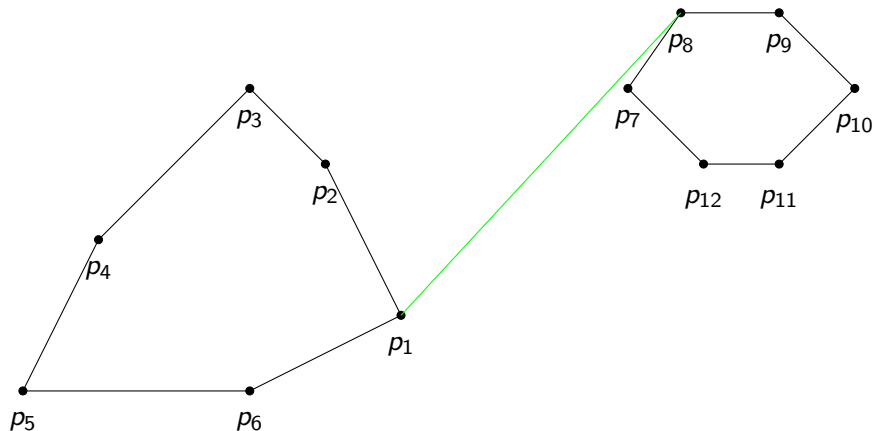
# Envolvente convexa: Convex Hull



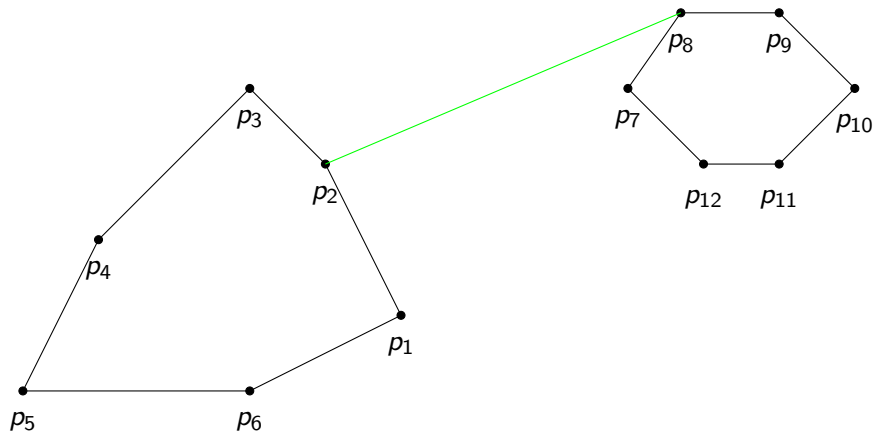
# Envolvente convexa: Convex Hull



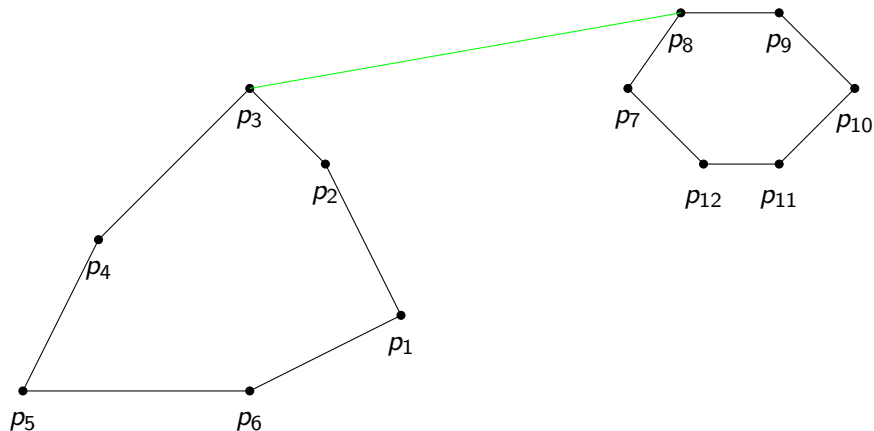
# Envolvente convexa: Convex Hull



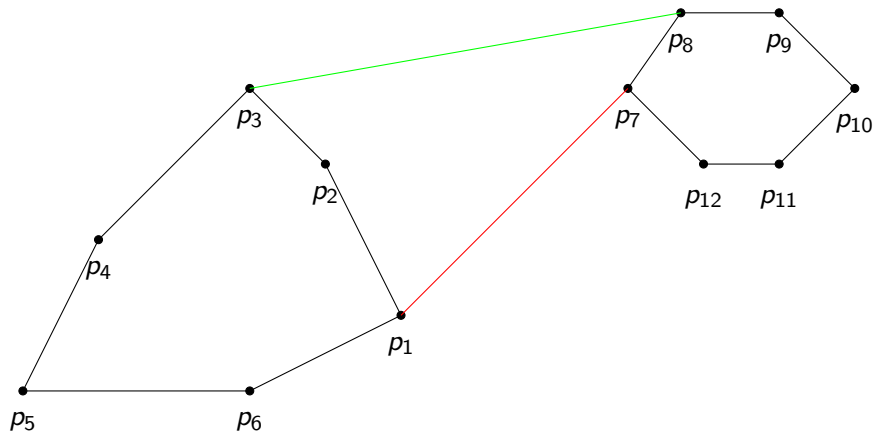
# Envolvente convexa: Convex Hull



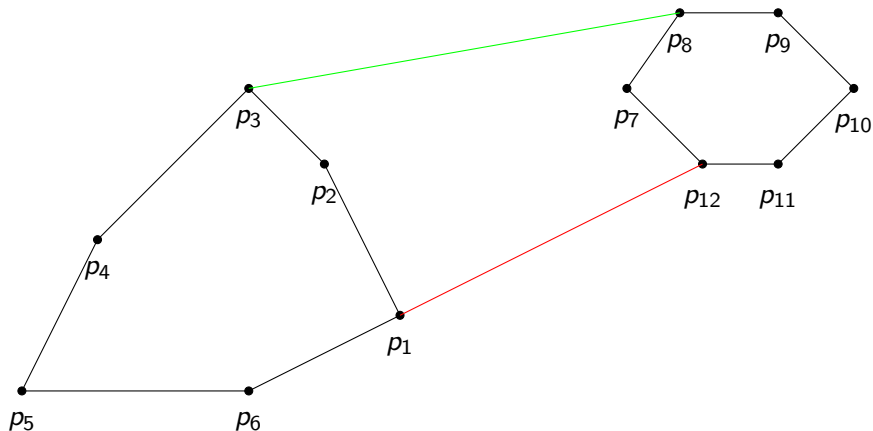
# Envolvente convexa: Convex Hull



# Envolvente convexa: Convex Hull

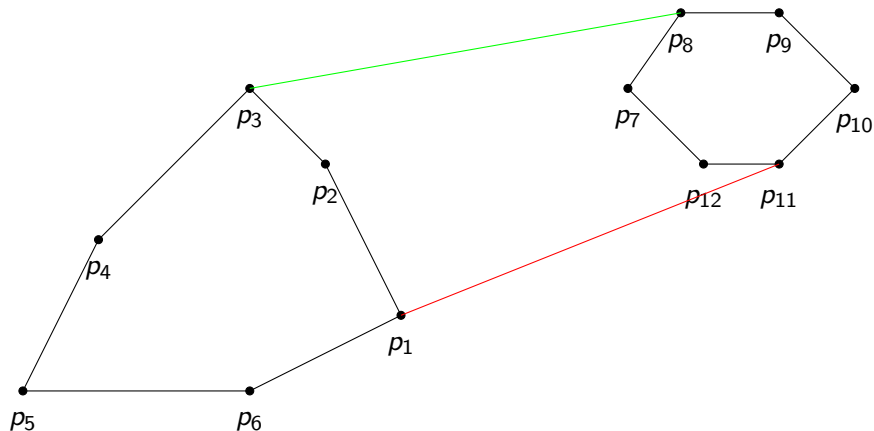


# Envolvente convexa: Convex Hull

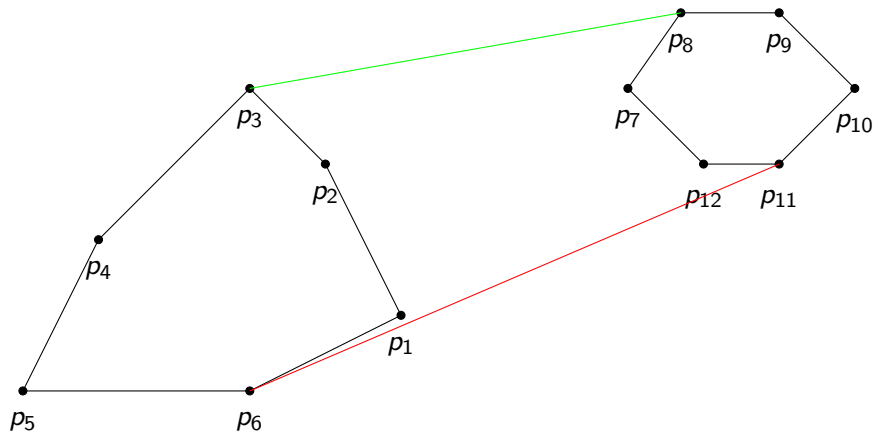




# Envolvente convexa: Convex Hull



# Envolvente convexa: Convex Hull



## Envolvente convexa: Convex Hull

- Sean  $p$  y  $q$  los puntos con mayor y menor coordenada  $x$  en cada convex hull, respectivamente

## Envolvente convexa: Convex Hull

- ▶ Sean  $p$  y  $q$  los puntos con mayor y menor coordenada  $x$  en cada convex hull, respectivamente
- ▶ Para la tangente superior

## Envolvente convexa: Convex Hull

- ▶ Sean  $p$  y  $q$  los puntos con mayor y menor coordenada  $x$  en cada convex hull, respectivamente
- ▶ Para la tangente superior
- ▶ Mientras que: En el CH de la derecha que el producto  $\vec{pq} \times q\vec{q}_{cw} > 0$ , avanzar  $q$

## Envolvente convexa: Convex Hull

- ▶ Sean  $p$  y  $q$  los puntos con mayor y menor coordenada  $x$  en cada convex hull, respectivamente
- ▶ Para la tangente superior
- ▶ Mientras que: En el CH de la derecha que el producto  $\vec{pq} \times q\vec{q}_{cw} > 0$ , avanzar  $q$
- ▶ Mientras que: En el CH de la izquierda que el producto  $\vec{qp} \times p\vec{p}_{acw} < 0$ , avanzar  $p$

## Envolvente convexa: Convex Hull

- ▶ Sean  $p$  y  $q$  los puntos con mayor y menor coordenada  $x$  en cada convex hull, respectivamente
- ▶ Para la tangente superior
- ▶ Mientras que: En el CH de la derecha que el producto  $\vec{pq} \times q\vec{q}_{cw} > 0$ , avanzar  $q$
- ▶ Mientras que: En el CH de la izquierda que el producto  $\vec{qp} \times p\vec{p}_{acw} < 0$ , avanzar  $p$
- ▶ Para la tangente inferior

## Envolvente convexa: Convex Hull

- ▶ Sean  $p$  y  $q$  los puntos con mayor y menor coordenada  $x$  en cada convex hull, respectivamente
- ▶ Para la tangente superior
- ▶ Mientras que: En el CH de la derecha que el producto  $\vec{pq} \times q\vec{q}_{cw} > 0$ , avanzar  $q$
- ▶ Mientras que: En el CH de la izquierda que el producto  $\vec{qp} \times p\vec{p}_{acw} < 0$ , avanzar  $p$
- ▶ Para la tangente inferior
- ▶ Mientras que: En el CH de la derecha que el producto  $\vec{pq} \times q\vec{q}_{cw} < 0$ , avanzar  $q$



## Envolvente convexa: Convex Hull

- ▶ Sean  $p$  y  $q$  los puntos con mayor y menor coordenada  $x$  en cada convex hull, respectivamente
- ▶ Para la tangente superior
- ▶ Mientras que: En el CH de la derecha que el producto  $\vec{pq} \times q\vec{q}_{cw} > 0$ , avanzar  $q$
- ▶ Mientras que: En el CH de la izquierda que el producto  $\vec{qp} \times p\vec{p}_{acw} < 0$ , avanzar  $p$
- ▶ Para la tangente inferior
- ▶ Mientras que: En el CH de la derecha que el producto  $\vec{pq} \times q\vec{q}_{cw} < 0$ , avanzar  $q$
- ▶ Mientras que: En el CH de la izquierda que el producto  $\vec{qp} \times p\vec{p}_{acw} > 0$ , avanzar  $p$

## Envolvente convexa: Convex Hull

- ▶ Sean  $p$  y  $q$  los puntos con mayor y menor coordenada  $x$  en cada convex hull, respectivamente
- ▶ Para la tangente superior
- ▶ Mientras que: En el CH de la derecha que el producto  $\vec{pq} \times q\vec{q}_{cw} > 0$ , avanzar  $q$
- ▶ Mientras que: En el CH de la izquierda que el producto  $\vec{qp} \times p\vec{p}_{acw} < 0$ , avanzar  $p$
- ▶ Para la tangente inferior
- ▶ Mientras que: En el CH de la derecha que el producto  $\vec{pq} \times q\vec{q}_{cw} < 0$ , avanzar  $q$
- ▶ Mientras que: En el CH de la izquierda que el producto  $\vec{qp} \times p\vec{p}_{acw} > 0$ , avanzar  $p$
- ▶ Para ambos casos, parar cuando  $p$  y  $q$  no puedan avanzar más

# Búsqueda de la mediana

## Definition

La mediana es el elemento del medio de un conjunto de elementos

- ▶ Algoritmo trivial: ordenar los números y tomar el número del medio.

# Búsqueda de la mediana

## Definition

La mediana es el elemento del medio de un conjunto de elementos

- ▶ Algoritmo trivial: ordenar los números y tomar el número del medio.
- ▶ Si hay un número par de elementos, tomar el promedio de los dos centrales

# Búsqueda de la mediana

## Definition

La mediana es el elemento del medio de un conjunto de elementos

- ▶ Algoritmo trivial: ordenar los números y tomar el número del medio.
- ▶ Si hay un número par de elementos, tomar el promedio de los dos centrales
- ▶ Complejidad:  $O(n \log n)$

## Búsqueda de la mediana

- Podemos usar un algoritmo de divide y vencerás para este problema

## Búsqueda de la mediana

- ▶ Podemos usar un algoritmo de divide y vencerás para este problema
- ▶ En este caso, sin embargo, la parte más compleja esta en el paso de división y la combinación es trivial.

## Búsqueda de la mediana

- ▶ Podemos usar un algoritmo de divide y vencerás para este problema
- ▶ En este caso, sin embargo, la parte más compleja esta en el paso de división y la combinación es trivial.
- ▶ Utilizando una solución similar a QUICKSORT podemos obtener un algoritmo más eficiente



## Mediana

**input** :  $A$  es el conjunto de números;  $p$  y  $r$  son los índices del arreglo e  $i$  es el índice buscado

**output:**  $m$  mediana

$q \leftarrow \text{Pivot}(A, p, r)$  ;

$k \leftarrow q - p + 1$  ;

**if**  $i == k$  **then**

  | **return**  $A[q]$

**end**

**if**  $i < k$  **then**

  | **return**  $\text{Median}(A, p, q - 1, i)$

**end**

**else**

  | **return**  $\text{Median}(A, q + 1, r, i - k)$

**end**

# Mediana

- ▶ Llamar con  $\text{MEDIAN}(A, 0, N-1, (N+1)/2)$