

# **TÉCNICAS DE APRENDIZAJE AUTOMÁTICO PARA RESOLVER PROBLEMAS INVERSOS DE ONDAS ACÚSTICAS CON APLICACIONES EN GEOFÍSICA**

Anteproyecto escrito del trabajo de grado para la obtención del título en:  
Ingeniero Físico

GREGORIO PÉREZ-BERNAL  
[gperezb1@eafit.edu.co](mailto:gperezb1@eafit.edu.co)

**TUTORES:**  
NICOLÁS GUARÍN-ZAPATA  
OSCAR ANDRÉS RINCÓN-CARDEÑO

Universidad EAFIT  
Escuela de Ciencias Aplicadas e Ingeniería  
Pregrado de Ingeniería Física  
Medellín  
2025

## TABLA DE CONTENIDO

<b>1</b>	<b>PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA .....</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>JUSTIFICACIÓN Y ALCANCE .....</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>ANTECEDENTES .....</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>OBJETIVOS .....</b>	<b>6</b>
	<b>OBJETIVO GENERAL .....</b>	<b>6</b>
	<b>OBJETIVOS ESPECIFICOS .....</b>	<b>6</b>
<b>5</b>	<b>METODOLOGÍA.....</b>	<b>7</b>
<b>6</b>	<b>CRONOGRAMA DE ACTIVIDADES .....</b>	<b>7</b>
<b>7</b>	<b>PRESUPUESTO.....</b>	<b>8</b>
<b>8</b>	<b>PRODUCTOS Y PROPIEDAD INTELECTUAL .....</b>	<b>8</b>
<b>9</b>	<b>REFERENCIAS .....</b>	<b>9</b>

## **ÍNDICE DE TABLAS**

Tabla 1. Cronograma de actividades propuesto.....	8
Tabla 2. Presupuestos y recursos.....	8

## 1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En el estudio de las ecuaciones diferenciales parciales (PDEs<sup>1</sup>, por sus siglas en inglés), es posible abordar un problema desde dos enfoques generales: el directo y el inverso. El enfoque inverso se centra en identificar las causas subyacentes a partir de un conjunto de observaciones. Este enfoque resulta útil en aplicaciones como determinar la velocidad de propagación de una onda a partir de los datos observados de su comportamiento dinámico [1]. A estos procesos de medición se les conoce como técnicas no invasivas.

Las técnicas no invasivas, como la tomografía acústica, destacan por su capacidad para recolectar grandes cantidades de datos sin la necesidad de insertar sensores dentro del campo de estudio. Esto evita riesgos asociados con métodos invasivos y también permite obtener una visión global del medio en lugar de información puntual, mejorando la precisión y la utilidad de los análisis realizados. Estas técnicas tienen aplicaciones particularmente en ámbitos médicos, geofísicos y meteorológicos [2] [3].

En los últimos años la exploración y publicación de artículos sobre técnicas de aprendizaje automático para resolver problemas inversos ha aumentado exponencialmente [4], en especial las redes neuronales informadas por la física (PINNs<sup>2</sup>, por sus siglas en inglés), las cuales toman información sobre el problema a minimizar, permitiendo resolver problemas directos e inversos [5]. Una de las áreas de estudio que se beneficia de la solución de problemas inversos usando técnicas de aprendizaje automático es la geofísica, pues las PINNs se presentan como una herramienta para caracterizar la estructura de los suelos sin necesidad de realizar perforaciones en este.

La metodología propuesta consiste en emitir ondas mecánicas hacia el subsuelo y captar sus reflexiones mediante el uso de geófonos [7]. Se considerará que la emisión de ondas es de frecuencia constante, cuyo comportamiento se modelará mediante la ecuación de Helmholtz. Con este enfoque, se propone entrenar diferentes tipos de redes neuronales, como las PINNs y las Redes de Kolmogorov-Arnold (KAN<sup>3</sup>, por sus siglas en inglés) [8]. El objetivo es estimar la velocidad de propagación de las ondas mecánicas en el subsuelo y responder la siguiente pregunta de investigación: **¿Cuál es el rendimiento de las técnicas**

---

<sup>1</sup> Partial Differential Equations

<sup>2</sup> Physics Informed Neural Networks

<sup>3</sup> Kolmogorov-Arnold Networks

**de aprendizaje automático en la estimación de la velocidad de propagación de ondas mecánicas utilizando datos capturados en superficie?**

## **2 JUSTIFICACIÓN Y ALCANCE**

En el ámbito de la ciencia e ingeniería computacional, resolver problemas complejos, como aquellos que involucran geometrías irregulares, materiales heterogéneos o condiciones de frontera mixtas, puede plantear retos significativos para los métodos numéricos tradicionales [9]. Estas limitaciones generan la necesidad de explorar y desarrollar estrategias que no solo sean capaces de superar estas barreras, sino que también optimicen el rendimiento computacional en la resolución de este tipo de modelos. Entre estas herramientas, se encuentran las PINNs.

Para abordar este problema, es esencial un conocimiento sólido en ecuaciones diferenciales parciales, métodos numéricos, redes neuronales y física computacional. Estos conocimientos giran en torno a la formación esencial de un ingeniero físico [10], mezclando los componentes teóricos y prácticos que enmarcan el mundo de los métodos de aproximación. El estudiante y sus asesores tienen experiencia en modelación de ecuaciones diferenciales usando PINNs y KAN [11].

Una de las aplicaciones del mapeo del subsuelo, es la identificación de posibles restos arqueológicos [12]. En etapas posteriores se buscaría extender estas aplicaciones para la modelación de estructuras geotécnicas precolombinas. Vinculando este proyecto con trabajos exploratorios realizados al interior del Área de territorios y Ciudades relacionados con la caracterización geológica y geotécnica de algunas estructuras en Ciudad Perdida [6]. De acuerdo con la pregunta de investigación formulada y con el alcance del proyecto, las métricas con las que se evaluará la investigación son el tiempo de entrenamiento y el error de aproximación.

Los resultados esperados de este trabajo de grado se centran en el desarrollo de soluciones algorítmicas fundamentadas en modelación matemática. No se considera trabajar con hardware ni realizar comparaciones exhaustivas con métodos numéricos tradicionales.

## **3 ANTECEDENTES**

En la última década, las técnicas de aprendizaje automático han sido ampliamente estudiadas para modelar ondas acústicas. En su trabajo, Ren et al [13] proponen realizar la

inversión total de una onda (FWI<sup>3</sup> por sus siglas en inglés) en una dimensión, midiendo datos sintéticos que simulan la interacción de un geófono. Este propone usar condiciones de frontera absorbentes para lidiar con el problema de los espacios semi infinitos. En vez de trabajar con la ecuación de Helmholtz, se propone usar las ecuaciones acústicas de la elasticidad.

De igual manera, [14] realiza el mapeo del subsuelo usando la ecuación de Helmholtz. Para obtener mejores resultados, proponen el uso de dos redes neuronales conectadas, una para aproximar la velocidad de la onda y otro para simular el campo de presión de esta. Esta es una de las técnicas utilizadas para combatir el fenómeno de *spectral bias*, particularidad que hace que las redes neuronales fallen en su aproximación cuando son implementadas para aproximar en altas frecuencias. Investigaciones recientes muestran que las KAN superan el problema del *spectral bias* en cierto nivel [15]. También se han explorado técnicas tales como agregar *Fourier features* en la entrada de una red neuronal, con el fin de mejorar las aproximaciones en alta frecuencia [16].

## 4 OBJETIVOS

### OBJETIVO GENERAL

Diseñar e implementar un algoritmo basado en técnicas de aprendizaje automático para la reconstrucción del campo de velocidades de una onda mecánica a partir de datos observados, aplicado en geociencias.

### OBJETIVOS ESPECIFICOS

- Modelar matemáticamente el problema planteado, utilizando la formulación de problemas inversos para garantizar una representación adecuada de las condiciones geofísicas.
- Construir una función de pérdida informada por la física que permita aproximar el problema planteado.
- Validar el desempeño del algoritmo implementado mediante la aplicación a datos reales o sintéticos, evaluando su precisión y respuesta ante diferentes condiciones de entrenamiento.

---

<sup>3</sup> Full Wave Inversion

## 5 METODOLOGÍA

El proyecto se desarrollará en cuatro fases principales: Revisión y apropiación matemática, formulación computacional del problema, obtención y análisis de resultados, y documentación. A continuación, se describen detalladamente las actividades y etapas globales del proyecto, de acuerdo con el calendario de trabajo.

**Revisión y apropiación matemática:** Esta fase incluye la revisión de la bibliografía sobre la solución de problemas inversos aplicando técnicas de aprendizaje automático, así como el estudio de los conceptos en geofísica necesarios para abordar el problema. Se usarán revistas académicas, artículos y libros con el fin de culminar esta etapa.

**Formulación computacional del problema:** Durante esta fase, se seleccionará, se modelará matemáticamente y se implementará el modelo matemático que describe el problema, basándose en datos de problemas sintéticos. Dicha red construida será entrenada con el residual de la ecuación y con los datos sintéticos.

**Obtención, análisis y validación de resultados:** En esta etapa se trabajará con datos reales o sintéticos, con el fin de validar la estructura de la red construida. Estos datos se buscarán en repositorios, tales como [16].

**Documentación:** La fase de documentación se llevará a cabo a lo largo de todo el proyecto, con entregas intermedias programadas y la redacción del informe final. Se incluirá también la documentación en un repositorio en GitHub para garantizar la accesibilidad y reproducibilidad del trabajo realizado.

## 6 CRONOGRAMA DE ACTIVIDADES

En la tabla 1 se presenta el cronograma que representa las fechas en las que se abordan las etapas descritas en la sección de metodología, asumiendo la entrega del documento en la *semana 15* de clase.

Actividad	Estado	Semana														
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
<b>Revisión y apropiación matemática</b>	<b>40%</b>															
Revisión de bibliografía de geofísica	40%															
Estudio de la ecuación de Helmholtz y del problema inverso	60%															
Realización del anteproyecto	80%															
<b>Formulación computacional del problema</b>	<b>0%</b>															
Selección del modelo matemático	0%															
Creación de datos sintéticos para entrenar red	0%															
Construcción de una PINN para el problema	0%															
<b>Obtención y análisis de resultados</b>	<b>0%</b>															

Montaje de una red para resolver el problema específico	0%		
Optimización de hiperparámetros para la red	0%		
Validación de resultados con métricas apropiadas y datos reales	0%		
Análisis y discusión de resultados	0%		
<b>Documentación</b>	<b>0%</b>		
Entregas intermedias	0%		
Redacción informe final	0%		
Documentación en repositorios	0%		

**Tabla 1.** Cronograma de actividades propuesto.

## 7 PRESUPUESTO

En la tabla 2, se pueden ver adjuntos los costos asociados a este trabajo de grado. Estos costos no representan costos desembolsables para el estudiante.

Presupuesto del proyecto			
Ítem	Costo Unitario	Cantidad	Costo Total (COP)
Hora tutor	\$ 291,500.25	18	\$ 5,247,004.47
Hora cotutor	\$ 108,985.33	18	\$ 1,961,735.88
Hora estudiante	\$ 56,401.52	192	\$ 10,829,092.15
Suscripción Revistas Científicas	\$ 1,500,000.00	1	\$ 1,500,000.00
Computador	\$ 3,500,000.00	1	\$ 3,500,000.00
		<b>Total:</b>	<b>\$ 23,037,832.50</b>

**Tabla 2.** Presupuestos y recursos del trabajo

## 8 PRODUCTOS Y PROPIEDAD INTELECTUAL

Del presente proyecto se esperan los siguientes productos:

- Reporte final del trabajo de grado.
- Repositorio en línea con el código desarrollado en el proyecto.
- Artículo de revisión de literatura sobre las PINNs para realizar problemas directos o inversos.

Estos productos y otros que pudieran surgir en el curso del proyecto se publicarán de acuerdo con lineamientos de ciencia abierta<sup>4</sup> Este trabajo de grado hace parte del proyecto de investigación "Modelación directa e inversa de propagación de ondas combinando enfoques clásicos y de aprendizaje automático" en donde los productos se publicarán bajo lineamientos de ciencia abierta.

<sup>4</sup> Esto está alineado con las políticas nacionales de apropiación del conocimiento y ciencia abierta [17], [18], [19], [20]



## 9 REFERENCIAS

- [1] A. Tarantola, *Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005. doi: 10.1137/1.9780898717921. [Online]. Available: <https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/1.9780898717921>
- [2] I. Jovanovic, *Inverse Problems in Acoustic Tomography: Theory and Applications*, Thèse No. 4165, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2008.
- [3] J. Virieux et al., "An Introduction to Full Waveform Inversion," *Encyclopedia of Exploration Geophysics*, SEG, Jan. 2017, doi: 10.1190/1.9781560803027.entry6. [Online]. Available: <https://library.seg.org/doi/epdf/10.1190/1.9781560803027.entry6>
- [4] O. Rincón-Cardeno, "A Review of Recent Progress in Seismic Waves Propagation Modeling Using Machine Learning Based Methods," *Review of Recent Progress in Seismic Waves Modeling*, Universidad EAFIT, Medellín, Colombia.
- [5] M. Raissi, P. Perdikaris, y G. E. Karniadakis, "Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations," *Journal of Computational Physics*, vol. 378, pp. 686–707, 2019. doi: 10.1016/j.jcp.2018.10.045. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2018.10.045>.
- [6] N. Guarín-Zapata and S. Montoya-Noguera, *Modelación directa e inversa de propagación de ondas combinando enfoques clásicos y de aprendizaje automático: Propuesta de Investigación*, Medellín, Colombia: Universidad EAFIT, 2024.
- [7] R. M. Allen and H. Kanamori, "Review of sensors for low frequency seismic vibration measurement," *Sensors*, vol. 14, no. 11, pp. 20732–20753, 2014. doi: 10.3390/s141120732. [Online]. Available: [https://www.researchgate.net/publication/242012744\\_Review\\_of\\_sensors\\_for\\_low\\_frequency\\_seismic\\_vibration\\_measurement](https://www.researchgate.net/publication/242012744_Review_of_sensors_for_low_frequency_seismic_vibration_measurement).

- [8] Z. Liu, Y. Wang, S. Vaidya, F. Ruehle, J. Halverson, M. Soljagic, T. Y. Hou, and M. Tegmark, "KAN: Kolmogorov–Arnold Networks," preprint, under review, 2024. [Online]. Available: <https://github.com/KindXiaoming/pykan>
- [9] S. Cuomo, V. Schiano di Cola, F. Giampaolo, G. Rozza, M. Raissi, and F. Piccialli, "Scientific Machine Learning Through Physics-Informed Neural Networks: Where We Are and What's Next," *Journal of Scientific Computing*, vol. 92, no. 88, 2022. doi: 10.1007/s10915-022-01939-z. [Online]. Available: <https://link.springer.com/article/10.1007/s10915-022-01939-z>.
- [10] U. EAFIT, Generalidades, pregrado en ingeniería física, EAFIT. [https://www.eafit.edu.co/programas-academicos/pregrados/ingenieria fisica/Paginas/inicio.aspx](https://www.eafit.edu.co/programas-academicos/pregrados/ingenieria-fisica/Paginas/inicio.aspx).
- [11] G. Pérez Bernal and N. Guarín-Zapata, Kolmogorov-Arnold Networks: A rebirth of artificial intelligence towards solving differential equations? Research Report, Universidad EAFIT, Medellín, Colombia, Nov. 2024.
- [12] N. Linford, "The application of geophysical methods to archaeological prospection," *Reports on Progress in Physics*, vol. 69, no. 7, pp. 2205–2257, 2006, doi: 10.1088/0034-4885/69/7/R04.
- [13] P. Ren, C. Rao, H. Sun, y Y. Liu, "Physics-informed neural network for seismic wave inversion in layered semi-infinite domain," Preprint, May 10, 2023. [Online]. Available: [arXiv:2305.05150](https://arxiv.org/abs/2305.05150).
- [14] M. Rasht-Behesht, C. Huber, K. Shukla, y G. E. Karniadakis, "Physics-Informed Neural Networks (PINNs) for Wave Propagation and Full Waveform Inversions," *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, vol. 127, no. 5, 2022, doi: 10.1029/2021JB023120. [Online]. Available: <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1029/2021JB023120>.

- [15] Y. Wang, J. W. Siegel, Z. Liu, y T. Y. Hou, "On the expressiveness and spectral bias of KANs," arXiv preprint arXiv:2410.01803, 2024. [En línea]. Disponible en: <https://arxiv.org/abs/2410.01803>.
- [16] M. Tancik, P. P. Srinivasan, B. Mildenhall, S. Fridovich-Keil, N. Raghavan, U. Singhal, R. Ramamoorthi, J. T. Barron, y R. Ng, "Fourier Features Let Networks Learn High-Frequency Functions in Low Dimensional Domains," en Proceedings of the 34th Conference on Neural Information Processing Systems (NeurIPS 2020), Vancouver, Canada, 2020.
- [17] Society of Exploration Geophysicists, "SEG - Advancing Applied Geophysics," [Online]. Available: <https://seg.org/>.
- [18] Christopher Steven Marcum y Ryan Donohue, «Breakthroughs for All: Delivering Equitable Access to America's Research», OSTP Blog. Accedido: 12 de septiembre de 2022. [En línea]. Disponible en: <https://www.whitehouse.gov/ostp/news-updates/2022/08/25/breakthroughs-for-alldelivering-equitable-access-to-americas-research/>
- [19] B. Diederich *et al.*, «CAD we share? Publishing reproducible microscope hardware», *Nat Methods*, may 2022, doi: 10.1038/s41592-022-01484-5.
- [20] Ministerio de Ciencia, Tecnología e Innovación, «Documento de Política Pública de Apropiación Social del Conocimiento en el marco de la Ciencia, Tecnología e Innovación», Minciencias, Bogotá, 2101, mar. 2021. [En línea]. Disponible en: [https://minciencias.gov.co/sites/default/files/politica\\_publica\\_de\\_apropiacion\\_social\\_d\\_el\\_conocimiento.pdf](https://minciencias.gov.co/sites/default/files/politica_publica_de_apropiacion_social_d_el_conocimiento.pdf)
- [21] Ministerio de Ciencia Tecnología e Innovación, «Documento de Política Nacional de Ciencia Abierta en el marco de la Ciencia, Tecnología e Innovación.», Minciencias, Bogotá, 2201, may 2022. [En línea]. Disponible en: [https://minciencias.gov.co/sites/default/files/ckeditor\\_files/Documento%20consulta%2](https://minciencias.gov.co/sites/default/files/ckeditor_files/Documento%20consulta%2)

Op%C3%BAblica%20-  
%20Pol%C3%ADtica%20Nacional%20de%20Ciencia%20Abierta.pdf