2005 kihara biseki final

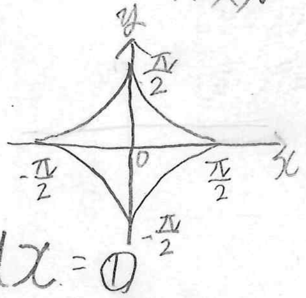
2018/2/4作成

1 (1) アステロイド $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\ (a>0)$
の $0 \leqq t \leqq 2\pi$ でちょうど1周するような
媒介変数表示は、

$$\boxed{\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}}$$ である。

この媒介変数表示を用いてアステロイドの囲む面積を t に対する積分の形で表すと、

$$4 \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} y\,dx$$



$$= 4 \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t\,dx = ①$$

dt にしたい

$$\frac{dx}{\boxed{dt}} = \frac{d(a\cos^3 t)}{dt} = -3a\cos^2 t \cdot \sin t$$

$$dx = -3a\cos^2 t\sin t\,\boxed{dt}$$

$$① = 4 \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t(-3a\underset{\sin t}{\cos^2} t)\,dt$$

$$= 4 \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^4 t(-3a\cos^2 t)\,dt$$

$$= 4 \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-3)a^2\sin^4 t\cos^2 t\,dt$$

(解答の積分は被積分関数の整理以上のことはしないこと)

(2) $\displaystyle\iint_{\substack{0 \leqq x-2y \leqq 1 \\ 0 \leqq 2x+y \leqq 2}} (x-y)\,dx\,dy$ を $\begin{cases} u = x-2y \\ v = 2x+y \end{cases}$

と変数変換すると　u と v で書き直す

ヤコビアン

$$|A| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} 2u = 2x - 4y \\ v = 2x + y \end{cases} \quad (-)$$

$$2u - v = -5y$$

$$y = \frac{-2u+v}{5}$$

$$\begin{aligned} 2u &= x - 2y \\ +)\ 2v &= 4x + 2y \end{aligned}$$

$$u + 2v = 5x$$

$$x = \frac{u+2v}{5}$$

より $\begin{cases} x = \dfrac{u+2v}{5} \\ y = \dfrac{-2u+v}{5} \end{cases}$ なので

ヤコビアンは

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5} - \frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{1}{5}$$

$$与式 = \iint_{\substack{0 \leqq u \leqq 1 \\ 0 \leqq v \leqq 2}} \left(\frac{u+2v}{5} - \frac{-2u+v}{5}\right)\frac{1}{5}\,du\,dv$$

$$= \iint_{\substack{0 \leqq u \leqq 1 \\ 0 \leqq v \leqq 2}} \frac{3u+v}{5}\cdot\frac{1}{5}\,du\,dv$$

$$= \iint_{\boxed{\substack{0 \leqq u \leqq 1 \\ 0 \leqq v \leqq 2}}} \boxed{\frac{3u+v}{25}}\,du\,dv$$

となる

2005 kihara bisekiⅡ final

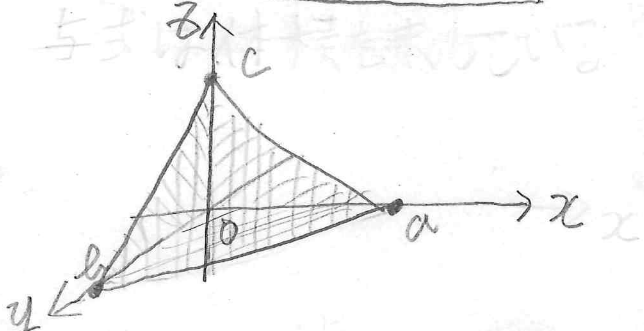
3)

(ア) $\iiint_K dx\,dy\,dz$

ただし $K: x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0$

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \leqq 1$ …①

解1	積分しないパターン



Kが表す範囲は、

$x, y = 0$ のとき ①に代入して

$z \leqq c$ …②

$y, z = 0$ のとき ①に代入して

$x \leqq a$ …③

$z, x = 0$ のとき ①に代入して

$y \leqq b$ …④

つまり、

②より $x=0, y=0$ である z 軸上では $z=c$ が ①の境界

③より $y=0, z=0$ である x 軸上では $x=a$ が ①の境界

④より $z=0, x=0$ である y 軸上では $y=b$ が ①の境界

となる。①はこの間の空間を表しているので上図のような範囲を表している。

与式は、この範囲の体積を表しているので、

与式 = 三角錐の体積

$= (\text{底面}) \times (\text{高さ}) \times \frac{1}{3}$

$= \left(\frac{1}{2}ab\right) \times c \times \frac{1}{3}$

$= \frac{abc}{6}$

解2	ふつうに解くパターン

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ を x について変形して $x = -\left(\frac{a}{b}\right)y + a\left(1 - \frac{z}{c}\right)$ …①

y について変形して

$y = b - \frac{b}{a}x - \frac{b}{c}z$ …②

z について変形して

$z = c - \frac{c}{a}x - \frac{c}{b}y$ …③

定理 $V = \{(x, y, z) : \phi_1(x,y) \leqq z \leqq \phi_2(x,y),\ (x,y) \in D\}$

$D = \{(x, y) : \psi_1(x) \leqq y \leqq \psi_2(x),\ a \leqq x \leqq b\}$

のとき

$\iiint_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$

$= \iint_D \left\{ \int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right\} dx\,dy$

であり、

2重積分の累次積分をとると

$\iint_D \left\{ \int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right\} dx\,dy$

$= \int_a^b \left\{ \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} \left\{ \int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right\} dy \right\} dx$

$= \int_a^b dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} dy \int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$ …④

④に①,②,③を適用して、

$$\int_0^c dz \int_0^{b(1-\frac{z}{c})} dy \int_0^{-(\frac{a}{b})y+a(1-\frac{z}{c})} dx$$

$$= \int_0^c dz \int_0^{b(1-\frac{z}{c})} \left\{ -\frac{a}{b}y + a\left(1-\frac{z}{c}\right) \right\}$$

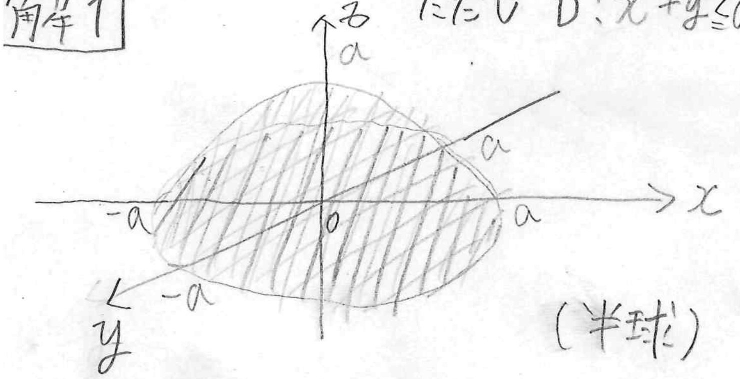
$$= \int_0^c dz \left(\frac{ab}{2}\right)\left(1-\frac{z}{c}\right)^2$$

$$= \frac{abc}{6}$$

(イ) $\iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy$

ただし $D: x^2+y^2 \leqq a^2$

$\boxed{解1}$



(半球)

Dが表す範囲は

$x^2+y^2 \leqq a^2$ より

原点を中心とした半径aの円の内部。

$\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ が表わすのは、半球のある地点での高さ。

よって、与式は上図のような範囲の体積を表している。

与式 = 半球の体積

$= \frac{1}{2} \times$ 球の体積

$= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi a^3$

$= \frac{2}{3}\pi a^3$

$\boxed{解2}$ 与式を極座標に変換してとく。

$$与式 = \int_0^a \int_0^{2\pi} \underbrace{\sqrt{a^2-r^2}}\, r\,dr\,d\theta \quad =①$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$ とおくと

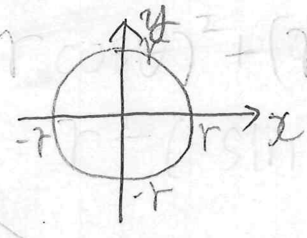
$$\sqrt{a^2-x^2-y^2}$$

$$= \sqrt{a^2-(r\cos\theta)^2-(r\sin\theta)^2}$$

$$= \sqrt{a^2-r^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}$$

$$= \sqrt{a^2-r^2}$$

$$x^2+y^2 \leqq a^2$$



円上を一周するので

$$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$$

$$① = \int_0^a \sqrt{a^2-r^2}\,dr\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)$$

$$= 2\pi \int_0^a \sqrt{a^2-r^2}\,dr$$

$$= \frac{2}{3}\pi \left[-(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^a$$

$$= \frac{2}{3}\pi a^3$$

@gpioblink

4)
$$\frac{dz}{dt} = 2f_x(2t+1, t^2) + 2t f_y(2t+1, t^2)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left\{2f_x(2t+1, t^2) + 2t f_y(2t+1, t^2)\right\}$$

$$= \frac{d}{dt}2f_x(2t+1, t^2) + \frac{d}{dt}2t f_y(2t+1, t^2)$$

$$= \frac{d}{dt}2f_x(2t+1, t^2) + 2f_y(2t+1, t^2) + 2t\frac{d}{dt}f_y(2t+1, t^2)$$

$\boxed{\frac{d}{dt}f(t)g(t) = f'(t)g(t) + f(t)g'(t) \text{ を使用}}$

$$= 4f_{xx}(2t+1, t^2) + 4t f_{xy}(2t+1, t^2) + 2f_y(2t+1, t^2) + 4t f_{yx}(2t+1, t^2) + 4t^2 f_{yy}(2t+1, t^2)$$

$$= 4f_{xx}(2t+1, t^2) + 8t f_{xy}(2t+1, t^2) + 2f_y(2t+1, t^2) + 4t^2 f_{yy}(2t+1, t^2)$$

$\boxed{\text{ヤングの定理より}}$

(5) 3つの2次関数

$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x + y + 1$

$g(x, y) = x^2 + xy - 2y^2 - 5x + 2y - 3$

$h(x, y) = -2x^2 + 6xy - 5y^2 + 2x - 2y + 1$

のうち極値をもたないものは $\boxed{g(x, y)}$ である。また、$\boxed{f(x, y)}$ は $(x, y) = \boxed{\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)}$ で最小値 $\boxed{\frac{2}{3}}$ をもつ。

多変数関数の極値の求め方

$f(x, y)$ の場合（2変数関数）

① ヘッセ行列

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix}$$

を求める。

② 極値であるための必要条件である偏微分 = 0 を解く。

③ ②で出た極値の候補のそれぞれの (x, y) について①で出した H に代入し、左上の1個($f_{xx}(x, y)$)と、全体の行列式がどちらも正なら極小、負なら極大を表す。

$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x + y + 1$

$f_x = 2x + y + 1$

$f_y = 2y + x + 1$

$f_{xx} = 2 \quad f_{xy} = 1$

$f_{yx} = 1 \quad f_{yy} = 2$

より ヘッセ行列 $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

偏微分 = 0 のとき

$$\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ 2y + x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} & 2x + y + 1 = 0 \\ -) & 2x + 4y + 2 = 0 \\ \hline & -3y = 1 \end{array}$$

$y = -\frac{1}{3}$

$2x = -\frac{2}{3} \quad x = -\frac{1}{3} \quad x = -\frac{1}{3}$

より $(x, y) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

$(x, y) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ のとき

ヘッセ行列 $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$2 > 0$、$4 - 1 = 3 > 0$ より極小

よって
$f(x,y)$は $(x,y)=\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$で極小値
$f\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}$
をとる。

$g(x,y)=x^2+xy-2y^2-5x+2y-3$

$g_x=2x+y-5$　$g_y=-4y+x+2$

$g_{xx}=2$　$g_{xy}=1$

$g_{yx}=1$　$g_{yy}=-4$

ヘッセ行列　$H=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -4\end{pmatrix}$

(どうせHは何も入れても変わらないので
③を先にやろうとおもいます)

$|H|=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -4\end{vmatrix}=-8-1=-9<0$

$|g_{xx}|=2>0$

より 極値かどうかは不明。

$h(x,y)=-2x^2+6xy-5y^2+2x-2y+1$

$h_x=-4x+6y+2$

$h_y=-10y+6x-2$

$h_{xx}=-4$　$f_{xy}=6$

$f_{yx}=6$　$f_{yy}=-10$

$|H|=\begin{vmatrix}-4 & 6\\ 6 & -10\end{vmatrix}=40-36=4>0$

$$\begin{cases}-4x+6y+2=0\\ -10y+6x-2=0\end{cases}$$

$-6x+9y+3=0$
$+)\ 6x-10y-2=0$

$-y+1=0$

$y=1$

$6x=12$

$x=2$

$h_{xx}=-4<0,\ |H|>0$

より極大をとる。
よって$h(x,y)$は$(x,y)=(1,2)$で
極大値$h(2,1)=4+2+1+2+1+1$
$=11$をとる。

@gpioblink

2005 kihara biseki II final

2 (1) $z = x^3 - xy + y^2$ の極大・極小

$f(x, y) = x^3 - xy + y^2$ とおくと、

$f_x = 3x^2 - y \qquad f_y = 2y - x$

$f_{xx} = 6x \qquad f_{xy} = -1$

$f_{yx} = -1 \qquad f_{yy} = 2$

よりヘッセ行列 $H = \begin{pmatrix} 6x & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

偏微分 $= 0$ となるとき、

$$\begin{cases} 3x^2 - y = 0 \\ 2y - x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rr} & 6x^2 - 2y = 0 \\ + \big) & -x + 2y = 0 \\ \hline & 6x^2 - x = 0 \end{array}$$

$$x(6x - 1) = 0$$

$$x = 0,\ \frac{1}{6} \qquad y = 0,\ \frac{1}{12}$$

より $(x, y) = (0, 0),\ \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$

$(x, y) = (0, 0)$ のとき

$$|H| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

より極値かは不明

$(x, y) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$ のとき

$$|H| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 > 0$$

より極値

$$f_{xx} = 6x = 6 > 0 \text{ より}$$

極小値

よって $z = x^3 - xy + y^2$ は

$(x, y) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$ で極小値

$$\frac{\cancel{1}\,2}{\cancel{216}\,432} - \frac{\cancel{1}\,6}{\cancel{72}\,432} + \frac{\cancel{1}\,3}{\cancel{144}\,432} = -\frac{1}{432}$$

をとり、極大値はとらない。

(2) (1)で求めた極小値は最小値か。

$\boxed{解1}$ 反例を示す

$$f(1, 0) = -1 < -\frac{1}{432}$$

となる反例があるので

最小値ではない。

$\boxed{解2}$ 式の極限を考える

$$\lim_{x \to -\infty} f(x, 0) = \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$

となるので最小値ではない。

@gpioblink

2005 kihara hiseki II Sim…

3 $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \ (|x|<1)$ を用いて次の関数を整級数展開し、成り立つ範囲をかけ。

$$\frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n \ (|t|<1) \quad \cdots ①$$

(1) $\frac{1}{1-2x}$

①に $t=2x$ を代入して

$$\frac{1}{1-2x}=\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}2^n x^n$$

範囲にも $t=2x$ を代入して

$$|t|<1$$
$$|2x|<1$$
$$-1<2x<1$$
$$-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2} \quad \therefore |x|<\frac{1}{2}$$

よって $\frac{1}{1-2x}=\sum_{n=0}^{\infty}2^n x^n \ \left(|x|<\frac{1}{2}\right)$

(2) $\frac{1}{(1-x)^2}$

①の両辺を微分して

$$\left(\frac{1}{1-t}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}t^n\right)' \ (|t|<1)$$

$$\left(\frac{1}{1-t}\right)'=((1-t)^{-1})'=-(1-t)^{-2}\cdot(-1)$$
$$=\frac{1}{(1-t)^2}$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}t^n\right)'=(1+t+t^2+\cdots+t^n+\cdots)'$$
$$=1+2t+3t^2+\cdots+nt^{n-1}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}nt^{n-1}$$

収束半径は
$I=\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ のとき $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ で表わされるから、

定理

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$
$$=1$$ よって成り立つ範囲は $|r|<1$

よって $\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1} \ (|x|<1)$

(3) $\frac{1}{1+x^2}$

①に $t=-x^2$ を代入して

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

収束半径は

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{(-1)^{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}|-1|$$
$$=1$$ よって成り立つ範囲は $|r|<1$

よって $\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} \ (|x|<1)$

2005 kihara bisekiII final

(4) $\tan^{-1} x$

(3)の両辺をxについて積分すると、

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} dx$$

$$(|x|<1)$$

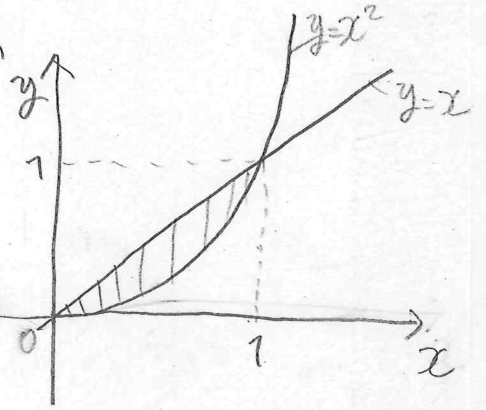
$$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

@gpioblink

$\boxed{4}$ (1) $\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$

$D: x^2 \leqq y \leqq x$

Dの範囲は



上図より　$0 \leqq x \leqq 1,\ x^2 \leqq y \leqq x$

よって $\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$

$= \int_0^1 dx \int_x^{x^2} (x^2+y^2)\,dy$

$= \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=x^2}^{y=x} dx$

$= \int_0^1 \left(-x^4 - \frac{x^6}{3} + x^3 + \frac{x^3}{3}\right) dx$

$= \int_0^1 \left(-\frac{x^6}{3} - x^4 + \frac{4x^3}{3}\right) dx$

$= \left[-\frac{x^7}{21} - \frac{x^5}{5} + \frac{4x^4}{12} \right]_0^1$

$= \frac{\cancel{1}\,35}{\cancel{3}\,105} - \frac{\cancel{1}\,5}{\cancel{21}\,105} - \frac{\cancel{1}\,21}{\cancel{5}\,105}$

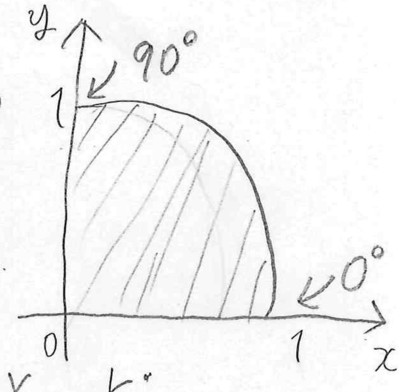
$= \frac{9}{105}$

(2) $\iint_D (x^2+2y^2)\,dx\,dy$

$D: x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2+y^2 \leqq 1$

Dの範囲は

半径1の円の
$x \geqq 0,\ y \geqq 0$
部分。



極形式に直すと、　K:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad \begin{array}{l} 0 \leqq r \leqq 1 \\ 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2} \end{array}$$

よって $\iint_D (x^2+2y^2)\,dx\,dy$

$= \iint_K (r^2\cos^2\theta + 2r^2\sin^2\theta)\, r\,dr\,d\theta$

$= \iint_{\substack{0 \leqq r \leqq 1 \\ 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}}} r^3(1+\sin^2\theta)\,dr\,d\theta$

$= ①$

$x = x(u,v)$、$y = y(u,v)$ により、
xy平面上の領域Dがuv平面上の
領域Eに移されるとき、
ヤコビアンの絶対値を $|\det(J)|$ で表すと

$|\det(J)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial x(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial y(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial y(u,v)}{\partial v} \end{vmatrix}$

$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_E f(x(x,y), y(u,v))\,|\det(J)|\,du\,dv$

今回、ヤコビアンは $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$

により面積要素をr倍している

2005 kihara bisekiⅡ final

$$① = \int_0^1 r^3 dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\sin^2\theta) d\theta$$

$$= \int_0^1 r^3 dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3-\cos 2\theta}{2} d\theta$$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos 2\theta &= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ \cos 2\theta &= 1 - 2\sin^2\theta \\ \sin^2\theta &= \frac{1-\cos 2\theta}{2} \end{aligned}}$$

$$= \left[\frac{1}{4} r^4\right]_0^1 \cdot \left[\frac{3}{2}\theta - \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}\pi = \frac{3}{16}\pi$$

@gpioblink

5 収束・発散を調べよ　　@gpioblink

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{n}}$ は $\boxed{\text{発散}}$ する。

∵ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}} = \infty$ より

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{n^2+2n+3}$ は $\boxed{\text{収束}}$ する。

∵ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^{\frac{1}{3}}}{n^2+2n+3}}{\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+2n+3}$

$\displaystyle = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}} = 1 \neq 0$

正項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ において

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \underset{(\text{定数})}{k} \neq 0$ のとき

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ と $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ の収束・発散は一致する

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[3]{n}}{n^2+2n+3}$ は $\boxed{\text{収束}}$ する。

(2)より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{n^2+2n+3}$ は収束だが

5、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{n^2+2n+3} = 0$。

$\displaystyle a_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2+2n+3}$ とおくと、

$\{a_n\}$ が単調減少数列で、

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ なので

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ は収束する。

2005 kihara bisekiII final

$\boxed{6}$ $x, y, z \geqq 0$、
$x+y+z=6$ のとき
x^3y^2z の最大値は？

x^3y^2z から z を消去した式
$\boxed{x^3y^2(6-x-y)}$ を $f(x,y)$ と
おいて、x, y の関数とみると
その定義域は $\boxed{6-x-y \leqq 6}$

$z \geqq 0$ より
$0 \leqq 6-x-y$
$x \geqq 0$、$y \geqq 0$ より
$6-x-y \leqq 6$

となり、明らかに平面 $\mathbb{R}^2$ の有界閉集合なので、$f(x,y)$ は最大値をもつことがわかる。

定義域の境界では $f(x,y)$ は明らかに値 $\boxed{0}$ をとる。

内部では $\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases}$ の解

$f(x,y) = x^3y^2(6-x-y)$
$= 6x^3y^2 - x^4y^2 - x^3y^3$

$f_x(x,y) = 18x^2y^2 - 4x^3y^2 - 3x^2y^3$
$= x^2y^2(18-4x-3y)$

$f_y(x,y) = 12x^3y - 2x^4y - 3x^3y^2$
$= x^3y(12-2x-3y)$

$\begin{cases} x^2y^2(18-4x-3y)=0 \\ x^3y(12-2x-3y)=0 \end{cases}$

$18-4x-3y=0$
$-)\ 12-2x-3y=0$
$6-2x=0 \qquad x=3$
$18-4\cdot 3=3y \qquad y=2$

$(x,y)=\boxed{(3,2)}$ でとる値
$f(3,2) = x^3y^2(6-x-y)$
$= 27\cdot 4\cdot (6-3-2)$
$= 108$

$\boxed{108}$ が唯一の極値の候補である。この値は正なので $f(x,y)$ の最大値は、(境界でなく)内部でとられることがわかり、内部での唯一つの極値の候補であるこの値が最大値に他ならない。

@gpioblink

2005 kihara bisekiⅡ final