Desenvolvimento de equações para endividamento sobre a renda

Gabriel Petrini

14 de Outubro de 2020

O objetivo dessa nota é apresentar o desenvolvimento algébrico para obter a relação endividamento das firmas e das famílias capitalistas em termos da renda (respectivamente ℓ_{fy} e ℓ_{ky})[1].

Endividamento das firmas

Na versão atual do artigo, temos o endividamento das firmas em relação ao seu capital e será denotado por ℓ_f

$$\ell_f = \frac{L_f}{K_f}$$

podemos reescrever da seguinte maneira

$$\ell_f = \frac{L_f}{Y}\frac{Y}{Y_{fc}}\frac{Y_fc}{K_f}$$

$$\ell_f = \ell_{fy}\frac{u}{v}$$

rearranjando

$$\ell_{fy} = \ell_f\frac{v}{u} \Rightarrow \ell_{fy}^{\star} = \ell_f^{\star}\frac{v}{u}$$

Sendo assim, podemos dividir a norma de *steady state* entre o endividamento das firmas e seu estoque de capital ($\ell_f^{\star}$) apresentada na equação 57 pelo grau de utilização e multiplicar pela relação técnica capital produto para obter $\ell_{fy}^{\star}$. Vou repetir a equação 57 abaixo para facilitar[2]:

$$\ell_f^{\star} = \frac{g^{\star} \cdot v + \gamma_F \cdot u^{\star} \cdot (1-\omega)}{v \cdot (g^{\star} - \gamma_F \cdot r_m)} \tag{57}$$

Multiplicando por v

$$\ell_f^{\star} \cdot v = \frac{g^{\star} \cdot v + \gamma_F \cdot u^{\star} \cdot (1-\omega)}{g^{\star} - \gamma_F \cdot r_m} \tag{1}$$

Dividindo por $u\star$

$$\ell_f^{\star} \cdot \frac{v}{u\star} = \ell_{fy} = \frac{\frac{g^{\star}\cdot v}{u^{\star}} + \gamma_F \cdot (1-\omega)}{g^{\star} - \gamma_F \cdot r_m} \tag{2}$$

lembrando da definição de $h^{\star}$:

$$\ell_{fy} = \frac{h^{\star} + \gamma_F \cdot (1-\omega)}{g^{\star} - \gamma_F \cdot r_m} \tag{3}$$

[1] Depois pensamos em uma notação melhor

[2] Lembrando que estou pensando ainda por qual letra irei substituir as taxas de juros/lucro.

Endividamento das famílias capitalistas

Nesta seção, irei indicar as etapas para obter o endividamento capitalista em termos da renda disponível. Para isso, seguem algumas definições e hipóteses[3]:

- DT: Dívida total $= L_k + MO$
- DL: Dívida líquida dos depósitos $= L_k + MO - M$
- Não há spread sobre a taxa básica de juros: $r_m = r_{mo} = r_l$

Relembrando algumas identidades contábeis, temos

$$M = L_f + L_k + MO$$

então

$$M - L_k - MO = L_f$$

logo,

$$DL = -L_f \tag{4}$$

Dito isso, vou reescrever a equação da renda disponível das famílias capitalistas abaixo tal como a equação 32 do artigo

$$YD_k = FD + r_m \cdot M_{-1} - r_{mo} \cdot MO_{-1} - r_L \cdot L_{k_{-1}} \tag{32}$$

fazendo $r_m = r_{mo} = r_l$

$$YD_k = FD + r_m \cdot (M_{-1} - MO_{-1} - L_{k_{-1}}) \tag{5}$$

que é equivalente à

$$YD_k = FD - r_m \cdot DL_{-1} \tag{6}$$

ou ainda

$$YD_k = FD + r_m \cdot L_{f_{-1}} \tag{7}$$

Substituindo a equação dos lucros distribuídos (Eq 12) na equação anterior, temos

$$YD_k = (1 - \gamma_F) \cdot ((1 - \omega)Y - r_m L_{f_{-1}}) + r_m \cdot L_{f_{-1}} \tag{8}$$

$$YD_k = (1 - \gamma_F) \cdot (1 - \omega)Y - r_m \cdot \gamma_F \cdot L_{f_{-1}} \tag{9}$$

Com isso, podemos encontrar a relação entre endividamento (líquido) capitalista e renda disponível ($\ell_k^\star$)

$$\ell_{ky}^\star = \frac{DL}{YD_k}$$

Substituindo 4 e 9 na relação acima, temos

$$\ell_{ky}^\star = -\frac{L_{f_{-1}}}{Y} \frac{1}{(1 - \gamma_F) \cdot (1 - \omega)} - \frac{-L_{f_{-1}}}{r_m \cdot \gamma_F \cdot L_{f_{-1}}} \tag{10}$$

$$\ell_k^\star = -\frac{L_{f_{-1}}}{Y} \frac{1}{(1 - \gamma_F) \cdot (1 - \omega)} + \frac{1}{r_m \cdot \gamma_F} \tag{11}$$

[3] Ainda estou pensando em quais letrar utilizar na versão final

$$\ell_{ky}^{\star} = \frac{1}{r_m \cdot \gamma_F} - \frac{\ell_{fy^{\star}}}{(1-\gamma_F)\cdot(1-\omega)} \tag{12}$$

Finalmente, substituindo 3 em 12, temos

$$\ell_{ky}^{\star} = \frac{1}{r_m \cdot \gamma_F} - \frac{h^{\star} + \gamma_F \cdot (1-\omega)}{(1-\gamma_F)\cdot(1-\omega)\cdot(g^{\star}-\gamma_F)} \tag{13}$$

Rearranjando e lembrando a definição de $h^{\star}$

$$\ell_{ky}^{\star} = \frac{1}{r_m \cdot \gamma_F} - \frac{g^{\star} \cdot v}{u^{\star}\cdot(1-\gamma_F)\cdot(1-\omega)\cdot(g^{\star}-\gamma_F)} - \frac{\gamma_F}{(1-\gamma_F)\cdot(g^{\star}-\gamma_F)} \tag{14}$$

Nota: Diferenciei as equações seguintes a mão e notei que não me lembro tanto assim de derivada parcial. Então considere como uma primeira tentativa.

Dado que

$$\frac{\partial g^{\star}}{\partial \omega} = 0$$

$$\frac{\partial u^{\star}}{\partial \omega} = 0$$

Podemos avaliar como se dá o endividamento das famílias capitalistas dada uma variação positiva no *wage-share*:

$$\frac{\partial \ell_{ky}^{\star}}{\partial \omega} = -\frac{g^{\star}\cdot v}{(1-\omega)^2 \cdot u^{\star}\cdot(1-\gamma_F)\cdot(g^{\star}-\gamma_F)}$$

Dado $\gamma_F > g^{\star} > 0$, a redução no *wage-share* (simulação 1) faz com que o endividamento capitalista **diminua**

$$\frac{\partial \ell_{ky}^{\star}}{\partial \omega} < 0$$

Isso contradiz a nova versão do modelo enviada em *<2020-11-03 ter>* em que o valor de ω foi de 0.5 para $0.25 (= \omega \cdot \alpha)$

Nota: Removi a derivada parcial da taxa de juros porque

$$\frac{\partial g^{\star}}{\partial r_m} \neq 0$$

Considerações finais

- Talvez precise desenvolver melhor esta última equação
  - Pode ser que seja interessante calcular as derivadas parciais em função dos parâmetros que fizemos os choques na simulação
  - Acho que essa última equação pode ajudar a explicar um resultado que você havia perguntado se temos algumas equação (p. 14 do PDF comentado)
- Não sei dizer em que medida faz sentido tratar de endividamento líquido do pagamento de juros dos depósitos, mas acho que não deve ser muito complicado tratar de endividamento total a partir da equação que desenvolvi
- No primeiro gráfico da segunda linha da figura 6, o endividamento capitalista plotado **não é** líquido do pagamento do juros dos depósitos