5. Sea un sistema $A\vec{x}=\vec{b}$, tal que A es una matriz triangular inferior $(n \times n)$

Esto es:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \dots \\ & & & & a_{nn} \\ a_{n1} & \dots & \dots & \dots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Tenemos que $x_1 = \frac{c_1}{a_{11}}$, y $x_2 = \frac{c_2 - (a_{21} x_1)}{a_{22}}$.

También tenemos que $a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = c_3$

Lo que lleva a: $x_3 = \frac{c_3 - (a_{31}x_1 + a_{32}x_2)}{a_{33}} = \frac{c_3 - \sum_{i=1}^{(3-1)} a_{3i} x_i}{a_{33}}$

Generalizando para todo x_i, se tiene que:

$x_i = \frac{c_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j}{a_{ii}}$, para python, en vez de empezar la sumatoria en $j=1$, se inicia en $j=0$.

6. Sea un sistema de ecuaciones de la forma $A\vec{x} = \vec{b}$ y sea A una matriz $n \times n$

Esto es:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}}_{\vec{b}}$$

Sabemos que $a_{nn} x_n = c_n \rightarrow x_n = \frac{c_n}{a_{nn}}$

Tenemos que $a_{n-1,n} x_n + a_{n-1,n-1} x_{n-1} = c_{n-1}$

Entonces $x_{n-1} = \dfrac{c_{n-1} - a_{n-1,n} x_n}{a_{n-1,n-1}}$

También tenemos que $a_{n-2,n} x_n + a_{n-2,n-1} x_{n-1} + a_{n-2,n-2} x_{n-2} = c_{n-2}$

Por lo que $x_{n-2} = \dfrac{c_{n-2} - (a_{n-2,n} x_n + a_{n-2,n-1} x_{n-1})}{a_{n-2,n-2}} = \dfrac{c_{n-2} - \sum\limits_{i=(n-2)+1} a_{n-2,i} \cdot x_i}{a_{n-2,n-2}}$

Si seguimos el proceso tenemos que:

$$x_i = \frac{c_i - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij} \cdot x_j}{a_{ii}}$$