

Projeto CDIG 2020: O vírus CODIG – Grupo 23

Tomás Martins Araújo
CDIG, 3MIEEC_A2
FEUP – Faculdade de Engenharia da
Universidade do Porto
Porto, Portugal
up201704738@fe.up.pt

Bernardo Campos Leichsenring Franco
CDIG, 3MIEEC_A2
FEUP – Faculdade de Engenharia da
Universidade do Porto
Porto, Portugal
up201707073@fe.up.pt

Resumo—Este relatório incide sobre a primeira parte do projeto da unidade curricular CDIG relativa a Sistemas de Espaços Amostrados ('*Discrete Time Systems*'). É analisado um modelo compartmental, neste caso o modelo SIR, que modela o comportamento dinâmico de uma doença no seio de uma população.

Palavras-chave — População, Infetados, Suscetíveis, Recuperados, Controlo, Restrições.

I. INTRODUÇÃO

Nos dias que correm, enfrentamos uma pandemia que levou à aplicação de diversas medidas de prevenção, entre elas a suspensão das aulas presenciais, com o objetivo de travar a sua propagação. É impossível não questionarmos a proporcionalidade das medidas aplicadas à situação enfrentada. Daí que seja importante compreender qual o comportamento esperado da disseminação do vírus na população e os efeitos provocados por medidas semelhantes às que têm sido aplicadas no seu combate.

O presente relatório inicia-se com uma breve análise de estratégias mais banais de controlo que poderiam ser aplicadas em contexto teórico, de modo a poder compreender as suas limitações. O objetivo final será a criação de um modelo, próximo do que é possível aplicar na realidade, de controlo das restrições aplicadas às populações.

Para o propósito, baseamo-nos no modelo epidemiológico de compartimentos mais simples, o modelo SIR, proposto por Kermack e McKendrick em 1927 e de utilização bastante comum para demonstrações de propagação de doenças num âmbito mais pedagógico e simplificado.

O modelo consiste em 3 compartimentos: **S** (Suscetíveis), **I** (Infetados) e **R** (Recuperados). A doença infeta os suscetíveis. Os infetados eventualmente irão recuperar, alterando ao longo do tempo o valor de S, I e R, mas mantendo constante a relação $N=S+I+R$, com N igual à dimensão da população.

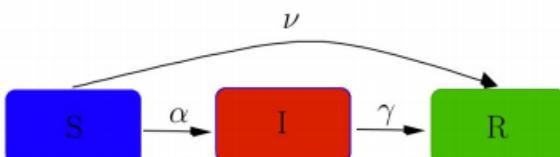


Figura 1 - Modelo SIR

A dinâmica de propagação é expressa por um sistema de 3 equações diferenciais ordinárias:

Guilherme Pereira Pinheiro
CDIG, 3MIEEC_A2
FEUP – Faculdade de Engenharia da
Universidade do Porto
Porto, Portugal
up201703867@fe.up.pt

Francisco Tiago de Espírito Santo e Caetano
CDIG, 3MIEEC_A2
FEUP – Faculdade de Engenharia da
Universidade do Porto
Porto, Portugal
up201705031@fe.up.pt

$$\dot{S}(t) = -\alpha S(t) - \nu S(t)$$

$$\dot{I}(t) = \alpha S(t) - \gamma I(t)$$

$$\dot{R}(t) = \nu S(t) + \gamma I(t)$$

Neste conjunto de equações, são apresentados α , que corresponde à taxa de transição entre S e I, γ , que representa a taxa de transição entre I e R e, por fim, ν , a taxa de vacinação que converte automaticamente S em R. Os dois primeiros podem ser representados por:

$$\alpha = \frac{R_t \cdot I(t)}{T_{inf}}; R_t = R_0 - u$$

$$\gamma = \frac{1}{T_{inf}}$$

O parâmetro R_t corresponde ao número de reprodução, ou seja, o número de pessoas que uma pessoa infetada irá contagiar, assumindo que as outras pessoas não estão infetadas e não foram vacinadas. Pode ser controlado por u , que corresponde às medidas de contenção e que varia entre 0 e 2. R_0 toma o valor de 2,4 nesta simulação. T_{inf} , por seu turno, é a duração média da infecção em dias, assumindo inicialmente o valor 6.

II. SIMULAÇÃO E DISCUSSÃO DE ALGUMAS ESTRATÉGIAS

Este capítulo refere-se ao primeiro ponto do enunciado fornecido. Iremos analisar algumas das situações propostas e tiraremos algumas conclusões no final das respetivas análises. Em primeiro lugar, vamos visualizar o comportamento dos 4 cenários propostos no script original de Octave/MATLAB. Os parâmetros que podem ser alterados, tal como a taxa de vacinação, a duração média da infecção e a intensidade das medidas de contenção, permanecerão com os seus valores de origem.

O cenário 1 consiste em não aplicar qualquer medida de contenção, permitindo a evolução natural da situação epidemiológica. Como podemos observar, isto provoca um pico bastante duradouro e elevado, com um número de infetados bastante superior à capacidade que os serviços de saúde conseguem suportar. O modelo não permite a contabilização direta de mortes, mas é fácil concluir que esta situação provocaria uma elevada quantidade de mortalidade, mediante a necessidade de acompanhamento médico.

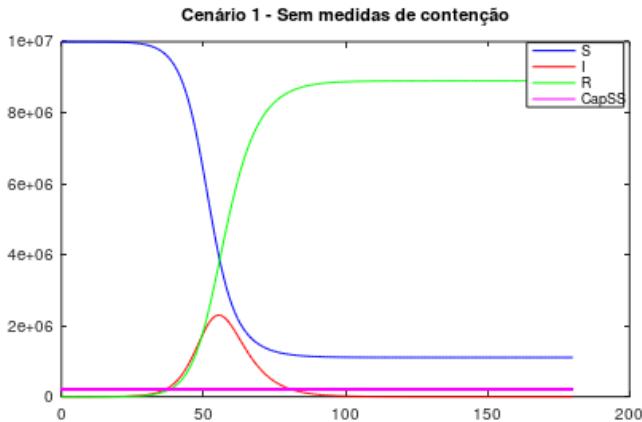


Figura 2 - Cenário 1

O cenário 2 consistem em aplicar medidas de contenção de intensidade constante a partir do 35º dia da simulação. Verifica-se um achatamento claro da curva de infetados, apesar de, numa extensão de cerca de 50 dias, esta se encontrar bastante próxima do limite da capacidade dos serviços de saúde. Surgem também questões práticas, como as consequências de manter medidas de contenção constantes durante 145 dias.

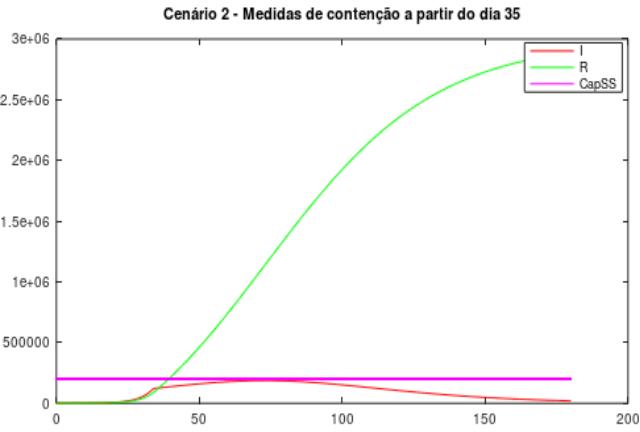


Figura 3 - Cenário 2

O cenário 3 apresenta uma possibilidade de resolução do problema apontado à longa duração das medidas de contenção, levantando todas as medidas de contenção ao 90º dia da simulação. É ineficaz, uma vez que surge de imediato um segundo pico que, ainda que inferior ao pico do cenário 1 (há um menor número de habitantes suscetíveis à infecção), está bastante acima da capacidade dos serviços de saúde, que entrariam novamente em risco de colapso.

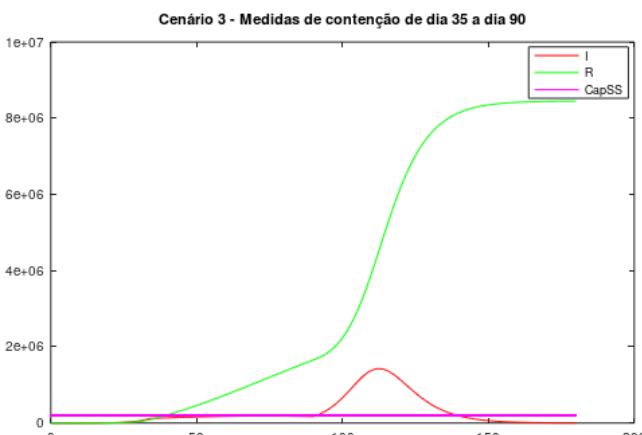


Figura 4 - Cenário 3

Por fim, o cenário 4, que aplica medidas de contenção de intensidade constante desde o 35º ao 90º dia e, após esse período, apenas quando o número de infetados atinge 80% da capacidade dos serviços de saúde. Estas medidas conseguem manter o número de infetados abaixo do limite pretendido, contudo seriam bastante complicadas de impor numa situação real, não seria sustentável autorizar que as pessoas pudessem agir normalmente durante 5 dias para depois lhes exigir o confinamento nos 5 dias seguintes. Isto manifesta-se na curva azul, relativa ao controlador que simula as medidas de contenção e que oscila entre os valores máximo e mínimo.

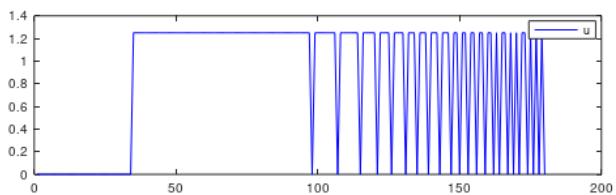
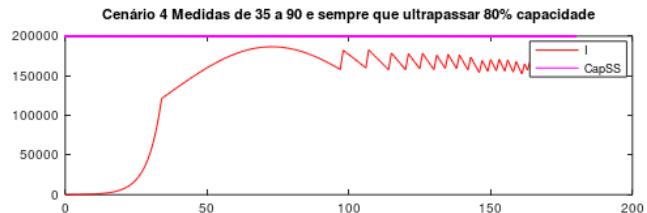


Figura 5 - Cenário 4

Com base nestes cenários podemos tirar conclusões semelhantes ao que tem sido aconselhado pelas organizações de saúde. Em primeiro lugar, quanto mais cedo forem adotadas as medidas necessárias para a mitigação, melhor será a capacidade de resposta do sistema de saúde a todos os que requerem cuidados médicos. Apesar de o sempre referido “achatamento da curva” provocar uma prolongação do combate ao vírus, é a única solução sustentável e capaz de salvar mais vidas, se não existir, tal como iremos ver no ponto seguinte, uma vacina eficaz. O controlador final que iremos implementar procura ser uma atualização do cenário 4, mas com uma curva do parâmetro u mais suave e, consequentemente, passível de ser aplicada na realidade.

A. Taxa de vacinação positiva

Para a análise deste parâmetro, foi alterado, no ficheiro Octave/MATLAB que nos foi fornecido, a taxa de vacinação, representada pela variável global v e que se encontrava na zona dos parâmetros correspondentes à modelação da simulação: *Compartmental Model parameters*. A taxa de vacinação escolhida e aplicada foi de 0,01, ou seja, 1%. Isto traduz-se numa vacinação diária de 1% da população que se encontra suscetível e que passa de imediato a pertencer ao compartimento dos recuperados.

Os resultados obtidos no cenário 1 revelaram de imediato uma melhoria bastante significativa no que toca à curva dos infetados, sendo que para isto contribuiu bastante a redução inicial substancial do número de pessoas suscetíveis, que passaram a ser imunes antes da zona de maior crescimento surgir, aproximadamente no 35º dia. A curva tem um pico aproximadamente no limite da capacidade dos serviços de saúde.

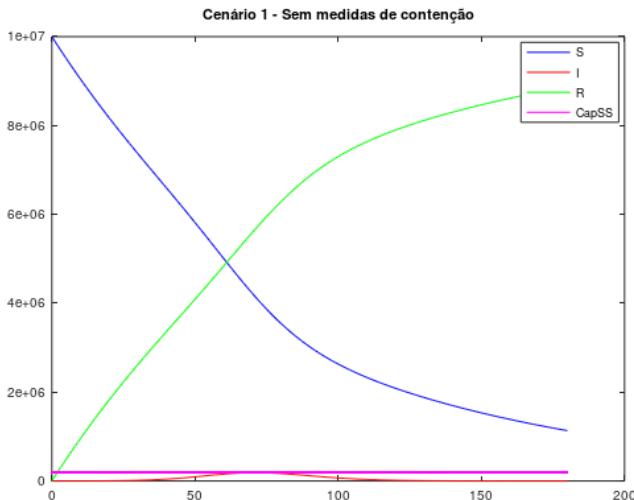


Figura 6 - Cenário 1 com taxa de vacinação de 1%

Aplicar as medidas apenas do 35º ao 90º dia parece surtir o mesmo efeito do que aplicar sem interrupção desde o 35º dia, tal como as imagens seguintes comprovam. São indistinguíveis e a curva de infetados não regista nenhum pico digno de nota nesta escala.

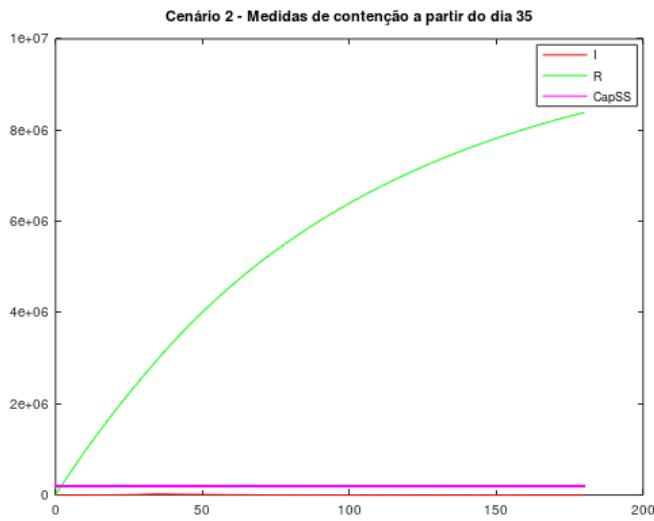


Figura 7 - Cenário 2 com taxa de vacinação de 1%

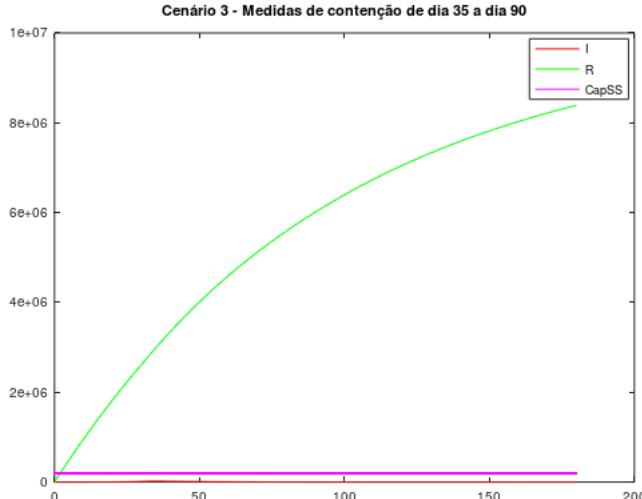


Figura 8 - Cenário 3 com taxa de vacinação de 1%

A razão para este comportamento é evidente quando analisamos o cenário 4, que nos comprova que a conjugação entre a vacinação e as medidas de contenção levam à

estagnação completa da epidemia ao fim de 90 dias, nunca sendo necessário utilizar novamente as medidas de contenção. Até porque a capacidade de 80% dos serviços de saúde não fica perto de ser alcançada.

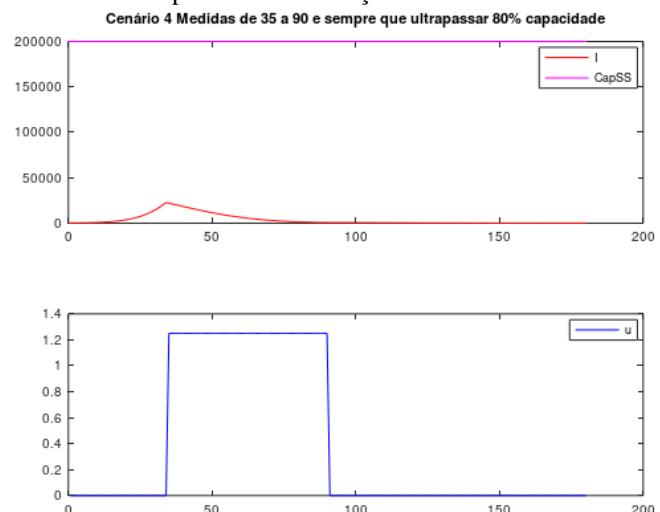


Figura 9 - Cenário 4 com taxa de vacinação de 1%

Desta forma, podemos concluir que a vacinação em massa é, provavelmente, a melhor solução para combate ao vírus na medida em que chega mesmo a evitar que sejam necessárias as medidas de contenção. Quando conjugada com medidas de contenção, mesmo mais ligeiras ou mais curtas, não surge uma segunda onda e o seu comportamento é ainda menos perigoso.

B. Tratamento que encorte a duração média da infecção

Apresentam-se agora os resultados de um avanço no tratamento da doença, que permita reduzir o tempo de recuperação. Considerando que os 6 dias iniciais se reduzem apenas a 4 dias, alteramos, à semelhança do processo realizado para a variável global v , a variável T_{inf} que corresponde diretamente ao parâmetro T_{inf} no script fornecido. Neste caso é importante relembrar que, a equação do número de reprodução, $R_t = R_0 - u$, não depende de T_{inf} , ou seja, a quantidade de transmissões da infecção de um para outro indivíduo manter-se-á constante. Apesar de isto ser contraintuitivo (em teoria uma menor duração da infecção levaria a menos contactos entre indivíduos em que pudesse acontecer uma transmissão da doença), segue à risca a formulação do problema.

Assim, pode afirmar-se que cada indivíduo infetado irá infetar o mesmo número de pessoas (R_t) num espaço de tempo mais curto. Isto leva-nos a prever que o pico de infetados seja atingido mais rapidamente, em qualquer um dos cenários.

Como podemos, então, observar no cenário 1, a diminuição da duração média da infecção resulta não só numa duração mais curta do pico, mas também numa antecipação do mesmo. O crescimento inicial é muito mais rápido e podemos ver que ao fim de 30 dias já estamos próximos do pico.

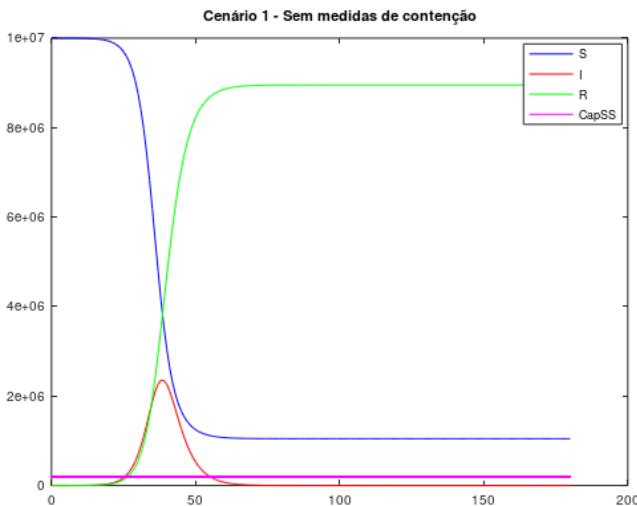


Figura 10 - Cenário 1 com tempo de recuperação de 4 dias

Assim, aplicar as medidas de contenção apenas após o dia 35 não provoca grande efeito, o que é evidenciado nos cenários 2 e 3 onde poucas diferenças são notáveis. Note-se, no entanto, que esta antecipação do pico resulta na ausência duma segunda onda no cenário 3. Apesar disso, a capacidade dos serviços de saúde é drasticamente ultrapassada durante um período demasiado longo.

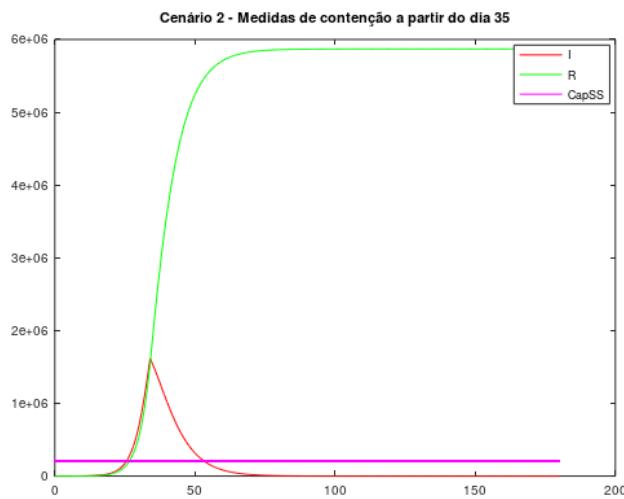


Figura 11 - Cenário 2 com tempo de recuperação de 4 dias

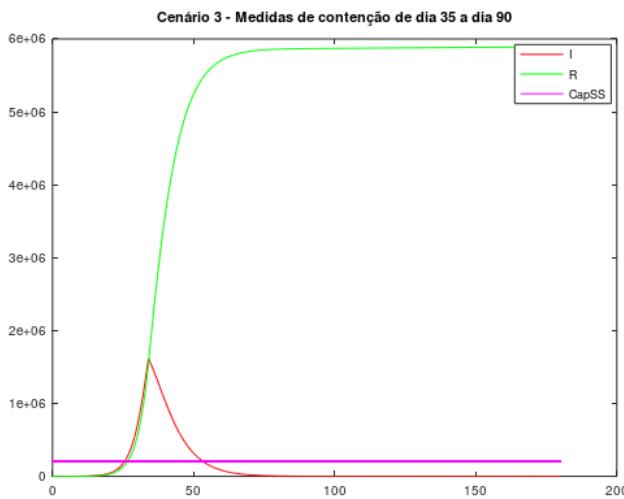


Figura 12 - Cenário 3 com tempo de recuperação de 4 dias

O cenário 4 permite visualizar com mais detalhe como a curva de infetados se antecipa às medidas de contenção, permitindo entender graficamente que a sua falha se centra, essencialmente, numa questão de *timing*.

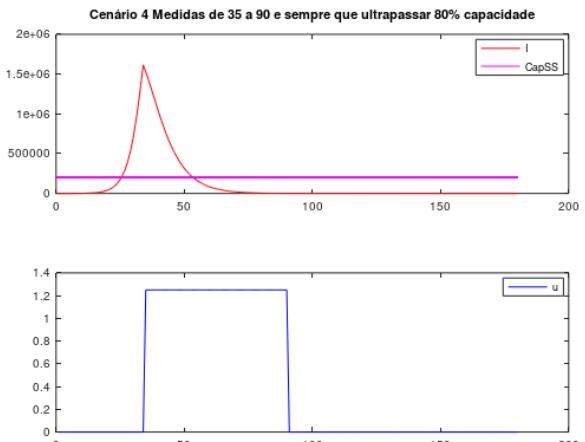


Figura 13 - Cenário 4 com tempo de recuperação de 4 dias

Em suma, é possível obter um resultado mais positivo com um tratamento que encurte a duração da infecção (o pico é notoriamente menor e a curva é menos longa), mas as medidas de contenção teriam de ser forçosamente antecipadas. Desta forma, para além de conseguirmos recuperar os infetados mais rapidamente, também evitariamos sobrecarregar o sistema de saúde com novos infetados.

C. Intensidade e duração das medidas de contenção

Foram feitos vários comentários ao longo dos pontos anteriores acerca de possíveis alterações que poderiam ser feitas às medidas de contenção e aos efeitos que se verificariam. Neste ponto, optamos por propor e testar alterações de cenários ainda simples, tendo em vista o cenário final, que engloba um sistema realimentado para um controlo mais eficiente do indicador das medidas a aplicar.

O primeiro cenário proposto, apelidado de cenário 2.1, consiste num cenário semelhante ao cenário 2, mas com uma maior intensidade nas medidas aplicadas. Foi escolhido $u=1,5$, sendo q os efeitos foram visíveis. O decrescimento do número de infetados após a aplicação das medidas é quase imediato e muito acentuado. No entanto, estamos a sugerir medidas ainda mais fortes, de longa duração, o que não é necessariamente desejável.

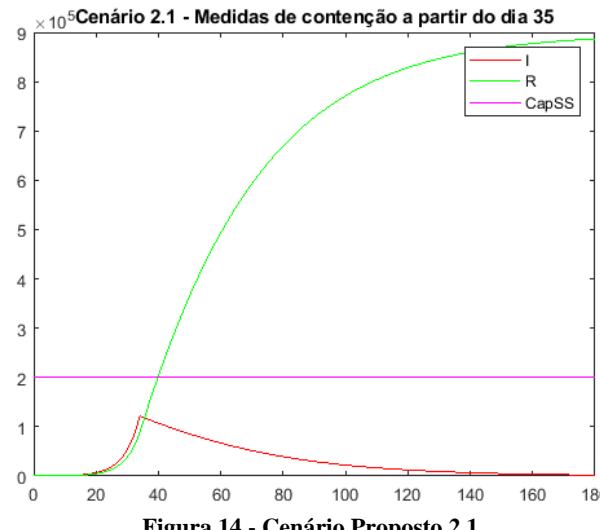


Figura 14 - Cenário Proposto 2.1

Segue-se o cenário 3.1, sugestão de alteração do cenário 3, tendo em vista anular o surgimento, ou pelo menos abater, da segunda onda de infetados. Propõe-se que a partir do 90º dia seja aplicada uma diminuição linear das medidas de contenção, definidas por $u=1,25$ entre o 35º e o 90º dias. O objetivo seria atingir $u=0,75$ no fim da simulação, ou seja, no 180º dia. Este comportamento pode ser obtido através do seguinte processo matemático:

$$u = mk + b$$

$$m = \frac{0,75 - 1,25}{180 - 90} = -\frac{1}{180}$$

$$b = 1,25 - 90 \cdot m = 1,75$$

$$\text{Para } k > 90: u[k] = -\frac{k}{180} + 1,75$$

Começa a surgir um pequeno crescimento, perto da parte final da simulação, mas o risco de uma segunda onda com um pico de dimensões substanciais parece ter sido anulado. A capacidade dos serviços de saúde não é ultrapassada.

Cenário 3.0.5 - Medidas de contenção de dia 35 a dia 90 com diminuição linear

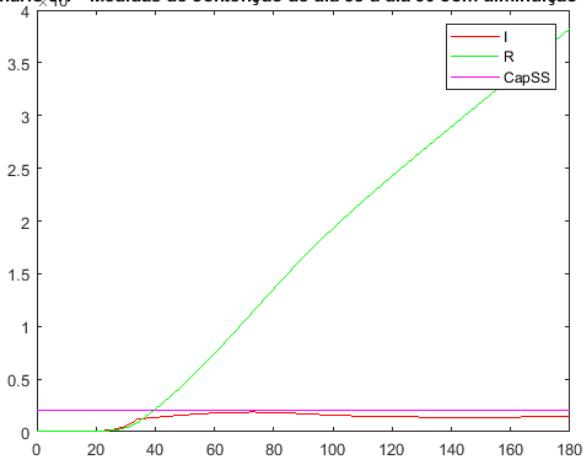


Figura 15 - Cenário Proposto 3.1

O último cenário proposto, o cenário 4.1, consiste em adaptar o mecanismo de resposta do cenário 4 após o 90º dia. Ao invés de apresentar uma resposta binária neste período, construiu-se um simples controlador proporcional que assume uma intensidade $u=1,25$ quando o número de infetados é igual a 80% da capacidade dos serviços de saúde e valor nulo quando não se verifica a existência de infetados. A componente em dente de serra da curva original do cenário 4 é anulada, registando-se uma curva mais suave e que decresce mais rapidamente, sem ultrapassar a capacidade dos serviços de saúde. A equação proposta para o sistema para $k>90$ é a seguinte:

$$u[k] = \frac{I[k] \cdot 1,25}{0,8 \cdot \text{CapSS}}$$

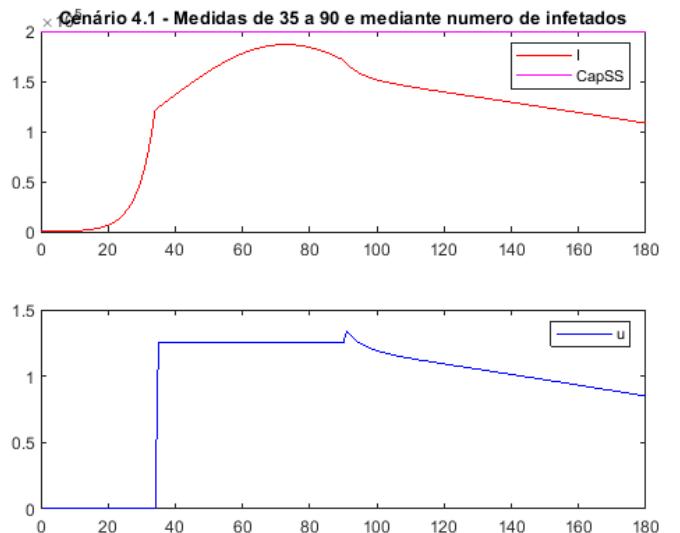


Figura 16 - Cenário Proposto 4.1

III. PONTO DE FUNCIONAMENTO E LINEARIZAÇÃO DO SISTEMA

Assuma-se um ponto de funcionamento para o sistema caracterizado por $(S,I,R)=(S^*,I^*,R^*)$. Para este ponto iremos determinar o valor de controlo U que anula a variação do número de infetados, ou seja:

$$\begin{aligned} \frac{dI(t)}{dt} = 0 \text{ representa variação anulada.} \\ \frac{dI(t)}{dt} = 0 \Leftrightarrow \alpha S^* - \gamma I^* = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{R_t}{T_{\text{inf}}} \cdot \frac{I^*}{N} \cdot S^* - \frac{I^*}{T_{\text{inf}}} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{R_o - U^*}{T_{\text{inf}}} \cdot \frac{I^*}{N} \cdot S^* - \frac{I^*}{T_{\text{inf}}} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow R_o \cdot S^* - U^* \cdot S^* = N \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \mathbf{U}(t) = \mathbf{U}^* = R_o - \frac{N}{S^*} \end{aligned}$$

Podemos agora linearizar o sistema em torno do ponto de funcionamento (S^*,I^*,R^*) . Para isso, vamos assumir que o ponto de funcionamento é um ponto de equilíbrio. Os pontos de equilíbrio com a variação nula do número de infetados e de suscetíveis ocorrem para $S=0$ e $I=0$. No entanto, o nosso ponto de funcionamento apenas anulará a variação do número de infetados, sendo apenas um ponto de equilíbrio aproximado, mas suficiente para a linearização a efetuar.

Realizaremos uma aproximação por uma série de Taylor de primeira ordem, para S , I , R e U , com $S=S-S^*$, $I=I-I^*$, $R=R-R^*$ e $U=U-U^*$:

$$\text{Consideremos } \frac{dI(t)}{dt} = f(t) \text{ e } \frac{dS(t)}{dt} = g(t).$$

$$\frac{dI}{dt} = f(S^*, I^*, U^*) + (S - S^*) \cdot \frac{\partial f}{\partial S} + (I - I^*) \cdot \frac{\partial f}{\partial I} + (U - U^*) \cdot \frac{\partial f}{\partial U}$$

$$\frac{dS}{dt} = g(S^*, I^*, U^*) + (S - S^*) \cdot \frac{\partial g}{\partial S} + (I - I^*) \cdot \frac{\partial g}{\partial I} + (U - U^*) \cdot \frac{\partial g}{\partial U}$$

As derivadas parciais devem ser relativas ao ponto de funcionamento do sistema. Para o ponto de funcionamento,

por ser aproximadamente um ponto de equilíbrio, sabemos que $f(S^*, I^*, U^*) = 0$, $g(S^*, I^*, U^*) = 0$ e que $U^* = R_o - \frac{N}{S^*}$:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{S(R_0 - U^*)I^*}{T_{inf} \cdot N} + \frac{I(R_0 - U^*)S^*}{T_{inf} \cdot N} - \frac{I}{T_{inf}} - \frac{U \cdot S^* \cdot I^*}{T_{inf} \cdot N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{dI}{dt} = S \cdot \frac{I^*}{T_{inf} \cdot S^*} + \frac{I}{T_{inf}} - \frac{I}{T_{inf}} - U \cdot \frac{S^* \cdot I^*}{T_{inf} \cdot N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{dI}{dt} = S \cdot \frac{I^*}{T_{inf} \cdot S^*} - U \cdot \frac{S^* \cdot I^*}{T_{inf} \cdot N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{dI}{dt} = \gamma \frac{I^*}{S^*} S - \gamma \frac{I^* \cdot S^*}{N} U$$

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{S(R_0 - U^*)I^*}{T_{inf} \cdot N} - \frac{I(R_0 - U^*)S^*}{T_{inf} \cdot N} + \frac{U \cdot S^* \cdot I^*}{T_{inf} \cdot N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{dS}{dt} = -S \cdot \frac{I^*}{T_{inf} \cdot S^*} - \frac{I}{T_{inf}} + U \cdot \frac{S^* \cdot I^*}{T_{inf} \cdot N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{dS}{dt} = -\gamma \frac{I^*}{S^*} S - \gamma I + \gamma \frac{I^* \cdot S^*}{N} U$$

Se considerarmos:

$$a = \gamma \frac{I^*}{S^*} \text{ e } b = \gamma \frac{I^* \cdot S^*}{N}$$

Podemos escrever:

$$\frac{dI(t)}{dt} = aS(t) - bU(t)e \quad \frac{dS(t)}{dt} = -aS(t) - \gamma I(t) + bU(t)$$

Aplicando as transformadas de Laplace às duas expressões obtidas, podemos começar a determinar, por fim, a função de transferência $\frac{I(s)}{U(s)}$:

$$sI(s) = aS(s) - bU(s) \Leftrightarrow S(s) = \frac{sI(s) + bU(s)}{a}$$

$$sS(s) = -aS(s) - \gamma I(s) + bU(s)$$

Substituindo, vem que:

$$(s+a)(sI(s) + bU(s)) = -\gamma aI(s) + abU(s) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow I(s)(s^2 + as + \gamma a) = -sbU(s) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{I(s)}{U(s)} = -b \frac{s}{(s^2 + as + \gamma a)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{I(s)}{U(s)} = -\gamma \frac{I^* \cdot S^*}{N} \frac{s}{(s^2 + \gamma \frac{I^*}{S^*} s + \gamma^2 \frac{I^* \cdot S^*}{N})}$$

IV. FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA IMPULSIONAL EM Z

Uma vez decidido um valor para a atuação U, esse valor é mantido durante um dia. Deste modo, considerando não só

a planta, mas também o *sampler & holder*, que permite obter o sistema amostrado e cumprir o requisito de manter a sua saída constante durante um dia, podemos obter a função de transferência em Z. Seja $G(s) = \frac{I(s)}{U(s)}$ e s_k a notação utilizada para os polos da função $\frac{G(s)}{s}$:

$$G_o(z) = (1 - z^{-1})Z_s\left(\frac{G(s)}{s}\right) = \left(\frac{z-1}{z}\right)Z_s\left(\frac{G(s)}{s}\right)$$

$$\text{Com } Z_s\left(\frac{G(s)}{s}\right) = \sum_{k=1}^n \text{Res}_{s_k}\left(\frac{G(s)}{s} \cdot \frac{z}{z - e^{sT}}\right)$$

$$\text{e } \text{Res}_{s_k} = \lim_{s \rightarrow s_k} \left((s - s_k) \cdot \frac{G(s)}{s} \cdot \frac{z}{z - e^{sT}} \right),$$

O primeiro passo será obter os polos da função de transferência $\frac{G(s)}{s}$. Por razões de simplificação de cálculo, utilizaremos as variáveis a e b :

$$s^2 + as + \gamma a = 0 \Leftrightarrow s = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4\gamma a}}{2}$$

$$\text{Sejam } s_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4\gamma a}}{2} \text{ e } s_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4\gamma a}}{2}$$

$$\text{Res}_{s_1} = \lim_{s \rightarrow s_1} \left((s - s_1) \cdot \frac{-b}{(s - s_1)(s - s_2)} \cdot \frac{z}{z - e^{sT}} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{Res}_{s_1} = \frac{-b}{(s_1 - s_2)} \cdot \frac{z}{z - e^{s_1 T}}$$

$$\text{Res}_{s_2} = \lim_{s \rightarrow s_2} \left((s - s_2) \cdot \frac{-b}{(s - s_1)(s - s_2)} \cdot \frac{z}{z - e^{sT}} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{Res}_{s_2} = \frac{-b}{(s_2 - s_1)} \cdot \frac{z}{z - e^{s_2 T}}$$

$$Z_s\left(\frac{G(s)}{s}\right) = \text{Res}_{s_1} + \text{Res}_{s_2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Z_s\left(\frac{G(s)}{s}\right) = \frac{bz}{(s_1 - s_2)} \cdot \left(\frac{1}{z - e^{s_1 T}} - \frac{1}{z - e^{s_2 T}} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Z_s\left(\frac{G(s)}{s}\right) = \frac{-bz}{(s_1 - s_2)} \cdot \left(\frac{e^{s_1 T} - e^{s_2 T}}{(z - e^{s_1 T})(z - e^{s_2 T})} \right)$$

Estamos agora em condições de obter uma expressão geral:

$$G_o(z) = \left(\frac{z-1}{z}\right) \frac{-bz}{(s_1 - s_2)} \cdot \left(\frac{e^{s_1 T} - e^{s_2 T}}{(z - e^{s_1 T})(z - e^{s_2 T})} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow G_o(z) = \frac{-b(z-1)}{(s_1 - s_2)} \cdot \left(\frac{e^{s_1 T} - e^{s_2 T}}{(z - e^{s_1 T})(z - e^{s_2 T})} \right)$$

V. LGR, ESTABILIDADE E DESEMPENHO DO SISTEMA

A partir do ponto de funcionamento (S^*, I^*, R^*), que pode ser definido por $N = 10^7$, $I^* = 2 \times 10^5$, $R^* = 2 \times 10^6$ e $S^* = 7,8 \times 10^6$, analisaremos o comportamento do sistema em tempo discreto $G_o(z)$. Será analisado o Lugar Geométrico de Raízes, a sua estabilidade e vários critérios de desempenho, como o erro em regime permanente, o tempo de estabelecimento e a sobre elongação.

A. Função de Transferência no ponto de funcionamento

Sabemos que para o caso em análise, a amostragem será realizada com $T=1$, sendo que a base de tempo corresponde a um dia. Para a obtenção da expressão, teremos de determinar os parâmetros a , b , s_1 e s_2 :

$$a = \gamma \frac{I^*}{S^*} = \frac{1}{234} \text{ e } b = \gamma \frac{I^* \cdot S^*}{N} = 26000$$

$$s_1 = -\frac{1}{468} + \frac{\sqrt{-\frac{155}{54756}}}{2} \text{ e } s_2 = -\frac{1}{468} - \frac{\sqrt{-\frac{155}{54756}}}{2}$$

Podemos então escrever, de uma forma aproximada:

$$G_o(z) = -25941,44 \cdot \left(\frac{z - 1}{z^2 - 1,995025z + 0,995736} \right)$$

B. Lugar Geométrico de Raízes

O método do Lugar Geométrico das Raízes é uma forma de representar graficamente a localização dos polos do sistema em malha fechada, através da variação de um parâmetro, normalmente designado por K , que representa o ganho. O sistema equivalente pode ser representado deste modo:

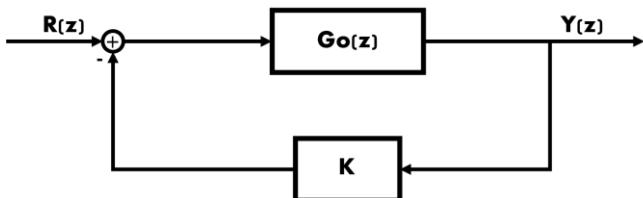


Figura 17 - Esquema do sistema associado ao LGR

Este sistema terá uma função de transferência que relaciona a entrada R com a saída Y , dada por:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G_o(z)}{1 + KG_o(z)}$$

O Lugar Geométrico das Raízes consiste, portanto, nas soluções gráficas da equação $1 + KG_o(z) = 0$. Permite-nos saber para que valores de K o sistema será estável, sendo que a estabilidade no domínio de z presume que os polos que são solução da equação para um determinado K estão contidos no círculo unitário.

O esboço do LGR no domínio de z é, em quase tudo, semelhante ao esboço em s . Em primeiro lugar devem ser marcados os polos e os zeros da função $G_o(z)$. Existem dois polos imaginários conjugados ($0,9975 \pm j0,02654$) e existe um zero em 1, o que significa que o LGR possui uma assíntota horizontal coincidente com o eixo das abscissas. Sabemos também que o traçado tem valores no eixo real quando o número total de polos e zeros à sua direita é ímpar. Os pontos

de entrada e saída do eixo real podem ser obtidos ao determinar para que valores a função $K(z)$ atinge os seus valores máximos (pontos de saída) ou mínimos (pontos de entrada), isto é, os valores de z para os quais $\frac{dK}{dz} = 0$. A partir de $1 + KG_o(z) = 0$ podemos retirar que:

$$z^2 - 1,995025z + 0,995736 - K \cdot 25941,4(z - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow K = \frac{z^2 - 1,995025z + 0,995736}{25941,4(z - 1)}$$

$$\frac{dK}{dz} = 0 \Leftrightarrow \frac{10^6 z^2 - 2 \times 10^6 z + 999289}{25941440000(z - 1)^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10^6 z^2 - 2 \times 10^6 z + 999289 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = 0,97334 \vee z = 1,02666$$

Tendo em conta o contexto e os dados que possuímos acerca do sistema, apenas a primeira solução será interesse no traçado do LGR direto e trata-se de um ponto de chegada, uma vez que o traçado se iniciará nos polos e terá que entrar no eixo real, onde se dividirá em duas ramificações: uma que progride até ao infinito por valores reais negativos ao longo da assintota, outra que se encaminhará para o zero da função localizado em 1. Convém também referir que, tendo em conta a constante multiplicativa negativa que se encontra associada à função de transferência, de valor -25941,44, o traçado obtido corresponderá a valores de K menores do que 0 e não a valores de K superiores a 0:

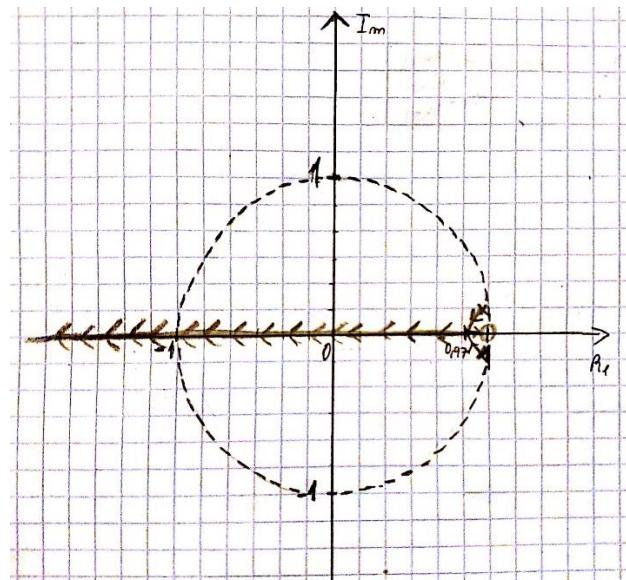


Figura 18 - Esboço manual do LGR direto

Recorrendo à função `rlocus()` do MATLAB, pudemos verificar que o esboço se encontra bastante próximo da realidade. Para obter a figura relativa ao LGR direto, foram utilizadas as seguintes linhas de código:

```

z = tf('z', -1);
rlocus(25941.44 * (z - 1)/(z^2 - 1.995025 * z + 0.995736));
axis([-1.2 1.2 - 0.25 0.25]);
  
```

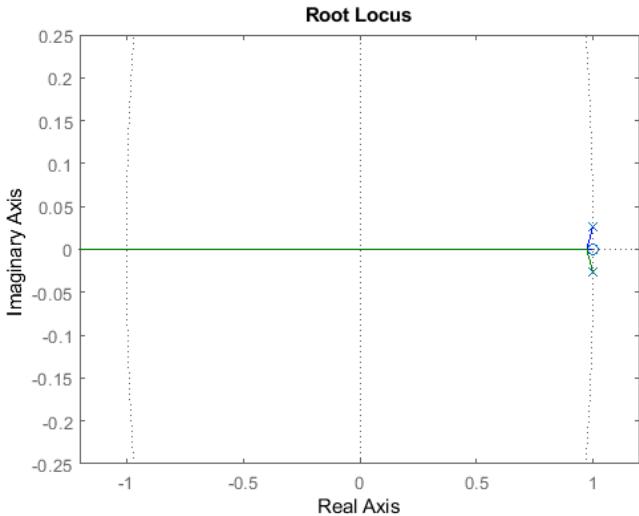


Figura 19 - LGR Direto obtido com recurso ao MATLAB

Sabendo que os dois polos imaginários de $G_o(z)$ estão contidos no círculo unitário e analisando a curva do LGR direto com mais detalhe, não será difícil concluir que o LGR inverso, para $K>0$, apresentará também uma pequena zona de estabilidade, partindo o traçado dos dois polos conjugados e atravessando a circunferência unitária para a zona de instabilidade. Esta zona é de muito menor dimensão que a zona obtida anteriormente, cuja instabilidade se verifica quando a ramificação do traçado que se prolonga até ao infinito ultrapassa o ponto -1:

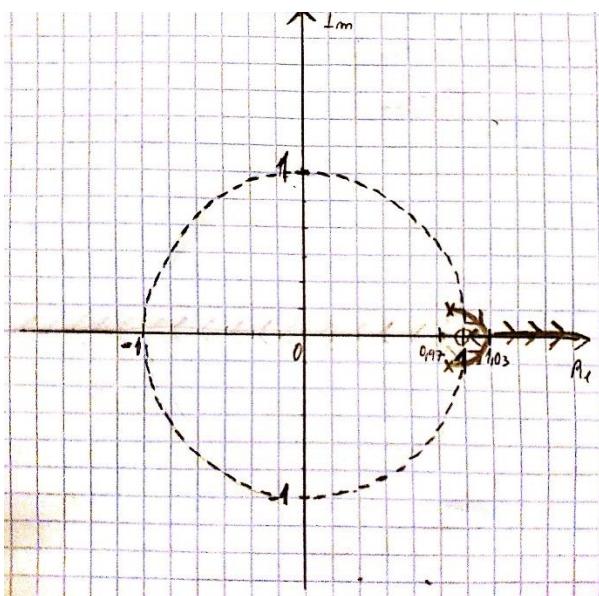


Figura 20 - Esboço manual do LGR inverso

Para obter a figura relativa ao LGR inverso, foram utilizadas as seguintes linhas de código:

```

z = tf('z', -1);
rlocus(-25941.44 * (z - 1)/(z^2 - 1.995025 * z + 0.995736));
axis([0.5 4 - 0.2 0.2]);

```

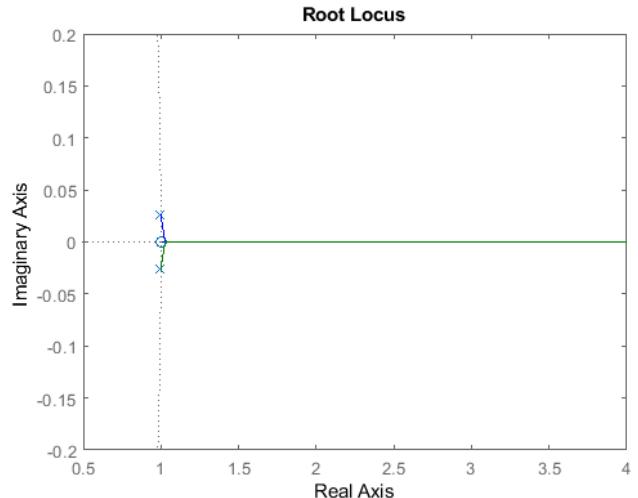


Figura 21 - LGR inverso obtido com recurso ao MATLAB

Como se verifica, o esboço parece coincidir com os resultados do MATLAB. Dado que a região de estabilidade é tão pequena e tão próxima da zona de instabilidade, será, certamente, mais interessante e benéfico explorar a região definida no LGR direto, que corresponde a valores de $K<0$.

C. Estabilidade

Os limiares de estabilidade do sistema implicam explorar as situações em que o traçado atravessa o limiar de estabilidade para a zona instável. Uma das formas utilizadas para determinar as condições de estabilidade de um sistema é o método de Routh-Hurwitz. É condição necessária e suficiente para a estabilidade de um sistema LTI. Podemos partir da equação que enuncia o nosso Lugar Geométrico de Raízes:

$$z^2 - 1,995025z + 0,995736 - K25941,44(z - 1) = 0$$

Deve agora ser aplicada a mudança de variável caracterizada por $z = \frac{1+\omega}{1-\omega}$. Por razões de simplificação, iremos substituir a constante -25941,44 por G nesta fase da análise:

$$z^2 + (KG - 1,995025)z + (0,995736 - KG) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1+\omega}{1-\omega}\right)^2 + (KG - 1,995025)\frac{1+\omega}{1-\omega} + (0,995736 - KG) = 0$$

Após simplificação, a equação fica organizada deste modo:

$$\omega^2(3,990761 - 2KG) + (2KG + 8,528 \times 10^{-3})\omega + 7,11 \times 10^{-4} = 0$$

Podemos, agora, organizar os valores na seguinte tabela:

| | | |
|------------|------------------------------|-----------------------|
| ω^2 | $3,990761 - 2KG$ | $7,11 \times 10^{-4}$ |
| ω^1 | $2KG + 8,528 \times 10^{-3}$ | |
| ω^0 | $7,11 \times 10^{-4}$ | |

A condição necessária e suficiente para a estabilidade do sistema é não existirem trocas de sinais na primeira coluna da tabela. Tendo em conta que o elemento da terceira linha, o único independente de K, é positivo, então os restantes elementos da primeira coluna terão de ser, também eles, maiores do que 0. Assim:

$$3,990761 + 51882,88K > 0 \Leftrightarrow K > -7,691865 \times 10^{-5}$$

$$8,528 \times 10^{-3} - 51882,88K > 0 \Leftrightarrow K < 1,6437 \times 10^{-7}$$

Podemos concluir que o intervalo de estabilidade se encontra definido para o intervalo $]-7,691865 \times 10^{-5}; 1,6437 \times 10^{-7}[$. No entanto, existe outro método matemático para determinar os limites de estabilidade, sendo que requer o recurso ao MATLAB. O limite de estabilidade implica que os valores de z pertençam ao círculo unitário, ou seja, $z = e^{j\theta}$:

$$e^{j2\theta} - 1,995025e^{j\theta} + 0,995736 - K25941,44(e^{j\theta} - 1) = 0$$

Sabendo que $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$, podemos reescrever a equação como um sistema, assumindo que tanto a parte imaginária como a real devem ser iguais a zero. Representaremos, mais uma vez, a constante real -25941,44 através de G:

$$\begin{cases} -GK + 0,995736 - (1,995025 - GK)\cos(\theta) + \cos(2\theta) = 0 \\ \sin(2\theta) - (1,995025 - GK)\sin(\theta) = 0 \end{cases}$$

Devido às dificuldades de cálculo associadas à resolução deste sistema, e considerando que o seu objetivo consistia apenas na verificação dos resultados obtidos anteriormente, utilizamos, tal como referido, o MATLAB para o resolver:

```
syms G K teta
G = -25941.44;

expl=-G*K+0.995736-(1.995025-G*K)*cos(teta)+cos(2*teta)==0;
exp2=sin(2*teta)-(1.995025-G*K)*sin(teta)==0;
[sol_k,sol_teta]=solve([expl exp2], [K teta]);

format longg
valores_k = double(sol_k)
valores_teta = 180*double(sol_teta)/pi
```

Figura 22 - Código utilizado para a resolução do sistema

Os resultados consistem em conjuntos constituídos por um K e um θ , que corresponde ao ângulo de interseção com a circunferência unitária, está apresentado em graus. Os resultados obtidos por este método confirmam os resultados obtidos com recurso ao método de Routh-Hurwitz:

$$\begin{cases} K = 1,6437 \times 10^{-7} \wedge \theta = -1,5278^\circ \\ K = 1,6437 \times 10^{-7} \wedge \theta = 1,5278^\circ \\ K = -7,6919 \times 10^{-5} \wedge \theta = 180^\circ \end{cases}$$

D. Desempenho

O primeiro indicador de desempenho a ser explorado será o erro em regime permanente. Dado que o interesse do nosso sistema será atribuir um valor constante de entrada capaz de produzir o efeito pretendido na saída, determinaremos o erro em regime permanente para o sistema apresentado no início da secção V, quando a entrada $R(z)$ é um degrau unitário. Sabemos que:

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1 - z^{-1})R(z)}{1 + KG_o(z)} \text{ e que } R(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1})}$$

Daqui podemos concluir:

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 - 25941,44K \cdot \frac{z-1}{z^2 - 1,99503z + 0,99574}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e_{ss} = \frac{1}{1 - 0} \Leftrightarrow e_{ss} = 1$$

Uma vez que $e_{ss} = \frac{1}{1+K_p}$, é fácil concluir que $K_p = 0$.

Para a determinação dos restantes indicadores de desempenho, serão escolhidos quatro valores diferentes de K pertencentes ao intervalo: o valor mínimo, o valor máximo, um valor negativo pertencente ao intervalo e um valor positivo que também pertence ao intervalo de estabilidade.

Iniciaremos o cálculo destes parâmetros com uma breve explicação do processo utilizado. Sabemos que no domínio s, a localização de um polo do sistema realimentado pode ser obtida em função do coeficiente de amortecimento ζ e da frequência natural ω_n :

$$s = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$$

Sabendo que $z = e^{Ts}$, podemos concluir:

$$z = e^{T(-\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2})} \Leftrightarrow z = e^{-\zeta T\omega_n} e^{jT\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

Conhecendo o valor do polo z , esta equação pode ser transformada num sistema, através dos conceitos de módulo e fase de um número imaginário:

$$\begin{cases} |z| = e^{-\zeta T\omega_n} \\ \angle z = T\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} \end{cases}$$

Podemos retirar daqui as relações:

$$\frac{-\ln |z|}{\angle z} = \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \text{ e } \omega_n = \frac{-\ln |z|}{T\zeta}$$

Trabalhando o sistema anterior, é possível obter os valores de ζ e de ω_n , que possibilitam a determinação de vários indicadores de desempenho, como o tempo de estabelecimento (T_s) e o overshoot (M_p):

$$\begin{cases} T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \\ M_p = e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1 - \zeta^2}}} \end{cases}$$

Vamos iniciar a análise destes indicadores de desempenho com o valor máximo que K pode assumir. Para $K = 1,6437 \times 10^{-7}$, a equação característica do LGR toma estes valores:

$$z^2 - 1,999288994z + 0,9999999945 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = 0,999644497 \pm j0,02666222267$$

$$\frac{-\ln \sqrt{0,999644497^2 + 0,02666222267^2}}{\arctan \left(\frac{0,02666222267}{0,999644497} \right)} = \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1,029532476 \times 10^{-7} = \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \zeta = 1,029532476 \times 10^{-7}$$

$$\omega_n = \frac{-\ln \sqrt{0,999644497^2 + 0,02666222267^2}}{1,029532476 \times 10^{-7}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \omega_n = 0,0267012027$$

Concluindo:

$$\begin{cases} T_s = 1455087523,44 \text{ s} \\ M_p = 0,999999676 \end{cases}$$

Para confirmar os valores obtidos, foi criado um programa no MATLAB que utiliza, neste caso, o polo com valor imaginário positivo, uma vez que são conjugados, para determinar os parâmetros. O programa pode ser adaptado:

```

clear
syms z zeta wn;
T = 1;
G = -25941.44;
K = 1.6437*10^-7;

f = z^2-1.995025*z+0.995736+G*K*z-G*K;

poles = solve(f == 0,z);
polo1 = poles(1);
polo2 = vpa(poles(2));|

syms zetawn

zetawn = solve(exp(-T*zetawn) == abs(polo2),zetawn);

zeta = vpa(solve(zetawn/angle(polo2)==zeta/sqrt(1-zeta^2),zeta))

Mp = vpa(exp(-pi*zeta/sqrt(1-zeta^2)))
wn = vpa(-log(abs(polo2))/(T*zeta))
ts = vpa(4/(T*zeta*wn))

```

Figura 23 - Código em MATLAB para obter os parâmetros

Os resultados obtidos foram praticamente iguais aos resultados calculados anteriormente, com exceção de algumas diferenças potenciadas pela maior precisão do software utilizado:

$$\begin{cases} \zeta = 1,032650097 \times 10^{-7} \\ \omega_n = 0,0266653733 \\ T_s = 1452643795,65 \\ M_p = 0,9999996756 \end{cases}$$

Na verdade, com o valor de K utilizado, o sistema encontra-se no limiar da instabilidade, logo deveria oscilar eternamente. No entanto, há pequenos erros de aproximação que tornam impossível encontrar o valor exato que possibilita estas condições. Ao analisar os resultados, podemos constatar que o coeficiente de amortecimento é praticamente nulo e que o tempo de estabelecimento é irrealmente grande. A simulação seguinte, que consiste em 1000 amostras demonstra claramente que este sistema oscilará em torno de 0 (o erro em regime permanente é 1) quase perpetuamente:

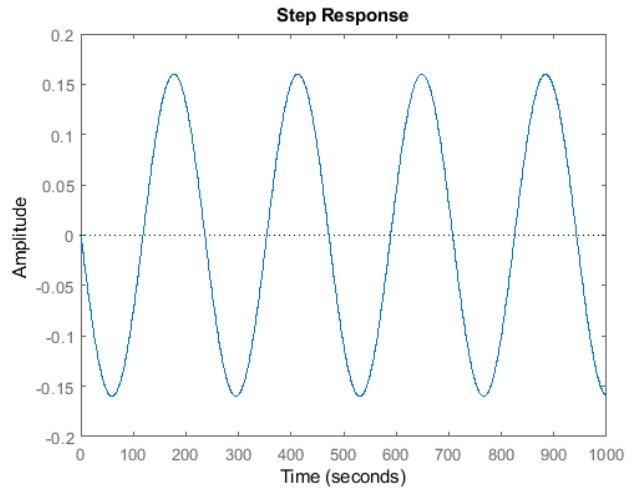


Figura 24 - Resposta ao Degrau com $K=1,6437 \times 10^{-7}$

Prosseguimos agora à análise dos indicadores de desempenho com um valor positivo de K menor do que o valor limite. Consideremos $K = 1 \times 10^{-10}$:

$$z^2 - 1,995027594z + 0,9957385941 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = 0,997513797 \pm j0,02654842359$$

$$\frac{-\ln \sqrt{0,997513797^2 + 0,02654842359^2}}{\arctan \left(\frac{0,02654842359}{0,997513797} \right)} = \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,080247698595 = \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \zeta = 0,0799905546$$

$$\omega_n = \frac{-\ln \sqrt{0,997513797^2 + 0,02654842359^2}}{0,0799905546} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \omega_n = 0,0266938487$$

Concluindo:

$$\begin{cases} T_s = 1873,31188675 \text{ s} \\ M_p = 0,77716268061 \end{cases}$$

Mais uma vez, os resultados obtidos no MATLAB foram bastante próximos:

$$\begin{cases} \zeta = 0,0799905546006 \\ \omega_n = 0,0266938486994 \\ T_s = 1873,31188675 \\ M_p = 0,7771626806 \end{cases}$$

Pertencendo já à região de estabilidade e apesar de os indicadores de desempenho estarem longe do pretendido, é evidente a clara evolução dos mesmos. O coeficiente de amortecimento ainda é demasiado pequeno e o tempo de estabelecimento bastante longo, mas já é possível verificar graficamente a visualização da estabilização da resposta do sistema, sempre em torno de 0:

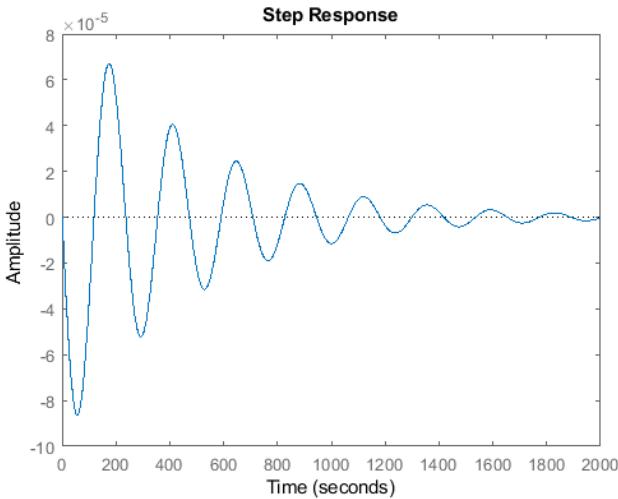


Figura 25 - Resposta ao Degrau com $K=1 \times 10^{-10}$

Segue-se o primeiro valor negativo de K , ainda maior do que o valor limite. Consideremos $K = -1 \times 10^{-6}$:

$$z^2 - 1,96908356z + 0,96979456 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = 0,98454178000 \pm j0,021726561$$

$$\frac{-\ln \sqrt{0,98454178000^2 + 0,021726561^2}}{\arctan \left(\frac{0,021726561}{0,98454178000} \right)} = \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,695043408931 = \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \zeta = 0,5707275777$$

$$\omega_n = \frac{-\ln \sqrt{0,98454178000^2 + 0,021726561^2}}{0,5707275777} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \omega_n = 0,026870108$$

Concluindo:

$$\begin{cases} T_s = 260,83250661 \text{ s} \\ M_p = 0,112641703 \end{cases}$$

Mais uma vez, os resultados obtidos no MATLAB foram bastante próximos:

$$\begin{cases} \zeta = 0,570727577664 \\ \omega_n = 0,026870108376 \\ T_s = 260,832506612 \\ M_p = 0,112641703034 \end{cases}$$

Até ao momento, este é o sistema que apresenta melhores resultados, sendo também aquele que se encontra mais afastado da zona de instabilidade e cuja parte imaginária dos polos se encontra mais próxima de zero. A existência de polos reais não é, como veremos a seguir, garantia de resultados excelentes e sem oscilações:

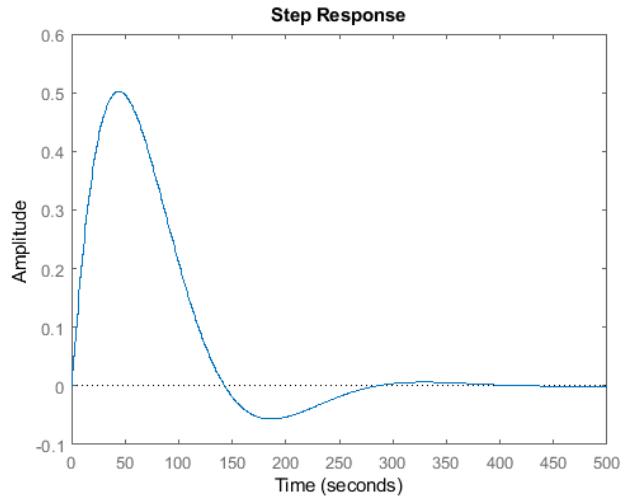


Figura 26 - Resposta ao Degrau com $K= -1 \times 10^{-6}$

Por fim, testaremos o menor valor do intervalo de estabilidade do sistema, ou seja, $K = -7,69186 \times 10^{-5}$:

$$z^2 + 3,54246784 \times 10^{-4}z - 0,9996432468 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = -0,99999926548 \vee z = 0,9996444999$$

Temos como solução dois polos reais, ambos muito próximos da circunferência unitária. Apesar de termos dois polos reais, a resposta apresentará uma oscilação, como veremos. Iremos analisar unicamente o polo negativo, por estar mais próximo da circunferência, ainda que por uma diferença ligeira, o que lhe confere alguma dominância no sistema:

$$\frac{-\ln 0,99999926548}{\pi} = \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2,3380506348 \times 10^{-7} = \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \zeta = 2,3380506348 \times 10^{-7}$$

$$\omega_n = \frac{-\ln 0,99999926548}{2,3380506348 \times 10^{-7}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \omega_n = 3.1415926536 (\approx \pi)$$

Concluindo:

$$\begin{cases} T_s = 5445731,268 \text{ s} \\ M_p = 0,9999992654 \end{cases}$$

Mais uma vez, os resultados obtidos no MATLAB foram bastante próximos:

$$\begin{cases} \zeta = 2,3380435068 \times 10^{-7} \\ \omega_n = 3,1415926535899 \\ T_s = 5445747,870 \\ M_p = 0,99999926548 \end{cases}$$

O comportamento global da resposta não será definido unicamente por estes parâmetros de desempenho. O outro

polo terá também influência no seu desempenho. No entanto, será este o polo responsável pela intensa oscilação verificada, bem como pelo tempo de estabelecimento, tal como se pode verificar. Convém reforçar a magnitude da escala na imagem apresentada (10^6), um indicador claro que o tempo necessário à estabilização deste sistema não é, de todo, algo desejável para o projeto que estamos a desenvolver:

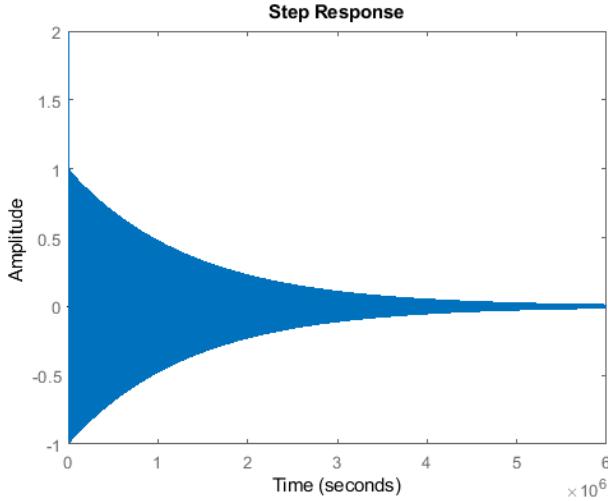


Figura 27 - Resposta ao Degrau com $K = -7,69186 \times 10^{-5}$

VI. DIAGRAMA DE BODE

Em primeiro lugar, é necessário efetuar a mudança de variável para observarmos o traçado de bode de uma função de transferência expressa em z:

$$Go(z) = G \frac{z - 1}{z^2 - 1,995025z + 0,9957085}$$

Deve ser aplicada a seguinte mudança de variável:

$$z = \frac{1 + \frac{\zeta}{2}}{1 - \frac{\zeta}{2}}$$

$$\begin{aligned} Go(\zeta) &= G \frac{\frac{1 + \frac{\zeta}{2}}{1 - \frac{\zeta}{2}} - 1}{\left(\frac{1 + \frac{\zeta}{2}}{1 - \frac{\zeta}{2}}\right)^2 - 1,995025 * \left(\frac{1 + \frac{\zeta}{2}}{1 - \frac{\zeta}{2}}\right) + 0,9957085} \\ &= G \frac{\zeta(1 - \frac{\zeta}{2})}{\left(1 + \frac{\zeta}{2}\right)^2 + 0,9957085 * \left(1 - \frac{\zeta}{2}\right)^2 - 1,995025 \left(1 + \frac{\zeta}{2}\right) \left(1 - \frac{\zeta}{2}\right)} \\ &= G \frac{\zeta(1 - \frac{\zeta}{2})}{\frac{\zeta^2}{4} + \zeta + 1 + 0,9957085 \left(\frac{\zeta^2}{4} - \zeta + 1\right) - 1,995025 \left(1 - \frac{\zeta^2}{4}\right)} \\ &= G \frac{\zeta(1 - \frac{\zeta}{2})}{0,997683375\zeta^2 + 42,915 \times 10^{-4}\zeta + 6,835 \times 10^{-4}} \\ &= G \frac{\zeta(1 - \frac{\zeta}{2})}{(\zeta - (-0,00215073 - 0,0260857j))(\zeta - (-0,00215073 + 0,0260857j))} \end{aligned}$$

Agora para determinação do traçado assintótico de amplitude e de fase: podemos ver que tem um zero na origem, logo irá começar com uma taxa de crescimento de 20

$db/déc$. Quando a frequência igualar o valor dos módulos dos polos complexos conjugados, esta taxa de crescimento tomará o sentido inverso sendo $-20 db/déc$. Após isto, a taxa de crescimento será 0 quando a frequência tomar o valor de 2 (que também é um zero). A expressão $|Go(jv)|$ será a seguinte:

$$\begin{aligned} Go(jv) &= G \frac{jv(1 - \frac{jv}{2})}{(jv - (-0,00215073 - 0,0260857j))(jv - (-0,00215073 + 0,0260857j))} \\ |Go(jv)| &= |G| \frac{v \sqrt{1 + (\frac{v}{2})^2}}{\sqrt{(0,00215073)^2 + (v + 0,0260857)^2} \times \sqrt{(0,00215073)^2 + (v - 0,0260857)^2}} \end{aligned}$$

Podemos calcular o limite para zero, por valores positivos, da expressão do ganho, de modo a entender melhor como se inicia o traçado:

$$\lim_{v \rightarrow 0} |Go(jv)| = 0$$

O resultado obtido já era esperado, uma vez que a expressão apresenta um zero na origem, ou seja, terá um crescimento constante a, aproximadamente, 20 dB/déc, até que um polo o interrompa ou trave, ou até que surja outro zero que acelere o seu crescimento. Daí que o seu ganho em dB seja infinitamente negativo para uma frequência nula. Substituindo v por um valor relativamente baixo, por exemplo, $v=1 \times 10^{-6}$ e substituindo $G=-25941,44$, podemos observar que já se verificou um crescimento significativo:

$$|Go(1 \times 10^{-6}j)| = 2259,5$$

$$20 \log(|Go(1 \times 10^{-6}j)|) = 67,1 dB$$

Substituindo v por um valor alto, por exemplo 1×10^6 , conseguimos obter o resultado para frequências mais elevadas:

$$|Go(1 \times 10^6j)| = 12970,72$$

$$20 \log(|Go(1 \times 10^6j)|) = 82,3 dB$$

Este resultado é suportado pelo limite da função para valores infinitamente grandes de v :

$$\lim_{v \rightarrow +\infty} |Go(jv)| = \frac{|G| \frac{v^2}{2}}{v \times v} = \frac{|G|}{2}$$

Substituindo G , vem que:

$$\lim_{v \rightarrow +\infty} |Go(jv)| = 12970,72$$

$$20 \log(\lim_{v \rightarrow +\infty} |Go(jv)|) = 82,3 dB$$

Para determinar o pico temos de determinar a magnitude no ponto de inversão. Sabendo que temos um zero para $v = 2$ e que o módulo dos polos complexos conjugados é $v = 0,02617$:

$$|Go(j0,02617)| = 6031350$$

$$20 \log(|G_o(j0,02617)|) = 135,6 \text{ dB}$$

Contudo, decidimos também fazer outra observação em que utilizamos uma sugestão presente em *slides* disponibilizados na Unidade Curricular de Controlo Digital, em que ignoramos a parte imaginária do polo. Esta parte imaginária tem um efeito particular onde há uma influência na magnitude do traçado verificando-se numa sobre-elongação. Provocará, então, uma aproximação ao traçado assintótico, em que não consideramos esta sobre-elongação. No traçado de Bode realizado pelo MATLAB, será visível, no entanto. O valor no ponto de inversão será agora este.

$$|G_o(j0,02617)| = 984700,5$$

$$20 \log(|G_o(j0,02617)|) = 119,9 \text{ dB}$$

O traçado assintótico terá, sensivelmente, um formato semelhante a este:

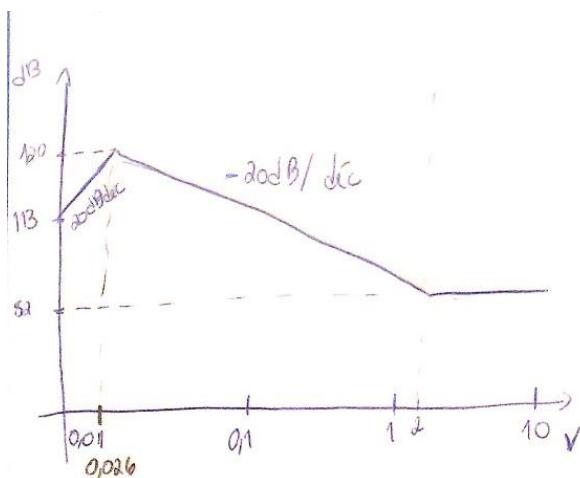


Figura 28 - Traçado Assintótico de Bode para o Ganho

No traçado efetuado com recurso ao MATLAB, é visível a sobre-elongação referida anteriormente:

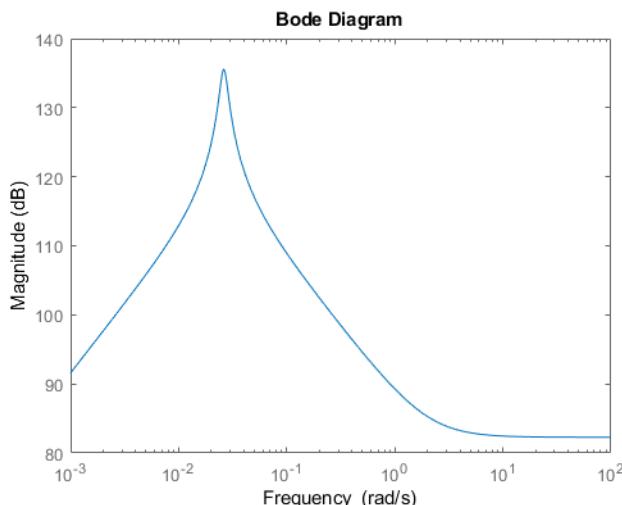


Figura 29 - Diagrama de Bode do ganho no MATLAB

Para o diagrama de fase chegámos à seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \angle G_o(jv) &= -180 + 90 + \tan^{-1}\left(-\frac{v}{1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{v - 0.0260857}{-0.0215073}\right) \\ &\quad - \tan^{-1}\left(\frac{v + 0.0260857}{-0.0215073}\right) \end{aligned}$$

$$\lim_{v \rightarrow 0^+} \angle G_o(jv) = -90^\circ = 270^\circ$$

De 0 a $\frac{0,026}{10}$, é igual a 270° , sendo 0,026 o módulo dos polos complexos. Entre 0,0026 e $\frac{2}{10}$, sendo 2 o zero, este decrescerá $-90^\circ/\text{déc}$. São dois polos complexos conjugados que pertencem ao semiplano direito e, portanto, provocam uma diminuição da fase (de 270° até $\cong 90^\circ$). O zero também provoca a diminuição da fase, uma vez que se encontra no semiplano direito. Desde 0,2 até $10 \times 0,026$, temos uma queda de $-135^\circ/\text{déc}$. De seguida, desde 0,26 até 10×2 temos uma queda de $-45^\circ/\text{déc}$. Resultará, no final, em:

$$\lim_{v \rightarrow +\infty} \angle G_o(jv) = 0^\circ$$

O traçado assintótico terá, portanto, um formato semelhante a este:

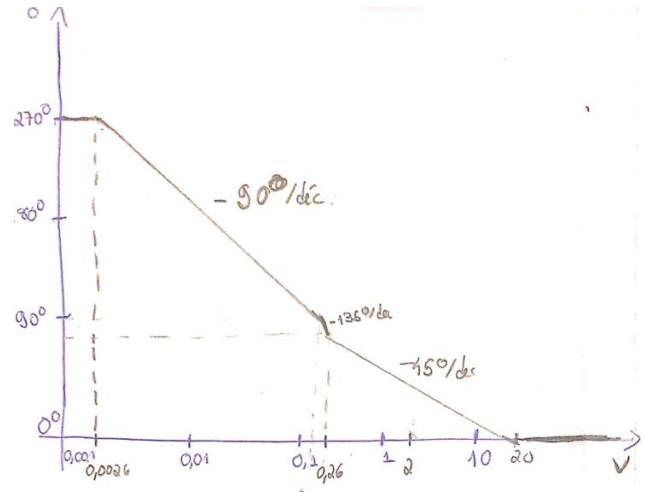


Figura 30 - Traçado Assintótico de Bode para a Fase

No traçado efetuado com recurso ao MATLAB, é visível uma ligeira perturbação na zona dos polos:

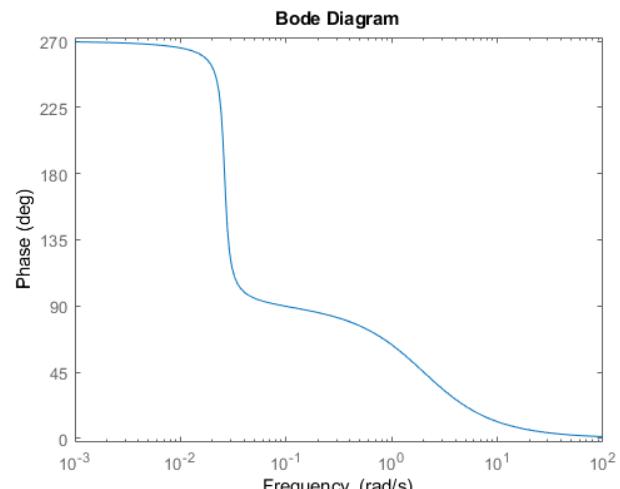


Figura 31 - Diagrama de Bode da fase no MATLAB

Pelo diagrama de bode, é fácil de entender que o traçado tem ganho unitário, ou seja, 0 dB, para uma frequência bastante baixa. Convém recordar que o seu ganho era aproximadamente 67,1 dB para uma frequência $v=1 \times 10^{-6}$. Para este valor, por ambos os traçados, podemos afirmar que a fase é de 270°. Assim, quando passar por 0 dB, para uma frequência ainda menor, a fase será a mesma, 270°. A margem de fase será de 90°.

Quanto à margem de ganho podemos calcular da seguinte forma:

$$270^\circ - 90 \log\left(\frac{v}{0,0026}\right) = 180^\circ$$

$$v = 0,026$$

Ou seja, desde 0,0026 até 0,026 temos uma queda de 90°/déc chegando ao valor de 180°. Para determinarmos a margem de ganho basta calcularmos $20 \log(|G_o(j0,026)|)$, que já foi calculado anteriormente e tem o resultado de 135,6 dB. Logo a margem de ganho corresponde a -135,6 dB.

Utilizando a função *margin()* do MATLAB, conseguimos comprovar estes valores:

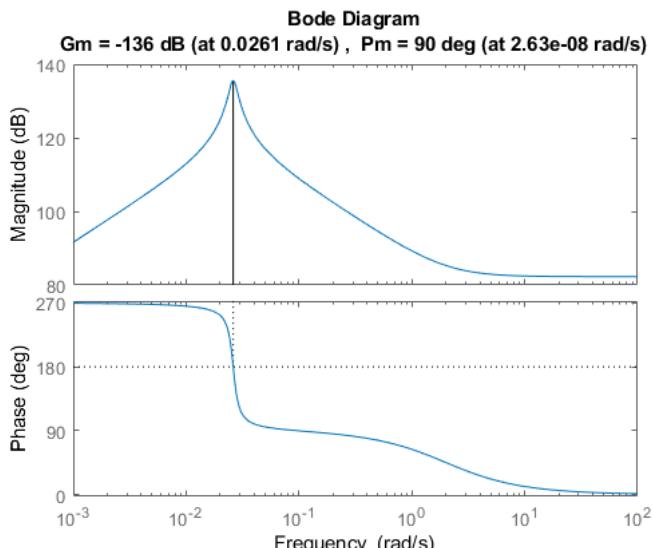


Figura 32 - Margens de Fase e Ganho no MATLAB

VII. COMPENSADOR

O compensador que iremos dimensionar e utilizar possui um polo a , um zero b e uma constante definida por K_c . A sua função de transferência é representada por:

$$G_c(z) = K_c \frac{z - a}{z - b}$$

O compensador vai ser inserido no sistema, sendo que a função de transferência em malha aberta, que iremos designar por $G_a(z)$, será dada por $G_c(z)G_o(z)$. O sistema equivalente pode ser representado do seguinte modo:

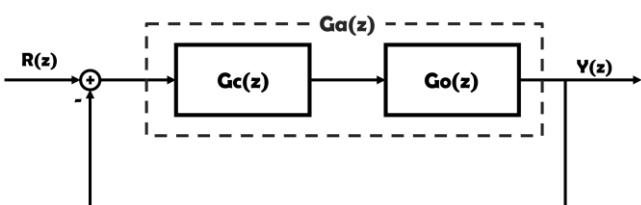


Figura 33 - Sistema com compensador

Dado que o objetivo deste compensador é melhorar o desempenho global do sistema, é imperativo compreender a razão pela qual os resultados obtidos anteriormente eram tão insatisfatórios. Pela análise do LGR direto, é fácil constatar que, devido à posição relativa dos dois polos complexos e do zero que caracterizam a função $G_o(z)$, pelo menos um dos polos do sistema realimentado estará sempre demasiado próximo da zona de instabilidade. Quando os polos do sistema são polos conjugados, apesar da sua parte imaginária ter um valor bastante reduzido, a parte real é bastante alta, sendo muito próxima de 1. Quando os polos são puramente reais, pelo menos um deles encontra-se perto da circunferência unitária. Os tempos de estabelecimento são notoriamente altos em função disto.

Surgem então duas soluções elementares: anular os polos complexos da função de transferência ou anular o zero. Tendo em conta a tipologia do compensador considerado, a única solução elementar viável parece ser a segunda. Fixando, então, $b=1$, parece lógico que a solução passará por um $a < 1$ e um K_c negativo (devido à constante -25941,44 da função $G_o(z)$). Isto resultará num LGR que, genericamente, será aproximadamente semelhante a este:

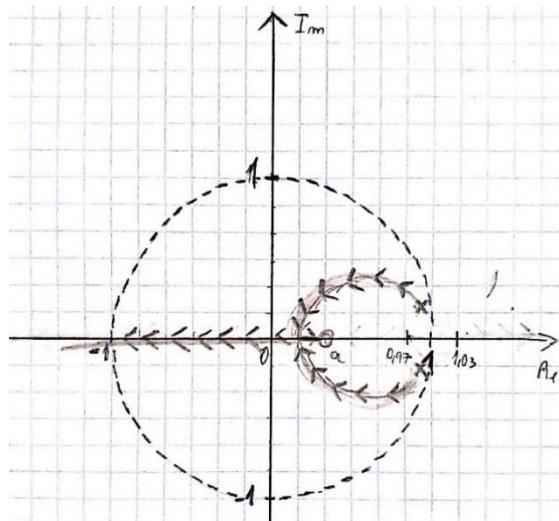


Figura 34 - Esboço genérico do LGR esperado

Verificando-se este efeito, teríamos disponíveis uma extensão maior de polos complexos a serem explorados. Consequentemente, teríamos um grau de liberdade muito maior na definição dos parâmetros de desempenho pretendidos. E quais são os parâmetros de desempenho pretendidos para o controlador que pretendemos aplicar?

Convém relembrar que o modelo em que se enquadra o compensador que criamos consiste numa linearização para um ponto de equilíbrio. Ora, quando se requer a sua atuação inicial, na chamada “zona exponencial” da curva de infetados, estamos muito longe dessa situação de equilíbrio. Será necessária uma resposta que provoque uma estabilização rápida. Também não será, de todo, desejável que se verifique uma sobre-elongação demasiado acentuada do número de infetados.

Assim, tudo parece indicar a necessidade de um M_p relativamente baixo, que iremos definir como 5% (0,05). E de um T_s , também ele, relativamente baixo, que ficará

definido como 5 unidades de tempo, neste caso dias. Estes parâmetros manifestar-se-ão sob a forma dos polos dominantes do sistema em questão. Sabendo que $z = e^{Ts}$, então $z_d = e^{Tsd}$. A partir dos indicadores de desempenho, torna-se possível determinar ζ e ω_n :

$$\begin{cases} T_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} \\ M_p = e^{\frac{-\zeta \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 = \frac{4}{\zeta \omega_n} \\ 0,05 = e^{\frac{-\zeta \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \omega_n = \frac{4}{5\zeta} \\ \zeta = -\frac{\ln 0,05}{\sqrt{(\ln 0,05)^2 + \pi^2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_n = 1,159240976 \\ \zeta = 0,6901067306 \end{cases}$$

Daqui, retiramos que:

$$s_d = -\zeta \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = -0,8 \pm j0,8389515128$$

$$z_d = e^{Tsd} = 0,3002610282 \pm j0,3342750857$$

Sabendo que a função de transferência do novo sistema é:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G_c(z)G_o(z)}{1 + G_c(z)G_o(z)}$$

Então é necessário que se cumpra o requisito:

$$1 + G_c(z_d)G_o(z_d) = 0$$

Substituindo, mais uma vez, -25941,44 por G e considerando $b=1$, teremos:

$$1 + K_c \frac{z_d - a}{z_d - 1} \cdot \frac{G(z_d - 1)}{z_d^2 - 1,995025z_d + 0,995736} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_d^2 + (K_c G - 1,995025)z_d + (0,995736 - K_c G a) = 0$$

Substituindo G e z_d , podemos obter um sistema de duas equações, com uma delas contendo apenas a parte real e outra contendo apenas a parte imaginária:

$$\begin{cases} 0,3751245943 - 7789,203449K_c + 25941,44K_c a = 0 \\ -0,4661475909 - 8671,577079K_c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0,793839482 - 1,394502943a = 0 \\ K_c = -5,37558032 \times 10^{-5} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,5692633965 \\ K_c = -5,37558032 \times 10^{-5} \end{cases}$$

Com recurso ao MATLAB, foi elaborado um programa que, sendo-lhe fornecidos os parâmetros pretendidos, é capaz de resolver o sistema supramencionado:

```
syms Ts Mp T k a
G=-25941.44;
Ts=5;
Mp=0.05;
T=1;

C = - log(Mp) / sqrt( (log(Mp))^2 + pi^2 );
wn = 4/(Ts*C);

sdl = -C*wn + li*wn*sqrt(1-C^2);
sd2 = -C*wn - li*wn*sqrt(1-C^2);
zdl = exp(T*sdl);
zd2 = exp(T*sd2);
zd=zdl;

expressao = zd^2-1.995025*zd+0.996-25941.44*k*zd+25941.44*a*k ;
eqns = [imag(expressao)==0,real(expressao)==0];
vars = [a k];
[solv_a,solv_k] = solve(eqns,vars);

aa=double(solv_a);
kk=double(solv_k);
```

Figura 35 - Programa em MATLAB para determinar a e k

Os resultados obtidos foram os seguintes:

$$\begin{cases} a = 0,569452711 \\ K_c = -5,375580321 \times 10^{-5} \end{cases}$$

Ao verificar a resposta ao degrau, constatamos que, na verdade, o *overshoot* foi bastante superior ao pretendido, cerca de 44% em contraste com os 5% que eram pretendidos. A razão pela qual isto acontece parece ter a ver com dois fatores: a amostragem e o tempo de estabelecimento. Verificamos que ao aumentarmos T_s conseguímos reduzir o *overshoot*, mas nunca abaixo dos 20%, já para valores de T_s próximos de 50. Como é sabido, uma frequência de amostragem maior, ou seja, um T menor, permitiria resultados mais satisfatórios, por aproximar este sistema cada vez mais de um sistema que não parece amostrado, mas sim contínuo. No entanto, o tempo de estabelecimento foi bastante próximo das 5 unidades de tempo pretendidas. Sendo esta a nossa prioridade, optou-se por usar a seguinte combinação de resultados para ser testada num cenário. Serão também testadas outras combinações de compensadores obtidas com recurso a este programa.

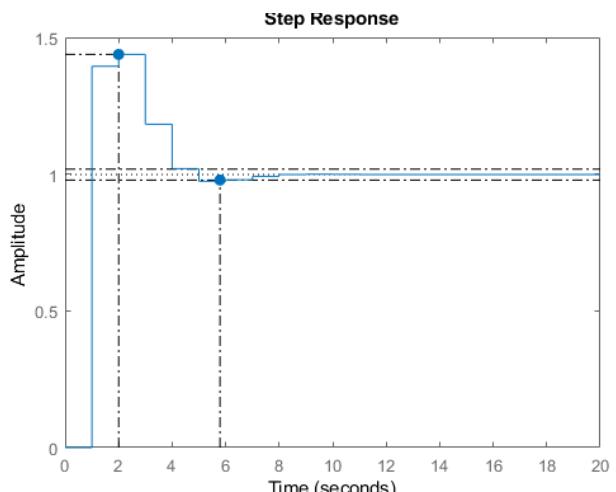


Figura 36 - Resposta do sistema ao degrau

Podemos calcular, também, o erro em regime em regime permanente do novo sistema, que pode ser obtido através da definição:

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1 - z^{-1})R(z)}{1 + G_p(z)G_o(z)} \text{ e que } R(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1})}$$

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 + 1,3945029 \cdot \frac{z - 0,5692633965}{z^2 - 1,99503z + 0,99574}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow e_{ss} = 1,180630785 \times 10^{-3}$$

O erro em regime permanente é, agora, praticamente residual. O sistema atua, praticamente, estabilizando a sua resposta na entrada que lhe é fornecida.

VIII. INTRODUÇÃO DE UM ATRASO DE 2 DIAS

Iremos agora considerar que o controlador introduz, para além do que foi anteriormente considerado, um atraso de dois dias. Para esta análise, iremos seguir uma trajetória semelhante à realizada anteriormente: obtenção da expressão, análise do LGR, estabilidade do sistema, determinação de parâmetros de desempenho, traçado de Bode e respetiva análise e desenvolvimento de um compensador. Será privilegiado, por indicação dos docentes, o uso das ferramentas MATLAB/Octave. No fim deste processo, serão implementados os dois sistemas desenvolvidos no programa CODIG.M que nos foi fornecido pelos docentes.

A. Função de Transferência no ponto de funcionamento

É, tal como foi referido, introduzido um atraso de 2 dias. Este pode ser visto em Laplace como e^{-2sT} . Assim, a função poderia ser obtida através de:

$$G'_o(z) = (1 - z^{-1})Z_s \left(\frac{G(s)e^{-2sT}}{s} \right)$$

Sabemos também que:

$$Z_s(e^{-2sT}) = \frac{1}{z^2}$$

Portanto, podemos reescrever:

$$G'_o(z) = \frac{z - 1}{z^3} Z_s \left(\frac{G(s)}{s} \right)$$

Podemos reutilizar os resultados anteriormente obtidos para o ponto de funcionamento (S^*, I^*, R^*), que pode ser definido por $N = 10^7$, $I^* = 2 \times 10^5$, $R^* = 2 \times 10^6$ e $S^* = 7,8 \times 10^6$, tendo agora:

$$G'_o(z) = -25941,44 \cdot \left(\frac{z - 1}{z^2(z^2 - 1,995025z + 0,995736)} \right)$$

B. Lugar Geométrico de Raízes

A nova equação apresenta 4 polos: dois na origem e dois polos imaginários conjugados. Apresenta apenas um zero, pelo que terá 3 assíntotas, uma dela com ângulo de 60° , outra com 180° e, por fim, uma com 300° ($= -60^\circ$). O ponto de interseção das assíntotas é obtido através de:

$$\frac{\sum OLP - \sum OLZ}{N_a} = \frac{0,99503}{3} = 0,33167$$

Através da equação característica do LGR:

$$z^4 - 1,995025z^3 + 0,995736z^2 - K \cdot 25941,4(z - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow K = \frac{z^4 - 1,995025z^3 + 0,995736z^2}{25941,44(z - 1)}$$

Os pontos de saída e entrada do eixo real podem ser obtidos através $\frac{dK}{dz} = 0$. Recorrendo ao MATLAB para obter as soluções da equação, obtivemos:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1,0253 \\ x_3 = 0,9719 \\ x_4 = 0,6662 \end{cases}$$

Após a obtenção destes dados, foi obtido, com recurso à função *rlocus()*, o LGR direto deste sistema. Recorde-se, à semelhança do caso anterior, que o LGR direto corresponderá a valores negativos de K , uma vez que a função de transferência possui uma constante multiplicativa negativa de valor -25941,44:

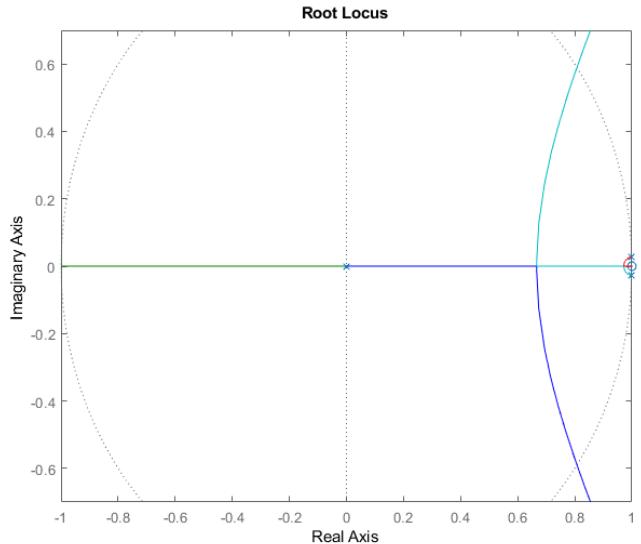


Figura 37 - LGR direto do sistema com atraso

Como podemos observar, e tal como esperávamos, existem soluções reais à esquerda do polo duplo na origem, uma vez que o número total de polos e zeros à direita desse setor é ímpar (5, neste caso). Situação semelhante à direita do polo duplo e até se atingirem os polos imaginários. À direita dos polos conjugados, existe apenas o zero em 1, sendo que aí o LGR também tem soluções no eixo real.

O esqueleto do antigo LGR é ainda visível. Existem agora 4 soluções simultâneas, uma por cada ramo apresentado no LGR. Do polo na origem partem dois ramos, uma com destino ao infinito e outra de encontro aos restantes polos e zeros. Dos dois polos imaginários partem mais duas ramificações que entram no eixo real. Uma delas terá como destino o zero em 1, a outra encontrar-se-á com a ramificação que partiu do polo duplo. Quando se encontram, seguem as assíntotas de 60° e -60° , tendo agora soluções reais. Não se pode afirmar com certeza que a zona de estabilidade aumentou, uma vez que é necessário que todas as soluções estejam contidas no círculo unitário.

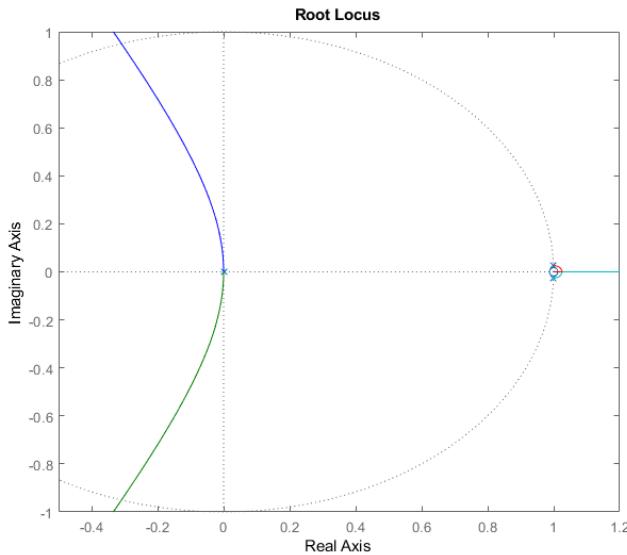


Figura 38 - LGR inverso do sistema com atraso

No LGR inverso, só existem soluções reais quando o número total de polos e zeros à direita é ímpar, o que só se verifica à direita do zero em 1. As ramificações que partem do polo duplo na origem seguem as assíntotas, agora de ângulos 120° e 240° . O traçado que parte dos polos imaginários conjugados é, em tudo, igual ao traçado do LGR inverso do sistema anterior.

C. Estabilidade

O limite de estabilidade implica que os valores de z pertençam ao círculo unitário, ou seja, $z = e^{j\theta}$ representa o limiar da instabilidade:

$$e^{j4\theta} - 1,995025e^{j3\theta} + 0,995736e^{j2\theta} - K25941,44(e^{j\theta} - 1) = 0$$

Sabendo que $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$, podemos reescrever a equação como um sistema, à semelhança do que fizemos anteriormente, assumindo que tanto a parte imaginária como a real devem ser iguais a zero. Representaremos, mais uma vez, a constante real -25941,44 através de G:

$$\begin{cases} -GK + GK\cos(\theta) + 0,995736\cos(2\theta) - 1,995025\cos(3\theta) + \cos(4\theta) = 0 \\ \sin(4\theta) - 1,995025\sin(3\theta) + 0,995736\sin(2\theta) + GK\sin(\theta) = 0 \end{cases}$$

Realizando algumas alterações ao programa de MATLAB utilizado anteriormente:

```
syms G K teta
G = -25941.44;
expl = -G*K+G*K*cos(teta)+0.995736*cos(2*teta)-1.995025*cos(3*teta)+cos(4*teta)==0;
exp2= sin(4*teta)-1.995025*sin(3*teta)+0.995736*sin(2*teta)+G*K*sin(teta)==0;
[sol_k,sol_teta]=solve([expl exp2], [K teta]);
format longg
valores_k = double(sol_k)
valores_teta = 180*double(sol_teta)/pi
```

Figura 39 - Programa de MATLAB atualizado

As soluções obtidas coincidem com os limites anteriormente obtido:

$$\begin{cases} K = -7,69186483094231 \times 10^{-5} \text{ V} \theta = 180^\circ \\ K = 1,64718498856074 \times 10^{-7} \text{ V} \theta = 1,521328^\circ \\ K = 1,64718498856074 \times 10^{-7} \text{ V} \theta = -1,521328^\circ \end{cases}$$

No entanto, após análise do LGR obtido, surgiram dúvidas quanto à autenticidade destes valores. Com recurso ao MATLAB, verificou-se que, para valores negativos de K, por exemplo, o sistema tornava-se instável para um valor menor do que $-7,69186483094231 \times 10^{-5}$:

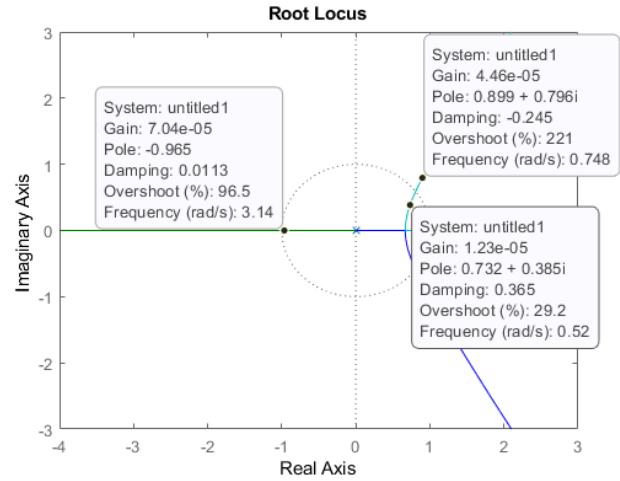


Figura 40 - Polos do Sistema e valores de K associados

Recorreu-se ao Wolfram Alpha para resolver o sistema de equações não-lineares, obtendo-se:

$$\begin{cases} K = 6,23204 \times 10^{-5} \text{ V} \theta = 108,071^\circ \\ K = 6,23204 \times 10^{-5} \text{ V} \theta = -108,071^\circ \\ K = 1,6471 \times 10^{-7} \text{ V} \theta = 1,521328^\circ \\ K = 1,6471 \times 10^{-7} \text{ V} \theta = -1,521328^\circ \\ K = -2,43965 \times 10^{-5} \text{ V} \theta = 36,299^\circ \\ K = -2,43965 \times 10^{-5} \text{ V} \theta = -36,299^\circ \\ K = -7,69186 \times 10^{-5} \text{ V} \theta = 180^\circ \end{cases}$$

Estes valores parecem estar de acordo com as imagens observadas nos dois LGRs, ficando definido o intervalo de estabilidade como $]-2,43965 \times 10^{-5}; 1,6471 \times 10^{-7}[$.

D. Desempenho

Para avaliar o desempenho, serão avaliadas as respostas ao degrau do sistema para vários valores de K, nomeadamente os dois valores de extremo e mais dois valores, um negativo e outro positivo, que também assegurem a estabilidade. Para determinação dos parâmetros serão utilizadas diretamente ferramentas do MATLAB que o permitam. O mesmo será feito para determinar o valor dos polos.

Em primeiro lugar, para $K = -2,43965 \times 10^{-5}$:

$$z^4 - 1,995025z^3 + 0,995736z^2 + 0,63288z - 0,63288 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 0,810546 \pm j0,59735114 \\ z = -0,6249532 \\ z = 0,9988858 \end{cases}$$

O programa utilizado em MATLAB permite obter não só o gráfico da resposta do sistema ao degrau unitário, mas também uma série de parâmetros, entre eles o tempo de estabelecimento, mas também o overshoot:

```

syms K
K=-2.43965e-5;
z=tf('z', -1);
H=-25941.44*K*(z-1)/(z^2*(z^2-1.995025*z+0.995736));
step(feedback(H,1),1000);
S = stepinfo(feedback(H,1));

```

Figura 41 - Programa em MATLAB para obter os parâmetros

Para o primeiro caso, provavelmente devido a arredondamentos na obtenção dos valores, o sistema apresentado é instável:

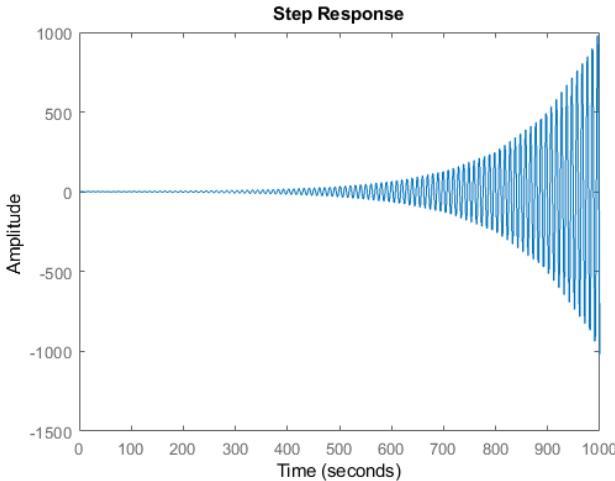


Figura 42 - Resposta ao degrau para $K = -2,43965 \times 10^{-5}$

Algo corroborado pelos valores obtidos com a função `stepinfo()`:

$$\begin{cases} T_s = \text{Inexistente} \\ M_p = \text{Inexistente} \end{cases}$$

Em segundo lugar, para $K = -1 \times 10^{-7}$:

$$z^4 - 1,99503z^3 + 0,995736z^2 + 2,594 \times 10^{-3}z - 2,594 \times 10^{-3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 0,99619831 \pm j0,02646305 \\ z = 0,0524402 \\ z = -0,0498118 \end{cases}$$

Podemos observar que, apesar da resposta oscilatória, o sistema já é estável, apesar de ser bastante lento:

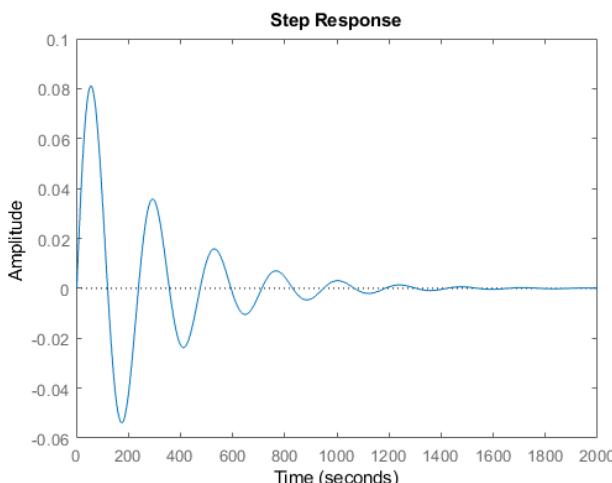


Figura 43 - Resposta ao degrau para $K = -1 \times 10^{-7}$

Os valores de desempenho obtidos pelo MATLAB revelam que, apesar de já ser possível obter um valor de T_s , para este tipo de curva o valor de *overshoot* é considerado infinito:

$$\begin{cases} T_s = 1147 \\ M_p = \text{Infinito} \end{cases}$$

Em terceiro lugar, para $K = 1 \times 10^{-7}$:

$$z^4 - 1,99503z^3 + 0,995736z^2 - 2,594 \times 10^{-3}z + 2,594 \times 10^{-3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 0,998813 \pm j0,0265690 \\ z = -0,001300486 \pm j0,0509586 \end{cases}$$

Apesar de estável, este sistema é muito mais lento do que o anteriormente testado:

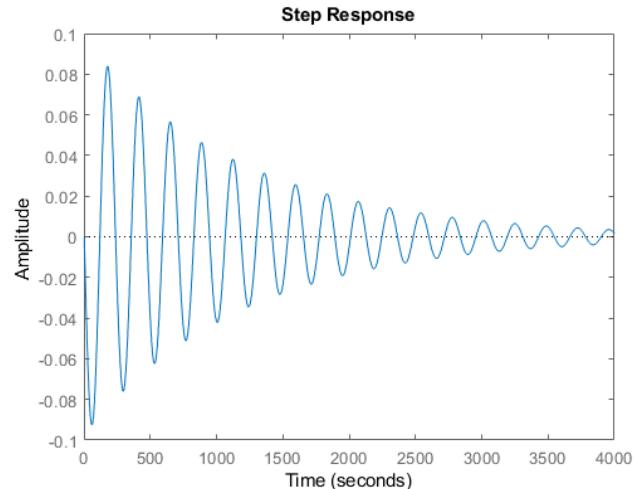


Figura 44 - Resposta ao degrau para $K = 1 \times 10^{-7}$

Os valores de desempenho obtidos pelo MATLAB revelam, tal como observado, um valor de T_s muito superior, mantendo-se o *overshoot* como infinito:

$$\begin{cases} T_s = 4681 \\ M_p = \text{Infinito} \end{cases}$$

Por fim, para $K = 1,6471 \times 10^{-7}$:

$$z^4 - 1,99503z^3 + 0,995736z^2 - 4,273 \times 10^{-3}z + 4,273 \times 10^{-3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 0,9996474 \pm j0,0265491 \\ z = -0,0021349 \pm j0,06533190 \end{cases}$$

O sistema encontra-se no limiar da instabilidade, com uma oscilação praticamente regular sem indicações de abrandamento ou estabilização:

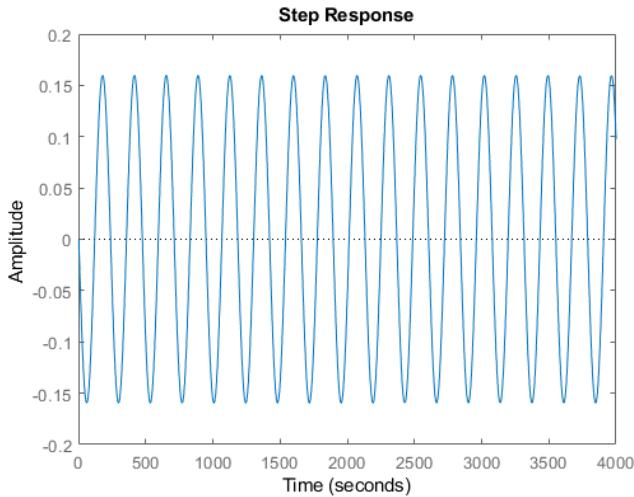


Figura 45 - Resposta ao degrau para $K = 1,6471 \times 10^{-7}$

Os valores de desempenho obtidos pelo MATLAB revelam, tal como seria previsível devido à oscilação verificada, que é impossível determinar os parâmetros:

$$\begin{cases} T_s = \text{Inexistente} \\ M_p = \text{Inexistente} \end{cases}$$

Podemos determinar o erro em regime permanente:

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1 - z^{-1})R(z)}{1 + KG'_o(z)} \text{ e que } R(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1})}$$

Daqui conclui-se:

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 - 25941,44K \cdot \frac{z-1}{z^2(z^2 - 1,99503z + 0,99574)}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow e_{ss} = \frac{1}{1 - 0} \Leftrightarrow e_{ss} = 1 \end{aligned}$$

E. Diagrama de Bode

Para efetuar o traçado de Bode, deve-se realizar a mudança de variável:

$$z = \frac{1 + \frac{\zeta}{2}}{1 - \frac{\zeta}{2}}$$

Para o propósito, foi utilizado o *Maxima*, obtendo-se:

$$\begin{aligned} a &:= -25941.44 \cdot (z-1)/(z^2(z^2 - 1.995025z + 0.995736)), \\ &- \frac{25941.44(z-1)}{z^2(z^2 - 1.995025z + 0.995736)} \\ b &:= \text{subst}(z=(1+\omega/2)/(1-\omega/2), a); \\ &\frac{25941.44 \left(\frac{\omega}{2} + 1 \right) \left(1 - \frac{\omega}{2} \right)^2}{\left(-\frac{1.995025 \left(\frac{\omega}{2} + 1 \right)}{1 - \frac{\omega}{2}} + \left(\frac{\omega}{2} + 1 \right)^2 + 0.995736 \right) \left(\frac{\omega}{2} + 1 \right)^2} \\ &\text{ratsimp}(b); \\ &\text{rat: replaced } -25941.44 \text{ by } -648536/25 = -25941.44 \\ &\text{rat: replaced } 0.995736 \text{ by } 124467/125000 = 0.995736 \\ &\text{rat: replaced } -1.995025 \text{ by } -79801/40000 = -1.995025 \\ &5188280000 \omega^4 - 311297280000 \omega^3 + 622594560000 \omega^2 - 415063040000 \omega \\ &3990761 \omega^4 + 15980100 \omega^3 + 16034112 \omega^2 + 79600 \omega + 11376 \end{aligned}$$

Figura 46 - Substituição efetuada pelo Maxima

Recorreu-se ao MATLAB de modo a obter os traçados de Bode tanto para o ganho como para a fase. As formas de onda obtidas para as frequências apresentadas eram bastante semelhantes às registadas anteriormente, no que ao ganho diz respeito, como é possível observar:

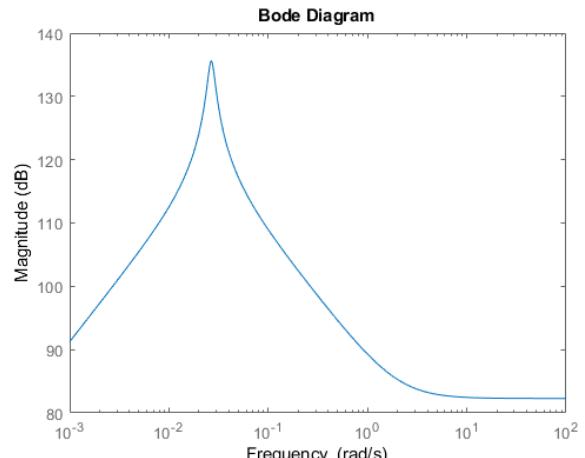


Figura 47 - Diagrama de Bode do ganho no MATLAB

Quanto à fase, verificam-se algumas diferenças nos valores registados, uma vez que, apesar de a forma da curva ser semelhante, a queda é muito mais acentuada:

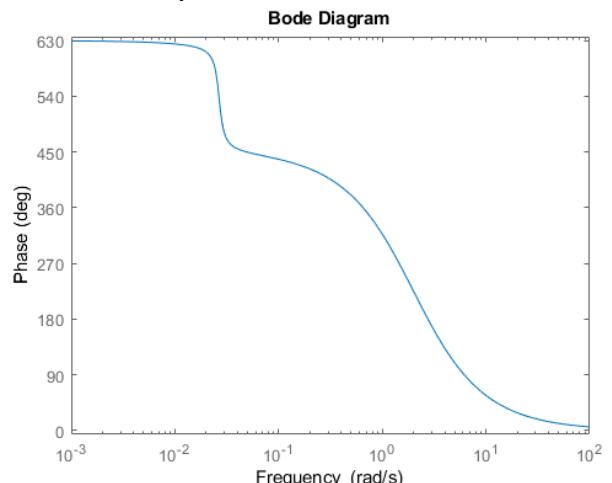


Figura 48 - Diagrama de Bode da fase no MATLAB

Daqui resultam uma margem de ganho maior, de -86,1 dB, mantendo-se a margem de fase nos 90° (os 630° apresentados são equivalentes a 270° ou -90°).

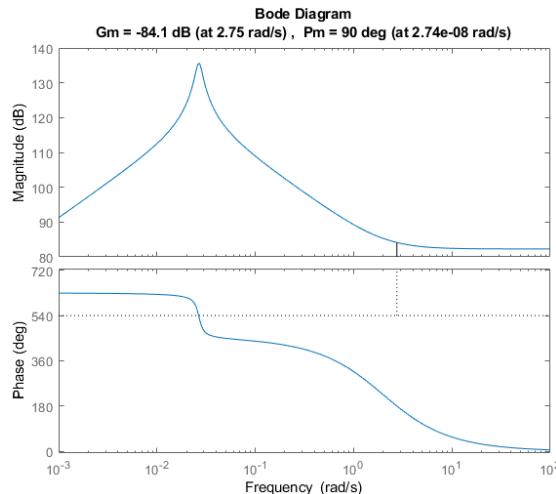


Figura 49 - Margens de Fase e Ganho obtidas no MATLAB

F. Compensador

O compensador que iremos dimensionar e utilizar possui um polo a, um zero b e uma constante definida por K_c . A sua função de transferência é representada por:

$$G_c(z) = K_c \frac{z - a}{z - b}$$

Uma das grandes limitações ao desempenho deste sistema surge, à semelhança do caso anterior, devido ao zero em 1. Este coloca muitas das soluções do LGR perto do limiar de instabilidade, sendo essencial que seja neutralizado. Para isso, iremos definir $b=1$.

Convém reforçar que este sistema, com o compensador aplicado, será de quarta ordem, apresentando um máximo de 4 soluções simultâneas para o LGR. Torna-se fulcral garantir que os polos que definem o desempenho são, efetivamente, os polos dominantes e que todas as soluções estão contidas no círculo unitário. Definiremos os parâmetros de desempenho do compensador anterior, $T_s = 5$ e $M_p = 0,05$:

$$\begin{cases} T_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} \\ M_p = e^{\frac{-\zeta \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 = \frac{4}{\zeta \omega_n} \\ 0,05 = e^{\frac{-\zeta \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \omega_n = \frac{4}{5\zeta} \\ \ln 0,05 = \frac{-\zeta \pi}{\sqrt{(\ln 0,05)^2 + \pi^2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_n = 1,159240976 \\ \zeta = 0,6901067306 \end{cases}$$

Daqui, retiramos que:

$$s_d = -\zeta \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = -0,8 \pm j 0,8389515128$$

$$z_d = e^{Ts_d} = 0,3002610282 \pm j 0,3342750857$$

Substituindo, uma vez mais, -25941,44 por G e considerando b=1, teremos:

$$1 + K_c \frac{z_d - a}{z_d - 1} \cdot \frac{G(z_d - 1)}{z_d^4 - 1,995025z_d^3 + 0,995736z_d^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_d^4 - 1,995025z_d^3 + 0,995736z_d^2 + K_c G z_d - K_c G a = 0$$

Substituindo G e z_d , podemos obter um sistema de duas equações, com uma delas contendo apenas a parte real e outra contendo apenas a parte imaginária:

$$\begin{cases} 0,08547789361 - 7789,203449K_c + 25941,44K_c a = 0 \\ 0,08536327908 - 8671,577079K_c = 0 \end{cases}$$

Utilizando o MATLAB, modificando ligeiramente o programa utilizado para o caso original, obtemos:

$$\begin{cases} K_c = 9,844031634 \times 10^{-6} \\ a = -0,0344628778 \end{cases}$$

Estes resultados não parecem muito prometedores, algo comprovado pela resposta do sistema ao degrau que se revela, claramente, instável:

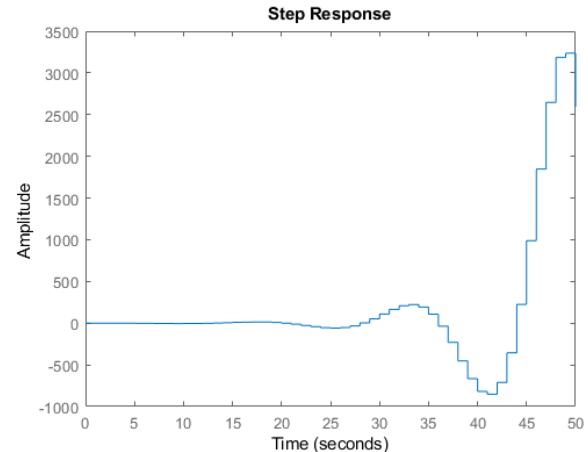


Figura 50 - Resposta Instável do Sistema com Compensador

A solução pode passar por explorar novos valores de z_d , que possam garantir que todos os polos do sistema se encontram numa região estável. Para isso, torna-se necessário utilizar valores de T_s superiores. Após corrermos alguns testes, concluímos que uma combinação vantajosa seria $T_s = 20$ e $M_p = 0,05$, que permitem obter:

$$\begin{cases} \omega_n = 0,289810244 \\ \zeta = 0,6901067306 \end{cases}$$

Daqui, retiramos que:

$$z_d = 0,8007887 \pm j 0,170462632$$

Utilizando o programa em MATLAB para resolver um sistema de equações semelhante ao anterior, mas para os novos valores de z_d , obteve-se:

$$\begin{cases} K_c = -8,646327568 \times 10^{-6} \\ a = 0,910664897 \end{cases}$$

Estes valores provocam a seguinte resposta do sistema:

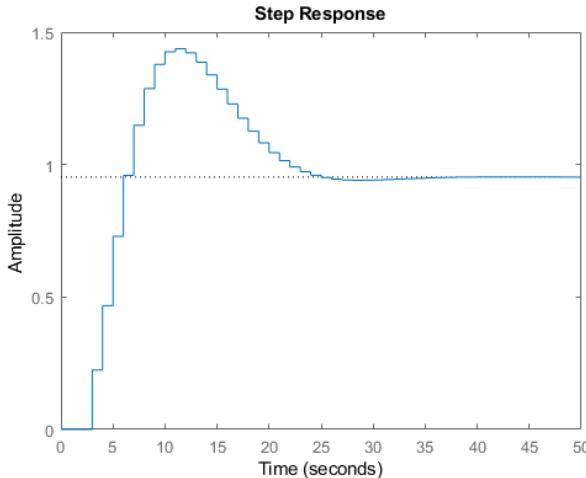


Figura 51 - Resposta Estável do Sistema com Compensador

Apesar do *overshoot* ser claramente superior ao pretendido, por influência dos restantes polos, o valor de T_s aparenta estar próximo das 20 unidades de tempo pretendidas. Não é, de todo, tão eficaz como o sistema com compensador para a função sem atraso, mas é muito mais estável do que os seus equivalentes sem compensador e do que a primeira tentativa de aplicar um compensador para este sistema.

Podemos calcular, por fim, o erro em regime permanente para o sistema determinado:

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1 - z^{-1})R(z)}{1 + G_p(z)G_o(z)} \text{ e que } R(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1})}$$

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 + 0,2242982 \cdot \frac{z - 0,910664897}{z^4 - 1,99503z^3 + 0,99574z^2}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow e_{ss} = 0,034221$$

IX. IMPLEMENTAÇÃO DOS CONTROLADORES

A. Implementação do 1º Controlador

Como sabemos, U não é a saída do nosso sistema, no entanto corresponde a um parâmetro intermédio. Sendo que $G_o(z)$ relaciona uma entrada U uma saída I, podemos visualizar o sistema do seguinte modo:

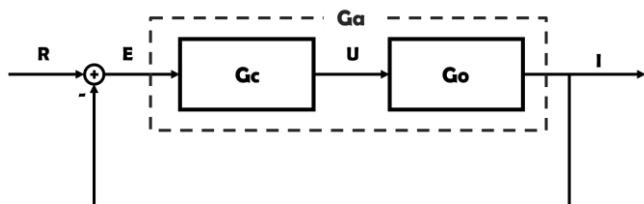


Figura 52 - Sistema a Implementar

Assumindo a validade da linearização, podemos utilizar o I fornecido pela simulação, subtraindo-o ao nosso sinal de referência, obtendo assim E. Multiplicando E pelo compensador, o resultado dessa operação terá de corresponder ao valor de U gerado pelo sistema.

Sabendo que o erro em regime permanente é praticamente nulo para este sistema (um valor efetivamente muito baixo) podemos considerar para sinal de referência o objetivo final

da aplicação do controlador, zero infetados. Seria também possível explorar outros objetivos, como garantir que não seria ultrapassada uma certa capacidade dos serviços de saúde.

Devemos realizar agora a transformada inversa do compensador, dada por:

$$Z^{-1} \left\{ -5,375580321 \times 10^{-5} \frac{z - 0,569452711}{z - 1} \right\} = \\ = Z^{-1} \left\{ 5,375580321 \times 10^{-5} \left(-\frac{z}{z - 1} + \frac{0,569452711}{z - 1} \right) \right\}$$

Torna-se agora trivial realizar a transformada inversa destas duas expressões obtendo-se, no domínio discreto de k:

$$5,375580321 \times 10^{-5} (-1 + 0,569452711 u[k - 1])$$

Na sua forma geral, para a e K_c :

$$K_c (1 - au[k - 1])$$

Assim, U, enquanto saída, é obtido por:

$$U = (R - I)K_c (1 - au[k - 1])$$

Foi criado um cenário no programa CODIG.M, o cenário 5, correspondente a esta implementação:

```
case 5
    I=Xk(2);
    ref=0*CapSS;
    a=0.569452711234142;
    kc=-5.375580320557640*10^-5;
    if (k==0)
        u=(ref-I)*kc;
    elseif (k>0)
        u=(ref-I)*(kc-kc*a);
    end
    if (u<0)
        u=0;
    elseif (u>2)
        u=2;
    end
otherwise
    u=0;
```

Figura 53 - Código Utilizado para obter U

Convém reforçar que U varia entre 0 e 2, tendo sido necessário implementar essa limitação. Os resultados para uma referência nula evidenciam uma resposta forte de contenção, mas também medidas de alta intensidade durante um longo período. No entanto, a curva vai suavizando, ao contrário do outro caso com mais sucesso, o de medidas de contenção constantes desde o dia 15:

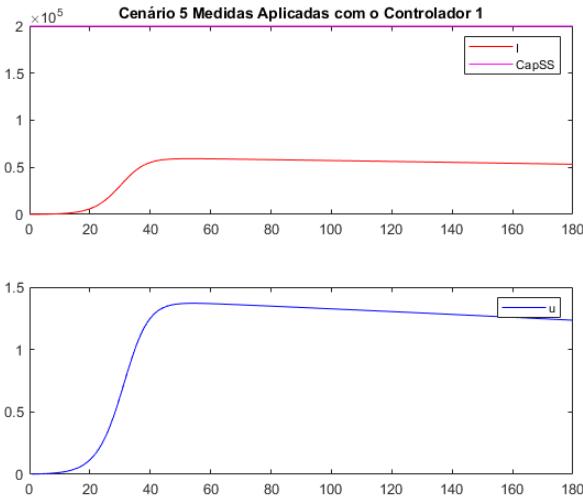


Figura 54 - Resultados para um valor de $R=0$

As medidas poderão ser suavizadas ao aumentarmos a referência. Tome-se como exemplo 50% da capacidade dos serviços de saúde. Teremos uma situação sustentável, apesar do maior número de infetados. Teremos também um afrouxamento maior das medidas de contenção:

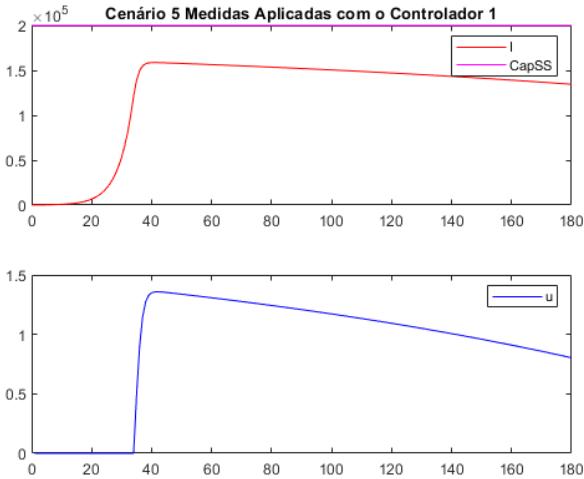


Figura 55 - Resultados para um valor de $R=0.5 \times \text{CapSS}$

Verifica-se para ambos os casos que o valor da saída I nunca estabiliza no valor de entrada ou, pelo menos, suficientemente próximo dele. É importante reforçar que a linearização foi feita em torno de um ponto de equilíbrio e que há variações no comportamento das curvas quando nos afastamos desse ponto. O que se verifica, no entanto, é a tendência pretendida, a da estabilização do número de infetados. Pela definição do ponto de funcionamento escolhido para a linearização tínhamos que $\frac{dI}{dt} = 0$. Esta condição dependia do U que, relembramos, era dado por $U = R_o - \frac{N}{S^*}$. O ajuste constante do valor de U é visível, bem como a manifestação dos seus efeitos. Podemos concluir que a linearização produziu efeitos positivos na criação de um controlador, apesar de não ser um modelador ideal para o comportamento natural do sistema SIR, como já era esperado.

Tal como foi referido anteriormente, utilizaremos agora o programa de MATLAB desenvolvido para dimensionar automaticamente o compensador, para demonstrar o que aconteceria se tivéssemos escolhido um valor de T_s maior no

dimensionamento. Assumindo $T_s = 20$ e $M_p = 0,05$, teríamos:

$$\begin{cases} K_c = -1,5166760455 \times 10^{-5} \\ a = 0,82708841 \end{cases}$$

Substituindo no cenário criado, obtemos:

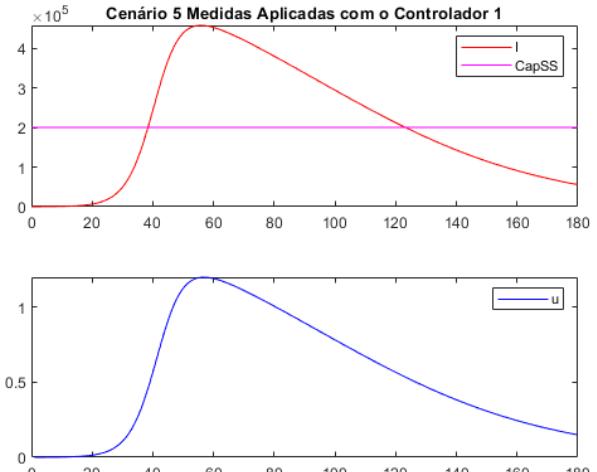


Figura 56 - Resultados para o sistema com $T_s=20$ e $R=0$

Tal como tinha sido previsto anteriormente, o maior tempo que demora a estabilizar em relação ao degrau, gera também um atraso na resposta. Provoca um pico demasiado longo. Note-se que a forma das curvas é praticamente semelhante. Um controlador com estes parâmetros não teria sucesso. Estes são, curiosamente, os parâmetros obtidos para o controlador com atraso.

B. Implementação do 2º Controlador

Para utilizarmos um procedimento semelhante ao anterior, é necessário isolar o atraso, de modo a obter $G_o(z)$. Teremos então o seguinte modelo equivalente:

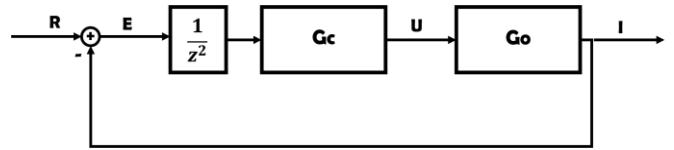


Figura 57 - Sistema a Implementar

Mantendo-se E como a diferença entre a referência e a saída e assumindo-se como válida a linearização caracterizada por G_o dos efeitos provocados em I por U , teremos agora que U é obtido pela passagem de E nos blocos do atraso e de G_c . O bloco equivalente é dado por:

$$-8,646327568 \times 10^{-6} \frac{z - 0,910664897}{z^2(z - 1)} = \\ = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{(z - 1)}$$

Recorrendo à regra dos Tapas, substituindo $K_c = -8,646327568 \times 10^{-6}$ e $a = 0,910664897$, temos que:

$$Az^2 - Az + Bz - B + Cz^2 = K_c z - K_c a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A + C = 0 \\ -A + B = K_c \\ B = K_c a \end{cases}$$

Substituindo os valores:

$$\begin{cases} A = 7,25716624 \times 10^{-7} \\ B = -7,920610944 \times 10^{-6} \\ C = -7,25716624 \times 10^{-7} \end{cases}$$

Sendo que $\frac{A}{z}$ e $\frac{B}{z^2}$ correspondem a atrasos, a primeira de um dia, a segunda de dois dias, relativamente à função de entrada, teremos que no domínio discreto k:

$$U[k] = A \times E[k - 1] + B \times E[k - 2] + E \times Cu[k - 1]$$

A sua implementação em MATLAB implicou a criação de duas variáveis globais: *Eone* e *Etwo*, sendo que a primeira corresponde a $E[k - 1]$ e a segunda a $E[k - 2]$. Estas vão sendo progressivamente atualizadas no fim de cada ciclo do cenário, passando para *Etwo* o valor de *Eone* e para *Eone* o valor atual de E:

```
case 6
I=Xk(2);
ref=0*CapSS;
A=7.25716624e-7;
B=-7.920610944e-6
C=-A;
E=ref-I;
if (k>0)
    u=A*Eone+B*Etwo+C*C;
end
if(u<0)
    u=0;
elseif (u>2)
    u=2;
end
Etwo=Eone;
Eone=E;
```

Figura 58 - Código Utilizado para obter U

Para a simulação em questão, apesar do erro em regime permanente deste sistema ser ligeiramente superior, é bastante baixo. Assim, a referência utilizada foi 0:

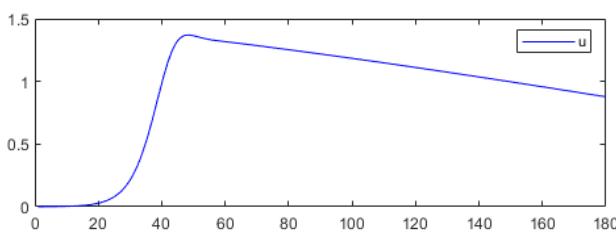
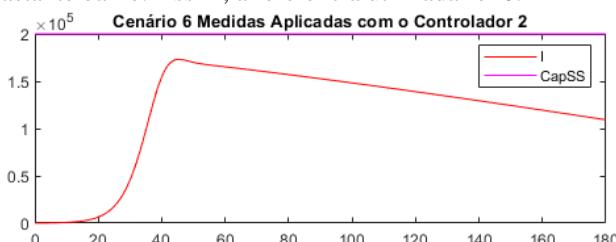


Figura 59 - Resultados para um valor de R=0

Como podemos observar, as duas curvas são bastante semelhantes, parecendo mesmo que se acompanham, mediante as respetivas escalas, obviamente. É visível o atraso introduzido na aplicação das medidas, tendo a curva de U um ligeiro atraso em relação à curva de I. Em relação aos valores

obtidos para a mesma referência para o controlador 1, esta curva apresenta um número consideravelmente maior de infetados, algo que já se esperava, devido ao valor superior de T_s . São, no entanto, resultados melhores do que os obtidos para o controlador 1, quando lhe é aplicado o mesmo T_s e a mesma referência.

X. MODELO SEIR

Para a análise deste vírus, utilizámos até agora o Modelo Epidemiológico SIR que corresponde a um dos modelos mais simples para demonstrações de propagação de doenças. Dado que o tema do trabalho proposto está tão presente no nosso dia-a-dia, quisemos expandir a nossa análise para um modelo diferente, com mais variáveis presentes. Este é denominado “SEIR”. Este modelo é constituído por 4 compartimentos: Suscetíveis, Expostos, Infetados, Recuperados.

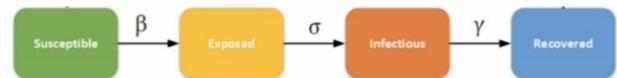


Figura 60 – Modelo SEIR

A razão pela qual achamos pertinente analisar este modelo, foi devido a agora considerarmos um novo fator. O tempo de incubação que levou os indivíduos expostos a ficaram posteriormente infetados. Isto é um fator que no cenário real é bastante importante analisar, sendo um dos pontos mais difíceis de determinar. Por exemplo, estima-se que no covid-19, o tempo de incubação seja de 5-7 dias. No entanto existem relatos de tempos de incubação bastante diferentes deste número, o que é extremamente perigoso pois esse indivíduo estará possivelmente a contaminar outros com quem se terá cruzado.

A constante: $N=S+E+I+R$ será mantida, dado que vamos analisar da mesma forma que analisamos para o modelo SIR, ou seja, sem considerar nascimentos e óbitos. A dinâmica da propagação é expressa por um sistema de quatro equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\frac{\beta SI}{N} \\ \frac{dE}{dt} &= \frac{\beta SI}{N} - \sigma E \\ \frac{dI}{dt} &= \sigma E - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I \end{aligned}$$

Neste conjunto de equações, são apresentados β que corresponde à probabilidade de um indivíduo suscetível ser exposto ao vírus. Por outro lado, σ está associado ao tempo de incubação e corresponde ao inverso deste mesmo. Finalmente, γ está associado ao tempo de recuperação de cada indivíduo infetado, correspondendo ao inverso deste mesmo.

$$\beta = \frac{Ro - u}{Tinf}$$

$$\sigma = \frac{1}{T_{incubação}}$$

$$\gamma = \frac{1}{T_{inf}}$$

A. Análise de simulações

Neste ponto, iremos analisar as simulações pedidas no ponto 1 do enunciado, mas para o modelo SEIR. Os cenários são exatamente os mesmos com apenas duas diferenças. Temos agora uma curva amarela que representa a evolução do número de indivíduos expostos à doença. No cenário 2, decidimos mudar a forma como apresentamos os resultados e o gráfico será semelhante ao cenário 4. Preferimos visualizar desta maneira pois consegue-se interpretar melhor a curva de infetados numa situação onde temos medidas de contenção aplicadas mais cedo.

Serão visualizadas neste ponto duas análises: uma utilizando o $T_{inf}=6$ que era a implementação inicial do trabalho e outra variando o tempo de recuperação, simulando um possível tratamento que encurtasse a duração média do tempo de infecção para 4 dias.

Neste caso é importante relembrar mais uma vez que, a equação do número de reprodução, $R_t = R_0 - u$, não depende de T_{inf} , ou seja, a quantidade de transmissões da infecção de um para outro indivíduo manter-se-á constante.

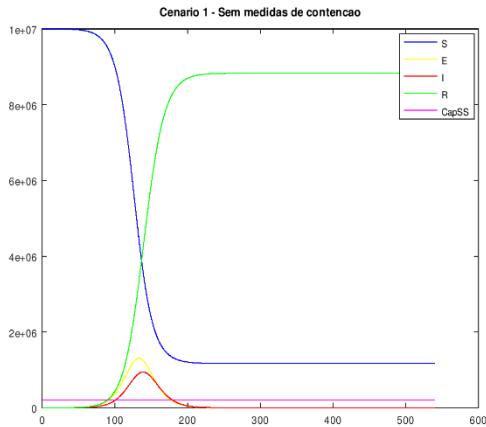


Figura 61 – Cenário 1 Modelo SEIR com $T_{inf}=6$

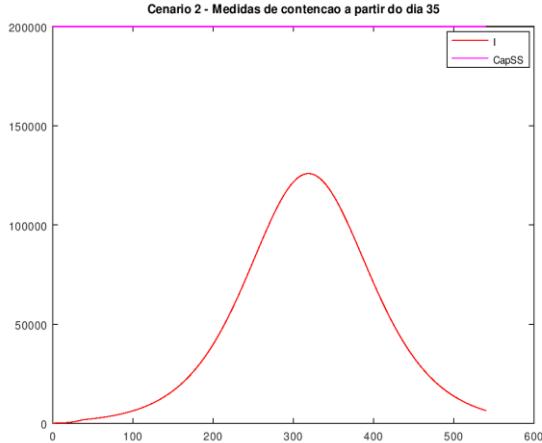


Figura 62 – Cenário 2 Modelo SEIR com $T_{inf}=6$

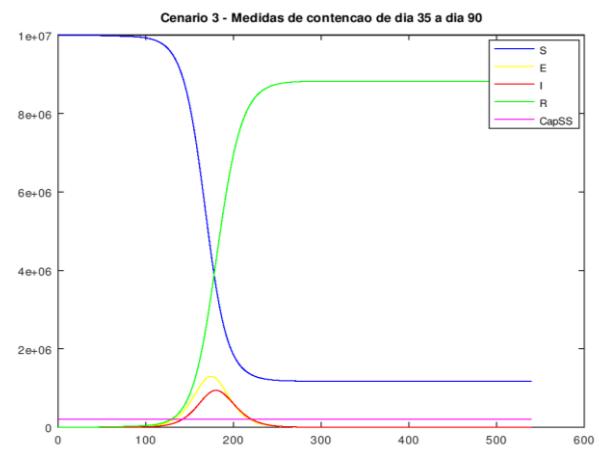


Figura 63 – Cenário 3 Modelo SEIR com $T_{inf}=6$

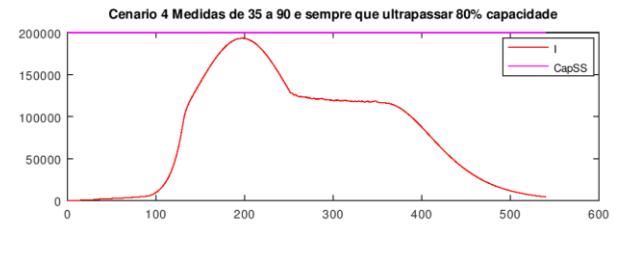


Figura 64 – Cenário 4 Modelo SEIR com $T_{inf}=6$

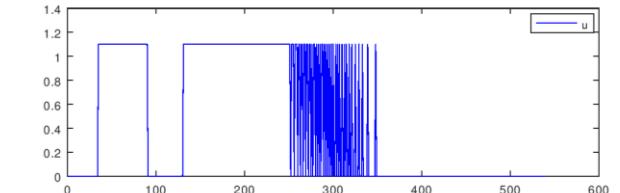


Figura 65 – Cenário 1 Modelo SEIR com $T_{inf}=4$

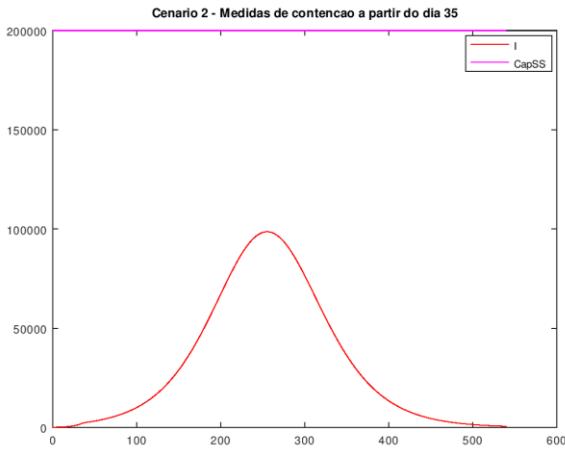


Figura 66 – Cenário 2 Modelo SEIR com $T_{inf}=4$

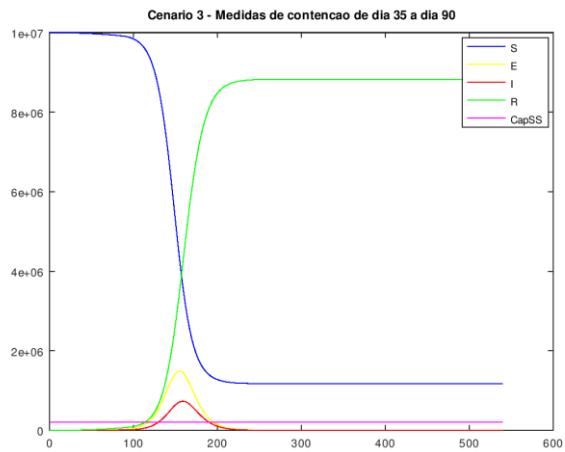


Figura 67 – Cenário 3 Modelo SEIR com $T_{inf}=4$

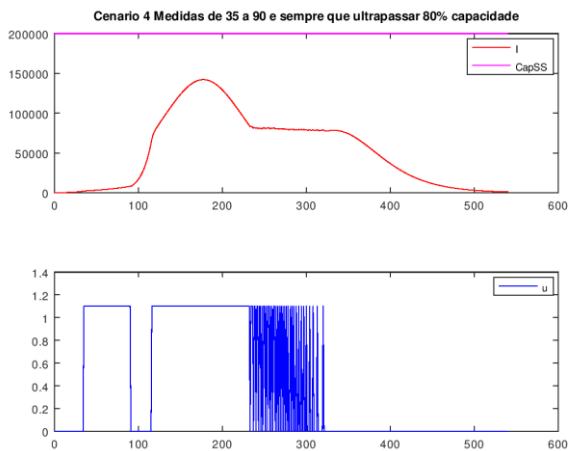


Figura 68 – Cenário 4 Modelo SEIR com $T_{inf}=4$

Observando estes gráficos, podemos tirar algumas conclusões. Em primeiro lugar, a curva de infetados acompanha a curva de expostos como seria de esperar. Existe um intervalo de tempo para um indivíduo ficar infetado que corresponde ao tempo de incubação já falado anteriormente.

Abordando agora as diferenças provocadas pelo tratamento que encurta a duração média da doença, podemos notar no cenário 2 que são precisos menos dias para curar todos os infetados. Nos outros cenários também conseguimos

visualizar que o pico de infetados e expostos acontece mais cedo e como seria de esperar, o número de dias necessário para curar todos os infetados também é menor.

Por último, olhando para o cenário 4, podemos visualizar que este controlador apresentado nas duas análises não é de todo viável nem desejado. Esta conclusão é a mesma que a realizada para o modelo SIR onde ativar e desativar as medidas de atuação não é exequível num contexto real e é necessário procurar uma atualização do cenário 4, mas com uma curva do parâmetro u mais suave que foi implementado no modelo SIR sob a forma de um compensador.

B. Linearização, LGR e Bode

A linearização do modelo SEIR segue os mesmos princípios do modelo SIR, apresentados na secção III. Contudo, aqui optámos por simplificar o processo de cálculo através do estabelecimento dum matriz jacobiana J , que corresponde às derivadas parciais de cada uma das funções em cada um dos pontos de funcionamento $(S,I,R)=(S^*,I^*,R^*)$.

Consideremos $f = \frac{dS(t)}{dt}$, $g = \frac{dI(t)}{dt}$ e $h = \frac{dE(t)}{dt}$. Temos então para a matriz de linearização:

$$\begin{bmatrix} \dot{S} \\ \dot{I} \\ \dot{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial S} & \frac{\partial f}{\partial I} & \frac{\partial f}{\partial E} & \frac{\partial f}{\partial U} \\ \frac{\partial g}{\partial S} & \frac{\partial g}{\partial I} & \frac{\partial g}{\partial E} & \frac{\partial g}{\partial U} \\ \frac{\partial h}{\partial S} & \frac{\partial h}{\partial I} & \frac{\partial h}{\partial E} & \frac{\partial h}{\partial U} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S \\ I \\ E \\ U \end{bmatrix} s,$$

Preenchendo com os valores conhecidos ter-se-á então:

$$\begin{bmatrix} \dot{S} \\ \dot{I} \\ \dot{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta \cdot I^* & -\beta \cdot S^* & 0 & \frac{I^* \cdot S^*}{T_{inf} \cdot N} \\ \frac{N}{N} & \frac{N}{N} & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma & \sigma & 0 \\ \frac{\beta \cdot I^*}{N} & \frac{\beta \cdot S^*}{N} & -\sigma & \frac{-I^* \cdot S^*}{T_{inf} \cdot N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S \\ I \\ E \\ U \end{bmatrix}$$

Resolvendo, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{S} \\ \dot{I} \\ \dot{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma I - \gamma \frac{I^* \cdot S}{S^*} + \gamma \frac{S^* \cdot I^* \cdot U}{N} \\ \sigma E - \gamma I \\ \gamma I - \sigma E + \gamma \frac{I^* \cdot S}{S^*} - \frac{S^* \cdot I^* \cdot U}{N} \end{bmatrix}$$

Note-se que o resultado é bastante semelhante ao já obtido em III, à exceção do termo relativo ao número de indivíduos expostos na população.

Podemos, à semelhança do modelo SIR, encontrar uma função de transferência relativa às equações diferenciais que apresentamos acima. Contudo, desta vez, a importância reside na diminuição dos números da população exposta, uma vez que as medidas de contenção apenas podem agir sobre os contágios. Podemos, mais uma vez, estabelecer funções de transferência que descrevam a evolução do número de indivíduos expostos e infetados consoante a taxa de contenção aplicada (os cálculos são muito semelhantes ao modelo SIR, foram, portanto, omitidos).

Fez-se as seguintes substituições para simplificar os cálculos e a visibilidade da equação:

$$a = \gamma \frac{I^*}{S^*} \text{ e } b = \gamma \frac{I^* \cdot S^*}{N}$$

Temos, assim:

$$\frac{E(s)}{U(s)} = -\frac{bs\gamma + bs^2}{(a\sigma + s^2 + as)\gamma + s^2(\sigma + a) + as\sigma + s^3}$$

$$\frac{I(s)}{U(s)} = -\frac{bs\sigma}{(a\sigma + s^2 + as)\gamma + s^2(\sigma + a) + as\sigma + s^3}$$

É de notar que ambas as equações apresentam agora um fator de terceira ordem no denominador.

Tendo então a função de transferência para o número de infetados em tempo contínuo, passá-la para tempo discreto é trivial. Não apresentaremos aqui o processo de obtenção da expressão por motivos de brevidade.

Assim, a função de transferência em tempo discreto, para tempo de amostragem $T = 1$, corresponde a:

$$H(z) = \frac{b\sigma(z-1)}{z^3 + z^2(y + \sigma + a - 3) + z(a(y + \sigma - 2) - 2y - 2\sigma + 3) + (y + a(\sigma - 1))(y - 1) + \sigma - 1}$$

Podemos, também, considerando o ponto de funcionamento (S^*, I^*, R^*) , que pode ser definido por $N = 10^7$, $I^* = 2 \times 10^5$, $R^* = 2 \times 10^6$, $S^* = 7,6 \times 10^6$ e $E^* = 2 \times 10^5$, criar gráficos do lugar geométrico de raízes, bem como o respetivo traçado de Bode.

Defina-se $\gamma = \frac{1}{6}$ e $\sigma = 1$. Para o LGR teremos então:

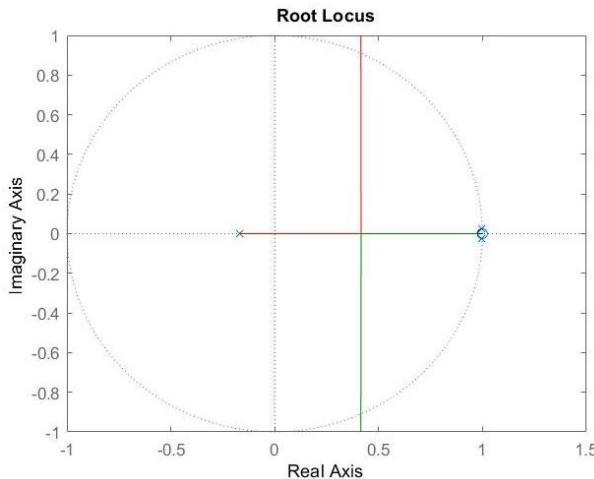


Figura 60 - LGR do sistema do Modelo SEIR

E para o traçado de Bode:

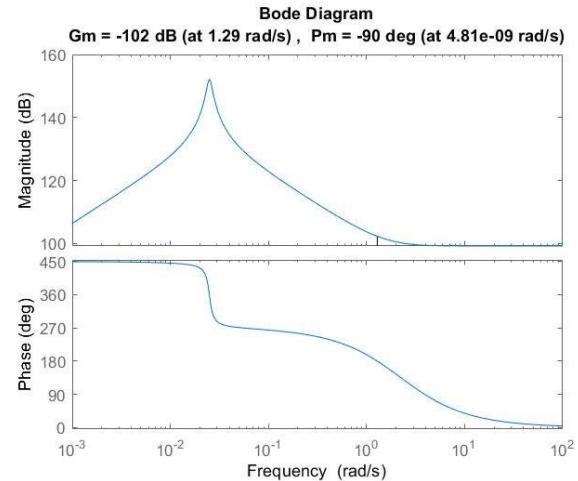


Figura 61 - Diagrama de Bode do Sistema do Modelo SEIR

Como podemos verificar, a função de transferência obtida é substancialmente diferente da função do modelo SIR. Isto deve-se à introdução da variável correspondente aos indivíduos expostos que se reflete, por sua vez, num LGR com uma resposta significativamente diferente, devido à introdução de um polo em -0.16. Contudo, este polo não é dominante, ou seja, o comportamento do sistema não deverá ser muito diferente do analisado no caso do modelo SIR.

Apesar de não ter sido feita uma análise muito extensa ao modelo SEIR, podemos concluir que o seu comportamento não será muito diferente do SIR, devido aos polos dominantes muito perto da instabilidade, que caracterizam ambos os modelos.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Ogata, Katsuhiko, *Discrete Time Control Systems*, Second Edition, University of Minnesota, 1995.
- [2] I. Kar, *Module 4: Time Response of discrete time systems – Lecture Note 2*.
- [3] No Author declared, *Linearization of Differential Equation Models*.
- [4] *SEIR and SEIRS model*, Institute for Disease Modeling (IDM), 2019.
- [5] ACM, FAF, FLP, *Projeto CDIG 2020: O vírus CODIG*, FEUP-DEEC, 2020.

Anexo 1: Código Integral do Ficheiro CODIG.M com alterações implementadas

```
%%% Projeto CDIG 2020
%%% Virus CODIG
%%%% ACM, FAF, FLP, Mar2020
%%%% Alterado por Bernardo Franco, Francisco Caetano, Guilherme PInheiro e
%%%% Tomás Araujo

function codig

global T n N R_0 T_inf v gamma Eone Etwo;

clear all;

% Compartimental Model parameters
T=1; %sampling time
n=180; %simulation horizon

N=10e6; %population
R_0=2.4; % basic reproduction number
T_inf=6; % infection duration
v=0; %vaccination rate
CapSS = 200e3;
Eone=0;%Erro em k-1
Etwo=0;%Erro em k-2

gamma= 1 / T_inf;

%%%
%%% Cenario 1 - Sem medidas contencao

Control_Strategy=1;
I0= 100; %Initially infected
SIR= [N-I0 I0 0]; % Initial state; zero recovered

[S,I,R]=simula(SIR);

figure(1);clf;
plot(0:n,S,'b',0:n,I,'r',0:n,R,'g',0:n,CapSS*ones(n+1), 'm');
title('Cenário 1 - Sem medidas de contenção');
legend('S','I','R','CapSS');

%%%
%%% Cenario 2

Control_Strategy=2;
I0= 100; %Initially infected
SIR= [N-I0 I0 0]; % Initial state; zero recovered

[S,I,R]=simula(SIR);

figure(2);clf;
plot(0:n,I,'r',0:n,R,'g',0:n,CapSS*ones(n+1), 'm');
legend('I','R','CapSS');
title('Cenário 2 - Medidas de contenção a partir do dia 35');

%%%
%%% Cenario 3

Control_Strategy=3;
I0= 100; %Initially infected
SIR= [N-I0 I0 0]; % Initial state; zero recovered
```

```

[S,I,R]=simula(SIR);

figure(3);clf;
plot(0:n,I,'r',0:n,R,'g',0:n,CapSS*ones(n+1),'m');
legend('I','R','CapSS');
title('Cenário 3 - Medidas de contenção de dia 35 a dia 90');

%%%
%%% Cenario 4

Control_Strategy=4;
I0= 100; %Initially infected
SIR= [N-I0 I0 0]; % Initial state; zero recovered

[S,I,R,U]=simula(SIR);

figure(4);clf;
subplot(2,1,1)
plot(0:n,I,'r',0:n,CapSS*ones(n+1),'m');
legend('I','CapSS');
title('Cenário 4 Medidas de 35 a 90 e sempre que ultrapassar 80% capacidade');
subplot(2,1,2);
plot(1:n,U,'b');
legend('u');

%%%
%%% Cenario 5

Control_Strategy=5;
I0= 100; %Initially infected
SIR= [N-I0 I0 0]; % Initial state; zero recovered

[S,I,R,U]=simula(SIR);

figure(5);clf;
subplot(2,1,1);
plot(0:n,I,'r',0:n,CapSS*ones(n+1),'m');
legend('I','CapSS');
title('Cenário 5 Medidas Aplicadas com o Controlador 1');
subplot(2,1,2);
plot(1:n,U,'b');
legend('u');

%%% Cenario 6

Control_Strategy=6;
I0= 100; %Initially infected
SIR= [N-I0 I0 0]; % Initial state; zero recovered

[S,I,R,U]=simula(SIR);

figure(6);clf;
subplot(2,1,1);
plot(0:n,I,'r',0:n,CapSS*ones(n+1),'m');
legend('I','CapSS');
title('Cenário 6 Medidas Aplicadas com o Controlador 2');
subplot(2,1,2);
plot(1:n,U,'b');
legend('u');

%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%

function u=control(k,Xk,Strategy)

switch Strategy
    case 1
        u=0;

```

```

case 2
    if (k>=35)
        u=1.25;
    else
        u=0;
    end
case 3
    if (k>=35 && k<=90)
        u=1.25;
    else
        u=0;
    end
case 4
    if (k<35)
        u=0;
    elseif (k>=35 && k<=90)
        u=1.25;
    elseif (k>90)
        I=Xk(2);
        if I>0.8*CapSS
            u=1.25;
        else
            u=0;
        end
    end
end
case 5 %%Implementa o Controlador 1
I=Xk(2); %%leitura do valor atual de I
ref=0*CapSS; %%referência do sistema
a=0.569452711234142; %%zero do compensador
kc=-5.375580320557640*10^-5; %%ganho do compensador
if (k==0)
    u=(ref-I)*kc; %%expressão para k=0, não inclui step atrasado
elseif (k>0)
    u=(ref-I)*(kc-kc*a); %%expressao geral
end
%assegura intervalo [0,2]
if(u<0)
    u=0;
elseif (u>2)
    u=2;
end
case 6
I=Xk(2); %%leitura do valor atual de I
ref=0*CapSS; %%referência do sistema
A=7.25716624e-7; %parametro obtido por tapas (ver relatorio)
B=-7.920610944e-6 %parametro obtido por tapas (ver relatorio)
C=-A; %parametro obtido por tapas (ver relatorio)
E=ref-I; %erro da entrada E=R-I
if (k>0)
    u=A*Eone+B*Etwo+E*C; %%expressao geral
end
%assegura intervalo [0,2]
if(u<0)
    u=0;
elseif (u>2)
    u=2;
end
%atualiza erros para o próximo ciclo
Etwo=Eone;
Eone=E;
otherwise
    u=0;
end %switch
end %function control

function [S,I,R,U]=simula(SIR)

```

```

% global T n N R_0 T_inf v gamma;
U=[];
for k=1:n

SIRk=SIR(k,:);
S=SIRk(1);
I=SIRk(2);
R=SIRk(3);

u=control(k,SIRk,Control_Strategy);

alpha= (R_0-u)*I/(N*T_inf);
df=[ -alpha*S - v*S, alpha*S-gamma*I, v*S+ gamma*I];

SIR=[SIR ; SIRk+T*df]; %m?todo Euler simples
U=[U u];
end
S=SIR(:,1);
I=SIR(:,2);
R=SIR(:,3);
end %simula
end %function codig

```

Anexo 2: Código Integral do Ficheiro para implementação do modelo SEIR

```
%%% Projeto CDIG 2020
%%% Virus CODIG
%%%% Baseado em ACM, FAF, FLP, Mar2020

function codig

global T n N R_0 T_inf v O E gamma;

clear all;

% Compartmental Model parameters
T=1; %sampling time
n=540; %simulation horizon

N=10e6; %population
R_0=2.4; % basic reproduction number
T_inf=6; % infection duration
v=0; %vaccination rate
CapSS = 200e3;
E= 1000 *R_0; %exposed
O=0.125; %rate of incubation, time of incubation is 1/O

gamma= 1 / T_inf;

%%%
%%% Cen?rio 1 - Sem medidas conten??o

Control_Strategy=1;
I0= 100; %Initially infected
SIR= [N-I0-(I0*R_0) I0*R_0 I0 0]; % Initial state; zero recovered

[S,I,R]=simula(SIR);

figure(1);clf;
plot(0:n,S,'b',0:n,E,'y',0:n,I,'r',0:n,R,'g',0:n,CapSS*ones(n+1),'m');
title('Cenário 1 - Sem medidas de contenção');
legend('S','E','I','R','CapSS');

%%%
%%% Cen?rio 2

Control_Strategy=2;
I0= 100; %Initially infected
SIR= [N-I0-(I0*R_0) I0*R_0 I0 0]; % Initial state; zero recovered

[S,I,R]=simula(SIR);

figure(2);clf;
%plot(0:n,S,'b',0:n,E,'y',0:n,I,'r',0:n,R,'g',0:n,CapSS*ones(n+1),'m');
%legend('S','E','I','R','CapSS');
plot(0:n,I,'r',0:n,CapSS*ones(n+1),'m');
title('Cenário 2 - Medidas de contenção a partir do dia 35');
legend('I','CapSS');

%%%
%%% Cen?rio 3

Control_Strategy=3;
I0= 100; %Initially infected
```

```

SIR= [N-I0-(I0*R_0) I0*R_0 I0 0]; % Initial state; zero recovered

[S,I,R]=simula(SIR);

figure(3);clf;
plot(0:n,S,'b',0:n,E,'y',0:n,I,'r',0:n,R,'g',0:n,CapSS*ones(n+1), 'm');
legend('S','E','I','R','CapSS');
title('Cenário 3 - Medidas de contenção de dia 35 a dia 90');

%%% Cenário 4

Control_Strategy=4;
I0= 100; %Initially infected
SIR= [N-I0-(I0*R_0) I0*R_0 I0 0]; % Initial state; zero recovered

[S,I,R,U]=simula(SIR);

figure(4);clf;
subplot(2,1,1)
plot(0:n,I,'r',0:n,CapSS*ones(n+1), 'm');
legend('I','CapSS');
title('Cenário 4 Medidas de 35 a 90 e sempre que ultrapassar 80% capacidade');
subplot(2,1,2);
plot(1:n,U,'b');
legend('u');

function u=control(k,Xk,Strategy)

switch Strategy
    case 1
        u=0;
    case 2
        if (k>=35)
            u=1.1;
        else
            u=0;
        end
    case 3
        if (k>=35 && k<=90)
            u=1.1;
        else
            u=0;
        end
    case 4
        if (k<35)
            u=0;
        elseif (k>=35 && k<=90)
            u=1.1;
        elseif (k>90)
            I=Xk(2);
            if I>0.8*CapSS
                u=1.1;
            else
                u=0;
            end
        end
    otherwise
        u=0;
end %switch

end %function control

function [S,I,R,U]=simula(SIR)

```

```

% global T n N R_0 T_inf v gamma;
U=[];
for k=1:n

    SIRk=SIR(k,:);
    S=SIRk(1);
    E=SIRk(2);
    I=SIRk(3);
    R=SIRk(4);

    u=control(k,SIRk,Control_Strategy);

    beta= (R_0-u)/(T_inf);
    df=[ (-beta*S*I)/N, ((beta*S*I)/N) - (O*E), (O*E) - (gamma*I), gamma*I
];

    SIR=[SIR ; SIRk + T*df]; %m?todo Euler simples
    U=[U u];
end
S=SIR(:,1);
E=SIR(:,2);
I=SIR(:,3);
R=SIR(:,4);
end %simula
end %function codig

```