$$f(x) \approx \frac{x-b}{a-b} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b)$$

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \int_a^b \frac{x-b}{a-b} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b)\, dx = \int_a^b \frac{x-b}{a-b} f(a)\, dx + \int_a^b \frac{x-b}{b-a} f(b)\, dx$$

$$= \frac{f(a)}{a-b} \int_a^b x-b\, dx + \frac{f(b)}{b-a} \int_a^b x-a\, dx$$

$$= \frac{f(a)}{a-b}\left[\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} - b^2 + ab\right] + \frac{f(b)}{b-a}\left[\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} - ab + a^2\right] \quad ; \quad \frac{f(a)}{a-b} = \frac{-f(a)}{b-a}$$

$$= -\frac{f(a)}{b-a}\left[\frac{-b^2}{2} + ab - \frac{a^2}{2}\right] + \frac{f(b)}{b-a}\left[\frac{b^2}{2} - ab + \frac{a^2}{2}\right]$$

$$= \frac{f(a)}{b-a}\left[\frac{b^2}{2} - ab + \frac{a^2}{2}\right] + \frac{f(b)}{b-a}\left[\frac{b^2}{2} - ab + \frac{a^2}{2}\right] \quad ; \quad \frac{b^2}{2} - ab + \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2}(b-a)^2$$

$$= \frac{f(a)}{b-a} + \frac{f(b)}{b-a}\left(\frac{1}{2}(b-a)^2\right)$$

$$= \frac{1}{b-a}(f(a)+f(b))\frac{(b-a)^2}{2} = \frac{(b-a)(f(a)+f(b))}{2}$$