Clase 3

Rogelio Valdez Delgado

Introducción

Álgebra se ha convertido en un área fundamental en las olimpiadas de matemáticas. Son frecuentes los problemas de este tema que aparecen en los concursos, y son también frecuentes los problemas de otras áreas que hacen uso del álgebra para su solución. En este libro queremos señalar las principales herramientas de álgebra que un alumno deberá asimilar paso a paso en su preparación para los concursos y olimpiadas de matemáticas.

Algunos de los tópicos que tratamos en el libro son parte de los temarios de matemáticas del bachillerato, pero hay otros que son de nivel universitario. Esto permite que el libro pueda ser utilizado como un texto de consulta para los alumnos del primer año de la universidad que gusten de enfrentar problemas de álgebra y tengan interés en aprender técnicas para resolverlos.

El libro se ha dividido en diez capítulos. Los primeros cuatro corresponden a temas del bachillerato y son básicos para los alumnos que se entrenan para las olimpiadas de matemáticas a nivel estatal y nacional. Los siguientes cuatro capítulos usualmente se estudian en cursos del primer año de una carrera universitaria, pero se han convertido en tópicos y herramientas que los alumnos que participan en competencias internacionales deben conocer y dominar. Los últimos dos capítulos contienen problemas y soluciones del material tratado a lo largo del libro.

El primer capítulo, cubre material básico de álgebra, como son sistemas numéricos, valor absoluto, productos notables, factorización, entre otros. Buscamos que el lector adquiera destreza en la manipulación de ecuaciones y fórmulas algebraicas para llevarlas a formas equivalentes más fáciles de entender y trabajar.

En el capítulo 2 se presenta el estudio de las sumas finitas de números, como por ejemplo, la suma de los cuadrados de los primeros n naturales. Se analizan sumas telescópicas, progresiones aritméticas y geométricas, así como varias de sus propiedades.

El capítulo 3 trata sobre la técnica matemática para demostrar proposiciones, conocida como el principio de inducción matemática, además se ejemplifica su uso con varios problemas. También se presentan formulaciones equivalentes del principio de inducción.

Para completar la primera parte del libro, en el capítulo 4 se estudian polinomios cuadráticos y cúbicos, haciendo énfasis en el estudio del discriminante de los cuadráticos y de las fórmulas de Vieta para estos dos tipos de polinomios.
La segunda parte del texto, inicia en el capítulo 5 donde se estudian los números complejos, sus propiedades y algunas aplicaciones. Todo esto siempre ejemplificado con problemas de las olimpiadas de matemáticas. Se incluye también una demostración elemental del teorema fundamental del álgebra.
En el capítulo 6 se estudian las propiedades principales de las funciones. También se presenta una introducción a las ecuaciones funcionales, sus propiedades y se dan algunas recomendaciones para resolver problemas donde aparecen ecuaciones de este tipo.
El capítulo 7 habla de la noción de sucesión y serie. Se estudian sucesiones especiales como las acotadas, las periodicas, las monótonas, las recursivas entre otras. Se introduce también el concepto de convergencia para sucesiones y series.
En el capítulo 8 se generaliza el estudio de los polinomios que se trató en la primera parte. Se presenta la teoría de polinomios de grado arbitrario y diversas técnicas para analizar propiedades de los mismos. Al final del capítulo se introducen los polinomios de varias variables.
La mayoría de las secciones de estos primeros ocho capítulos tienen al final una lista de ejercicios para el lector, seleccionados y adecuados para practicar los temas que se abordan en ellas. La dificultad de los ejercicios varía desde ser una aplicación directa de un resultado visto en la sección hasta ser un problema de un concurso, que con la técnica tratada es factible resolver.
El capítulo 9 es una recopilación de problemas, cada uno de ellos cercano a uno o más de los temas tratados en el libro. Estos problemas tienen un grado de dificultad mayor a los ejercicios. La mayoría de ellos han aparecido en algún concurso u olimpiada de matemáticas. En la solución de cada problema está implícito el conocimiento y destreza que se debe adquirir para la manipulación de expresiones algebraicas.
Finalmente, el capítulo 10 contiene las soluciones de todos los ejercicios y problemas planteados en el libro.
El lector podrá notar que al final del título de algunas secciones aparece el símbolo $\star$, esto indica que el nivel de tal sección es más díficil. En una primera lectura, el lector puede omitir estas secciones, sin embargo recomendamos que las tenga presentes por las técnicas que se utilizan en ellas.
Agradecemos infinitamente a Leonardo Ignacio Martínez Sandoval por sus siempre útiles comentarios y sugerencias, los cuales contribuyeron al mejoramiento del material presentado en este libro.

Radmila Bulajich José Antonio Gómez Rogelio Valdez

Contenido

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Números

Consideramos que el lector está familiarizado con el conjunto de números que se utilizan para contar. A este conjunto se le conoce como el conjunto de números naturales y se denota por $\mathbb{N}$, es decir,

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

En este conjunto estamos acostumbrados a realizar dos operaciones, la suma y la multiplicación, entendiendo con esto que si sumamos o multiplicamos dos números del conjunto obtenemos otro número natural. A estas operaciones las conocemos como la suma (o adición) y la multiplicación (o producto). En algunos libros el 0 se considera también como un número natural, sin embargo, en este libro no, pero convenimos que 0 es tal que $n+0 = n$, para todo número natural n.
Ahora, supongamos que deseamos resolver la ecuación $x + a = 0$, con $a \in \mathbb{N}$, es decir, encontrar una x para la cual la igualdad anterior se cumpla. Esta ecuación no tiene solución en el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, por lo cual necesitamos definir un conjunto de números que incluya al conjunto de números $\mathbb{N}$ y a sus negativos. Es decir, necesitamos extender el conjunto de los números $\mathbb{N}$ para que este tipo de ecuaciones tengan solución en el nuevo conjunto. A este conjunto lo llamamos el conjunto de los números enteros y lo denotamos por $\mathbb{Z}$, es decir,

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

En este conjunto también hay dos operaciones, la suma y la multiplicación, que satisfacen las siguientes propiedades.

Propiedades 1.1.1 (a) *La suma y la multiplicación de números enteros son operaciones conmutativas. Esto es, si $a,\, b \in \mathbb{Z}$, entonces*

$$a + b = b + a \quad y \quad ab = ba.$$

(b) *La suma y el producto de números enteros son operaciones asociativas. Esto es, si $a,\, b$ y $c \in \mathbb{Z}$, entonces*

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad y \quad (ab)c = a(bc).$$

(c) *Existe en $\mathbb{Z}$ un elemento neutro para la suma, el número 0. Es decir, si $a \in \mathbb{Z}$, entonces*

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

(d) *Existe en $\mathbb{Z}$ un elemento neutro para la multiplicación, el número 1. Es decir, si $a \in \mathbb{Z}$, entonces*

$$a1 = 1a = a.$$

(e) *Para cada $a \in \mathbb{Z}$ existe su inverso aditivo que se denota por $-a$. Esto es,*

$$a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

(f) *En $\mathbb{Z}$, el producto se distribuye con respecto a la suma. Es decir, si $a,\, b$ y $c \in \mathbb{Z}$, entonces*

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Notemos que la existencia del inverso aditivo nos permite resolver cualquier ecuación del tipo mencionado, es decir, $x + a = b$, donde a y b son números enteros. Sin embargo, no existe necesariamente un número entero x que resuelva la ecuación $qx = p$, con p y q números enteros, por lo que nuevamente surge la necesidad de extender el conjunto de números. Consideramos ahora el conjunto de los números racionales, que denotamos como $\mathbb{Q}$, es decir,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \text{ y } q \in \mathbb{Z} \backslash \{0\} \right\}.$$

En general, para trabajar con los números racionales $\frac{p}{q}$ pedimos que p y q no tengan factores primos comunes, es decir, que sean primos relativos, esto lo denotamos como $(p, q) = 1$. En el conjunto de números racionales también existen las operaciones de suma y producto, las cuales cumplen las mismas propiedades que los números enteros. Además, en el producto existe otra propiedad: la existencia del inverso multiplicativo.

Propiedad 1.1.2 *Si $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, con $p \neq 0$ y $(p,q) = 1$, entonces existe un único número, $\frac{q}{p} \in \mathbb{Q}$, llamado el inverso multiplicativo de $\frac{p}{q}$ tal que*

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{q}{p} = 1.$$

Con esta nueva propiedad tenemos garantía de poder resolver cualquier ecuación de la forma $qx = p$. Sin embargo, existen números que no podemos escribir como cociente de dos números enteros, por ejemplo, si queremos resolver la ecuación $x^2 - 2 = 0$, ésta no tiene solución en el conjunto de los números $\mathbb{Q}$. Las soluciones de la ecuación son $x = \pm\sqrt{2}$ y mostramos que $\sqrt{2}$ no está en $\mathbb{Q}$.

Proposición 1.1.3 *El número $\sqrt{2}$ no es un número racional.*

Demostración. Supongamos lo contrario, es decir, que $\sqrt{2}$ es un número racional, entonces lo podemos escribir como $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, donde p y q no tienen factores comunes. Elevando al cuadrado de ambos lados tenemos que $2 = \frac{p^2}{q^2}$, es decir, $2q^2 = p^2$. Esto quiere decir, que p^2 es un número par, pero entonces el mismo p es par. Pero si p es par, digamos de la forma $p = 2m$, entonces $2q^2 = (2m)^2 = 4m^2$. Dividiendo entre 2 ambos lados de la ecuación tenemos que $q^2 = 2m^2$, esto es, q^2 es par y entonces q es también par. Así, p y q son pares, contradiciendo el hecho de que p y q no tienen factores comunes. Por lo tanto, $\sqrt{2}$ no es un número racional.

Podemos dar una representación geométrica de los números racionales como puntos sobre una recta, que llamamos la **recta numérica**. Una recta la podemos recorrer en dos sentidos, a uno de ellos le llamamos **sentido positivo** y al otro **sentido negativo**. Una vez convenido cual es el sentido positivo decimos que tenemos una **recta orientada**. Por ejemplo, podemos convenir que el sentido positivo es el que va de izquierda a derecha. Si consideramos dos puntos O y U en la recta, le daremos la misma orientación al segmento que a la recta que lo contiene. Esto es, tomando el punto O como el 0 y U a la derecha de él, decimos que el segmento OU se recorre en el sentido positivo. Si el punto U representa al 1, llamamos a OU un segmento orientado y unitario. Así, podemos ir colocando, hacia la derecha, todos los números enteros positivos a lo largo de la recta separados, cada dos consecutivos, una distancia OU. Para representar los números enteros negativos basta que hagamos lo mismo pero ahora iniciando en O y recorriendo la recta en sentido negativo.
El número racional de la forma $\frac{p}{q}$, lo definimos como el segmento orientado $\frac{p}{q}OU$ que es el segmento que se obtiene al sumar p veces la q-ésima parte del segmento OU. Con más precisión, hacemos lo siguiente:

(a) Dividimos en q partes iguales el segmento OU. Para esto, trazamos una recta auxiliar por O y sobre ella tomamos q puntos W_1, $\ldots$, W_q, donde dos consecutivos están separados una distancia OW_1. Ahora, se une W_q con U y por cada uno de los puntos W_j se traza una recta paralela a UW_q, los puntos de corte de las paralelas con OU serán los puntos de división de OU en q partes iguales. Si V es el punto de corte de la paralela UW_q por W_1, se tendrá que V es el punto que representa al número $\frac{1}{q}$ (note que OV tiene la misma orientación de OU). Consideramos también V' el punto simétrico, con respecto a O, de V. En la siguiente figura, hemos tomado $q = 4$

(b) Si p es un número entero no negativo, tomamos

$$OP = \underbrace{OV + OV + \cdots + OV}_{p \text{ veces}} = p \cdot OV.$$

El segmento OP es, por definición, $\frac{p}{q}OU$. En la siguiente figura marcamos al punto P, con $p = 6$ y $q = 4$

(c) Si p es negativo, sea p' el número entero positivo tal que $p = -p'$. Tomamos entonces

$$OP = \underbrace{OV' + OV' + \cdots + OV'}_{p' \text{ veces}} = p'OV' = (-p')OV = p \cdot OV.$$

El segmento OP es, por definición, $\frac{p}{q}OU$. Como OU es el segmento unitario, a este punto lo denotamos simplemente como $\frac{p}{q}$.

Con esta representación de los números racionales, tenemos que todo número racional está representado por un punto en la recta numérica, pero hay puntos en la recta numérica que no representan ningún número racional. Por ejemplo, determinemos en la recta numérica el número $\sqrt{2}$, que ya vimos que no es un número racional. Si tomamos un triángulo rectángulo con catetos de longitud 1, entonces, por el teorema de Pitágoras, la hipotenusa de este triángulo mide $\sqrt{2}$. Si tomamos un compás y trazamos una circunferencia de radio $\sqrt{2}$ y centro en 0, el punto donde la circunferencia intersecta a la parte positiva de la recta numérica es el punto en la recta numérica que corresponde a $\sqrt{2}$.

Un punto de la recta numérica que no corresponda a un número racional representará a un número irracional y al conjunto de los números irracionales lo denotamos por $\mathbb{I}$.

A la unión de estos dos conjuntos, le llamamos el conjunto de los números reales y lo denotamos como $\mathbb{R}$, es decir, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

El conjunto de los números $\mathbb{R}$ contiene al conjunto de los números naturales, al de los números enteros y al de los números racionales. De hecho, tenemos las siguientes contenciones $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Dados dos puntos en la recta numérica que sabemos representan a dos números reales, podemos localizar al punto que es la suma de ellos de la siguiente manera: si P y Q son dos puntos sobre la recta y O es el origen, la suma será la suma de los segmentos dirigidos OP y OQ, como se muestra en la siguiente figura.

Asimismo, podemos encontrar el punto que representa el producto de dos puntos P y Q sobre la recta numérica como sigue. Consideremos una recta auxiliar que será una copia de la recta real con el mismo origen O. Localizamos en la recta auxiliar la unidad U y el punto Q. Por Q trazamos la recta paralela a UP la cual intersecta a la recta real en R.
Como los triángulos ORQ y OPU son semejantes tenemos que $\frac{OR}{OP} = \frac{OQ}{OU}$ por lo que $OR \cdot OU = OP \cdot OQ$, de donde OR representa al producto de P y Q.

Con esto podemos localizar la suma y el producto de cualesquiera dos números reales sobre la recta numérica, sin importar si son números racionales o irracionales.
Al igual que en el conjunto de los números enteros, las operaciones en el conjunto de números reales cumplen todas las propiedades mencionadas.

Propiedades 1.1.4 (a) *La suma de dos números reales es un número real.*

(b) *La suma de dos números reales es conmutativa.*

(c) *La suma es asociativa.*

(d) *El número* 0 *es el neutro aditivo. Es decir,* $x + 0 = x$*, para todo* $x \in \mathbb{R}$*.*

(e) *Todo número real x tiene un inverso aditivo. Es decir, existe un número real que se denota por $-x$ y cumple que $x + (-x) = 0$.*

(f) *El producto de dos números reales es un número real.*

(g) *El producto es conmutativo.*

(h) *El producto es asociativo.*

(i) *El número 1 es el neutro multiplicativo. Es decir, $x \cdot 1 = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.*

(j) *Todo número real x distinto de 0, tiene inverso multiplicativo. Es decir, existe un número real que se denota por x^{-1}, tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.*

(k) *El producto distribuye a la suma, es decir, si x, y, $z \in \mathbb{R}$, entonces*

$$x\,(y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

En los números enteros tenemos un orden. Con esto queremos señalar que dados dos números enteros a y b podemos decir cual es el mayor de ellos. Decimos que a **es mayor que** b si $a - b$ es un número natural, en símbolos tenemos

$$a > b \text{ si y sólo si } a - b \in \mathbb{N}.$$

Esto es equivalente a decir que $a - b > 0$.
En general, la notación $a > b$ es equivalente a $b < a$. La expresión $a \geq b$ significa que $a > b$ o $a = b$. Análogamente, $a \leq b$ significa que $a < b$ o $a = b$.

Propiedades 1.1.5 *Si a es un número entero, se cumple una y solamente una de las condiciones siguientes:*

(a) $a > 0$,

(b) $a = 0$,

(c) $a < 0$.

En los números racionales y en los números reales también hay un orden. El orden en los números reales nos permitirá comparar dos números y decidir cual de ellos es mayor o bien si son iguales. A fin de evitar justificaciones tediosas, asumiremos que en los números reales hay un conjunto P que llamamos el conjunto de números positivos, y simbólicamente escribimos $x > 0$, para decir que un número x está en P. En la representación geométrica de los números reales, el conjunto P en la recta numérica es, de las dos partes en que O ha dividido a la recta, la parte que contiene a U (el 1). Resaltamos que se cumplen las propiedades siguientes.

Propiedad 1.1.6 *Cada número real x tiene una y sólo una de las siguientes características:*

(a) $x = 0$.

(b) $x \in P$ *(esto es $x > 0$).*

(c) $-x \in P$ *(esto es $-x > 0$).*

Propiedad 1.1.7 *Sean x, y números reales.*

(a) *Si x, $y \in P$, entonces $x+y \in P$ (en símbolos $x > 0$, $y > 0 \Rightarrow x+y > 0$).*

(b) *Si x, $y \in P$, entonces $xy \in P$ (en símbolos $x > 0$, $y > 0 \Rightarrow xy > 0$).*

Ahora podemos definir la relación x **es mayor que** y, si $x-y \in P$ (en símbolos $x > y$). Análogamente, x **es menor que** y, si $y - x \in P$ (en símbolos $x < y$). Observemos que $x < y$ es equivalente a $y > x$. Definimos también, x **es menor o igual que** y, si $x < y$ o $x = y$, (en símbolos $x \leq y$).
Denotamos al conjunto P de números reales positivos por $\mathbb{R}^+$.

Ejemplo 1.1.8 *Sean x, y, z números reales.*

(a) *Si $x < y$, entonces $x + z < y + z$.*

(b) *Si $x < y$ y $z > 0$, entonces $xz < yz$.*

En efecto, para mostrar (a) tenemos que $x + z < y + z$ si y sólo si $(y + z) - (x + z) > 0$ si y sólo si $y - x > 0$ si y sólo si $x < y$. Para ver (b), tenemos que $x < y$ implica $y - x > 0$ y como $z > 0$, resulta que $(y - x)z > 0$, luego $yz - xz > 0$ y entonces $xz < yz$.

Ejercicio 1.1 *Muestre las siguientes afirmaciones:*

(i) *Si $a < 0$, $b < 0$, entonces $ab > 0$.*
(ii) *Si $a < 0$, $b > 0$, entonces $ab < 0$.*
(iii) *Si $a < b$, $b < c$, entonces $a < c$.*
(iv) *Si $a < b$, $c < d$, entonces $a + c < b + d$.*
(v) *Si $a > 0$, entonces $a^{-1} > 0$.*
(vi) *Si $a < 0$, entonces $a^{-1} < 0$.*

Ejercicio 1.2 *Sean a, b números reales. Muestre que, si $a+b$, a^2+b y $a+b^2$ son números racionales y $a+b \neq 1$, entonces a y b son números racionales.*

Ejercicio 1.3 *Sean a, b números reales tales que a^2+b^2, a^3+b^3 y a^4+b^4 son números racionales. Muestre que $a+b$, ab son también números racionales.*

Ejercicio 1.4 (i) *Demuestre que si p es un número primo, entonces $\sqrt{p}$ es un número irracional.*
(ii) *Demuestre que si m es un número entero positivo que no es cuadrado perfecto, entonces $\sqrt{m}$ es un número irracional.*

Ejercicio 1.5 *Demuestre que existen una infinidad de parejas de números irracionales a, b tales que $a+b=ab$ y además este número es entero.*

Ejercicio 1.6 *Si los coeficientes de*

$$ax^2+bx+c=0$$

son números enteros impares, entonces las raíces de la ecuación no pueden ser números racionales.

Ejercicio 1.7 *Muestre que para números reales positivos a y b, con $\sqrt{b}<a$, se tiene que*

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

Ejercicio 1.8 *Para números positivos a y b encuentre el valor de:*

(i) $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\ldots}}}}$ (ii) $\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{b\ldots}}}}$

Ejercicio 1.9 *(Rumania, 2001) Sean x, y y z números reales distintos de cero tales que xy, yz y zx son números racionales. Muestre que:*
(i) *$x^2+y^2+z^2$ es un número racional.*
(ii) *Si $x^3+y^3+z^3$ es un número racional distinto de cero, entonces x, y y z son números racionales.*

Ejercicio 1.10 *(Rumania, 2011) Sean a, b números reales positivos y distintos, tales que $a-\sqrt{ab}$ y $b-\sqrt{ab}$ son ambos números racionales. Muestre que a y b son números racionales.*

El sistema decimal es un sistema posicional en el que cada dígito toma un valor de acuerdo a su posición con relación al punto decimal. Esto es, el dígito se multiplica por una potencia de 10. Para el dígito de las unidades, o sea, el dígito que está inmediatamente a la izquierda del punto decimal, lo tenemos que multiplicar por 10^n, con $n = 0$. El dígito de las decenas lo multiplicamos por $10^1 = 10$. El exponente aumenta de uno en uno conforme nos movemos a la izquierda y disminuye de uno en uno conforme nos movemos a la derecha. Por ejemplo,

$$87325.31 = 8 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-2}.$$

En general, todo número real puede escribirse como una expansión decimal infinita de la siguiente manera

$$b_m \dots b_1 b_0 . a_1 a_2 a_3 \dots,$$

donde los b_i y los a_i están en $\{0, 1, \dots, 9\}$. Los puntos suspensivos de la derecha significan que después del punto decimal podemos tener una infinidad de dígitos, así el número $b_m \dots b_1 b_0 . a_1 a_2 a_3 \dots$, representa al número real

$$b_m \cdot 10^m + \cdots + b_1 \cdot 10^1 + b_0 \cdot 10^0 + a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2} + \cdots .$$

Por ejemplo,

$$\begin{array}{rclcrcl} \frac{1}{3} & = & 0.3333\dots, & \quad & \frac{3}{7} & = & 0.428571428571\dots, \\ \frac{1}{2} & = & 0.50000\dots, & \quad & \sqrt{2} & = & 1.4142135\dots. \end{array}$$

Con esta notación podemos también distinguir entre los números racionales y los irracionales. Los números racionales son aquellos para los cuales la expansión decimal es finita o bien infinita pero en algún momento se hace periódica, como por ejemplo en $\frac{34}{275} = 0.123636\dots$, que se hace periódica de periodo 2 a partir del tercer dígito. En cambio, para los números irracionales, la expansión decimal es infinita, pero no sólo eso, sino que además nunca se hace periódica.

Al igual que en la representación decimal en base 10, podemos representar a los números enteros en cualquier base. Si m es un número entero positivo, para encontrar su representación en base b lo escribimos como suma de potencias de b, es decir, $m = a_r b^r + \cdots + a_1 b + a_0$. Los números enteros que aparecen como coeficientes de las potencias de b en la representación deben ser menores que b.

Observación 1.1.9 *Cuando escribimos un número en una base distinta de 10, ponemos como subíndice la base en la que está escrito el número, por ejemplo,* 1204_7 *significa que el número 1204 es un número en base 7.*

Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.1.10 *¿En qué base el número 221 es un factor de 1215?*

El número 1215 en base a se escribe como $a^3 + 2a^2 + a + 5$ y el número 221 en base a es $2a^2 + 2a + 1$. Ahora bien, si dividimos $a^3 + 2a^2 + a + 5$ entre $2a^2 + 2a + 1$ obtenemos que

$$a^3 + 2a^2 + a + 5 = (2a^2 + 2a + 1)\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}a + \frac{9}{2}\right).$$

Como 1215_a tiene que ser un múltiplo de 221_a, el residuo $\left(-\frac{1}{2}a + \frac{9}{2}\right)$ tiene que ser 0 y $\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\right)$ tiene que ser un número entero. Por lo tanto, $a = 9$.

Ejercicio 1.11 *Escriba en la forma $\frac{m}{n}$, con n y m números enteros positivos, a los siguiente números reales:*
(i) $0.11111\ldots.$
(ii) $1.14141414\ldots.$

Ejercicio 1.12 (i) *Muestre que 121_b es un cuadrado perfecto en cualquier base $b \geq 2$.*
(ii) *Determine el menor valor de b para el cual 232_b es un cuadrado perfecto.*

Ejercicio 1.13 *(IMO, 1970) Sean a, b y n números enteros mayores que 1. Sean A_{n-1} y A_n dos números escritos en el sistema numérico en base a y, B_{n-1} y B_n dos números escritos en el sistema númerico en base b. Estos números están relacionados de la siguiente forma,*

$$A_n = x_n x_{n-1} \ldots x_0, \qquad A_{n-1} = x_{n-1} x_{n-2} \ldots x_0,$$
$$B_n = x_n x_{n-1} \ldots x_0, \qquad B_{n-1} = x_{n-1} x_{n-2} \ldots x_0,$$

con $x_n \neq 0$ y $x_{n-1} \neq 0$. Muestre que $a > b$ si y sólo si

$$\frac{A_{n-1}}{A_n} < \frac{B_{n-1}}{B_n}.$$

1.2. Valor absoluto

Definimos el **valor absoluto** de un número real x como

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si} \quad x \geq 0, \\ -x, & \text{si} \quad x < 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Para k un número real no negativo, la identidad $|x| = k$ sólo la satisfacen los números $x = k$ y $x = -k$.
La desigualdad $|x| \leq k$ es equivalente a $-k \leq x \leq k$, lo cual podemos ver de la siguiente manera. Si $x \geq 0$, entonces $0 \leq x = |x| \leq k$. Por otro lado, si $x \leq 0$, entonces $-x = |x| \leq k$, de donde $x \geq -k$. Como consecuencia de lo anterior observemos que $x \leq |x|$. En la figura siguiente se muestran los valores de x que satisfacen la desigualdad, éstos son los que se encuentran entre $-k$ y k, incluyéndolos. Al conjunto $[-k, k] = \{x \in \mathbb{R} \mid -k \leq x \leq k\}$ le llamamos un **intervalo cerrado**, ya que contiene a k y $-k$. A $-k$ y k les llamamos los **puntos extremos** del intervalo.

Análogamente, la desigualdad $|x| \geq k$ es equivalente a $x \geq k$ o $-x \geq k$. En la figura siguiente los valores de x que satisfacen las desigualdades son los que se encuentran antes, o son iguales, a $-k$ o después, o son iguales, a k. El conjunto $(-k, k) = \{x \in \mathbb{R} \mid -k < x < k\}$ le llamamos un **intervalo abierto**, ya que no contiene a k y $-k$, es decir, un intervalo abierto es aquel que no contiene sus puntos extremos. Con esta definición vemos que el conjunto de las x que cumplen que $|x| \geq k$, son los valores de $x \notin (-k, k)$.

Ejemplo 1.2.1 *Encontremos, en el plano cartesiano*[1]*, el área encerrada por la gráfica de la relación* $|x| + |y| = 1$.

Para $|x| + |y| = 1$ tenemos que considerar cuatro casos:

(a) $x \geq 0$ y $y \geq 0$ lo que implica que $x + y = 1$, es decir, $y = 1 - x$.

(b) $x \geq 0$ y $y < 0$ lo que implica que $x - y = 1$, es decir, $y = x - 1$.

[1]El **plano cartesiano** se define como $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$.

(c) $x < 0$ y $y \geq 0$ lo que implica que $-x + y = 1$, es decir, $y = x + 1$.

(d) $x < 0$ y $y < 0$ lo que implica que $-x - y = 1$, es decir, $y = -x - 1$.

Podemos ahora dibujar la gráfica.

El área encerrada por las cuatro rectas está formada por cuatro triángulos rectángulos isósceles, que tienen cada uno, dos lados iguales a 1. Como el área de cada uno de estos triángulos es $\frac{1\times 1}{2} = \frac{1}{2}$, el área del cuadrado es $4\left(\frac{1}{2}\right) = 2$.

Ejemplo 1.2.2 *Resolvamos la ecuación* $|2x - 4| = |x + 5|$.

Tenemos que

$$|2x - 4| = \begin{cases} 2x - 4, & \text{si} \quad x \geq 2, \\ -2x + 4, & \text{si} \quad x < 2. \end{cases}$$

Además, tenemos que

$$|x + 5| = \begin{cases} x + 5, & \text{si} \quad x \geq -5, \\ -x - 5, & \text{si} \quad x < -5. \end{cases}$$

Si $x \geq 2$, entonces $2x - 4 = x + 5$, es decir, $x = 9$. Si $x < -5$, entonces $-2x + 4 = -x - 5$, de donde $x = 9$, lo cual es imposible ya que $x < -5$. El último caso que nos falta considerar es $-5 \leq x < 2$, entonces la ecuación que tenemos que resolver es $-2x + 4 = x + 5$, despejando x, tenemos que $x = -\frac{1}{3}$. Por lo tanto, los números que resuelven la ecuación son $x = 9$ y $x = -\frac{1}{3}$.

Muchas veces es más fácil resolver estas ecuaciones sin utilizar la forma explícita del valor absoluto, si observamos que $|a| = |b|$ si y sólo si $a = \pm b$ y utilizamos las propiedades del valor absoluto.

Observación 1.2.3 *Si x es un número real cualquiera, entonces la relación entre la raíz cuadrada y el valor absoluto está dada por $\sqrt{x^2} = |x|$, la identidad se sigue de que $|x|^2 = x^2$ y $|x| \geq 0$.*

Propiedades 1.2.4 *Si x y y son números reales, se cumple lo siguiente:*

(a) $|xy| = |x||y|$. *De aquí se sigue también que* $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, *si* $y \neq 0$.

(b) $|x+y| \leq |x| + |y|$, *donde la igualdad se da si y sólo si* $xy \geq 0$.

Demostración. (a) La demostración es directa de $|xy|^2 = (xy)^2 = x^2y^2 = |x|^2|y|^2$, y ahora sacando raíz obtenemos el resultado.
(b) Como ambos lados de la desigualdad son números positivos, bastará entonces verificar que $|x+y|^2 \leq (|x|+|y|)^2$.

$$\begin{aligned} |x+y|^2 &= (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = |x|^2 + 2xy + |y|^2 \\ &\leq |x|^2 + 2\,|xy| + |y|^2 = |x|^2 + 2\,|x|\,|y| + |y|^2 = (|x|+|y|)^2 . \end{aligned}$$

En las relaciones anteriores hay una sola desigualdad y ésta es inmediata ya que $xy \leq |xy|$. Además, obtenemos la igualdad si y sólo si $xy = |xy|$ que sucede únicamente cuando $xy \geq 0$.

La desigualdad (b) en 1.2.4 se puede extender en una forma general como,

$$|\pm x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|,$$

para números reales x_1, x_2, $\ldots$, x_n. La igualdad se tiene cuando todos los $\pm x_i$ tienen el mismo signo. Ésta se demuestra de manera similar, o bien por inducción[2].

Ejercicio 1.14 *Si a y b son números reales cualesquiera, demuestre que*

$$||a| - |b|| \leq |a - b|.$$

Ejercicio 1.15 *En cada caso encuentre los números reales x que satisfacen:*
(i) $|x-1| - |x+1| = 0$.
(ii) $|x-1||x+1| = 1$.
(iii) $|x-1| + |x+1| = 2$.

Ejercicio 1.16 *Encuentre las ternas (x, y, z) de números reales que satisfacen*

$$\begin{aligned} |x+y| &\geq 1 \\ 2xy - z^2 &\geq 1 \\ z - |x+y| &\geq -1. \end{aligned}$$

[2]Ver sección **??**, para ver demostraciones por inducción.

Ejercicio 1.17 *(OMM, 2004) ¿Cuál es la mayor cantidad de números enteros positivos que se pueden encontrar de manera que cualesquiera dos de ellos, a y b (con $a \neq b$), cumplan que:*

$$|a-b| \geq \frac{ab}{100}?$$

1.3. Parte entera y parte fraccionaria

Dado cualquier número $x \in \mathbb{R}$, algunas veces es útil considerar el número entero máx $\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$, es decir, el mayor entero menor o igual que x. A este número lo denotamos por $\lfloor x \rfloor$ y se le conoce como **la parte entera de** x.
De la definición anterior tenemos las siguientes propiedades.

Propiedades 1.3.1 *Sean $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{Z}$. Entonces se tiene que:*

(a) $x-1 < \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

(b) x *es entero si y sólo si* $\lfloor x \rfloor = x$.

(c) $\lfloor x+m \rfloor = \lfloor x \rfloor + m$.

(d) $\left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor$.

(e) $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

Demostración. Las primeras tres propiedades son inmediatas.
(d) Al dividir $\lfloor x \rfloor$ entre n tenemos que $\lfloor x \rfloor = an + b$, para un número entero a y para un número entero b tal que $0 \leq b < n$.
Por un lado, tenemos que $\left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{an+b}{n} \right\rfloor = a + \left\lfloor \frac{b}{n} \right\rfloor = a$. Por otro lado, como $x = \lfloor x \rfloor + c$, con $0 \leq c < 1$, tenemos que $\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{an+b+c}{n} \right\rfloor = a + \left\lfloor \frac{b+c}{n} \right\rfloor = a$, ya que $b + c < n - 1 + 1 = n$. Luego, la igualdad es válida.
(e) Como $x = \lfloor x \rfloor + a$ y $y = \lfloor y \rfloor + b$ con $0 \leq a, b < 1$, entonces $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor a+b \rfloor$ por la propiedad (c). Las desigualdades se siguen de observar que si $0 \leq a, b < 1$ entonces $0 \leq \lfloor a+b \rfloor \leq 1$.

Ejemplo 1.3.2 *Para todo número real x se cumple que*

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor - \lfloor 2x \rfloor = 0.$$

Si se hace $n = \lfloor x \rfloor$, x se puede expresar de la forma $x = n + a$ con $0 \leq a < 1$, luego se tiene que

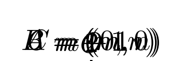
$$\begin{aligned}
\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor - \lfloor 2x \rfloor &= n + \left\lfloor n + a + \frac{1}{2} \right\rfloor - \lfloor 2(n+a) \rfloor \\
&= n + n + \left\lfloor a + \frac{1}{2} \right\rfloor - 2n - \lfloor 2a \rfloor \\
&= \left\lfloor a + \frac{1}{2} \right\rfloor - \lfloor 2a \rfloor,
\end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se sigue por la propiedad (c). Ahora, si $0 \leq a < \frac{1}{2}$, entonces $\left\lfloor a + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2a \rfloor = 0$, mientras que en el caso $\frac{1}{2} \leq a < 1$, se tiene que $\left\lfloor a + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2a \rfloor = 1$.

Ejemplo 1.3.3 *Si n y m son enteros positivos sin factores comunes, entonces*

$$\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2n}{m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3n}{m} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{(m-1)n}{m} \right\rfloor = \frac{(m-1)(n-1)}{2}.$$

Consideramos en el plano cartesiano la recta que pasa por el origen y el punto (m, n). Como m y n son primos relativos, sobre el segmento de recta que une los puntos $(0, 0)$ y (m, n) no hay otro punto de coordenadas enteras.



La ecuación de la recta es $y = \frac{n}{m}x$ y pasa por los puntos $(j, \frac{n}{m}j)$, con $j = 1, \ldots, (m-1)$, y además $\frac{n}{m}j$ no es entero. El número $\left\lfloor \frac{n}{m}j \right\rfloor$ es igual al número de puntos de coordenadas enteras que están sobre la recta $x = j$ y, entre las rectas $y = \frac{n}{m}x$ y $y = 1$ inclusive. La suma es igual al número de puntos de coordenadas enteras en el interior del triángulo OAB, por simetría es igual a la mitad de los puntos de coordenadas enteras dentro del rectángulo $OABC$.

Como la cantidad de puntos de coordenadas enteras dentro del rectángulo es $(n-1)(m-1)$, tenemos que

$$\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2n}{m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3n}{m} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{(m-1)n}{m} \right\rfloor = \frac{(m-1)(n-1)}{2}.$$

Observación 1.3.4 *Como el lado derecho de la última igualdad es simétrico en m y n, entonces*

$$\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2n}{m} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{(m-1)n}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2m}{n} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{(n-1)m}{n} \right\rfloor.$$

Para un número real x, consideremos también el número $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$, al cual llamamos la **parte fraccionaria de** x, y cumple las siguientes propiedades.

Propiedades 1.3.5 *Sean $x, y \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}$. Entonces se tiene que:*

(a) $0 \leq \{x\} < 1$.

(b) $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$.

(c) $\{x+y\} \leq \{x\} + \{y\} \leq \{x+y\} + 1$.

(d) $\{x+n\} = \{x\}$.

Ejercicio 1.18 *Para cualesquiera números reales a, $b > 0$, se tiene que*

$$\lfloor 2a \rfloor + \lfloor 2b \rfloor \geq \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor + \lfloor a+b \rfloor.$$

Ejercicio 1.19 *Encuentre los valores de x que cumplen la siguiente ecuación:*
(i) $\lfloor x \lfloor x \rfloor \rfloor = 1$.
(ii) $\lvert \lvert x \rvert - \lfloor x \rfloor \rvert = \lfloor \lvert x \rvert - \lfloor x \rfloor \rfloor$.

Ejercicio 1.20 *Encuentre las soluciones del sistema de ecuaciones*

$$\begin{aligned} x + \lfloor y \rfloor + \{z\} &= 1.1, \\ \lfloor x \rfloor + \{y\} + z &= 2.2, \\ \{x\} + y + \lfloor z \rfloor &= 3.3. \end{aligned}$$

Ejercicio 1.21 *(Canadá, 1987) Para cada número natural n, muestre que*

$$\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+3} \rfloor.$$

1.4. Productos notables

El área de un cuadrado es el cuadrado de la longitud de su lado. Si sus lados miden $a + b$ entonces el área es $(a + b)^2$, pero el área de este cuadrado la podemos dividir en cuatro rectángulos como se muestra en la figura.

Luego, la suma de las áreas de los cuatro rectángulos será igual al área del cuadrado, es decir,

$$(a + b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2. \tag{1.2}$$

Veamos ahora cómo obtener geométricamente el cuadrado de la diferencia $a - b$, donde $b \leq a$. El problema es ahora encontrar el área de un cuadrado de lado $a - b$.

En la figura observamos que el área de un cuadrado de lado a es igual a la suma de las áreas de los cuadrados de lados $(a - b)$ y b, más el área de dos rectángulos iguales de lados b y $(a - b)$. Esto es, $a^2 = (a - b)^2 + b^2 + (a - b)b + b(a - b)$, de donde

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2. \tag{1.3}$$

Para encontrar el área de la parte sombreada de la siguiente figura, observamos que la suma de las áreas de los rectángulos que la forman es $a(a-b)+b(a-b)$ y si factorizamos esta suma tenemos que

$$a(a-b)+b(a-b)=(a+b)(a-b), \tag{1.4}$$

pero es equivalente al área del cuadrado grande menos el área del cuadrado chico, es decir,

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2. \tag{1.5}$$

Otro producto notable, pero ahora de tres variables, está dado por

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc. \tag{1.6}$$

La representación geométrica de este producto está dada por la igualdad entre el área del cuadrado con lados de longitud $a+b+c$ y la suma de las áreas de los nueve rectángulos en que se ha dividido el cuadrado, esto es,

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+ab+ac+ba+bc+ca+cb=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$$

A continuación damos una serie de identidades, algunas de ellas muy conocidas y otras no tanto, útiles para resolver varios problemas.

Ejercicio 1.22 *Para todos los números reales x, y, se tienen las siguientes identidades de segundo grado:*

(i) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(x-y)^2+2xy.$

(ii) $(x+y)^2+(x-y)^2=2(x^2+y^2).$

(iii) $(x+y)^2-(x-y)^2=4xy.$

(iv) $x^2+y^2+xy=\dfrac{x^2+y^2+(x+y)^2}{2}.$

(v) $x^2+y^2-xy=\dfrac{x^2+y^2+(x-y)^2}{2}.$

(vi) *Muestre que* $x^2+y^2+xy\geq 0$ *y* $x^2+y^2-xy\geq 0.$

Ejercicio 1.23 *Para todos los números reales x, y, z, se tiene:*

(i) $x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx=\dfrac{(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2}{2}.$

(ii) $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=\dfrac{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}{2}.$

(iii) *Muestre que* $x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx\geq 0$ *y* $x^2+y^2+x^2-xy-yz-zx\geq 0.$

Ejercicio 1.24 *Para todos los números reales x, y, z se tienen las siguientes identidades:*

(i) $(xy+yz+zx)(x+y+z)=(x^2y+y^2z+z^2x)+(xy^2+yz^2+zx^2)+3xyz.$

(ii) $(x+y)(y+z)(z+x)=(x^2y+y^2z+z^2x)+(xy^2+yz^2+zx^2)+2xyz.$

(iii) $(xy+yz+zx)(x+y+z)=(x+y)(y+z)(z+x)+xyz.$

(iv) $(x-y)(y-z)(z-x)=(xy^2+yz^2+zx^2)-(x^2y+y^2z+z^2x).$

(v) $(x+y)(y+z)(z+x)-8xyz=2z(x-y)^2+(x+y)(x-z)(y-z).$

(vi) $xy^2+yz^2+zx^2-3xyz=z(x-y)^2+y(x-z)(y-z).$

Ejercicio 1.25 *Para todos los números reales x, y, z se tiene:*

(i) $x^2+y^2+z^2+3(xy+yz+zx)=(x+y)(y+z)+(y+z)(z+x)+(z+x)(x+y).$

(ii) $xy+yz+zx-\left(x^2+y^2+z^2\right)=(x-y)(y-z)+(y-z)(z-x)$
$+(z-x)(x-y).$

Ejercicio 1.26 *Para todos los números reales x, y, z se tiene,*

$$\begin{aligned}(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \;&=\; 2\left[(x-y)(x-z)\right.\\ &\quad \left.+(y-z)(y-x)+(z-x)(z-y)\right].\end{aligned}$$

1.5. Matrices y determinantes

Una **matriz de** 2×2 es un arreglo

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

donde a_{11}, a_{12}, a_{21} y a_{22} son números reales o complejos[3]. El **determinante** de la matriz anterior, que denotamos por

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

es el número real definido por $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Una **matriz de** 3×3 es un arreglo

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

donde, nuevamente, cada a_{ij} es un número. Los subíndices nos indican la posición del número en el arreglo. Así, a_{ij} se encuentra en el i-ésimo renglón y la j-ésima columna. Definimos el **determinante de una matriz de** 3×3 por la regla

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Es decir, nos movemos a lo largo del primer renglón, multiplicando a_{1j} por el determinante de la matriz de 2×2 obtenida al eliminar el primer renglón y la j-ésima columna, y después sumando todo esto, pero recordando poner un signo negativo antes de a_{12}. Cabe aclarar que el resultado del determinante no se altera si en lugar de escoger el primer renglón como primer paso escogemos el segundo o el tercero. En caso de que escojamos el segundo renglón iniciamos con un signo negativo y si escogemos el tercer renglón el primer signo es positivo, es decir,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

[3]Los números complejos los trataremos en el capítulo **??**.

Los signos se van alternando, siguiendo el siguiente diagrama

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}.$$

Los determinantes cumplen varias propiedades, que son inmediatas de las definiciones, las más útiles son las siguientes.

Propiedades 1.5.1 (a) *Al intercambiar dos renglones consecutivos o dos columnas consecutivas, el signo del determinante cambia, por ejemplo,*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

(b) *Se puede sacar un factor común a cualquier renglón o columna de una matriz y los determinantes se relacionan de la siguiente manera, por ejemplo,*

$$\begin{vmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

(c) *Si a un renglón (o columna) le sumamos otro renglón (o columna), el valor del determinante no cambia, por ejemplo,*

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11}+a_{21} & a_{12}+a_{22} & a_{13}+a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= \left(\text{o} \quad \begin{vmatrix} a_{11}+a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \right). \end{aligned}$$

(d) *Si una matriz tiene dos renglones (o dos columnas) iguales el determinante es cero.*

Ejemplo 1.5.2 *Usando determinantes podemos establecer la siguiente identidad*

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca). \tag{1.7}$$

Notemos que

$$
\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} a & b \\ c & a \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} c & b \\ b & a \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} c & a \\ b & c \end{vmatrix} \\
&= a^3 - abc - abc + b^3 + c^3 - abc = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc. \qquad (1.8)
\end{aligned}
$$

Por otro lado, sumando a la primera columna las otras dos, tenemos

$$
\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & a & b \\ a+b+c & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix} \\
&= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca).
\end{aligned}
$$

Por las propiedades (b) y (c), los determinantes son iguales.

Observemos que la expresión $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ se puede escribir como[4]

$$\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right].$$

Con esto obtenemos otra versión de la identidad (1.7), es decir,

$$a^3+b^3+c^3-3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]. \qquad (1.9)$$

Observemos que si en la identidad anterior se cumple la condición $a+b+c=0$ o la condición $a=b=c$, entonces tenemos la siguiente identidad

$$a^3+b^3+c^3 = 3abc. \qquad (1.10)$$

Recíprocamente, si sucede la identidad (1.10), entonces debe de cumplirse que $a+b+c=0$ o bien $a=b=c$.

Ejercicio 1.27 *Muestre que* $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ *es un número racional.*

Ejercicio 1.28 *Factorice* $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$.

Ejercicio 1.29 *Factorice* $(x+2y-3z)^3+(y+2z-3x)^3+(z+2x-3y)^3$.

[4]Ver el ejercicio 1.23.

Ejercicio 1.30 *Muestre que si x, y, z son números reales diferentes, entonces*

$$\sqrt[3]{x-y}+\sqrt[3]{y-z}+\sqrt[3]{z-x}\neq 0.$$

Ejercicio 1.31 *Sea r un número real tal que $\sqrt[3]{r}-\frac{1}{\sqrt[3]{r}}=1$, encuentre los valores de $r-\frac{1}{r}$ y de $r^3-\frac{1}{r^3}$.*

Ejercicio 1.32 *Sean a, b, c dígitos diferentes de cero. Muestre que si los números enteros (escritos en notación decimal) abc, bca y cab son divisibles entre n, entonces también $a^3+b^3+c^3-3abc$ es divisible entre n.*

Ejercicio 1.33 *¿Cuántas parejas ordenadas de números enteros (m,n) hay que cumplan las siguientes condiciones: $mn\geq 0$ y $m^3+99mn+n^3=33^3$?*

Ejercicio 1.34 *Encuentre el lugar geométrico de los puntos (x,y) tales que $x^3+y^3+3xy=1$.*

Ejercicio 1.35 *Encuentre las soluciones reales x, y, z de la ecuación,*

$$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)^3.$$

1.6. Desigualdades

Iniciamos esta sección con una de las desigualdades más importantes. Para cualquier número real x, tenemos que

$$x^2\geq 0. \tag{1.11}$$

Esto se sigue de la igualdad $x^2=|x|^2\geq 0$.
A partir de este resultado podemos deducir que la suma de n números cuadrados es no negativa,

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\geq 0 \tag{1.12}$$

y será cero si y solamente si todos los x_i son cero.
Si en la ecuación (1.11) sustituimos $x=a-b$, donde a y b son números reales no negativos, tenemos que

$$(a-b)^2\geq 0.$$

Desarrollando el binomio, la desigualdad anterior toma la forma,

$$a^2 + b^2 \geq 2ab. \tag{1.13}$$

Como

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \text{ si y sólo si } 2a^2 + 2b^2 \geq a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2,$$

tenemos también la siguiente desigualdad

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{(a+b)}{2}. \tag{1.14}$$

En caso de que a y b sean positivos, la desigualdad (1.13) garantiza que

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2. \tag{1.15}$$

Si en la desigualdad anterior tomamos $b = 1$, entonces tenemos que $a + \frac{1}{a} \geq 2$, es decir, la suma de $a > 0$ y su recíproco es mayor o igual que 2, y es 2 si y sólo si $a = 1$.

Remplazando a, b por $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ en (1.13) obtenemos

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \text{ si y sólo si } \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}. \tag{1.16}$$

Multiplicando la última desigualdad por $\sqrt{ab}$ y reacomodando, tenemos

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}. \tag{1.17}$$

Juntando las desigualdades (1.14), (1.16) y (1.17), hemos demostrado que

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}. \tag{1.18}$$

La primera expresión se conoce como la **media armónica** (MH), la segunda es la **media geométrica** (MG), la tercera es la **media aritmética** (MA) y la última es la **media cuadrática** (MQ).

Estas desigualdades también se pueden demostrar geométricamente como sigue. Consideremos un semicircunferencia con centro O, radio $\frac{a+b}{2}$ y los triángulos rectángulos ABC, DBA y DAC, como se muestra en la figura

Estos triángulos son semejantes por lo que tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{AD}{DB} &= \frac{DC}{DA} \\ \frac{h}{a} &= \frac{b}{h} \\ h^2 &= ab, \end{aligned}$$

es decir, que la altura común de los triángulos es $h = \sqrt{ab}$, que claramente es menor que el radio de la semicircunferencia. Luego, $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.
Para demostrar la primera desigualdad de (1.18), observemos que los triángulos DAE y OAD son semejantes, entonces

$$\begin{aligned} \frac{AD}{AE} &= \frac{AO}{AD} \\ h^2 &= y(y+z) \\ \frac{2ab}{a+b} &= y, \end{aligned}$$

es decir, y representa la media armónica. Claramente tenemos que $y \leq h$, luego $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}$.
Para demostrar geométricamente, la última desigualdad de (1.18), consideremos la siguiente figura

Tenemos que $OD = \frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2}$ y utilizando el teorema de Pitágoras tenemos que

$$DL^2 = OD^2 + OL^2 = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{2},$$

es decir, $DL = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ que claramente es mayor que $\frac{a+b}{2}$.

Utilizando el ejemplo 1.5.2 podemos dar una demostración de la desigualdad entre la media geométrica y la media aritmética para tres números reales no negativos. En efecto, por la identidad

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right],$$

es claro que si a, b y c son no negativos, entonces $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq 0$, es decir, $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$. Además, tenemos la igualdad si $a + b + c = 0$ o $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$, esto es solamente cuando $a = b = c$. Ahora si x, y y z son números no negativos, definiendo $a = \sqrt[3]{x}$, $b = \sqrt[3]{y}$ y $c = \sqrt[3]{z}$, tenemos que

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}, \tag{1.19}$$

con igualdad si y sólo si $x = y = z$.

Ejemplo 1.6.1 *Para todo número real x, sucede que $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2$.*

En efecto,

$$\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2.$$

La desigualdad se sigue de aplicar la desigualdad (1.15).

Ejemplo 1.6.2 *Si a, b, c son números no negativos, entonces*

$$(a+b)(b+c)(a+c) \geq 8abc.$$

Como hemos visto, $\frac{(a+b)}{2} \geq \sqrt{ab}$, $\frac{(b+c)}{2} \geq \sqrt{bc}$ y $\frac{(a+c)}{2} \geq \sqrt{ac}$, de donde

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b+c}{2}\right)\left(\frac{a+c}{2}\right) \geq \sqrt{a^2b^2c^2} = abc.$$

Ejemplo 1.6.3 *Si $x_1 > x_2 > x_3$ y $y_1 > y_2 > y_3$, ¿cuál de las siguientes sumas es mayor?*

$$\begin{aligned} S &= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \\ S' &= x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_3. \end{aligned}$$

Consideremos la diferencia,

$$\begin{aligned} S' - S &= x_1y_2 - x_1y_1 + x_2y_1 - x_2y_2 \\ &= x_1(y_2 - y_1) + x_2(y_1 - y_2) \\ &= -x_1(y_1 - y_2) + x_2(y_1 - y_2) \\ &= (x_2 - x_1)(y_1 - y_2) < 0, \end{aligned}$$

por lo tanto, $S' < S$.
Más generalmente, para cualquier permutación $\{y_1', y_2', y_3'\}$ de $\{y_1, y_2, y_3\}$ tenemos que,

$$S \geq x_1y_1' + x_2y_2' + x_3y_3', \tag{1.20}$$

que se conoce como la **desigualdad del reacomodo**[5].

Ejercicio 1.36 *Sean a, b números reales con $0 \leq a \leq b \leq 1$, muestre que:*
(i) $0 \leq \dfrac{b-a}{1-ab} \leq 1.$
(ii) $0 \leq \dfrac{a}{1+b} + \dfrac{b}{1+a} \leq 1.$

Ejercicio 1.37 *(Desigualdad de Nesbitt) Si a, b, $c \geq 0$, muestre que*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Ejercicio 1.38 *Si a, b, c son las longitudes de los lados de un triángulo, muestre que*

$$\sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3 + c^3 + 3abc}{2}} \geq \max\{a, b, c\}.$$

Ejercicio 1.39 *Sean p y q números reales positivos con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Muestre que:*
(i) $\dfrac{1}{3} \leq \dfrac{1}{p(p+1)} + \dfrac{1}{q(q+1)} \leq \dfrac{1}{2}.$
(ii) $\dfrac{1}{p(p-1)} + \dfrac{1}{q(q-1)} \geq 1.$

[5] Para una versión general de la desigualdad del reacomodo, vea el ejemplo **??**.

Ejercicio 1.40 *Encuentre el menor número positivo k tal que, para cualesquiera $0 < a$, $b < 1$, con $ab = k$, se cumpla que*

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{1-b} + \frac{b}{1-a} \geq 4.$$

Ejercicio 1.41 *Sean a, b, c números reales no negativos, muestre que*

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq \frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca).$$

Ejercicio 1.42 *Sean a, b, c números reales positivos que satisfacen la siguiente igualdad $(a+b)(b+c)(c+a) = 1$. Muestre que*

$$ab + bc + ca \leq \frac{3}{4}.$$

Ejercicio 1.43 *Sean a, b, c números reales positivos que satisfacen $abc = 1$. Muestre que $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 4(a+b+c-1)$.*

Ejercicio 1.44 *(APMO, 2011) Sean a, b, c números enteros positivos. Muestre que es imposible que los tres números $a^2 + b + c$, $b^2 + c + a$ y $c^2 + a + b$ sean cuadrados perfectos.*

1.7. Factorización

Una de las formas más importantes de manipulación algebraica es la que se conoce como factorización. En esta sección estudiamos algunos ejemplos y problemas cuya solución depende del conocimiento de fórmulas de factorización. Muchos de los problemas olímpicos que involucran expresiones algebraicas se resuelven fácilmente haciendo uso de transformaciones algebraicas que utilizan factorizaciones apropiadas. Empecemos con algunas fórmulas elementales de factorización, donde x, y son números reales:

(a) $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$.

(b) $x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$ y $x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$.

(c) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx = (x+y+z)^2$.

Estas identidades algebraicas se catalogan como identidades de grado 2. De hecho, estas cuatro identidades fueron ya estudiadas en la sección de productos notables, sin embargo, lo que se desea hacer ahora es, dada una expresión algebraica, reducirla a un producto de expresiones algebraicas más simples.

Ejemplo 1.7.1 *Para números reales a, b, x, y, con x y y distintos de cero, se tiene que*

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}-\frac{(a+b)^2}{x+y}=\frac{(ay-bx)^2}{xy(x+y)}.$$

Para obtener la igualdad que se pide, empecemos realizando la suma del lado izquierdo de la identidad,

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}-\frac{(a+b)^2}{x+y} &= \frac{a^2y(x+y)+b^2x(x+y)-xy(a+b)^2}{xy(x+y)}\\ &= \frac{a^2y^2+b^2x^2-2xyab}{xy(x+y)}\\ &= \frac{(ay-bx)^2}{xy(x+y)}.\end{aligned}$$

Una aplicación de la identidad anterior nos lleva a una demostración inmediata de la **desigualdad útil**[6] de grado 2. Ésta asegura que para números reales a, b y números reales positivos x, y, se cumple que

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\geq\frac{(a+b)^2}{x+y}.$$

Las siguientes identidades son de grado 3, con x, y, $z\in\mathbb{R}$:

(a) $x^3-y^3=(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)$.

(b) $x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$.

(c) $(x+y)^3-(x^3+y^3)=3xy(x+y)$.

(d) $x^3-xy^2+x^2y-y^3=(x+y)(x^2-y^2)$.

(e) $x^3+xy^2-x^2y-y^3=(x-y)(x^2+y^2)$.

[6] Ver [6], pág. 40 o [7] pág. 34.

Para comprobar la validez de las identidades anteriores basta desarrollar alguno de los lados o utilizar el teorema del binomio de Newton, el cual se estudiará en la sección **??**.

Otra identidad de grado 3 muy importante y que ya mencionamos en la identidad (1.7) es

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx),$$

para cualesquiera números reales x, y, z. Una demostración de ésta se obtiene simplemente desarrollando el lado derecho de la identidad. A lo largo del libro veremos otras demostraciones de esta igualdad.

Una forma equivalente de la identidad anterior es

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x + y + z)\left[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\right].$$

Las identidades $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ y $x^3 - y^3 = (x - y)\left(x^2 + xy + y^2\right)$ son casos particulares de la identidad de grado n,

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}), \tag{1.21}$$

para cualesquiera números reales x, y.

Si n es impar, podemos reemplazar y por $-y$ en la última fórmula para obtener la fórmula de factorización para la suma de dos potencias n-ésimas impares,

$$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \cdots - xy^{n-2} + y^{n-1}). \tag{1.22}$$

En general, la suma de potencias n-ésimas pares no es factorizable, aunque existen algunas excepciones cuando es posible completar cuadrados, veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.7.2 *(Identidad de Sophie Germain) Para cualesquiera números reales x, y se tiene que*

$$x^4 + 4y^4 = (x^2 + 2y^2 + 2xy)(x^2 + 2y^2 - 2xy).$$

Completando cuadrados, tenemos

$$\begin{aligned} x^4 + 4y^4 &= x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 4x^2y^2 = (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2 \\ &= (x^2 + 2y^2 + 2xy)(x^2 + 2y^2 - 2xy). \end{aligned}$$

Otro ejemplo, con potencias pares es el siguiente.

Ejemplo 1.7.3 *Para cualesquiera números reales x, y, se tiene que*

$$x^{2n} - y^{2n} = (x+y)(x^{2n-1} - x^{2n-2}y + x^{2n-3}y^2 - \cdots + xy^{2n-2} - y^{2n-1}).$$

Para comprobar esto simplemente tenemos que hacer la división de $x^{2n} - y^{2n}$ entre $x + y$ o bien realizar el producto de la derecha y simplificar.

Ejemplo 1.7.4 *Veamos que $n^4 - 22n^2 + 9$ es un número compuesto para cualquier entero n.*

La idea para mostrar lo que se pide es tratar de factorizar la expresión. Intentemos completar cuadrados, la forma más común de hacerlo es la siguiente

$$n^4 - 22n^2 + 9 = (n^4 - 22n^2 + 121) - 112 = (n^2 - 11)^2 - 112,$$

el problema que tenemos es que 112 no es un cuadrado perfecto, por lo que no es inmediato factorizar. Sin embargo, podemos utilizar la siguiente forma, menos usual, de completar cuadrados

$$\begin{aligned} n^4 - 22n^2 + 9 &= (n^4 - 6n^2 + 9) - 16n^2 = (n^2 - 3)^2 - 16n^2 \\ &= (n^2 - 3)^2 - (4n)^2 = (n^2 - 3 + 4n)(n^2 - 3 - 4n) \\ &= ((n+2)^2 - 7)((n-2)^2 - 7), \end{aligned}$$

y observemos que ninguno de los dos últimos factores es igual a ± 1.

El siguiente es otro ejemplo de cómo utilizando formas básicas de factorización podemos resolver problemas.

Ejemplo 1.7.5 *Encontremos todas las parejas (m, n) de números enteros positivos tales que $|3^m - 2^n| = 1$.*

Cuando $m = 1$ o $m = 2$, es fácil encontrar las soluciones $(m, n) = (1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$. Ahora mostremos que no hay otras soluciones. Supongamos que (m, n) es una solución de $|3^m - 2^n| = 1$, con $m > 2$, y por lo tanto $n > 3$. Analicemos los dos casos: $3^m - 2^n = 1$ y $3^m - 2^n = -1$.

Supongamos que $3^m - 2^n = -1$ con $n > 3$, entonces $3^m + 1$ es divisible entre 8, sin embargo al dividir 3^m entre 8 obtenemos como residuo 1 o 3, dependiendo de si n es par o impar, por lo que en este caso no hay solución.

Supongamos que $3^m - 2^n = 1$ con $m \geq 3$, por lo que $n \geq 5$, ya que $2^n + 1 = 3^m \geq 27$. Entonces $3^m - 1$ es divisible entre 8, por lo cual m es par, digamos $m = 2k$, con $k > 1$. Entonces $2^n = 3^{2k} - 1 = (3^k + 1)(3^k - 1)$.

Luego, $3^k + 1 = 2^r$, para alguna $r > 3$, pero por el caso anterior sabemos que esto es imposible, luego en este caso tampoco hay soluciones.

Otras fórmulas útiles de factorización son las siguientes. Para números reales x, y, z se cumplen las siguientes igualdades:

$$(x+y)(y+z)(z+x) + xyz = (x+y+z)(xy+yz+zx) \tag{1.23}$$

$$(x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x+y)(y+z)(z+x). \tag{1.24}$$

Para convencerse, basta desarrollar ambos lados de cada igualdad. De estas identidades tenemos la siguiente observación.

Observación 1.7.6 (a) *Si x, y, z son números reales, con $xyz = 1$, entonces*

$$(x+y)(y+z)(z+x) + 1 = (x+y+z)(xy+yz+zx). \tag{1.25}$$

(b) *Si x, y, z son números reales con $xy + yz + zx = 1$, entonces*

$$(x+y)(y+z)(z+x) + xyz = x + y + z. \tag{1.26}$$

Ejercicio 1.45 *Para todos los números reales x, y y z, se tienen las siguientes identidades:*
(i) $(x+y+z)^3 - (y+z-x)^3 - (z+x-y)^3 - (x+y-z)^3 = 24xyz.$
(ii) $(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 = 3(x-y)(y-z)(z-x).$
(iii) $(x-y)(y+z)(z+x) + (y-z)(z+x)(x+y) + (z-x)(x+y)(y+z)$
$= -(x-y)(y-z)(z-x).$

Ejercicio 1.46 *Para todos los números reales x, y y z, muestre lo siguiente:*
(i) *Si $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$, entonces*

$$f(x,y,z) = \frac{1}{2} f(x+y, y+z, z+x) = \frac{1}{4} f(-x+y+z, x-y+z, x+y-z).$$

(ii) *Si $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$, entonces $f(x,y,z) \geq 0$ si y sólo si $x+y+z \geq 0$ y $f(x,y,z) \leq 0$ si y sólo si $x+y+z \leq 0$.*

Ejercicio 1.47 *Muestre que para números reales x, y, se tienen las siguientes identidades:*
(i) $(x+y)^5 - (x^5 + y^5) = 5xy(x+y)(x^2 + xy + y^2).$
(ii) $(x+y)^7 - (x^7 + y^7) = 7xy(x+y)(x^2 + xy + y^2)^2.$

Ejercicio 1.48 *Sean x, y y z números reales tales que $x \neq y$ y*

$$x^2(y+z) = y^2(x+z) = 2.$$

Determine el valor de $z^2(x+y)$.

Ejercicio 1.49 *Encuentre las soluciones reales x, y, z y w del sistema de ecuaciones*

$$\begin{aligned} x+y+z &= w \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} &= \frac{1}{w}. \end{aligned}$$

Ejercicio 1.50 *Sean x, y y z números reales diferentes de cero que cumplen las condiciones $x+y+z \neq 0$ y $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = \frac{1}{x+y+z}$. Muestre que, para cualquier número entero impar n, se cumple que*

$$\frac{1}{x^n}+\frac{1}{y^n}+\frac{1}{z^n} = \frac{1}{x^n+y^n+z^n}.$$

Capítulo 2

Soluciones a los ejercicios y problemas

Las primeras ocho secciones de este capítulo contienen todas las soluciones de los ejercicios que aparecen en los primeros ocho capítulos. En la sección 9 se encuentran las soluciones de los problemas del capítulo 9. La dificultad de los ejercicios que están en la teoría es menor que la de los problemas del capítulo 9. Sin embargo, resolver los problemas del último capítulo será un excelente entrenamiento para prepararse para los exámenes internacionales en los cuales México participa.
Le recomendamos al lector que no consulte este capítulo sin antes haber intentado resolver los ejercicios y problemas él mismo.

2.1. Soluciones a los ejercicios del capítulo 1

Solución 1.1 (i) Si $a < 0$, entonces $-a > 0$. Use también que $(-a)(-b) = ab$. (ii) $(-a)b > 0$. (iii) $a < b \Leftrightarrow b - a > 0$, use ahora la propiedad 1.1.7. (iv) Use la propiedad 1.1.7. (v) $aa^{-1} = 1 > 0$. (vi) Si $a < 0$, entonces $-a > 0$.

Solución 1.2 Observe que si $a^2+b-(a+b^2) \in \mathbb{Q}$, entonces $(a-b)(a+b-1) \in \mathbb{Q}$ y como $a + b - 1 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, entonces $(a - b) \in \mathbb{Q}$. Luego, si $a + b \in \mathbb{Q}$ y $a - b \in \mathbb{Q}$, entonces $2a$ y $2b$ están en $\mathbb{Q}$. Por lo tanto, a y b son números racionales.

Solución 1.3 Si $a = 0$ o $b = 0$ el resultado es claro. Suponga entonces que $ab \neq 0$. Como $(a^2 + b^2)^2 - (a^4 + b^4) = 2a^2b^2$, se tiene que $a^2b^2 \in \mathbb{Q}$. Note que $a^6 + b^6 = (a^2 + b^2)^3 - 3a^2b^2(a^2 + b^2) \in \mathbb{Q}$, por lo que $(a^3 + b^3)^2 - (a^6 + b^6) =$

$2a^3b^3 \in \mathbb{Q}$. Luego,

$$ab = \frac{a^3b^3}{a^2b^2} \in \mathbb{Q} \quad \text{y} \quad a+b = \frac{a^3+b^3}{a^2+b^2-ab} \in \mathbb{Q}.$$

Solución 1.4 (i) Suponga que $\sqrt{p}$ no es un número irracional, es decir, $\sqrt{p} = \frac{m}{n}$, donde m, n son números enteros con $(m,n) = 1$, es decir, m y n primos relativos. Elevando al cuadrado, se tiene $pn^2 = m^2$, esto es, p divide a m^2, entonces p divide a m. Por lo que $m = ps$ y $pn^2 = p^2s^2$ implican que $n^2 = ps^2$, lo cual garantiza que p divide a n^2 y entonces divide a n. Luego, p divide a m y a n contradiciendo el hecho de que m y n son primos relativos.
(ii) Suponga que $\sqrt{m}$ no es un número irracional, es decir, $\sqrt{m} = \frac{r}{s}$, donde r, s son números enteros con $(r,s) = 1$. Elevando al cuadrado se tiene $ms^2 = r^2$. Como m no es un cuadrado perfecto, tiene un factor de la forma p^α, donde p es un número primo y α es un entero positivo impar. Entonces, p^α divide a r^2 lo que implica que el primo p aparece un número par de veces en la descomposición de factores de r^2. Como r y s son primos relativos, p no divide a s, de donde p aparece un número impar de veces como factor de ms^2, lo cual es una contradicción.

Solución 1.5 Si $a+b = ab = n$, entonces $b = n-a$ y $n = a(n-a)$. La última ecuación es equivalente a $a^2 - na + n = 0$ y resolviendo se obtiene que

$$a = \frac{n \pm \sqrt{n^2-4n}}{2}, \quad \text{de donde} \quad b = \frac{n \mp \sqrt{n^2-4n}}{2}.$$

Para $n \geq 5$, se tiene que $(n-3)^2 < n^2 - 4n < (n-2)^2$, por lo que $\sqrt{n^2-4n}$ es un número irracional, y entonces a y b son números irracionales.

Solución 1.6 Suponga que $\frac{m}{n}$ es raíz, con $(m,n) = 1$. Entonces m y n no pueden ser ambos pares. Por otro lado, como $a\left(\frac{m}{n}\right)^2 + b\left(\frac{m}{n}\right) + c = 0$, se tiene que $am^2 + bmn + cn^2 = 0$. El lado derecho de la última ecuación es par y el izquierdo siempre es impar. Si m y n son impares, los tres sumandos del lado izquierdo son impares. Ahora bien, si uno de ellos es par y el otro impar, entonces dos sumandos son pares, el tercero impar y la suma es impar nuevamente. Esta contradicción implica que la ecuación no puede tener raíces racionales.

Segunda Solución. El discriminante $b^2 - 4ac$ deberá ser un cuadrado perfecto. Pero como a, b y c son impares, se puede mostrar que $b^2 - 4ac \equiv 5 \pmod{8}$. Sin embargo, los cuadrados de números impares sólo dejan residuo 1 módulo 8.

Solución 1.7 Sea $u = a + \sqrt{b}$ y $v = a - \sqrt{b}$, entonces

$$\begin{aligned}
\sqrt{a+\sqrt{b}} &= \sqrt{u} = \frac{\sqrt{u}+\sqrt{v}}{2} + \frac{\sqrt{u}-\sqrt{v}}{2} \\
&= \sqrt{\frac{(\sqrt{u}+\sqrt{v})^2}{4}} + \sqrt{\frac{(\sqrt{u}-\sqrt{v})^2}{4}} \\
&= \sqrt{\frac{\frac{u+v}{2}+\sqrt{uv}}{2}} + \sqrt{\frac{\frac{u+v}{2}-\sqrt{uv}}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{\frac{a+\sqrt{b}+a-\sqrt{b}}{2}+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{\frac{a+\sqrt{b}+a-\sqrt{b}}{2}-\sqrt{a^2-b}}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}},
\end{aligned}$$

como se quería probar.

Solución 1.8 (i) Sea $x = \sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\dots}}}}$, entonces $x^2 = a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\dots}}}}$, de donde $x^2 = ax$. Factorizando, $x(x-a) = 0$. Por lo tanto, como a es positivo la solución es $x = a$.

Segunda Solución. Podemos dar otra solución utilizando series. Tenemos que

$$x = a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{4}}a^{\frac{1}{8}}\dots = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots} = a,$$

ya que $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j} = 1$, ver la sección **??**.

(ii) Sea $x = \sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{b\dots}}}}$, entonces $x^2 = a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a\dots}}}}$, de donde $x^4 = a^2bx$. Como $x \neq 0$, $x^3 = a^2b$. Entonces $x = \sqrt[3]{a^2b}$.

Segunda Solución. Podemos también hacer otra solución utilizando series. Tenemos que

$$x = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\cdots}\,b^{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots} = a^{\frac{2}{3}}\,b^{\frac{1}{3}},$$

ya que $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2j}} = \frac{1}{3}$ y $\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2j+1}} = \frac{2}{3}$, ver la sección **??**.

Solución 1.9 (i) Si xy, yz y zx están en $\mathbb{Q}$, entonces $\frac{(xy)(zx)}{yz} = x^2 \in \mathbb{Q}$. Análogamente, y^2, $z^2 \in \mathbb{Q}$. Por lo tanto, $x^2 + y^2 + z^2 \in \mathbb{Q}$.
(ii) Por (i) se tiene que $(x^2)^2 + (xy)y^2 + (xz)z^2 = x(x^3 + y^3 + z^3) \in \mathbb{Q}$, luego $x \in \mathbb{Q}$. Análogamente, y, $z \in \mathbb{Q}$.

Solución 1.10 Como $a-\sqrt{ab}=a\left(1-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)$, bastará ver que $1-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$ es un número racional distinto de cero para asegurar que a es un número racional. Pero $\frac{b-\sqrt{ab}}{a-\sqrt{ab}}=\frac{\sqrt{b}(\sqrt{b}-\sqrt{a})}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$ es un número racional diferente de -1 (ya que $a\neq b$), luego $1-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$ es un número racional distinto de 0. Análogamente, b es un número racional.

Solución 1.11 Para resolver (i), defina $x=0.111\ldots$, entonces $10x=1.11\ldots$. Restando la primera ecuación de la segunda se tiene que $9x=1$, luego, $x=\frac{1}{9}$. (ii) Sea $x=1.141414\ldots$, entonces $100x=114.141414\ldots$. Restando la primera ecuación de la segunda se tiene que $99x=113$, de donde $x=\frac{113}{99}$.

Solución 1.12 (i) Primero observe que $121_b=(1\times b^2)+(2\times b)+1=(b+1)^2$ entonces 121_b es un cuadrado perfecto en cualquier base $b\geq 2$.
(ii) Como $232_b=2b^2+3b+2$ debe ser cuadrado y como 3 es uno de sus dígitos, $b\geq 4$.
Para $b=4$, $232_4=46$, para $b=5$, $232_5=67$, para $b=6$, $232_6=92$ y para $b=7$, $232_7=121$. Luego, $b=7$ es el menor entero positivo tal que 232_b es un cuadrado perfecto.

Solución 1.13 Suponga que $a>b$. Entonces para todos los enteros $0\leq k\leq n$, $x_nx_ka^nb^k\geq x_nx_kb^na^k$, con igualdad solamente cuando $k=n$ o $x_k=0$. En particular, se tiene una desigualdad estricta para $k=n-1$. En resumen, esto se convierte en

$$x_na^n\sum_{k=0}^{n}x_kb^k>x_nb^n\sum_{k=0}^{n}x_ka^k$$

o

$$\frac{x_na^n}{A_n}>\frac{x_nb^n}{B_n}.$$

Esto implica que

$$\frac{A_{n-1}}{A_n}=1-\frac{x_na^n}{A_n}<1-\frac{x_nb^n}{B_n}=\frac{B_{n-1}}{B_n}.$$

Por otro lado, si $a=b$, entonces evidentemente $\frac{A_{n-1}}{A_n}=\frac{B_{n-1}}{B_n}$ y si $a<b$, por lo que se demostró antes, se tiene que, $\frac{A_{n-1}}{A_n}>\frac{B_{n-1}}{B_n}$. Por lo tanto, $\frac{A_{n-1}}{A_n}<\frac{B_{n-1}}{B_n}$ si y sólo si $a>b$.

Solución 1.14 Observe que $|a|=|a-b+b|\leq|a-b|+|b|$, despejando se tiene que $|a|-|b|\leq|a-b|$. Análogamente, siguiendo los mismos pasos, se tiene que $|b|-|a|\leq|b-a|$. De estas dos desigualdades se sigue que $||a|-|b||\leq|a-b|$.

Solución 1.15 (i) $|x-1|-|x+1|=0$ es equivalente a $|x-1|=|x+1|$. Elevando al cuadrado y resolviendo la ecuación $(x-1)^2=(x+1)^2$ tenemos que $4x=0$, luego, la única solución es $x=0$.
(ii) $|x-1||x+1|=1$ es equivalente a $|x^2-1|=1$, de donde las soluciones son $x=\pm\sqrt{2}$ y $x=0$.
(iii) Si $x>1$ se cumple que $|x+1|=x+1>2$, luego no hay solución.
Si $x<-1$ se cumple que $|x-1|=-x+1>2$ y tampoco hay solución.
Si $-1\leq x\leq 1$, entonces $x-1\leq 0\leq x+1$, luego

$$|x-1|+|x+1|=(1-x)+(x+1)=2.$$

Por lo que los únicos valores de x que cumplen la igualdad son $-1\leq x\leq 1$.

Solución 1.16 De la primera y tercera desigualdades se tiene que $z\geq|x+y|-1\geq 0$. Por lo que, $z^2\geq(|x+y|-1)^2$. Ahora, $2xy\geq z^2+1\geq(|x+y|-1)^2+1\geq 0$, entonces

$$2xy\geq x^2+2xy+y^2-2|x+y|+2\geq|x|^2+2xy+|y|^2-2|x|-2|y|+2,$$

cancelando $0\geq|x|^2+|y|^2-2|x|-2|y|+2=(|x|-1)^2+(|y|-1)^2$. Por lo que $|x|=1$ y $|y|=1$. Luego, x y y tienen que ser -1 o 1. Pero como $xy\geq 0$, los dos tienen que tener el mismo signo. Para $x=y=1$ o $x=y=-1$ se tiene, sustituyendo en las ecuaciones originales, que $2-z^2\geq 1$ y $z-2\geq -1$. Luego, $z^2\leq 1$ y $z\geq 1$. El único valor de z que satisface las dos desigualdades es $z=1$. Por lo tanto, hay dos soluciones al problema $x=y=z=1$ y $x=y=-1$, $z=1$.

Solución 1.17 Suponga que $a_1<a_2<\ldots<a_n$ es una colección con la mayor cantidad de números enteros con la propiedad. Es claro que $a_i\geq i$, para toda $i=1,\ldots,n$.
Si a y b son dos números enteros de la colección con $a>b$, como $|a-b|=a-b\geq\frac{ab}{100}$, se tiene que $a\left(1-\frac{b}{100}\right)\geq b$, por lo que si $100-b>0$, entonces $a\geq\frac{100b}{100-b}$.
Note que no existen dos números enteros a y b en la colección mayores que 100, en efecto si $a>b>100$, entonces $a-b=|a-b|\geq\frac{ab}{100}>a$, lo cual es falso.
También se tiene que para números enteros a y b menores que 100, se cumple que $\frac{100a}{100-a}\geq\frac{100b}{100-b}$ si y sólo si $100a-ab\geq 100b-ab$ si y sólo si $a\geq b$.

Es claro que $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ es una colección con la propiedad.
Ahora, $a_{11}\geq\frac{100a_{10}}{100-a_{10}}\geq\frac{100\cdot 10}{100-10}=\frac{100}{9}>11$, lo que implica que $a_{11}\geq 12$.

$a_{12}\geq\frac{100a_{11}}{100-a_{11}}\geq\frac{100\cdot 12}{100-12}=\frac{1200}{88}>13$, de donde $a_{12}\geq 14$.

$a_{13} \geq \frac{100a_{12}}{100-a_{12}} \geq \frac{100\cdot 14}{100-14} = \frac{1400}{86} > 16$, de donde $a_{13} \geq 17$.

$a_{14} \geq \frac{100a_{13}}{100-a_{13}} \geq \frac{100\cdot 17}{100-17} = \frac{1700}{83} > 20$, de donde $a_{14} \geq 21$.

$a_{15} \geq \frac{100a_{14}}{100-a_{14}} \geq \frac{100\cdot 21}{100-21} = \frac{2100}{79} > 26$, de donde $a_{15} \geq 27$.

$a_{16} \geq \frac{100a_{15}}{100-a_{15}} \geq \frac{100\cdot 27}{100-27} = \frac{2700}{73} > 36$, de donde $a_{16} \geq 37$.

$a_{17} \geq \frac{100a_{16}}{100-a_{16}} \geq \frac{100\cdot 37}{100-37} = \frac{3700}{63} > 58$, de donde $a_{17} \geq 59$.

$a_{18} \geq \frac{100a_{17}}{100-a_{17}} \geq \frac{100\cdot 59}{100-59} = \frac{5900}{41} > 143$, de donde $a_{18} \geq 144$.

Además, como ya se ha observado que no hay dos números enteros de la colección mayores que 100, la mayor cantidad es 18. La colección de 18 números enteros siguiente $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 17, 21, 27, 37, 59, 144\}$ cumple la condición.

Solución 1.18 Por el ejemplo 1.3.2, $\lfloor 2a \rfloor = \lfloor a \rfloor + \lfloor a + \frac{1}{2} \rfloor$ y $\lfloor 2b \rfloor = \lfloor b \rfloor + \lfloor b + \frac{1}{2} \rfloor$, luego la desigualdad a demostrar es equivalente a

$$\lfloor a \rfloor + \left\lfloor a + \frac{1}{2} \right\rfloor + \lfloor b \rfloor + \left\lfloor b + \frac{1}{2} \right\rfloor \geq \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor + \lfloor a + b \rfloor,$$

de donde bastará mostrar que $\left\lfloor a + \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor b + \frac{1}{2} \right\rfloor \geq \lfloor a + b \rfloor$.
Sean $a = n+y$, $b = m+x$, con $n, m \in \mathbb{Z}$ y $0 \leq x, y < 1$. Entonces $0 \leq x+y < 2$ y $a + b = n + m + x + y$. Se tienen dos casos:
(i) Si $1 \leq x + y < 2$, entonces $\lfloor a + b \rfloor = n + m + 1$ y al menos uno de los números x o y es mayor o igual que $\frac{1}{2}$. Suponga que $x \geq \frac{1}{2}$. Entonces $\lfloor b + \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor m + x + \frac{1}{2} \rfloor = m+1$, por lo que $\lfloor a + \frac{1}{2} \rfloor + \lfloor b + \frac{1}{2} \rfloor \geq m+n+1 = \lfloor a+b \rfloor$.
(ii) Si $0 \leq x+y < 1$, entonces $\lfloor a+b \rfloor = n+m$ y $\lfloor a + \frac{1}{2} \rfloor + \lfloor b + \frac{1}{2} \rfloor \geq m+n = \lfloor a + b \rfloor$.

Solución 1.19 (i) Se tiene que $\lfloor x \lfloor x \rfloor \rfloor = 1$ si y sólo si $1 \leq x\lfloor x \rfloor < 2$. Si $x = m + y$, con $m \in \mathbb{Z}$ y $0 \leq y < 1$, entonces $1 \leq m^2 + my < 2$. Observe que $m = 0$ es imposible, al igual que $m \geq 2$ o $m \leq -2$. Luego, resta ver qué sucede si $m = 1$ o $m = -1$.
Si $m = 1$, entonces $1 \leq 1 + y < 2$, de donde $0 \leq y < 1$ y entonces cualquier x en el intervalo $[1, 2)$ cumple la ecuación. Si $m = -1$, entonces, como $1 \leq m^2 + my < 2$, se tiene que $1 \leq 1 - y < 2$, de donde $0 \leq -y < 1$ y entonces $y = 0$ y $x = -1$. Por lo tanto, los números que cumplen la ecuación son $x = -1$ y $x \in [1, 2)$.

(ii) Como $\lfloor x \rfloor \leq x \leq |x|$, se tiene que, $|x| - \lfloor x \rfloor \geq 0$, por lo que $||x| - \lfloor x \rfloor| = |x| - \lfloor x \rfloor$. Por otro lado, por la propiedad (c) en 1.3.1 se tiene que, $\lfloor |x| - \lfloor x \rfloor \rfloor = \lfloor |x| \rfloor - \lfloor x \rfloor$. Utilizando las últimas igualdades la ecuación se convierte en $|x| - \lfloor x \rfloor = \lfloor |x| \rfloor - \lfloor x \rfloor$ que es equivalente a $|x| = \lfloor |x| \rfloor$, luego $|x|$ es un número entero y los valores de x que cumplen la ecuación son todos los números enteros.

Solución 1.20 Sume las tres ecuaciones para obtener que $2x + 2y + 2z = 6.6$, luego $x + y + z = 3.3$. Reste a esta última igualdad las ecuaciones originales, para obtener $\{y\} + \lfloor z \rfloor = 2.2$, $\{x\} + \lfloor y \rfloor = 1.1$, $\{z\} + \lfloor x \rfloor = 0$. La primera ecuación da $\lfloor z \rfloor = 2$, $\{y\} = 0.2$, la segunda $\lfloor y \rfloor = 1$, $\{x\} = 0.1$ y, la tercera $\lfloor x \rfloor = 0$ y $\{z\} = 0$. Por lo tanto, la solución es $x = 0.1$, $y = 1.2$ y $z = 2$.

Solución 1.21 Se tiene que $\sqrt{n} + \sqrt{n+1} < \sqrt{4n+2}$ si y sólo si $2n + 1 + \sqrt{4n^2 + 4n} < 4n + 2$, que es equivalente a $\sqrt{4n^2 + 4n} < 2n + 1$. Elevando al cuadrado nuevamente, la última desigualdad es equivalente a $4n^2 + 4n < 4n^2 + 4n + 1$. Esto prueba que $\sqrt{n} + \sqrt{n+1} < \sqrt{4n+2}$, entonces $\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor \leq \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor$.

Suponga que, para algún número entero positivo n, $\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor \neq \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor$. Sea $q = \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor$, entonces $\sqrt{n} + \sqrt{n+1} < q \leq \sqrt{4n+2}$. Elevando al cuadrado, se obtiene que $2n + 1 + \sqrt{4n^2 + 4n} < q^2 \leq 4n + 2$ o lo que es equivalente $\sqrt{4n^2 + 4n} < q^2 - 2n - 1 \leq 2n + 1$. Elevando al cuadrado nuevamente se obtiene que $4n^2 + 4n < (q^2 - 2n - 1)^2 \leq 4n^2 + 4n + 1 = (2n + 1)^2$. Como no existe un cuadrado entre dos enteros consecutivos, se tiene que $q^2 - 2n - 1 = 2n + 1$ o que $q^2 = 4n + 2$, que es equivalente a decir que $q^2 \equiv 2 \pmod 4$. Pero esto último es una contradicción, ya que todo cuadrado es congruente a 0 o a 1 módulo 4. Por lo tanto, se tiene la igualdad.

Muestre ahora que, $\lfloor \sqrt{4n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+3} \rfloor$.
Para la primera igualdad, suponga que existe una n tal que $m = \lfloor \sqrt{4n+1} \rfloor < m + 1 = \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor$, luego $m \leq \sqrt{4n+1} < m + 1 \leq \sqrt{4n+2}$, por lo que $m^2 \leq 4n + 1 < (m + 1)^2 \leq 4n + 2$.
Entonces, como $4n + 1$ y $4n + 2$ son dos números enteros consecutivos y, como $(m+1)^2 > 4n+1$, se tiene que $(m+1)^2 = 4n+2$ y nuevamente se ha encontrado un cuadrado que tiene residuo 2 al dividirlo entre 4, lo cual es imposible. Para la segunda igualdad, proceda de la misma forma.

Solución 1.22 Para los primeros cinco incisos utilice las ecuaciones (1.2), (1.3) y (1.5). Para el inciso (vi) utilice (iv) y (v).

Solución 1.23 Para los incisos (i) y (ii) utilice las ecuaciones (1.2) y (1.3). Para demostrar (iii) use (i) y (ii).

Solución 1.24 Para demostrar los incisos (i) y (ii) realice las operaciones del lado izquierdo de la ecuación y reacomode.
Para demostrar los incisos (iii), (iv), (v) y (vi) realice las operaciones de ambos lados de la ecuación y vea que son iguales.

Solución 1.25 Para demostrar los incisos (i) y (ii) realice las operaciones del lado derecho de las ecuaciones y simplifique.

Solución 1.26 Utilice las ecuaciones (1.2) y (1.3), haga las operaciones de ambos lados de la ecuación.

Solución 1.27 Sea $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ entonces

$$x - \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} - \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = 0.$$

Por la ecuación (1.7), si $a+b+c=0$, entonces $a^3+b^3+c^3 = 3abc$, luego

$$x^3 - \left(2+\sqrt{5}\right) - \left(2-\sqrt{5}\right) = 3x\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{5}\right)\left(2-\sqrt{5}\right)},$$

simplificando se tiene que $x^3+3x-4=0$. Claramente una raíz de la ecuación es $x=1$ y las otras dos raíces satisfacen la ecuación $x^2+x+4=0$ que no tiene soluciones reales. Como $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ es un número real, se sigue que $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = 1$, el cual es un número racional.

Solución 1.28 Observe que si $x+y+z=0$, entonces se sigue de la ecuación (1.7) que $x^3+y^3+z^3 = 3xyz$. Como $(x-y)+(y-z)+(z-x)=0$, se obtiene la factorización

$$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3 = 3(x-y)(y-z)(z-x).$$

Solución 1.29 Observe que $(x+2y-3z)+(y+2z-3x)+(z+2x-3y)=0$, entonces se sigue de la ecuación (1.7) que $(x+2y-3z)^3+(y+2z-3x)^3+(z+2x-3y)^3 = 3(x+2y-3z)(y+2z-3x)(z+2x-3y)$.

Solución 1.30 Sean $a=\sqrt[3]{x-y}$, $b=\sqrt[3]{y-z}$, $c=\sqrt[3]{z-x}$, y suponga que $a+b+c=0$, luego, por la ecuación (1.7), $a^3+b^3+c^3=3abc$, pero entonces $0 = (x-y)+(y-z)+(z-x) = a^3+b^3+c^3 = 3abc = 3\sqrt[3]{x-y}\sqrt[3]{y-z}\sqrt[3]{z-x} \neq 0$, lo cual es un absurdo.

Solución 1.31 Al tomar $a = \sqrt[3]{r}$, $b = -\frac{1}{\sqrt[3]{r}}$ y $c = -1$, se tiene $a + b + c = 0$, luego, $r - \frac{1}{r} - 1 = 3\sqrt[3]{r}\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{r}}\right)(-1) = 3$, por lo que $r - \frac{1}{r} = 4$. Análogamente, $r^3 - \frac{1}{r^3} - 4^3 = 3r\left(-\frac{1}{r}\right)(-4) = 12$, por lo que $r^3 - \frac{1}{r^3} = 76$.

Solución 1.32 Se sigue de

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 100b + 10c + a & b & c \\ 100a + 10b + c & a & b \\ 100c + 10a + b & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bca & b & c \\ abc & a & b \\ cab & c & a \end{vmatrix}.$$

Solución 1.33 Escriba la ecuación como $m^3 + n^3 + (-33)^3 - 3mn(-33) = 0$, y usando la ecuación (1.9), se tiene

$$(m + n - 33)\left[(m - n)^2 + (m + 33)^2 + (n + 33)^2\right] = 0.$$

La ecuación $m + n = 33$ tiene 34 soluciones con $mn \geq 0$ que son $(k, 33 - k)$, con $k = 0, 1, \ldots, 33$, y el segundo factor es 0 solamente cuando $m = n = -33$, luego hay 35 soluciones.

Solución 1.34 Al reescribir la ecuación como $x^3 + y^3 + (-1)^3 - 3xy(-1) = 0$ y, utilizando la ecuación (1.9), se tiene

$$(x + y - 1)\left[(x - y)^2 + (y + 1)^2 + (-1 - x)^2\right] = 0.$$

Luego, los puntos (x, y) deben cumplir con $x + y = 1$ o bien $x = y = -1$.

Solución 1.35 Sustituyendo la ecuación de la hipótesis en la ecuación (1.7) se obtiene que

$$\begin{aligned}
(x + y + z)^3 - 3xyz &= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \\
&= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \\
&= (x + y + z)((x + y + z)^2 - 3xy - 3yz - 3zx) \\
&= (x + y + z)^3 - 3(x + y + z)(xy + yz + zx).
\end{aligned}$$

Ahora es claro que $xyz = (x+y+z)(xy+yz+zx)$, de ahí que $(x+y)(y+z)(z+x) = 0$. O bien use que $(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y)(y + z)(z + x)$. Luego, las soluciones son $(x, -x, z)$, $(x, y, -y)$, $(x, y, -x)$, con x, y, z cualesquiera números reales.

Solución 1.36 (i) Como $0 \leq b \leq 1$ y $1 + a > 0$, pasa que $b(1 + a) \leq 1 + a$, luego $0 \leq b - a \leq 1 - ab$, por lo que $0 \leq \dfrac{b - a}{1 - ab} \leq 1$.

(ii) La desigualdad de la izquierda es clara. Como $1+a \leq 1+b$, se tiene que $\frac{1}{1+b} \leq \frac{1}{1+a}$, luego, $\dfrac{a}{1+b}+\dfrac{b}{1+a} \leq \dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+a}=\dfrac{a+b}{1+a} \leq 1$.

Solución 1.37 Al hacer $X=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}$ y sumando y restando tres veces la unidad se tiene

$$\begin{aligned}
X &= \frac{a}{b+c}+\frac{b+c}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{a+c}{a+c}+\frac{c}{a+b}+\frac{a+b}{a+b}-3 \\
&= \frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{a+c}+\frac{a+b+c}{a+b}-3 \\
&= (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right)-3 \\
&= \frac{1}{2}((a+b)+(b+c)+(a+c))\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right)-3.
\end{aligned}$$

Ahora, por la desigualdad entre la media geométrica y la media aritmética, $x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$ y $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{x}\frac{1}{y}\frac{1}{z}}$. Luego, $X \geq \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3-3=\frac{3}{2}$.

Solución 1.38 Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que $a \geq b \geq c$, la desigualdad es equivalente a $-a^3+b^3+c^3+3abc \geq 0$. Pero, por la ecuación (1.9), $-a^3+b^3+c^3+3abc=\frac{1}{2}(-a+b+c)\left[(a+b)^2+(a+c)^2+(b-c)^2\right] \geq 0$, ya que, por la desigualdad del triángulo, $a<b+c$.

Solución 1.39 Observe que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ implica que $p+q=pq=s$. Ahora bien, $(p+q)^2 \geq 4pq$ implica que $s \geq 4$.
Para probar (i), vea que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p(p+1)}+\frac{1}{q(q+1)} &= \frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}+\frac{1}{q}-\frac{1}{q+1}=1-\frac{p+q+2}{(p+1)(q+1)} \\
&= 1-\frac{s+2}{2s+1}=\frac{s-1}{2s+1}.
\end{aligned}$$

Luego, hay que mostrar que

$$\frac{1}{3} \leq \frac{s-1}{2s+1} \leq \frac{1}{2},$$

pero $2s+1 \leq 3s-3 \Leftrightarrow 4 \leq s$ y $2s-2 \leq 2s+1 \Leftrightarrow -2 \leq 1$.

Para probar (ii), vea que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p(p-1)}+\frac{1}{q(q-1)} &= \frac{1}{p-1}-\frac{1}{p}+\frac{1}{q-1}-\frac{1}{q}=\frac{p+q-2}{(p-1)(q-1)}-1 \\
&= \frac{s-2}{s-s+1}-1=s-3 \geq 1.
\end{aligned}$$

Solución 1.40 Note primero que,

$$\frac{a}{b}+\frac{a}{1-b}=\frac{a}{b(1-b)}\geq 4a,$$

ya que

$$b(1-b)\leq\left(\frac{b+(1-b)}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

Además, se tiene la igualdad si y sólo si $b=\frac{1}{2}$. Análogamente,

$$\frac{b}{a}+\frac{b}{1-a}\geq 4b.$$

Por lo que,

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{1-b}+\frac{b}{1-a}\geq 4a+4b\geq 2\sqrt{4^2ab}=8\sqrt{k}.$$

Con igualdad si y sólo si $a=b$. Así,

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{1-b}+\frac{b}{1-a}\geq 8\sqrt{k}\geq 4$$

si y sólo si $k\geq\frac{1}{4}$, por lo que el menor número k es $\frac{1}{4}$.

Solución 1.41 Vea que, $(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=\frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)+\frac{1}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$ y, por la desigualdad entre la media geométrica y la media aritmética, $(a+b+c)(ab+bc+ca)\geq\left(3\sqrt[3]{abc}\right)\left(3\sqrt[3]{(ab)(bc)(ca)}\right)=9abc.$

Solución 1.42 Por la desigualdad entre la media geométrica y la media aritmética, y la condición $(a+b)(b+c)(c+a)=1$, se tiene

$$\begin{aligned} a+b+c &\geq 3\sqrt[3]{\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b+c}{2}\right)\left(\frac{c+a}{2}\right)}=\frac{3}{2},\\ abc &= \sqrt{ab}\sqrt{bc}\sqrt{ca}\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b+c}{2}\right)\left(\frac{c+a}{2}\right)=\frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Ahora bien, $1=(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc\geq\frac{3}{2}(ab+bc+ca)-\frac{1}{8}$, vea el ejercicio 1.24 (iii).

Solución 1.43 Por el ejercicio 1.24 (iii), basta ver que $ab+bc+ca+\frac{3}{a+b+c} \geq 4$. Pero

$$ab+bc+ca+\frac{3}{a+b+c} = 3\left(\frac{ab+bc+ca}{3}\right)+\frac{3}{a+b+c}$$
$$\geq 4\sqrt[4]{\left(\frac{ab+bc+ca}{3}\right)^3\left(\frac{3}{a+b+c}\right)}.$$

Ahora use que, $(ab+bc+ca)^2 \geq 3(ab\cdot bc+bc\cdot ca+ca\cdot ab) = 3(a+b+c)$, y que $ab+bc+ca \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 3$.

Solución 1.44 Sin pérdida de generalidad podemos suponer $a \leq b \leq c$. Luego, $c^2 < c^2+a+b \leq c^2+2c < (c+1)^2$, esto muestra que c^2+a+b no puede ser un cuadrado perfecto.

Solución 1.45 Para demostrar todos los incisos de este ejercicio, únicamente realice las operaciones y simplifique.

Solución 1.46 Para demostrar todos los incisos de este ejercicio utilice la identidad (1.7).

Solución 1.47 Desarrolle ambos lados de las identidades.

Solución 1.48 Se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= x^2(y+z)-y^2(x+z) = xy(x-y)+(x^2-y^2)z \\ &= (x-y)(xy+xz+yz). \end{aligned}$$

Como $x \neq y$, se tiene que $xy+xz+yz=0$. Multiplicando por $x-z$ se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= (x-z)(xy+xz+yz) = xz(x-z)+(x^2-z^2)y \\ &= x^2(y+z)-z^2(x+y), \end{aligned}$$

de donde $z^2(x+y) = x^2(y+z) = 2$.

Solución 1.49 Vea que $(x+y+z)(xy+yz+zx) = xyz$ y por la ecuación (1.23) tenemos que $(x+y)(y+z)(z+x)=0$. Luego, las soluciones (x,y,z,w) son de la forma: $(x,-x,z,z)$, $(x,y,-y,x)$ y $(x,y,-x,y)$, con x, y y z números reales diferentes de cero.

Solución 1.50 Por la ecuación (1.23), se tiene que la condición es equivalente a $(x+y)(y+z)(z+x)=0$. Luego, un factor es cero, digamos $x+y=0$. Entonces, como n es impar, $x^n+y^n=0$, lo mismo que $\frac{1}{x^n}+\frac{1}{y^n}=0$.

Notación

Utilizamos la siguiente notación estándar:

$\mathbb{N}$	los números enteros positivos o números naturales
$\mathbb{Z}$	los números enteros
$\mathbb{Q}$	los números racionales
$\mathbb{Q}^+$	los números racionales positivos
$\mathbb{R}$	los números reales
$\mathbb{R}^+$	los números reales positivos
$\mathbb{I}$	los números irracionales
$\mathbb{C}$	los números complejos
$\mathbb{Z}_p$	es $\{$0,1,...,p-1$\}$ con la suma y producto módulo p.
$\Leftrightarrow$	si y sólo si
$\Rightarrow$	implica
$a \in A$	el elemento a pertenece al conjunto A
$A \subset B$	A es un subconjunto de B
$\|x\|$	valor absoluto del número real x
$\|z\|$	módulo del número complejo z
$\{x\}$	la parte fraccionaria de un número real x
$\lfloor x \rfloor$	la parte entera de un número real x
$[a, b]$	el conjunto de números reales x tal que $a \leq x \leq b$
(a, b)	el conjunto de números reales x tal que $a < x < b$
$P(x)$	el polinomio P en la variable x
grad(P)	grado del polinomio $P(x)$
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$	la función f definida en $[a, b]$ con valores en $\mathbb{R}$
$f'(x)$	la derivada de la función $f(x)$
$f''(x)$	la segunda derivada de la función $f(x)$
$f^{(n)}(x)$	la n-ésima derivada de la función $f(x)$
$f(x)^n$	la potencia n-ésima de la función $f(x)$
$f^n(x)$	la n-ésima iteración de la función $f(x)$
$\Delta f(x)$	el operador diferencia de $f(x)$
det A	el determinante de la matriz A
$\sum_{i=1}^n a_i$	la suma $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$
$\prod_{i=1}^n a_i$	el producto $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$
$\prod_{i \neq j} a_i$	el producto de todos los $a_1, a_2, \ldots, a_n$ excepto a_j

$\max\{a, b, \ldots\}$	el máximo valor entre $a, b, \ldots$
$\min\{a, b, \ldots\}$	el mínimo valor entre $a, b, \ldots$
$\sqrt{x}$	la raíz cuadrada del número real positivo x
$\sqrt[n]{x}$	la $n-$ésima raíz del número real positivo x
$\exp x = e^x$	la función exponencial
$\sum_{\text{cíclica}} f(a, b, \ldots)$	representa la suma de la función f evaluada en todas las permutaciones cíclicas de las variables $a, b, \ldots$

Utilizamos la siguiente notación referente a los problemas:

AMC	Competencia Americana de Matemáticas (por sus siglas en inglés)
APMO	Olimpiada de la Cuenca del Pacífico (por sus siglas en inglés)
IMO	Olimpiada Internacional de Matemáticas (por sus siglas en inglés)
MEMO	Olimpiada Matemática de Europa Central (por sus siglas en inglés)
OMCC	Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe
OIM	Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas
OMM	Olimpiada Mexicana de Matemáticas
(país, año)	problema que corresponde a la olimpiada de matemáticas celebrada en ese país, en ese año, en alguna de las etapas

Bibliografía

[1] Andreescu T., Andrica D., *Complex numbers from A to ... Z*, Birkhäuser, 2005.

[2] Andreescu T., Gelca R., *Mathematical Olympiad Challenges*, Birkhäuser, 2000.

[3] Andreescu T., Enescu B., *Mathematical Olympiad Treasures*, Birkhäuser, 2006.

[4] Barbeau E. J., *Polynomials*, Springer-Verlag, 1989.

[5] Bulajich Manfrino R., Gómez Ortega J.A., *Geometría*, Cuadernos de Olimpiadas, Instituto de Matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de México, Sociedad Matemática Mexicana, 2012.

[6] Bulajich Manfrino R., Gómez Ortega J.A., Valdez Delgado R., *Desigualdades*, Cuadernos de Olimpiadas, Instituto de Matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de México, Sociedad Matemática Mexicana, 2010.

[7] Bulajich Manfrino R., Gómez Ortega J.A., Valdez Delgado R., *Inequalities: A Mathematical Olympiad Approach* , Birkhäuser, 2009.

[8] Cárdenas H., Lluis E., Raggi F., Tomás F. *Álgebra Superior*, Editorial Trillas, 1973.

[9] Djukić D., Janković V., Matić I., Petrović N., *The IMO Compendium*, Springer, 2006.

[10] Engel A., *Problem-Solving Strategies*, Springer, 1998.

[11] Fine B., Resenberger G., *The Fundamental Theorem of Algebra*, Springer, 1997.

[12] Goldberg S., *Introduction to Differece Equations*, Dover Publications, 1958.

[13] Gómez Ortega J.A., Valdez Delgado R., Vázquez Padilla, *Principio de las Casillas*, Cuadernos de Olimpiadas, Instituto de Matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de México, Sociedad Matemática Mexicana, 2014.

[14] Honsberger R., *Ingenuity in Mathematics*, vol. 23 in New Mathematical Library series, 1962.

[15] Niven I., Montgomery H. & Zuckerman H., *An Introduction to the Theory of Numbers*, Wiley, 5 edition, 1991.

[16] Remmert R., *Theory of Complex Functions*, Springer, 1999.

[17] Rudin W., *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, 1976.

[18] Savchev S., Andreescu T., *Mathematical Miniatures*, The Mathematical Association of America, 2003.

[19] Small C.G., *Functional Equations and How to Solve Them*, Springer, 2007.

[20] Soberón P., *Combinatoria para Olimpiadas Internacionales*, Cuadernos de la Olimpiada, Instituto de Matemáticas de la Universidad Autónoma de México, Sociedad Matemática Mexicana, 2010.

[21] Spivak M., *Calculus*, Editorial Reverté, 3era edición, 2012.

[22] Tabachnikov, S. (Editor), *Kvant Selecta: Algebra and Analysis II*, American Mathematical Society, 1999.

[23] Venkatachala B. J., *Functional Equations. A Problem Solving Approach*, Prism Books Pvt Ltd, 2002.