Processos Estocásticos

Profa. R. Ballini

Bibliografia Básica:

- Enders, W. *Applied Econometric Time Series*. Cap. 2.
- Bueno, R. L. S. *Econometria de Séries Temporais*. Cap. 2 e 3.
- Box, G.E. & Jenkins, G. M.. *Time series analysis: forecasting and control*. Cap. 3.
- Morettin, P. A. *Análise de Séries Temporais.* Cap. 2 e 5.

Processo Estocástico

Definição:

Seja T um conjunto arbitrário. Um *processo estocástico* é uma família $\{Y(t), t \in T\}$ tal que, para cada $t \in T$, $Y(t)$ é uma variável aleatória.

Tem-se que para cada $t \in T$, $Y(t)$ é uma v.a. definida sobre o espaço amostral Ω. Assim, $Y(t)$ é uma função de dois argumentos:

$$\{Y(t, \omega), t \in T, \omega \in \Omega\} \tag{1}$$

em que para cada $t \in T$, $Y(t, \cdot)$ é uma variável aleatória no espaço amostral Ω.

A realização do processo estocástico definida em (1) é dada por $Y(\cdot, \omega)$ para cada $\omega \in \Omega$ no tempo $t \in T$.

Série Temporal

Definição

Formalmente, uma série temporal é definida como um processo estocástico:

$$\{Y(t, \omega), t \in T, \omega \in \Omega\} \tag{2}$$

em que para cada $t \in T$, $Y(t, \cdot)$ é uma variável aleatória no espaço amostral Ω.

Série Temporal

A série temporal observada é uma realização de um processo estocástico (o **processo gerador de dados**):

$$\{y\}_{t=1}^{T} = \{y_1, y_2, \ldots, y_T\} \tag{3}$$

Nesse sentido, uma série temporal é uma trajetória ou realização de um processo estocástico.

Modelagem de Série Temporal

Determinar qual é o processo gerador da série que se está estudando, ou seja, qual o modelo que traduz o mecanismo de geração da série.

Série Temporal

1. Séries temporais podem ser **estacionárias** ou **não estacionárias**.

   Estacionária: se desenvolve no tempo ao redor de uma média constante, refletindo alguma forma de equilíbrio. Caso contrário é **não estacionária**.

2. Séries temporais podem ser **determinísticas** ou **estocásticas**.

   Determinística: valores da série podem ser escritos por uma função matemática perfeitamente determinada por uma ou mais variáveis

   Estocástica: valores da série incluem um termo aleatório (= estocástico).

A série temporal estacionária determinística mais simples é uma constante $c \in \Re$, isto é:

$$y_t = c \tag{4}$$

A série dada por (4) será estacionária e estocástica se acrescentarmos um componente aleatório independente e identicamente extraído de uma distribuição normal, $\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$:

$$y_t = c + \epsilon_t \tag{5}$$

Uma série temporal é não estacionária com tendência determinística se:

$$y_t = \beta_1 t + \beta_0 \tag{6}$$

Processo Estocástico Estritamente Estacionário

Definição:

Um processo estocástico $\{Y(t), t \in T\}$ diz-se **estritamente estacionário** se todas as distribuições finito dimensionais permanecem as mesmas sob translações do tempo, ou seja,

$$F(y_{1+s}, \ldots, y_{n+s}) = F(y_1, \ldots, y_n)$$

para quaisquer t de T.

Em particular, isto significa que todas as distribuições são invariantes sob translações do tempo.

Processo Estocástico Fracamente Estacionário

Definição:

Um processo estocástico $\{Y(t), t \in T\}$ diz-se **fracamente estacionário** (ou estacionário de segunda ordem) se e somente se:

(i) $E\{Y(t)\} = \mu(t) = \mu$, constante, para todo $t \in T$;

(ii) $E\{Y^2(t)\} < \infty$, para todo $t \in T$;

(iii) $\gamma(t_1, t_2) = Cov\{Y(t_1), Y(t_2)\}$ é uma função apenas de $|t_1 - t_2|$.

Estes processos são denominados *processos estacionários*.

Propriedade de estacionaridade: fundamental para inferências estatísticas e para previsão.

Autocovariância e Autocorrelação

Dada uma particular realização, ω, de um processo estocástico, a função de autocovariância é definida como:

$$\gamma_j \equiv E[(Y(t) - \mu(t))(Y(t-j) - \mu(t-j))] \tag{7}$$

A variância $\sigma^2(t)$ é repsentada por γ_0.

A autocorrelação de um processo estocástico é dada por:

$$\rho_j \equiv \frac{\gamma_j}{\gamma_0} \tag{8}$$

Coeficientes de Autocovariância e Autocorrelação

Propriedades:

1. A correlação entre y_t e y_{t+k} é igual à y_t e y_{t-k}:

$$\rho(k) = \rho(-k)$$

2. $-1 \leq \rho \leq 1$.

Funções de Autocovariância e Autocorrelação

- O gráfico de γ_k versus k é chamado de função de autocovariância $\{\gamma_k\}$ do processo estocástico.
- O gráfico de ρ_k como função do intervalo k é chamado de função de autocorrelação (f.a.c.) ou correlograma $\{\rho_k\}$ do processo estocástico.

Correlograma

O coeficiente de autocorrelação amostral ρ_k é assintoticamente normalmente distribuído, com média e variância dados por:

$$E(\rho_k) \approx -1/n \quad \text{e} \quad Var(\rho_k) \approx 1/n$$

sendo n o número de observações.
Portanto, limites de confiança aproximados de 95% são dados por

$$-1/n \pm 1,96/\sqrt{n}$$

que são frequentemente aproximados para $\pm 2/\sqrt{n}$.

Propriedade de Ergodicidade

A ergodicidade é uma propriedade de independência assintótica.

Para haver ergodicidade, a série deve ser fracamente estacionária.

Formalmente, um processo estocástico fracamente estacionário é ergódico se:

$$\lim_{t \mapsto \infty} \left\{ \frac{1}{T} \sum_{j=1}^{T} E[y_t - \mu][y_{t-j} - \mu] \right\} = 0$$

Essa condição é satisfeita se as autocovariâncias tendem a zero, suficientemente rápido, com o aumento de j.

Processos Estocásticos Não Estacionários

Séries não estacionárias têm uma tendência que pode ter uma natureza determinística ou estocástica.

A série não estacionária determinística, acrescida de um componente aleatório extraído de uma distribuição normal, flutua em torno de uma tendência temporal.
Exemplo **Tendência Determinística**:

$$y_t = c + \delta t + \epsilon_t$$

Exemplo **Passeio aleatório com deslocamento**:

$$y_t = c + y_{t-1} + \epsilon_t$$

Ruído Branco

Um processo estocático ϵ_t é chamado de ruído branco se

$$\begin{aligned} E(\epsilon_t) &= 0 \\ E(\epsilon_t^2) &= \sigma_\epsilon^2 \\ \gamma_j &= E(\epsilon_t \epsilon_{t-j}) = 0, \text{todo } j \neq 0 \end{aligned}$$

Este processo é representado por $RB(0, \sigma_\epsilon^2)$.

Se ϵ_t é distribuído normalmente, tal que o processo caracterizado por

$$\epsilon_t \sim N(0, \sigma_\epsilon^2)$$

chamamos o processo de **ruído branco gaussiano**.

Exemplos de Geração de séries

Para cada um dos processos abaixo gere 200 observações. Faça o gráfico da série e o correlograma.

a) Ruído branco gaussiano com média 0 e variância 1;
b) Série com tendência determinística: $y_t = 0.5 + 0.1t + N(0, 1)$;
c) Série com tendência estocástica: $y_t = y_{t-1} + N(0, 5^2)$;
d) Série com correlação de curto-prazo: $y_t = 0,7y_{t-1} + N(0, 1)$;
e) Série com correlações negativas: $y_t = -0,8y_{t-1} + N(0, 1)$;
f) Passeio aleatório com deslocamento: $y_t = 1 + y_{t-1} + N(0, 1)$;
g) Passeio Aleatório com deslocamento e tendência determinística: $y_t = 3.0 + 0.5t + y_{t-1} + N(0, 1)$.

Comando auxiliares no R

`rep(k,N)`: valor k será repetido N vezes

`rnorm(N,m,s)`: gera N valores aleatórios com distribuição normal com média 0 e desvio-padrão s

`cumsum(x)`: calcula a soma acumulada de x

`set.seed(XXX)`: fixa a semente (valor inicial) em XXX

`acf(x)`: obtém a função de autocovariância da série x

Exercícios

1. A partir da análise do correlograma, a série do PIB Agropecuária do Brasil é estacionária?
2. A partir da análise do correlograma, a série de vazões da Usina de Furnas é estacionária?
3. A partir da análise do correlograma, a série da Taxa de Câmbio é estacionária?
4. A partir da análise do correlograma, a série do PIB da Alemanha é estacionária?
5. A partir da análise do correlograma, a série da Taxa de Desemprego é estacionária?
6. A partir da análise do correlograma, a série do Consumo de Energia é estacionária?