Curso introductorio en Matemáticas y Estadística

Programa de Finanzas Cuantitativas

QUANt

UCEMA

Introduccion

Idea del curso:

Cubrir las herramientas matemáticas básicas para desarrollar la teoría detrás de *Finanzas Cuantitativas* y *Machine Learning*.

A grandes rasgos, vamos a abordar dos partes esenciales:

Introduccion

Idea del curso:

Cubrir las herramientas matemáticas básicas para desarrollar la teoría detrás de *Finanzas Cuantitativas* y *Machine Learning*.

A grandes rasgos, vamos a abordar dos partes esenciales:

Analisis

El objetivo principal es aprender a modelar y operar funciones, mayormente de variable real.

La mayor parte de las cantidades que aparecen en finanzas se modelan con dichas funciones.

Conceptos clave: *derivabilidad, integrabilidad, aproximacion.*

Probabilidad

El objetivo es sentar un marco que permita estudiar fenómenos aleatorios o estocásticos.

La mayor parte de los valores de interés para las finanzas son intrínsecamente estocásticos.

Conceptos clave: *azar, probabilidad, esperanza.*

Introduccion

Idea del curso:

Cubrir las herramientas matemáticas básicas para desarrollar la teoría detrás de *Finanzas Cuantitativas* y *Machine Learning*.

A grandes rasgos, vamos a abordar dos partes esenciales:

Analisis

El objetivo principal es aprender a modelar y operar funciones, mayormente de variable real.

La mayor parte de las cantidades que aparecen en finanzas se modelan con dichas funciones.

Conceptos clave: *derivabilidad, integrabilidad, aproximacion.*

Probabilidad

El objetivo es sentar un marco que permita estudiar fenómenos aleatorios o estocásticos.

La mayor parte de los valores de interés para las finanzas son intrínsecamente estocásticos.

Conceptos clave: *azar, probabilidad, esperanza.*

Bibliografia

- Esqueleto del curso
  - D. Stefanica, “A primer for the mathematics of financial engineering”
- Analisis
  - R. Noriega, “Cálculo Diferencial e Integral”
  - T. Apostol, “Calculus Vol I and II”
- Probabilidad
  - S. Ross, “A First Course in Probability”
  - R. Durrett, “Probability: Theory and Examples”

Analisis

Un poco de notación

Un concepto antes de empezar: O grande y o chica.

$$f(x) = O(g(x)) \iff |f(x)| < C \cdot |g(x)|$$

Ejemplos:

- $x^2 + 3x - 1 = O(x^2)$ en infinito pero no en 0
- $x^2 + 3x - 1 = O(1)$ en 0 pero no en infinito

Un poco de notación

Un concepto antes de empezar: O grande y o chica.

$$f(x) = o(g(x)) \iff \lim_{x \to a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = 0$$

Ejemplos:

- $3x = o(x^2)$ en infinito
- $3x \neq o(x)$ ni en 0 ni en infinito
- $3x^3 + 2x = o(\sqrt{x})$ en 0

Derivadas

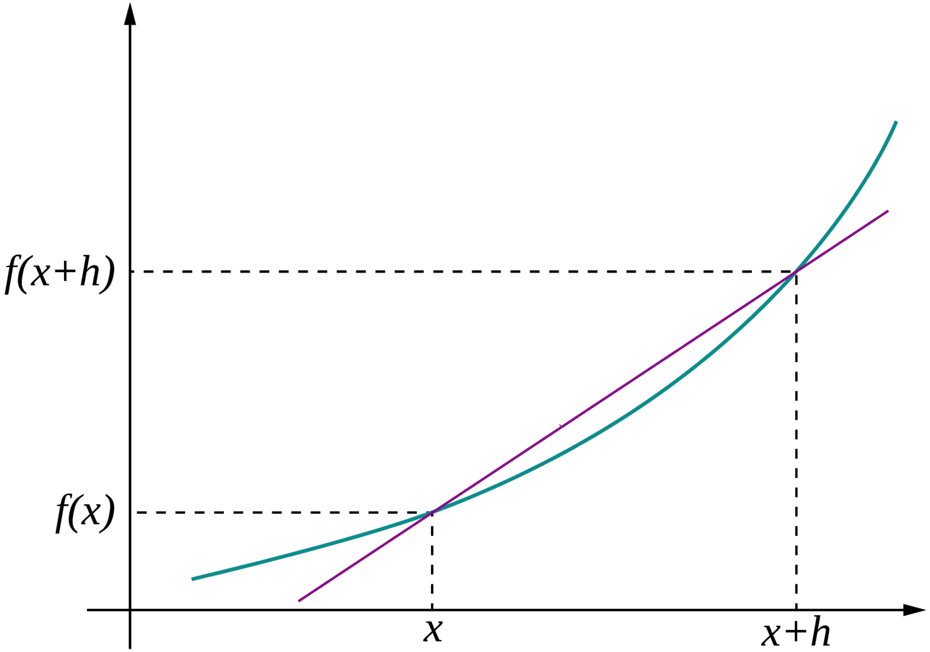
La derivada de una función en un punto es una cantidad que refleja la **velocidad con la que la función crece en ese punto**.

Formalmente:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Derivadas

La derivada de una función en un punto es una cantidad que refleja la **velocidad con la que la función crece en ese punto**.



Derivadas - Cómo operar

Afortunadamente no siempre hay que resolver un límite para calcular una derivada.

- $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = 1/x$
- $f(x) = sen(x) \Rightarrow f'(x) = cos(x)$
- $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

$\ldots$

Derivadas - Cómo operar

Afortunadamente no siempre hay que resolver un límite para calcular una derivada.

- $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = 1/x$
- $f(x) = sen(x) \Rightarrow f'(x) = cos(x)$
- $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

$\ldots$

Notacion: para una función f de una variable x:

$$f' = \frac{d}{dx} f$$

Derivadas - Cómo operar - Regla de la cadena

Y luego existen reglas para calcular derivadas de operaciones entre funciones:

Operaciones algebraicas:

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Derivadas - Cómo operar - Regla de la cadena

Y luego existen reglas para calcular derivadas de operaciones entre funciones:

Operaciones algebraicas:

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Y la **regla de la cadena** para resolver composiciones:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Derivadas - Cómo operar - Regla de la cadena

Y luego existen reglas para calcular derivadas de operaciones entre funciones:

Operaciones algebraicas:

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Y la **regla de la cadena** para resolver composiciones:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Ejemplo:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{sen(x) \cdot x^2 + 4}\right) = ?$$

Derivadas - Computacionalmente

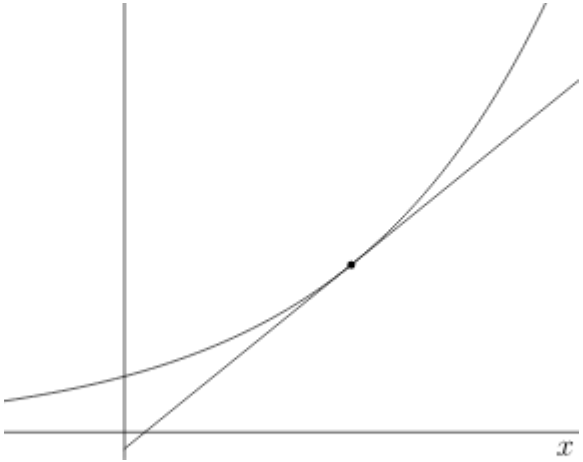
Computacionalmente se pueden tomar dos acercamientos para calcular derivadas:

- **Metodos numericos:**
  En líneas generales consisten en aproximar numéricamente el valor de una derivada utilizando los cocientes incrementales de su definición.

- **Automatic differentiation:**
  Se basa en el principio de que cualquier función expresada en una computadora se calcula a base de operaciones como las que acabamos de describir sobre funciones elementales, y existen reglas para derivar dichas operaciones.

Derivadas - Interpretación

Una aplicación importante: la derivada sirve para **aproximar** localmente el comportamiento de la función.



Ejemplo:

Tengo una funcion para el precio de dos derivados en función del precio de un subyacente. La derivada del primero en el precio actual es -4.8 y la del segundo es -7. En cual estoy más expuesto a cambios en el precio del subyacente?

Integrales

Dos nociones de integral:

- Una *primitiva* o *antiderivada* de una función *f*: es cualquier función *F* cuya derivada sea *f*. Formalmente:

$$F(x) = \int f(x)dx \iff F'(x) = f(x)$$

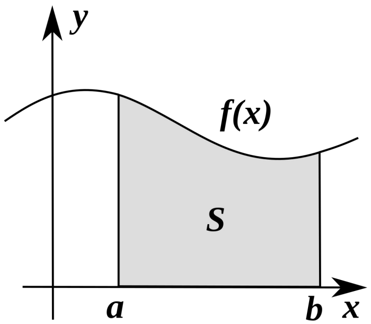
Integrales

Dos nociones de integral:

- Una *primitiva* o *antiderivada* de una función *f*: es cualquier función *F* cuya derivada sea *f*. Formalmente:

$$F(x) = \int f(x)dx \iff F'(x) = f(x)$$

- La *integral definida* de una función *f* entre dos puntos *a* y *b*: es el área bajo la curva determinada por el gráfico de *f* entre *a* y *b*.



$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Integrales - Teorema Fundamental del Cálculo

Las dos nociones de integral están asociadas por el Teorema Fundamental del Cálculo:

(TFC) Si *f* es una función continua en un intervalo [*a*,*b*] y *F* es una primitiva de *f* entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F\big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Integrales - Teorema Fundamental del Cálculo

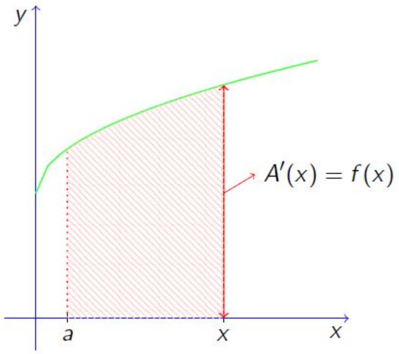
Las dos nociones de integral están asociadas por el Teorema Fundamental del Cálculo:

(TFC) Si *f* es una función continua en un intervalo [*a*,*b*] y *F* es una primitiva de *f* entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F|_a^b = F(b) - F(a)$$

Intuicion: el área debajo de una función crece localmente al ritmo del valor de la función.

$$A(x) = \int_a^x f(t)dt \implies$$



Integrales - Teorema Fundamental del Cálculo (cont.)

Luego *A(x)* es una primitiva de *f* y además:

$$A(b) - A(a) = \int_a^b f(x)dx - \int_a^a f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Integrales - Teorema Fundamental del Cálculo (cont.)

Luego *A(x)* es una primitiva de *f* y además:

$$A(b) - A(a) = \int_a^b f(x)dx - \int_a^a f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Más aún, se puede probar que dos primitivas de la misma función solo difieren en una constante, por lo tanto para cualquier primitiva *F* de *f* vale que:

$$F(b) - F(a) = A(b) - A(a) = \int_a^b f(x)dx$$

Integrales - Como operar - Substitución

También existen formas de calcular integrales para operaciones:

- Las integrales separan sumas y multiplicación por escalares

$$\int (\lambda_1 f + \lambda_2 g) = \lambda_1 \int f + \lambda_2 \int g$$

Integrales - Como operar - Substitución

También existen formas de calcular integrales para operaciones:

- Las integrales separan sumas y multiplicación por escalares

$$\int (\lambda_1 f + \lambda_2 g) = \lambda_1 \int f + \lambda_2 \int g$$

- Tenemos una regla de substitución

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$$

Integrales - Como operar - Substitución

Ejemplo:

$$\int x e^{x^2} dx \quad =$$

Integrales - Como operar - Substitución

Ejemplo:

$$\int xe^{x^2}dx \;=$$

$$\frac{1}{2}\int e^{x^2}2xdx =$$

Integrales - Como operar - Substitución

Ejemplo:

$$\int xe^{x^2}dx =$$

$$\frac{1}{2}\int e^{x^2}2x\,dx =$$

$$\frac{1}{2}\int e^{g(x)}g'(x)dx =$$

Integrales - Como operar - Substitución

Ejemplo:

$$\int xe^{x^2}dx \quad =$$

$$\frac{1}{2}\int e^{x^2}2xdx =$$

$$g(x) = x^2$$

$$\frac{1}{2}\int e^{g(x)}g'(x)dx \quad =$$

Integrales - Como operar - Substitución

Ejemplo:

$$\int xe^{x^2}dx =$$

$$\frac{1}{2}\int e^{x^2}2xdx =$$

$$g(x) = x^2$$

$$\frac{1}{2}\int e^{g(x)}g'(x)dx =$$

$$\frac{1}{2}\int e^{x}dx = \frac{1}{2}e^{x}$$

Integrales - Como operar - Integración por partes

- Y una regla de integración por partes

$$f \cdot g = \int f'g + \int fg'$$

Integrales - Como operar - Integración por partes

- Y una regla de integración por partes

$$f \cdot g = \int f'g + \int fg'$$

Ejemplo:

$$\int x \cdot sen(x) = x(-cos(x)) - \int 1 \cdot (-cos(x))$$

Integrales - Como operar - Integración por partes

- Y una regla de integración por partes

$$f \cdot g = \int f'g + \int fg'$$

Ejemplo:

$$\int x \cdot sen(x) = \underset{f}{x}\underset{g}{(-cos(x))} - \int 1 \cdot (-cos(x))$$

$$= -xcos(x) + sen(x)$$

Integrales - Como operar - Integración por partes

Ambas reglas tienen su versión para integrales definidas:

Integración por partes:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx + \int_a^b f'(x)g(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

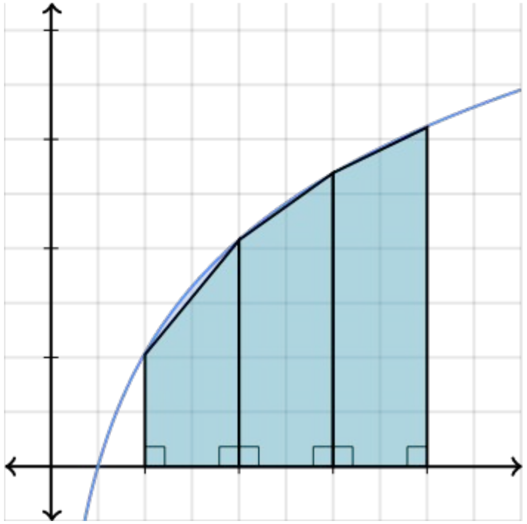
Integracion por sustitucion:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(a)} f(g(t))g'(t)dt$$

Integrales - Computacionalmente

Tambien se pueden tomar dos acercamientos para calcular integrales:

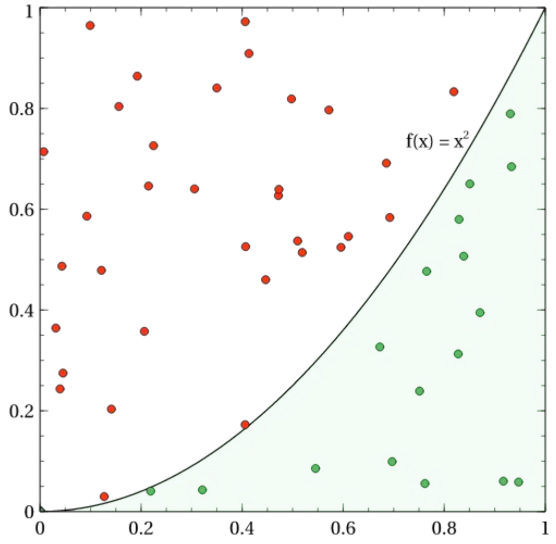
- **Metodos numericos:**
  Mayormente consisten en aproximar el área debajo del grafico de una función con valores de dicha función. Un ejemplo:



Integrales - Computacionalmente

También se pueden tomar dos acercamientos para calcular integrales:

- **Metodos probabilisticos:**
  Se basa en la interpretación de las integrales como valores esperados de experimentos. Vamos a profundizar en esto más adelante, pero como ejemplo:



Funciones multivariadas

Los mismos conceptos se pueden extender a funciones *multivariadas*. Es decir funciones que dependen de más de una variable.

Vamos a ver algunas definiciones y ejemplos en dos variables, es decir funciones $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Funciones multivariadas

Los mismos conceptos se pueden extender a funciones *multivariadas*. Es decir funciones que dependen de más de una variable.

Vamos a ver algunas definiciones y ejemplos en dos variables, es decir funciones $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Tomemos una función de ejemplo:

$$f(x, y) = sen(x)e^{x^2+y^2} - 3y^3$$

Existen nociones de diferenciabilidad e integrabilidad para estas funciones.

Funciones multivariadas - Derivadas parciales

En una variable existe una única forma de avanzar y por lo tanto una única posible velocidad de crecimiento.

Para una función de dos variables definimos sus **derivadas parciales** como:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$

Funciones multivariadas - Derivadas parciales

En una variable existe una única forma de avanzar y por lo tanto una única posible velocidad de crecimiento.

Para una función de dos variables definimos sus **derivadas parciales** como:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

Observemos que en un punto estas derivadas se pueden calcular como derivadas de una función de una sola variable, pensando que

$$f(x+h,y) = f_y(x+h)$$

Funciones multivariadas - Derivadas parciales

Para nuestra función de ejemplo:

$$f(x, y) = sen(x)e^{x^2+y^2} - 3y^3$$

Podemos calcular las derivadas parciales respecto a una variable “tomando a la otra como constante”.

Tenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(sen(x)e^{x^2+y^2} - 3y^3\right) =$$

Funciones multivariadas - Derivadas parciales

Para nuestra función de ejemplo:

$$f(x, y) = sen(x)e^{x^2+y^2} - 3y^3$$

Podemos calcular las derivadas parciales respecto a una variable "tomando a la otra como constante".

Tenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(sen(x)e^{x^2+y^2} - 3y^3\right) =$$

$$sen(x)e^{x^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(3y^3\right) =$$

Funciones multivariadas - Derivadas parciales

Para nuestra función de ejemplo:

$$f(x, y) = sen(x)e^{x^2+y^2} - 3y^3$$

Podemos calcular las derivadas parciales respecto a una variable “tomando a la otra como constante”.

Tenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(sen(x)e^{x^2+y^2} - 3y^3\right) =$$

$$sen(x)e^{x^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(3y^3\right) =$$

$$sen(x)e^{x^2}e^{y^2}2y + 9y^2$$

Funciones multivariadas - Derivadas parciales

Hay dos funciones que usaremos bastante

- El gradiente:

$$\Delta f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)$$

Funciones multivariadas - Derivadas parciales

Hay dos funciones que usaremos bastante

- El gradiente:

$$\Delta f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right)$$

- El Hessiano:

$$H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} \end{pmatrix}$$

Funciones multivariadas - Derivadas parciales

- Al igual que en una variable, las derivadas de una función multivariada nos hablan de la sensibilidad de una función a cambios en sus parámetros.

Funciones multivariadas - Derivadas parciales

- Al igual que en una variable, las derivadas de una función multivariada nos hablan de la sensibilidad de una función a cambios en sus parámetros.

- En este caso existen varios parámetros que pueden variar. Cada derivada parcial explica la sensibilidad ante variaciones en cada variable en la que está definida la función.

Funciones multivariadas - Derivadas parciales

- Al igual que en una variable, las derivadas de una función multivariada nos hablan de la sensibilidad de una función a cambios en sus parámetros.

- En este caso existen varios parámetros que pueden variar. Cada derivada parcial explica la sensibilidad ante variaciones en cada variable en la que está definida la función.

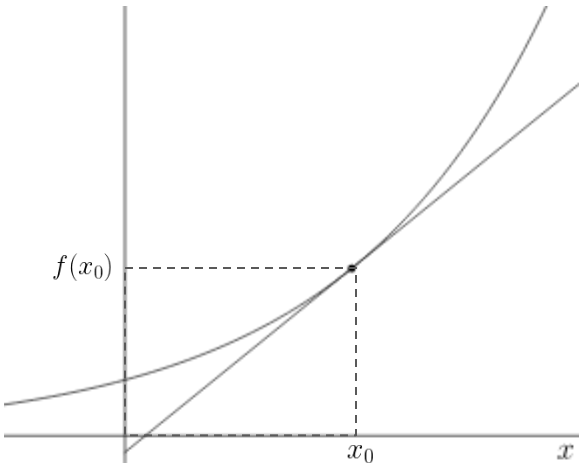
- Más aún, se pueden calcular sensibilidades respecto a combinaciones de dichas variables, para esto existe el concepto de derivada direccional:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(w) = \lim_{h \to 0} \frac{f(w + hv) - f(w)}{h}$$

Donde $w = (x, y)$ y v indica la dirección en la que queremos derivar.

Expansión de Taylor

Esto nos lleva a las derivadas de orden superior y la aproximación de funciones usando derivadas.



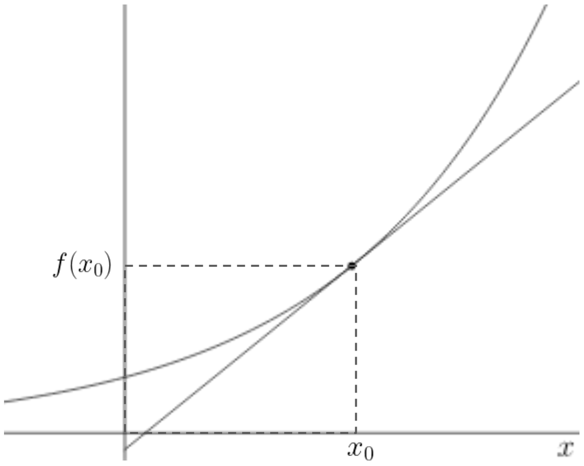
Ya dijimos que la recta tangente está relacionada con la derivada de f y aproxima a la función cerca del punto.

Las preguntas naturales son: como esta relacionada? que tan bien la aproxima?

Expansión de Taylor

En este caso la recta se puede escribir como

$$r(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$



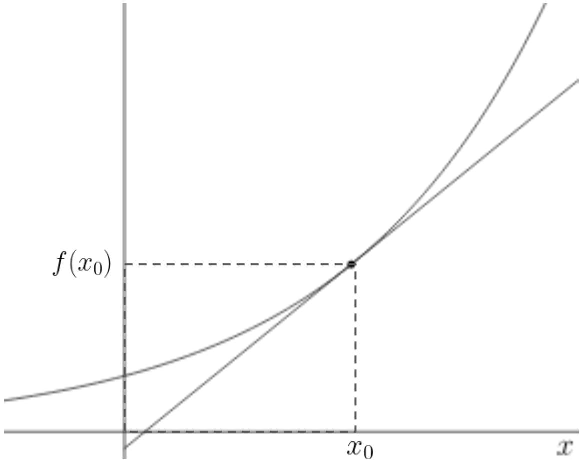
Expansión de Taylor

En este caso la recta se puede escribir como

$$r(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

y resulta que bajo ciertas condiciones

$$f(x) = r(x) + O((x - x_0)^2)$$



Expansión de Taylor

Recordemos las derivadas de orden superior:

La derivada segunda es la derivada de la derivada, es decir:

$$f''(x) = (f')'(x)$$

Expansión de Taylor

Recordemos las derivadas de orden superior:

La derivada segunda es la derivada de la derivada, es decir:

$$f''(x) = (f')'(x)$$

Y en general la derivada n-ésima es el resultado de derivar n veces a *f*, siempre vale:

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x)$$

Expansión de Taylor

Recordemos las derivadas de orden superior:

La derivada segunda es la derivada de la derivada, es decir:

$$f''(x) = (f')'(x)$$

Y en general la derivada n-ésima es el resultado de derivar n veces a *f*, siempre vale:

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x)$$

Recordemos:

- La derivada de *f* habla de la tasa de crecimiento de *f* un punto.
- La derivada segunda nos habla de la tasa con la que *f* se *curva* alrededor de un punto.
- Cuantas más derivadas calculemos, mejor podemos explicar lo que pasa con *f* cerca de un punto.

Expansión de Taylor

Esto se formaliza con la fórmula de Taylor, que nos dice que si *f* es derivable n+1 veces y su derivada n+1 es continua en un punto entonces:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \ldots + \frac{f^n(x)}{n!}h^n + O(h^{n+1})$$

Expansión de Taylor

Esto se formaliza con la fórmula de Taylor, que nos dice que si *f* es derivable n+1 veces y su derivada n+1 es continua en un punto entonces:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \ldots + \frac{f^n(x)}{n!}h^n + O(h^{n+1})$$

Mas aun, el término de error se puede calcular como:

$$\frac{f^{n+1}(c)}{n!}h^{n+1}$$

donde *c* es un punto que se encuentra entre *x* y *x+h*.

Expansión de Taylor

Ejemplos:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + O(x^4)$$

Observemos que esto sirve para valores de *x* cercanos a 0, y no tiene mucho sentido para valores de *x* mayores a 1.

Expansión de Taylor en varias variables

El polinomio de Taylor tiene una fórmula análoga en varias variables. Para el caso de orden 1, se obtiene un **plano tangente** combinando todas las derivadas parciales.

En dos variables resulta:

$$f(x_1, x_2) = f(a_1, a_2) + \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)(x_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)(x_2 - a_2) + O(||x - a||^2)$$

Expansión de Taylor en varias variables

El polinomio de Taylor tiene una fórmula análoga en varias variables. Para el caso de orden 1, se obtiene un **plano tangente** combinando todas las derivadas parciales.

En dos variables resulta:

$$f(x_1, x_2) = \underbrace{f(a_1, a_2)}_{\text{Valor puntual de f}} + \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)(x_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)(x_2 - a_2) + O(||x - a||^2)$$

Expansión de Taylor en varias variables

El polinomio de Taylor tiene una fórmula análoga en varias variables. Para el caso de orden 1, se obtiene un **plano tangente** combinando todas las derivadas parciales.

En dos variables resulta:

$$f(x_1, x_2) = f(a_1, a_2) + \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)(x_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)(x_2 - a_2) + O(||x - a||^2)$$

Derivada en la dirección de *x*

Incremento en la dirección de *x*

Expansión de Taylor en varias variables

El polinomio de Taylor tiene una fórmula análoga en varias variables. Para el caso de orden 1, se obtiene un **plano tangente** combinando todas las derivadas parciales.

En dos variables resulta:

$$f(x_1, x_2) = f(a_1, a_2) + \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)(x_1 - a_1) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)}_{\text{Derivada en la dirección de } y}\underbrace{(x_2 - a_2)}_{\text{Incremento en la dirección de } y} + O(||x - a||^2)$$

Expansión de Taylor en varias variables

El polinomio de Taylor tiene una fórmula análoga en varias variables. Para el caso de orden 1, se obtiene un **plano tangente** combinando todas las derivadas parciales.

En dos variables resulta:

$$f(x_1, x_2) = f(a_1, a_2) + \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)(x_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)(x_2 - a_2) + O(||x - a||^2)$$

Error de orden 2

Expansión de Taylor en varias variables

El polinomio de Taylor tiene una fórmula análoga en varias variables. Para el caso de orden 1, se obtiene un **plano tangente** combinando todas las derivadas parciales.

En dos variables resulta:

$$f(x_1, x_2) = f(a_1, a_2) + \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)(x_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)(x_2 - a_2) + O(||x - a||^2)$$

Error de orden 2

La versión de orden superior es similar:

- Hay que sumar un término por cada posible derivada de orden n (hay muchas!).
- Cada derivada se multiplica por el los incrementos en cada dirección utilizada para derivar.
- Se obtiene una aproximación con error de orden n+1.

Ecuaciones diferenciales

Muchas veces podemos encontrar una función que modele un fenómeno a partir de ciertas propiedades que dicha función debe cumplir.

En ese marco, una rama importante del análisis se dedica a resolver **ecuaciones diferenciales**. Una ecuación diferencial es una ecuación que involucra una o más funciones y sus derivadas.

Ecuaciones diferenciales

Muchas veces podemos encontrar una función que modele un fenómeno a partir de ciertas propiedades que dicha función debe cumplir.

En ese marco, una rama importante del análisis se dedica a resolver **ecuaciones diferenciales**. Una ecuacion diferencial es una ecuación que involucra una o más funciones y sus derivadas.

Algunos nombres:

Ecuaciones diferenciales

Muchas veces podemos encontrar una función que modele un fenómeno a partir de ciertas propiedades que dicha función debe cumplir.

En ese marco, una rama importante del análisis se dedica a resolver **ecuaciones diferenciales**. Una ecuacion diferencial es una ecuación que involucra una o más funciones y sus derivadas.

Algunos nombres:

- Ecuación diferencial **ordinaria** (ODE): cualquier ecuación con una o más funciones de **una variable** y sus derivadas.

Ecuaciones diferenciales

Muchas veces podemos encontrar una función que modele un fenómeno a partir de ciertas propiedades que dicha función debe cumplir.

En ese marco, una rama importante del análisis se dedica a resolver **ecuaciones diferenciales**. Una ecuacion diferencial es una ecuación que involucra una o más funciones y sus derivadas.

Algunos nombres:

- Ecuación diferencial **ordinaria** (ODE): cualquier ecuación con una o más funciones de **una variable** y sus derivadas.

- Ecuación diferencial **en derivadas parciales** (PDE): cualquier ecuación que involucre una o mas funciones de **más de una variable** y sus derivadas parciales.

Ecuaciones diferenciales - Algunos ejemplos

1. Hallar todas las funciones *f* tales que $f'(t) = 0$

Ecuaciones diferenciales - Algunos ejemplos

1. Hallar todas las funciones *f* tales que $f'(t) = 0$

2. Hallar todas las funciones *f* tales que $f'(t) = f(t)$

Ecuaciones diferenciales - Algunos ejemplos

1. Hallar todas las funciones *f* tales que $f'(t) = 0$

2. Hallar todas las funciones *f* tales que $f'(t) = f(t)$

$$f'(t) = f(t)$$

Ecuaciones diferenciales - Algunos ejemplos

1. Hallar todas las funciones *f* tales que $f'(t) = 0$

2. Hallar todas las funciones *f* tales que $f'(t) = f(t)$

$$f'(t) = f(t) \Rightarrow \frac{f'(t)}{f(t)} = 1$$

Ecuaciones diferenciales - Algunos ejemplos

1. Hallar todas las funciones *f* tales que $f'(t) = 0$

2. Hallar todas las funciones *f* tales que $f'(t) = f(t)$

$$f'(t) = f(t) \Rightarrow \frac{f'(t)}{f(t)} = 1 \Rightarrow (\ln(f(t)))' = 1$$

Ecuaciones diferenciales - Algunos ejemplos

1. Hallar todas las funciones *f* tales que $f'(t) = 0$

2. Hallar todas las funciones *f* tales que $f'(t) = f(t)$

$$f'(t) = f(t) \Rightarrow \frac{f'(t)}{f(t)} = 1 \Rightarrow (\ln(f(t)))' = 1 \Rightarrow \ln(f(t)) = t + C$$

Ecuaciones diferenciales - Algunos ejemplos

1. Hallar todas las funciones *f* tales que $f'(t) = 0$

2. Hallar todas las funciones *f* tales que $f'(t) = f(t)$

$$f'(t) = f(t) \Rightarrow \frac{f'(t)}{f(t)} = 1 \Rightarrow (\ln(f(t)))' = 1 \Rightarrow \ln(f(t)) = t + C$$

Luego $f(t) = e^{t+C} = e^C e^t = \lambda e^t$.

Ecuaciones diferenciales - Algunos ejemplos

1. Hallar todas las funciones *f* tales que $f'(t) = 0$

2. Hallar todas las funciones *f* tales que $f'(t) = f(t)$

$$f'(t) = f(t) \Rightarrow \frac{f'(t)}{f(t)} = 1 \Rightarrow (\ln(f(t)))' = 1 \Rightarrow \ln(f(t)) = t + C$$

Luego $f(t) = e^{t+C} = e^C e^t = \lambda e^t$.

3. [*Ecuación del Calor*] Si *u(x,y,z,t)* representa la temperatura en un punto del espacio a un tiempo determinado entonces se cumple:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 z} \right)$$

Ecuaciones diferenciales - Algunos ejemplos

1. Hallar todas las funciones *f* tales que $f'(t) = 0$

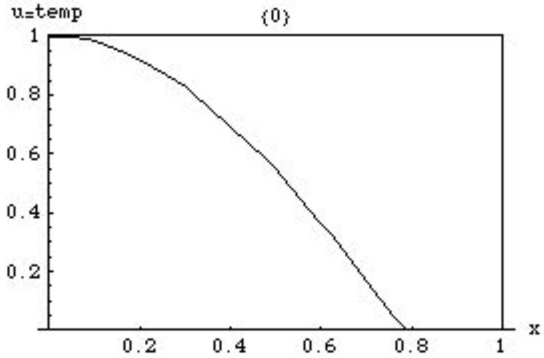
2. Hallar todas las funciones *f* tales que $f'(t) = f(t)$

$$f'(t) = f(t) \Rightarrow \frac{f'(t)}{f(t)} = 1 \Rightarrow (\ln(f(t)))' = 1 \Rightarrow \ln(f(t)) = t + C$$

Luego $f(t) = e^{t+C} = e^C e^t = \lambda e^t$.

3. [*Ecuación del Calor*] Si *u(x,y,z,t)* representa la temperatura en un punto del espacio a un tiempo determinado entonces se cumple:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 z} \right)$$



Ecuaciones diferenciales - Condiciones iniciales

- Las ecuaciones diferenciales suelen reflejar una dinámica.
- Suele haber muchas funciones que cumplen dicha dinámica.
- Para que dichas ecuaciones describan un solo fenómeno suele ser necesario añadir condiciones extra sobre valores que toma la función en ciertas regiones.

Ecuaciones diferenciales - Condiciones iniciales

- Las ecuaciones diferenciales suelen reflejar una dinámica.
- Suele haber muchas funciones que cumplen dicha dinámica.
- Para que dichas ecuaciones describan un solo fenómeno suele ser necesario añadir condiciones extra sobre valores que toma la función en ciertas regiones.

<u>Ejemplos:</u>

- Si a la ecuación $f'(t) = f(t)$ le agregamos la condición de borde $f(0) = 4$ obtenemos un único valor de λ posible.

Ecuaciones diferenciales - Condiciones iniciales

- Las ecuaciones diferenciales suelen reflejar una dinámica.
- Suele haber muchas funciones que cumplen dicha dinámica.
- Para que dichas ecuaciones describan un solo fenómeno suele ser necesario añadir condiciones extra sobre valores que toma la función en ciertas regiones.

<u>Ejemplos:</u>

- Si a la ecuación $f'(t) = f(t)$ le agregamos la condición de borde $f(0) = 4$ obtenemos un único valor de λ posible.

- [*Ecuación de Black Scholes*] Si *V(S, t)* es el precio de una opción europea sobre un stock de precio *S* que no paga dividendos a tiempo *t*, bajo ciertas asunciones se cumple la dinámica

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = r\left(V - S\frac{\partial V}{\partial S}\right)$$

Donde σ es la volatilidad del underlying y r es la risk-free rate. Que nos está faltando?

Ecuaciones diferenciales - Teorema de Existencia y Unicidad

La idea anterior se formaliza por el Teorema de Existencia y Unicidad (también conocido como Picard-Lindelof, Teorema de existencia de Picard o Cauchy-Lipschitz).

Ecuaciones diferenciales - Teorema de Existencia y Unicidad

La idea anterior se formaliza por el Teorema de Existencia y Unicidad (también conocido como Picard-Lindelof, Teorema de existencia de Picard o Cauchy-Lipschitz).

El mismo asegura que dada una ecuación diferencial ordinaria:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Cuya *f* cumple ciertas condiciones, entonces existe una única solución en un intervalo alrededor de t_0 .

Ecuaciones diferenciales - Teorema de Existencia y Unicidad

La idea anterior se formaliza por el Teorema de Existencia y Unicidad (también conocido como Picard-Lindelof, Teorema de existencia de Picard o Cauchy-Lipschitz).

El mismo asegura que dada una ecuación diferencial ordinaria:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Cuya *f* cumple ciertas condiciones, entonces existe una única solución en un intervalo alrededor de t_0 .

Intuitivamente: si uno empieza a moverse a partir de un punto, y a cada momento puede calcular la dirección con la que se va a desplazar, la trayectoria que se va a seguir solo puede ser una.

Ecuaciones diferenciales - Métodos numéricos

Supongamos que tenemos una ODE

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(0) = k \end{cases}$$

y queremos resolver numéricamente.

Metodo: diferencias finitas

Ecuaciones diferenciales - Métodos numéricos

Supongamos que tenemos una ODE

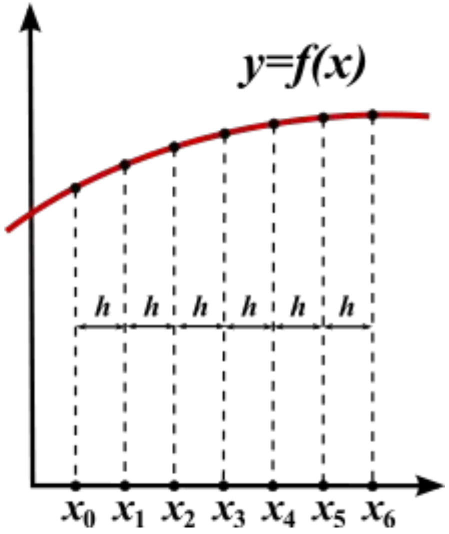
$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(0) = k \end{cases}$$

y queremos resolver numéricamente.

Metodo: diferencias finitas

Idea:

1. Discretizar el dominio de la función.



Ecuaciones diferenciales - Métodos numéricos

Supongamos que tenemos una ODE

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(0) = k \end{cases}$$

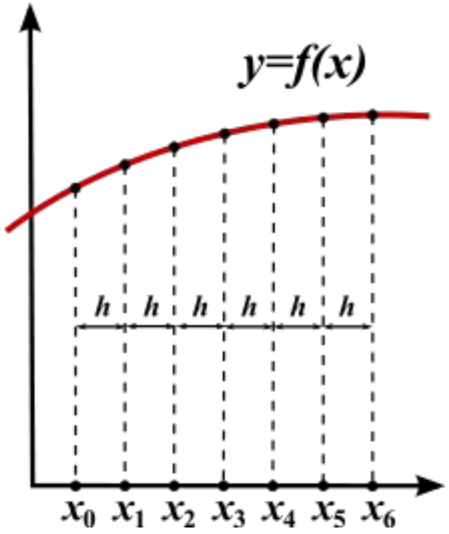
y queremos resolver numéricamente.

Metodo: diferencias finitas

Idea:

1. Discretizar el dominio de la función.

2. Utilizar la información sobre un valor de la función y su derivada en un punto para aproximar los valores en el siguiente.



Ecuaciones diferenciales - Métodos numéricos

Supongamos que tenemos una ODE

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(0) = k \end{cases}$$

y queremos resolver numéricamente.

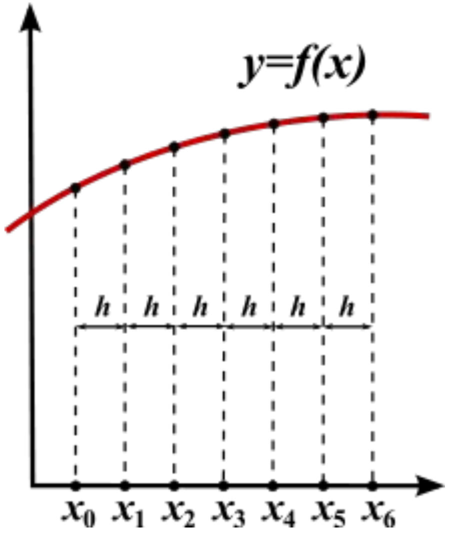
Metodo: diferencias finitas

Idea:

1. Discretizar el dominio de la función.

2. Utilizar la información sobre un valor de la función y su derivada en un punto para aproximar los valores en el siguiente.

3. Iterar.



Ecuaciones diferenciales - Métodos numéricos

Ejemplo:

Empezamos aproximando

$$f(t_i, x(t_i)) = x'(t_i) = \frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{h} + O(h^2)$$

Ejemplo:

Empezamos aproximando

$$f(t_i, x(t_i)) = x'(t_i) = \frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{h} + O(h^2)$$

Que se traduce a:

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + hf(t_i, x(t_i)) + O(h^2)$$

Ecuaciones diferenciales - Métodos numéricos

Ejemplo:

Empezamos aproximando

$$f(t_i, x(t_i)) = x'(t_i) = \frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{h} + O(h^2)$$

Que se traduce a:

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + hf(t_i, x(t_i)) + O(h^2)$$

Lo que nos da la siguiente forma de reconstruir *x*:

Ecuaciones diferenciales - Métodos numéricos

Ejemplo:

Empezamos aproximando

$$f(t_i, x(t_i)) = x'(t_i) = \frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{h} + O(h^2)$$

Que se traduce a:

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + hf(t_i, x(t_i)) + O(h^2)$$

Lo que nos da la siguiente forma de reconstruir *x*:

- Comenzamos con $x_0 = x(0) = k$.

Ejemplo:

Empezamos aproximando

$$f(t_i, x(t_i)) = x'(t_i) = \frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{h} + O(h^2)$$

Que se traduce a:

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + hf(t_i, x(t_i)) + O(h^2)$$

Lo que nos da la siguiente forma de reconstruir *x*:

- Comenzamos con $x_0 = x(0) = k$.
- A cada paso calculamos x_i la aproximación de $x(t_i)$ como:

$$x_i = x_{i-1} + hf(t_{i-1}, x_{i-1})$$