Processos Não Estacionários
Testes de Raiz Unitária

Bibliografia Básica:

- Enders, W. *Applied Econometric Time Series*. Cap. 4.
- Bueno, R. L. S. *Econometria de Séries Temporais*. Cap. 4.
- Box, G.E., Jenkins, G. M., Reinsel, G.C. & Ljung, G. M.(2016). *Time series analysis: forecasting and control*. Cap. 4.
- Morettin, P. A. *Análise de Séries Temporais*. Cap. 5.

Revisão Conceitos

Processo estocástico: é uma coleção de variáveis aleatórias ordenadas no tempo.

Processo Estocástico Estacionário: média e variância são constantes ao longo do tempo; covariância depende da distância entre os valores da série.

Processo Ergódico: coeficiente de autocorrelação (autocovariância) tende a zero, para $t \to \infty$.

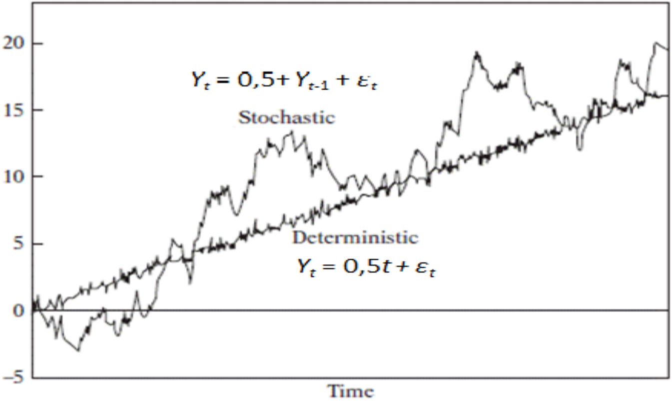
Processo Estocástico Não Estacionário: média e/ou variância serão dependentes do tempo.

Processos Puramente Aleatórios, chamado de "ruído branco", são processos que possuem média zero, variância constante e correlação serial igual a zero:

$$\epsilon_t \sim RB(0, \sigma_\epsilon^2)$$

Processos Não Estacionários

Processo não estacionário é um processo cuja média e/ou variância serão dependentes do tempo.



Importante

- Para remover a tendência determinística, deve-se estimar Y_t contra o tempo e armazenar os resíduos. Os resíduos armazenados constituem a nova série que deverá ser modelada de forma separada.

- Para remover a tendência estocástica, basta aplicar o operador diferenças.

Processos Estocásticos Integrados

Processo estocástico integrado: processo estocástico que pode se tornar estacionário por meio da diferenciação.

Se um processo se torna estacionário ao se tomar sua primeira diferença dizemos que este processo é integrado de ordem um, ou I(1).

Se o processo somente se tornar estacionário na d-ésima diferença dizemos que este é um processo integrado de ordem d, ou I(d).

Um processo que não precisa ser diferenciado para se tornar estacionário é integrado de ordem zero, ou I(0).

Modelo *Random Walk* ou Passeio Aleatório

Um passeio aleatório é dado por:

$$Y_t = Y_{t-1} + \epsilon_t$$

em que $\epsilon_t \sim RB(0, \sigma_\epsilon^2)$
Este processo é estacionário ou não?

$$E(Y_t) = E(Y_{t-1} + \epsilon_t) = \ldots = E(Y_0 + \sum_{t=1}^{T} \epsilon_t) = Y_0$$

Temos que a esperança é constante e independe do tempo.

$$Var(Y_t) = E\{(Y_t - E(Y_t))^2\} = \ldots = \sum_{t=1}^{T} \sigma_\epsilon^2 = T\sigma_\epsilon^2$$

A variância é, portanto, uma função crescente do tempo, logo o passeio aleatório não é um processo estacionário.

Como identificar se a série é ou não estacionária?

1. Análise gráfica
2. Função de autocorrelação:

- Séries não estacionárias: fortes correlações seriais
  Exemplo: Faça a seguinte simulação no R

$$Y_t = \delta + Y_{t-1} + \epsilon_t$$

  supondo $\delta = 0$ e $\delta = 0.2$, com $\epsilon_t \sim N(0, 1)$ e $Y_0 = 0$.
- $\delta \neq 0$: passeio aleatório com *drift* (ou **deslocamento** ou **tendência estocástica**). Neste caso, valor médio e variância são dependentes do tempo.
- $\delta = 0$: **tendência estocástica pura**. Neste caso, variância é dependente do tempo.
- Inspeção visual raramente permite distinguir o processo como de tendência estocástica ou tendência determinística

Como identificar se a série é ou não estacionária?

3. Teste de Raiz Unitária ou Teste de Estacionariedade. Considere o modelo:

$$Y_t = \rho Y_{t-1} + \epsilon_t$$

Raiz unitária: Quando temos que $\rho = 1$ aparece o problema de raiz unitária que, basicamente, é sinônimo de não estacionaridade.

Passeio aleatório, com ou sem drift, pode se tornar estacionário ao ser diferenciado, isto é:

$$Y_t = Y_{t-1} + \epsilon_t \Leftrightarrow \Delta Y_t = \epsilon_t$$

Exemplo

Considere a série de taxa de câmbio $Euro/US\$$, no período entre jan/1999 e agosto/2006.

a) Faça o gráfico da série e construa a função de autocorrelação;

b) Tome a primeira diferença e construa a função de autocorrelação.

Testes de Raiz Unitária

Considere o modelo:

$$Y_t = \rho Y_{t-1} + \epsilon_t$$

Se $|\rho| < 1$: série é estacionária;
Se $\rho = 1$: série é não estacionária;

Objetivo:

Teste de Raiz Unitária: testar $H_0 : \rho = 1$ contra $H_1 : \rho < 1$

Testes de Raiz Unitária

Testes que abordaremos:

1. Testes Dickey Fuller
2. Teste Dickey Fuller Aumentado – ADF
3. Teste de KPSS
4. Teste de Phillips Perron
5. Teste de DF-GLS (ERS)
6. Teste com Quebra Estrutural

1. Teste Dickey Fuller – DF

Objetivo:

Testar a existência de 1 RU em Y_t quando o processo gerador da série for expresso por uma das expressões abaixo:

$$(1) \quad Y_t = \alpha + \beta t + \rho Y_{t-1} + \epsilon_t \quad \Rightarrow \quad \Delta Y_t = \alpha + \beta t + \gamma Y_{t-1} + \epsilon_t$$

$$(2) \quad Y_t = \alpha + \rho Y_{t-1} + \epsilon_t \quad \Rightarrow \quad \Delta Y_t = \alpha + \gamma Y_{t-1} + \epsilon_t$$

$$(3) \quad Y_t = \rho Y_{t-1} + \epsilon_t \quad \Rightarrow \quad \Delta Y_t = \gamma Y_{t-1} + \epsilon_t$$

em que α e βt são componentes determinísticos, denominados constante ou *drift* e tendência linear, respectivamente; ϵ_t é um ruído branco.

Teste DF

Hipóteses nula e alternativa:

$$H_0: \quad \rho = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma = 0 \quad (1\ \text{RU})$$

$$H_1: \quad \rho < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma < 0 \quad (0\ \text{RU})$$

- Teste Monocaudal à esquerda

- Estatísticas dos testes são chamadas de:

1. Modelo com constante e tendência determinística: τ_τ
2. Modelo com constante: τ_μ
3. Modelo sem termos determinísticos: τ

Teste DF

Sob a hipótese nula, a distribuição do teste não é convencional, ou seja, não é igual à distribuição t, dado que Y_t não é estacionário.

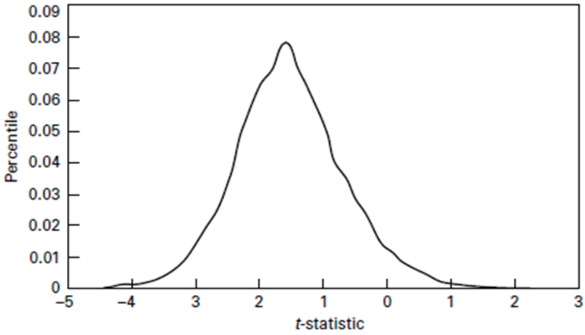


FIGURE 4.7 The Dickey–Fuller Distribution

Dickey & Fuller (1979) recalcularam os valores críticos: Tabela A, p. 488, Enders (2010)

Empirical Cumulative Distribution of τ

Probability of a Smaller Value Sample Size	0.01	0.025	0.05	0.10
No Constant or Time ($a_0 = a_2 = 0$)				τ
25	−2.66	−2.26	−1.95	−1.60
50	−2.62	−2.25	−1.95	−1.61
100	−2.60	−2.24	−1.95	−1.61
250	−2.58	−2.23	−1.95	−1.62
300	−2.58	−2.23	−1.95	−1.62
∞	−2.58	−2.23	−1.95	−1.62
Constant ($a_2 = 0$)				τ_μ
25	−3.75	−3.33	−3.00	−2.62
50	−3.58	−3.22	−2.93	−2.60
100	−3.51	−3.17	−2.89	−2.58
250	−3.46	−3.14	−2.88	−2.57
500	−3.44	−3.13	−2.87	−2.57
∞	−3.43	−3.12	−2.86	−2.57
Constant + time				τ_τ
25	−4.38	−3.95	−3.60	−3.24
50	−4.15	−3.80	−3.50	−3.18
100	−4.04	−3.73	−3.45	−3.15
250	−3.99	−3.69	−3.43	−3.13
500	−3.98	−3.68	−3.42	−3.13
∞	−3.96	−3.66	−3.41	−3.12

Teste DF no R

Para realizar o teste de Dickey-Fuller, carregue o pacote `urca`.

Em seguida use a função `UR.DF`, a qual retorna, automaticamente, os valores críticos para o teste.

No R as estatísticas são denotadas por:

$$\tau_\tau = \tau_3$$

$$\tau_\mu = \tau_2$$

$$\tau = \tau_1$$

Significância dos Termos Determinísticos

Análise da significância dos elementos determinísticos (constante e tendência linear) por meio de testes de hipóteses conjuntos, utilizando valores críticos simulados por DF.

Dickey & Fuller (1981) sugerem as estatísticas F denominadas ϕ_1, ϕ_2 e ϕ_3 para testar hipóteses conjuntas:

$$H_0 : \gamma = \alpha = 0 \Rightarrow \Phi_1$$

$$H_0 : \gamma = \alpha = \beta = 0 \Rightarrow \Phi_2$$

$$H_0 : \gamma = \beta = 0 \Rightarrow \Phi_3$$

As estatísticas relacionadas a essas hipóteses são:

$$\Phi_i = \frac{(SQRes_{restrita} - SQRes_{irrestrita})/r}{SQRes_{irrestrita}/(T-k)} \quad i = 1, 3$$

sendo r o número de restrições, T número de observações, k número de parâmetros estimados no modelo irrestrito.

EMPIRICAL DISTRIBUTION OF

Φ_1 FOR $(\alpha, \rho) = (0, 1)$ IN $Y_t = \alpha + \rho Y_{t-1} + e_t$

Sample size n	0.90	0.95	0.975	0.99
25	4.12	5.18	6.30	7.88
50	3.94	4.86	5.80	7.06
100	3.86	4.71	5.57	6.70
250	3.81	4.63	5.45	6.52
500	3.79	4.61	5.41	6.47
∞	3.78	4.59	5.38	6.43
Φ_2 FOR $(\alpha, \beta, \rho) = (0, 0, 1)$ IN $Y_t = \alpha + \beta t + \rho Y_{t-1} + e_t$				
25	4.67	5.68	6.75	8.21
50	4.31	5.13	5.94	7.02
100	4.16	4.88	5.59	6.50
250	4.07	4.75	5.40	6.22
500	4.05	4.71	5.35	6.15
∞	4.03	4.68	5.31	6.09
Φ_3 FOR $(\alpha, \beta, \rho) = (\alpha, 0, 1)$ IN $Y_t = \alpha + \beta t + \rho Y_{t-1} + e_t$				
25	5.91	7.24	8.65	10.61
50	5.61	6.73	7.81	9.31
100	5.47	6.49	7.44	8.73
250	5.39	6.34	7.25	8.43
500	5.36	6.30	7.20	8.34
∞	5.34	6.25	7.16	8.27

2. Testes Dickey Fuller Aumentado – ADF

Resíduos $\hat{\epsilon}_t$ obtidos dos modelos (1) a (3) são ruídos brancos? Teste ADF: adiciona as defasagens da variável dependente, ou seja, supõe-se que a série é gerada por um processo auto-regressivo de ordem p.

$$(4) \quad \Delta Y_t = \alpha + \beta t + \gamma Y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \delta_i \Delta Y_{t-i} + \epsilon_t$$

$$(5) \quad \Delta Y_t = \alpha + \gamma Y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \delta_i \Delta Y_{t-i} + \epsilon_t$$

$$(6) \quad \Delta Y_t = \gamma Y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \delta_i \Delta Y_{t-i} + \epsilon_t$$

Inclusão de termos autorregressivos não altera a convergência das estatísticas τ, τ_μ e τ_τ. Portanto, usa-se nos testes ADF os mesmo valores críticos utilizados nos testes DF.

Teste ADF

Para identificar o número de atrasos p de forma que $\hat{\epsilon}_t \sim RB(0, \sigma^2_\epsilon)$, usa-se:

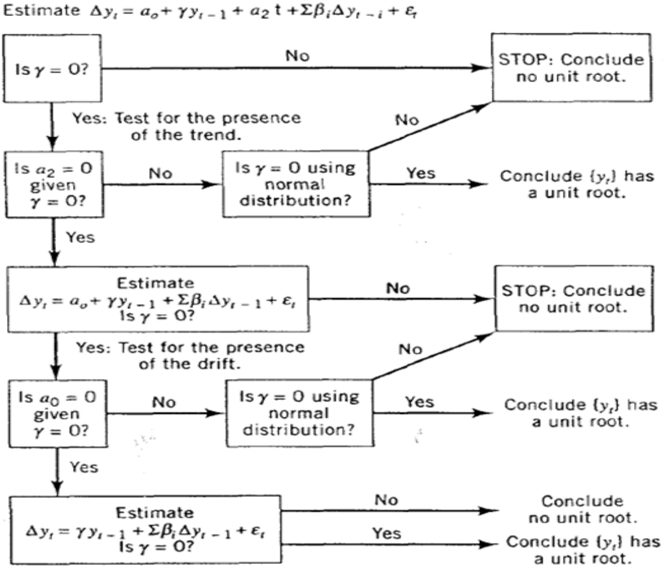
1) análise das autocorrelações dos resíduos do modelo sem termos de aumento;
2) critérios de informação: Akaike (AIC) ou Bayesian (BIC):

$$AIC(p) = ln(\sigma^2_\epsilon) + p\frac{2}{T}$$

$$BIC(p) = ln(\sigma^2_\epsilon) + p\frac{ln(T)}{T}$$

em que T é o número de observações e p número de parâmetros.

Figure 4.7 A procedure to test for unit roots.



Atividades

Verificar a existência de RU para:

1. IPCA (Fonte: IPEADATA).
2. A partir da série encaminhada por email, faça o teste ADF. Analise os resultados.