



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

“Estimación de número de emisiones espontáneas en un átomo de dos niveles
midiendo emisión estimulada en una cavidad óptica”

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS FÍSICAS

PRESENTA:
GUILLERMO JAVIER PREISSER BELTRÁN

DIRECTOR DE TESIS: DR. PABLO BARBERIS BLOSTEIN

MÉXICO, CIUDAD DE MÉXICO, JUNIO 2019

Índice general

1. Introducción	1
2. Sistemas cuánticos abiertos	5
2.1. Análisis teórico de los sistemas cuánticos abiertos	5
2.1.1. Aproximaciones clave en sistemas cuánticos abiertos	7
2.2. Ecuación Maestra	8
2.3. Ecuación Maestra para cavidad óptica con pérdidas	12
2.4. Emisión espontánea y átomo de dos niveles	14
2.4.1. Ecuación Maestra para átomo de dos niveles en equilibrio térmico .	14
2.4.2. Ecuación Maestra para átomo de dos niveles excitado por un campo clásico	17
2.5. Modelo de Jaynes-Cummings con pérdidas	19
2.5.1. Modelo de Jaynes-Cummings	20
2.5.2. Ecuación Maestra para modelo de Jaynes-Cummings con pérdidas .	24
3. Teoría de Trayectorias Cuánticas	27
3.1. Trayectorias Clásicas y Cuánticas	28
3.1.1. Trayectorias Clásicas	28
3.1.2. Trayectorias Cuánticas	28
3.1.3. Teoría Cuántica de Medición	29
3.2. Desenmarañando la dinámica de sistemas cuánticos abiertos	30
3.3. Función de onda estocástica	32
3.4. Equivalencia entre Método de Trayectorias Cuánticas y la Ecuación Maestra	34
3.5. Errores estadísticos y convergencia	35
3.6. Ejemplos ilustrativos	36
3.6.1. Emisión espontánea de átomo de dos niveles	36
3.6.2. Cavidad con pérdidas	39
3.6.3. Modelo de Jaynes-Cummings con emisión espontánea	40
3.6.4. Fluorescencia resonante	42
4. Estimación de número de emisiones espontáneas de un átomo midiendo emisión estimulada en modos de una cavidad óptica	45
4.1. Modelo impulsado de Jaynes-Cumming	45

4.2. Análisis del sistema mediante ecuaciones de Maxwell-Bloch	48
4.3. Obtención de distribución de probabilidad de número de emisiones	49
4.4. Caracterización de datos	52
4.5. Análisis de errores	54
5. Estudio de correlación entre emisiones espontáneas y emisiones de cavi- dad	57
6. Conclusión	61
Apéndice	63
A. Cambio al Cuadro de Interacción	65
Bibliografía	67

Resumen

Consideramos un modelo que consiste en un átomo de dos niveles dentro de una cavidad óptica con pérdidas y un láser irradiando la cavidad. Teniendo este modelo nos propusimos hallar una relación entre el número de emisiones espontáneas en el átomo y el número de fotones medidos que pierde la cavidad; considerando el campo estimulante, el modo de cavidad y el átomo en resonancia. Usando lo que se conoce como Teorías de Trayectorias Cuánticas realizamos un gran número de simulaciones, en las cuales mantuvimos el registro del número de pérdidas en la cavidad y emisiones espontáneas. De esta manera logramos obtener distribuciones de probabilidad las cuales nos dan información acerca de como estas dos cantidades están correlacionadas.

Manteniendo constante el número de fotones constante en nuestra cavidad, además del ancho de línea atómico y la constante de acoplamiento dipolar, y considerando una constante de acoplamiento menor a los anchos de línea atómicos y de cavidad, obtuvimos distribuciones de Poisson que nos dicen la probabilidad de obtener un determinado número de emisiones espontáneas dado cierto número de emisiones de la cavidad. Estudiando la correlación entre estas dos variables, vimos que existe una correlación positiva entre el número de emisiones de la cavidad y el número de emisiones espontáneas, la cual aumenta conforme disminuye el ancho de línea de la cavidad.

Capítulo 1

Introducción

El estudio de la luz ha sido un tema central con el fin de entender la naturaleza, tanto clásica como cuánticamente. Dentro de la ciencia, es quizá la óptica cuántica la cual busca con mayor detalle estudiar la interacción de la luz con la materia. Para ello, justo como en otras ramas de la física a lo largo de la historia, existe una retroalimentación constante entre experimento y teoría. A través de avances teóricos es posible crear aparatos que nos proporcionan una visión mas detallada de la naturaleza, lo cual termina por aumentar nuestra comprensión y nos permite formular teorías más detalladas. Habiendo mencionado esto, no es sorpresa que uno pueda trazar los inicios de la óptica cuántica, como disciplina formal, a mediados del siglo XX con la invención del láser.

El láser, como fuente de luz, se puede considerar un sistema abierto, es decir, un sistema en el que puede haber intercambio de energía con el ambiente. Sabiendo entonces que con el láser habrá disipación, resulta importante saber la manera de tratar este proceso bajo la teoría de la mecánica cuántica. Si bien estamos acostumbrados a calcular la dinámica de nuestro sistema mediante la ecuación de Schrödinger, ésta únicamente nos proporciona la manera en que evolucionan las amplitudes de probabilidad para cada uno de los estados de nuestra función de onda, así como sus energías correspondientes, será importante saber usar la ecuación de Schrödinger dentro del contexto de sistemas abiertos y ver como, al trazar sobre el ambiente, podamos llegar a una ecuación con la cual sea posible observar de manera explícita las pérdidas que ocurren en nuestro sistema con el transcurso del tiempo y que nos permita obtener valores esperados en los que podamos ver como disminuye o aumenta el número de fotones.

Desde luego, se requiere también una visión más general, ya que, estrictamente hablando, ningún sistema cuántico que se haya medido en un laboratorio es un sistema ideal, perfectamente aislado. Generalmente lo que sucede al manejar sistemas cuánticos es que la dinámica coherente típicamente dura escalas cortas de tiempo, antes de que la dinámica sea dominada por el acoplamiento del sistema abierto [1–3] a su ambiente, lo cual lleva a que la coherencia decaiga con el tiempo en un proceso que se conoce como decoherencia. Como resultado, el proceso cuántico relevante se pierde y vemos un comportamiento más

asemejado a lo que se observa clásicamente. Esto lo veremos más adelante al tratar varios sistemas de óptica cuántica, y no nos referimos necesariamente a fuentes de luz en sí, sino que también hablamos de la respuesta de un sistema — un átomo, o una colección de átomos — a dicha fuente. Lo cual, nuevamente, nos habla de la existencia de un gran número de fenómenos dentro de la óptica cuántica, los cuales tienen una formulación natural en lenguaje de sistemas abiertos.

Surge entonces la necesidad de hallar un formalismo para lidiar con dichos fenómenos. Si bien dentro de los cálculos en óptica cuántica se recurre a una amplia variedad de métodos teóricos, como puede ser el resolver una ecuación de Schrödinger, un set de ecuaciones de Heisenberg, o evaluar términos en expansión perturbativa; e incluso recurrir a técnicas de física atómica o herramientas como los diagramas de Feynman de teoría cuántica de campos; resulta necesario definir algo cercano a un lenguaje consistente para el tema. Existen dos métodos principales que comúnmente se usan, uno de ellos es el método de la ecuación cuántica de Langevin, basado en la ecuaciones de movimiento de Heisenberg, y el segundo es el método de la ecuación maestra, que se basa en la imagen de Schrödinger. Desde luego ambos métodos están cercanamente relacionados, y la preferencia de enfatizar uno sobre el otro está determinado en gran medida por un gusto personal. En nuestro caso nos enfocaremos en el método de la ecuación maestra, ya que está relacionado de manera cercana a lo que se conoce como Teoría de Trayectorias Cuánticas, o método de función de onda estocástica, el cual abordaremos en gran parte de este trabajo.

De la misma manera en que la creación del láser dió la pauta para que surgiera la óptica cuántica como disciplina formal y hubo una gran cantidad de avances teóricos impulsados por trabajos experimentales que hacían uso del láser, en los últimos años han surgido experimentos que permiten el manejo de sistemas cuánticos individuales, llegando al grado que es posible controlar átomos, iones, moléculas o fotones de manera individual [4, 5], hecho que en 2012 le valió el premio nobel de física a los investigadores Serge Haroche y David J. Wineland. Esto ha incrementado el interés por el estudio de sistemas cuánticos abiertos y ha impulsado el desarrollo de un gran número de trabajos teóricos relacionados con el tema. Eso sumado al hecho de que con el auge de la computación cuántica ha surgido la necesidad de almacenar y manipular información cuántica — procesos en los cuales el control de la coherencia cuántica resulta fundamental [6–9] — lo cual hace que se requiera un estudio más detallado de los sistemas cuánticos abiertos.

Siendo un poco más específico en el manejo de sistemas cuánticos individuales para el desarrollo de computo cuántico, es importante mencionar que existe un gran número de protocolos de computo cuántico que requieren la generación de fotones individuales [10–12]. Para esto normalmente se usan átomos de dos niveles, los cuales generan el fotón mediante emisión espontánea. Esto puede resultar difícil de manipular principalmente por el hecho de que el fotón puede ser emitido a cualquiera de los modos del espacio, además de que a pesar de que sabemos que el átomo decaerá exponencialmente, no podemos saber exactamente cuando ocurrirá la emisión. Ante esta dificultad, uno podría pensar en idear un

arreglo físico en el que nuestro átomo de dos niveles se encuentre acoplado a otro sistema, de manera que sea posible hallar correlaciones entre el número de emisiones espontáneas y alguna otra cantidad relacionada al sistema acoplado que resulte más fácil de medir. Dentro de los posibles sistemas a los cuales podemos acoplar nuestro átomo, quizá la opción más obvia sea el sistema de una cavidad. Esto, principalmente debido a la gran cantidad de artículos que existen respecto al estudio de átomos en cavidades [13–15]. En nuestro caso en particular tendremos un sistema que consiste en un átomo de dos niveles acoplado al modo de una cavidad con pérdidas, y consideraremos un láser irradiando uno de los modos de la cavidad. Teniendo este arreglo físico buscaremos hallar una relación entre el número de emisiones espontáneas y el número de emisiones de la cavidad, de manera que tras haber medido cierto número de emisiones de la cavidad, podamos estimar el número de emisiones espontáneas.

Habiendo mencionado el sistema que manejaremos y el problema a resolver, surge entonces la pregunta de, ¿cómo lidiar teóricamente con dicho problema? Uno de los formalismos que ha probado ser de gran utilidad al momento de describir sistemas cuánticos individuales es la Teoría Trayectorias Cuánticas. Dentro de esta teoría se propagan en el tiempo estados puros en lugar de una matriz de densidad, con el proceso de disipación incorporado mediante una modificación a nuestro Hamiltoniano, e intercalando la evolución coherente con *saltos cuánticos* — cambios abruptos en nuestro estado que suceden en tiempos en particular. Haciendo un promedio estocástico apropiado y usando ciertos saltos cuánticos es posible reconstruir los valores esperados obtenidos mediante la ecuación maestra de manera eficiente y con errores estadísticos bien controlados. Además de esta utilidad práctica, esta técnica nos puede dar una intuición física de una gran variedad de fenómenos con disipación. Estudiar este formalismo — y, en particular, usarlo para realizar simulaciones de procesos con disipación — abrirá la puerta para poder estudiar el modelo en el que se centra nuestro trabajo.

El objetivo de esta tesis es hallar la relación que existe el número de emisiones espontáneas en un átomo de dos niveles y el número emisiones medidas en una cavidad óptica. Para ello habrá que tener un entendimiento acerca de los sistemas cuánticos abiertos, con atención especial a la ecuación maestra y su aplicación a diversos fenómenos físicos, que es en lo que se centrará el capítulo 2. En el capítulo 3 introducimos el método de trayectorias cuánticas y su interpretación física. Esta técnica nos proveerá una manera para tratar con sistemas disipativos numericamente, además de que puede resultar de gran ayuda para comprender la dinámica de sistemas cuánticos abiertos. En la parte final del capítulo 3 analizamos diversos ejemplos en los cuales hacemos énfasis en los aspectos físicos que nos ayuden a profundizar sobre el fenómeno en cuestión. En el capítulo 4 se introduce el modelo en que se centra nuestro problema además de que mostramos los resultados numéricos obtenidos a partir de realizar diversas simulaciones de trayectorias cuánticas. Dentro de nuestros resultados obtenemos distribuciones de probabilidad para diferente número de fotones medidos cuyo origen proviene de emisiones de la cavidad, y que nos dicen la probabilidad de ocurrencia de que exista cierto número de emisiones espontáneas. Estudiando

estas distribuciones de probabilidad exploramos la relación entre el número de emisiones espontáneas y el número de fotones medidos en la cavidad estimulada, así como el error que existe dentro de nuestras estimaciones. Finalmente, en el capítulo 5 se discuten los resultados obtenidos y se dictan algunas conclusiones.

Capítulo 2

Sistemas cuánticos abiertos

Como se ha explicado durante la introducción, el acoplamiento entre sistemas cuánticos y su ambiente es importante dentro de, esencialmente, cualquier sistema donde comportamiento cuántico sea observado. Resulta necesario entonces la creación de un formalismo que describa adecuadamente estos sistemas — los sistemas cuánticos abiertos. Para desarrollar tal formalismo y lograr modelar de manera efectiva dichos sistemas, será necesario introducir distintos conceptos y realizar ciertas aproximaciones e idealizaciones, que nos darán la posibilidad de desarrollar lo que se conoce como la ecuación maestra la cual nos ayudará a describir una gran variedad de fenómenos cuánticos con disipación de manera bastante acertada.

2.1. Análisis teórico de los sistemas cuánticos abiertos

Generalmente, al manejar sistemas cuánticos abiertos, lo que se hace es considerar un sistema cuántico pequeño, el cual está acoplado a un ambiente grande que se puede pensar como un reservorio. Esta relación es similar a la que se maneja en el ensemble canónico de física estadística, donde se tiene un sistema y un baño térmico. Es por esta razón que en gran parte de la literatura, y en algunas ocasiones durante esta tesis, nos referiremos al ambiente como 'baño'.

En este arreglo el Hamiltoniano para el sistema completo, incluyendo tanto el sistema como el ambiente, está compuesto por tres partes,

$$H_{total} = H_S + H_R + H_{SR}. \quad (2.1.1)$$

Aquí H_S es el Hamiltoniano del sistema, que describe la dinámica coherente de los grados de libertad del sistema, en la ausencia de cualquier tipo de acoplamiento con el reservorio. Dentro de los sistemas que nosotros usaremos, está el sistema de átomo dos niveles, que típicamente se describe mediante el Hamiltoniano $H_S = \frac{1}{2}\hbar\omega_S\sigma_z$ donde ω_S es la escala de frecuencia del sistema, y σ_z es el operador de Pauli para un sistema de dos niveles. Otro sistema común es el de un oscilador armónico (e.g., un único modo de una cavidad óptica o

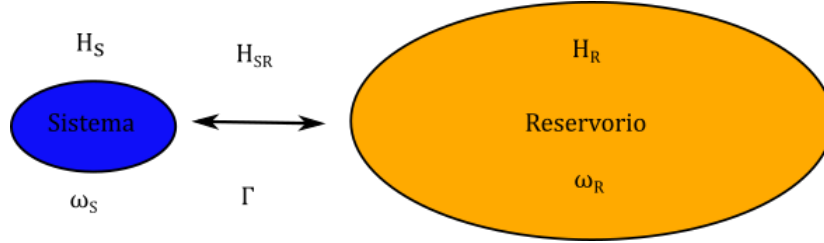


Figura 2.1: Diagrama general de un sistema cuántico abierto: un sistema cuántico interactúa con el ambiente, lo cual lleva a una combinación de dinámicas coherentes y disipativas para el sistema pequeño. En óptica cuántica uno puede describir la dinámica del sistema considerando una separación en las escalas de frecuencia y energía, en donde las escalas de frecuencia y energía del sistema pequeño que están directamente acopladas al ambiente (ω_S) y las tasas de relajamiento para las funciones de correlación relevantes en el ambiente (ω_R) son mucho mayores que las escalas de frecuencia de la dinámica inducida por el acoplamiento (Γ).

de microondas, o un único modo de un oscilador mecánico), en cuyo caso el Hamiltoniano estará dado por $H_S = \hbar\omega_S a^\dagger a$, donde a es un operador de descenso del oscilador armónico. Los grados de libertad del ambiente y su dinámica están descritos por el Hamiltoniano H_R , mientras que la interacción entre el sistema y el reservorio está descrita por el Hamiltoniano H_{SR} .

Para nuestros fines resulta conveniente modelar el reservorio como una colección de osciladores armónicos con frecuencia ω_j

$$H_R = \sum_j \hbar\omega_j r_j^\dagger r_j, \quad (2.1.2)$$

donde r_j^\dagger y r_j son los operadores de creación y aniquilación, respectivamente, correspondientes a la frecuencia ω_j . Estos operadores obedecen las relaciones de conmutación $[r_j, r_{j'}^\dagger] = \delta_{j,j'}$, donde $\delta_{j,j'}$ denota una delta de Kronecker.

El Hamiltoniano de interacción H_{SR} típicamente toma la forma

$$H_{SR} = \sum_j \hbar(x_+ + x_-)(\kappa_j r_j + \kappa_j^* r_j^\dagger) \quad (2.1.3)$$

$$\approx \sum_j \hbar(\kappa_j x_+ r_j + \kappa_j^* x_- r_j^\dagger), \quad (2.1.4)$$

donde x_\pm es un operador del sistema, y la constante κ (por el momento sin especificar) denota la fuerza del acoplamiento. Para relacionarlo con los sistemas de dos niveles previamente mencionados, tenemos que para un sistema de dos niveles, puede ser que tengamos $x_- = \sigma_-$, el operador que cambia hacia espín abajo, y $x_+ = \sigma_+$, el operador que nos cambia hacia espín arriba. En el caso en el que el sistema sea un oscilador armónico, típicamente tenemos $x_- = a$. En la segunda línea de esta expresión hemos utilizado la *aproximación de onda rotante* la cual discutiremos a continuación.

2.1.1. Aproximaciones clave en sistemas cuánticos abiertos

Un punto clave para el entendimiento a nivel microscópico y el control que tenemos en sistemas cuánticos abiertos, es el hecho de que podemos hacer tres aproximaciones al momento de describir la interacción entre el sistema y el reservorio, que resultan difícil de realizar en otros sistemas [3].

1. *La aproximación de onda rotante* - En la aproximación de la eq. (2.1.4) del Hamiltoniano interactuante que escribimos arriba, ignoramos los términos de la forma $x_+ r_j^\dagger$ y $x_- r_j$. En general, tales términos surgirán en los acoplamientos, y serán del mismo orden que los demás términos del Hamiltoniano de interacción. Sin embargo, si transformamos estos operadores a un marco rotante con el sistema y las frecuencias del baño (un cuadro de interacción donde la dinámica debido a H_S y H_R sea incorporada a la dependencia temporal de los operadores), veremos que los términos del sistema y el reservorio serán explícitamente independientes del tiempo, mientras que los términos relacionados con la interacción serán explícitamente dependientes del tiempo, en algunos de estos términos las frecuencias asociadas al sistema y el reservorio se sumarán, mientras que para otros términos las frecuencias se restarán, de modo que tendremos $|\omega_R - \omega_S| \ll \omega_R + \omega_S$ por lo que los términos con frecuencias que se suman estarán oscilando mucho más rápidamente que los términos en los que las frecuencias se restan. Esto significa que para escalas de tiempo considerables los términos cuyas frecuencias están sumando rápidamente promediarán a 0. Por lo tanto estos términos podrán ser ignorados y sólo nos quedaremos con los términos cuyas frecuencias se restan.
2. *La aproximación de Born* - También consideraremos que las escalas de frecuencia asociadas con la dinámica inducida por el acoplamiento entre el sistema y el ambiente son pequeñas en comparación con las escalas de frecuencias dinámicas relevantes al sistema y al ambiente. Esto es, que si las escalas de frecuencia ω_S a las cuales el sistema se acopla son mucho mayores que las escalas de frecuencia Γ correspondientes a las dinámicas del sistema inducidas por el ambiente, podremos hacer una aproximación de Born en teoría de perturbación dependiente del tiempo. Esta aproximación consistirá en truncar la ecuación dinámica de la matriz de densidad correspondiente a nuestro sistema S , ignorando términos superiores a segundo orden en H_{SR} .
3. *La aproximación de Markov* - Asumimos que el acoplamiento sistema-ambiente es independiente de la frecuencia/tiempo sobre cortas escalas de tiempo, y que el ambiente regresa rápidamente al equilibrio de una manera en la que esencialmente no es afectado por su acoplamiento con el sistema, de modo que el ambiente no cambia en el transcurso del tiempo, y la dinámica del sistema no es afectada por su acoplamiento con el ambiente en momentos anteriores, i.e., la evolución del sistema no depende de su historia.

Cada una de estas aproximaciones está, normalmente, bien justificada; y, los términos de las ecuaciones de movimiento que se ignoran resultan ser, por varios ordenes de magnitud,

menores que aquellos términos que se retienen. Esto es consecuencia de la existencia de una escala grande de frecuencia/energía que domina todas las otras escalas del mismo tipo en la dinámica del sistema descrito por H_S , y en la interacción sistema-ambiente H_{SR} . De manera un poco más específica, usualmente tendremos una situación donde $[H_S, x_{\pm}] \approx \pm \hbar \omega x_{\pm}$, y la frecuencia ω la cual es del mismo orden que la frecuencia del sistema ω_S , primeramente dominan cualquier otro proceso presente en la dinámica del sistema, y segundo, resultan mucho mayores que las escalas de frecuencia correspondientes a la dinámica inducida por el acoplamiento con el reservorio, Γ . Es justo la primera de estas dos condiciones la cual nos permite realizar aproximaciones de onda rotante en el Hamiltoniano de interacción, y a la vez, estas nos permiten realizar la aproximación de Markov. La segunda condición nos permite realizar la aproximación de Born.

Con respecto a la aproximación de Markov, uno puede ver como esto resulta razonable en términos físicos. Potencialmente, S puede depender de su historia pasada debido a que sus estados anteriores se mantienen registrados como cambios en el estado del reservorio a través de la interacción H_{SR} ; estados anteriores tienen entonces un efecto en la futura evolución de S dado que actúa con el reservorio. Sin embargo, si el reservorio es un sistema lo suficientemente grande mantenido en equilibrio térmico, no esperamos que preserve los cambios menores debido a su interacción con S por mucho tiempo; al menos no lo suficiente como para afectar significativamente la evolución de S . Por lo que se convierte en una cuestión de tiempo de correlación del reservorio contra escala de tiempo para un cambio significativo en S .

Teniendo una idea básica del acercamiento que usaremos para tratar nuestro sistema, además de las idealizaciones y aproximaciones que emplearemos, podemos empezar a trabajar en la derivación de una ecuación maestra. Al ver aplicadas estas aproximaciones terminaremos de comprender su validez, y éstas a su vez nos permitirán llegar a la ecuación que queremos.

2.2. Ecuación Maestra

Empezando con un Hamiltoniano general (2.1.1), queremos obtener una ecuación que nos proporcione una evolución para la dinámica de nuestro sistema que no sea únicamente unitaria, sino que sea una evolución en la que haya disipación. Con este fin, empezamos con un operador de densidad para nuestro sistema total $S \oplus R$, el cual denominamos χ , a partir del cual queremos hallar una ecuación que nos dé la dinámica de nuestro operador de densidad reducido $\rho(t)$ con las propiedades de R entrando únicamente como parámetros, y el cual inicialmente está dado por

$$\rho(t) = \text{tr}_R[\chi(t)], \quad (2.2.1)$$

donde la traza es tomada únicamente sobre los estados del reservorio.

Tomando como referencia el procedimiento realizado por Carmicheal en [2] uno puede empezar con la ecuación de Schrödinger para χ , la cual está dada por

$$\dot{\chi} = \frac{1}{i\hbar}[H, \chi]. \quad (2.2.2)$$

Proseguimos a transformar (2.2.2) al cuadro de interacción, separando la dinámica rápida generada por $H_S + H_R$ de la lenta generada por H_{SR} . Con

$$\tilde{\chi}(t) = e^{(i/\hbar)(H_S+H_R)t} \chi(t) e^{-(i/\hbar)(H_S+H_R)t} \quad (2.2.3)$$

de (2.1.1) y (2.2.2) obtenemos

$$\dot{\tilde{\chi}} = \frac{1}{i\hbar}[\tilde{H}_{SR}(t), \tilde{\chi}], \quad (2.2.4)$$

donde $\tilde{H}_{SR}(t)$ es explícitamente independiente del tiempo:

$$\tilde{H}_{SR}(t) = e^{(i/\hbar)(H_S+H_R)t} H_{SR} e^{-(i/\hbar)(H_S+H_R)t}. \quad (2.2.5)$$

Ahora integrando (2.2.4) obtenemos

$$\tilde{\chi}(t) = \chi(0) + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' [\tilde{H}_{SR}(t'), \tilde{\chi}(t')], \quad (2.2.6)$$

y sustituimos $\tilde{\chi}(t)$ en el conmutador (2.2.4):

$$\dot{\tilde{\chi}} = \frac{1}{i\hbar} [H_{SR}(t), \chi(0)] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' [\tilde{H}_{SR}(t), [\tilde{H}_{SR}(t'), \tilde{\chi}(t')]]. \quad (2.2.7)$$

Esta ecuación es exacta. La ecuación (2.2.2) simplemente se ha expresado en una forma conveniente, con la cual ahora podemos identificar aproximaciones razonables.

Asumiremos que la interacción se enciende a $t = 0$ y que no existen correlaciones entre S y R en este tiempo inicial. Entonces $\chi(0) = \tilde{\chi}(0)$ se factoriza como

$$\chi(0) = \rho(0) R_0 \quad (2.2.8)$$

donde R_0 es el operador de densidad inicial del reservorio. Entonces, notando que

$$tr_R(\tilde{\chi}) = e^{(i/\hbar)H_S t} \rho e^{-(i/\hbar)H_S t} = \tilde{\rho}, \quad (2.2.9)$$

después de trazar sobre el reservorio, (2.2.7) da

$$\dot{\tilde{\rho}} = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' tr_R \{ [\tilde{H}_{SR}(t), [\tilde{H}_{SR}(t'), \tilde{\chi}(t')]] \}, \quad (2.2.10)$$

donde, por simplicidad, hemos eliminado el término $(1/i\hbar)tr_R \{ [\tilde{H}_{SR}(t), \chi(0)] \}$ asumiendo que $tr_R[\tilde{H}_{SR}(t)R_0] = 0$. Lo cual puede justificarse realizando una transformación en el

Hamiltoniano de nuestro sistema añadiendo el término $tr_R(H_{SR}R_0)$ en H_S y restándolo en H_{SR} , de manera que los operadores acoplados a S tienen valor esperado cero en el estado R_0 sin modificar H completo.

Hemos mencionado anteriormente que $\tilde{\chi}$ es factorizable a $t = 0$. A tiempos posteriores es posible que surjan correlaciones entre S y R debido al acoplamiento entre el sistema y el reservorio a través de H_{SR} . Sin embargo, hemos asumido que el acoplamiento es muy débil y que a todo tiempo $\chi(t)$ solamente debería mostrar desviaciones de orden H_{SR} de un estado no correlacionado. Además, R es un sistema grande cuyo estado se ve virtualmente inafectado por su acoplamiento con S . Entonces escribimos

$$\tilde{\chi}(t) = \tilde{\rho}(t)R_0 + O(H_{SR}). \quad (2.2.11)$$

Es ahora cuando haremos uso de la *aproximación de Born*. Ignorando el término $O(H_{SR})$ correspondiente a las correlaciones entre el sistema y el ambiente, veremos que la ecuación (2.2.10) ya no contará con términos superiores a segundo orden en H_{SR} , y ésta será escrita como

$$\dot{\tilde{\rho}} = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' tr_R \{ [\tilde{H}_{SR}(t), [\tilde{H}_{SR}(t'), \tilde{\rho}(t')R_0]] \} \quad (2.2.12)$$

La ecuación (2.2.12) sigue siendo una ecuación complicada. Además de que sigue sin ser Markoviana, ya que la futura evolución de $\tilde{\rho}$ depende de su historia pasada a través de la integración sobre $\tilde{\rho}(t')$. De modo que ahora haremos uso de otra aproximación importante, la *aproximación de Markov*, reemplazando $\tilde{\rho}(t')$ por $\tilde{\rho}(t)$ para obtener nuestra ecuación maestra en la aproximación de Born-Markov:

$$\dot{\tilde{\rho}} = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' tr_R \{ [\tilde{H}_{SR}(t), [\tilde{H}_{SR}(t'), \tilde{\rho}(t)R_0]] \}. \quad (2.2.13)$$

Si bien discutimos brevemente la aproximación de Markov en la sección 2.1.1, vale la pena ser un poco más precisos. Estudiando el integrando de (2.2.12) haremos la suposición de la aproximación de Markov de una manera más explícita.

Primeramente hacemos nuestro modelo un poco más específico escribiendo

$$H_{SR} = \hbar \sum_i s_i \Gamma_i, \quad (2.2.14)$$

donde los operadores s_i pertenecen al espacio de Hilbert S y los operadores Γ_i son operadores del espacio de Hilbert R . Entonces

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{SR}(t) &= \hbar \sum_i e^{(i/\hbar)(H_S+H_R)t} s_i \Gamma_i e^{-(i/\hbar)(H_S+H_R)t} \\ &= \hbar \sum_i \left(e^{(i/\hbar)H_S t} s_i e^{-(i/\hbar)H_S t} \right) \left(e^{(i/\hbar)H_R t} \Gamma_i e^{-(i/\hbar)H_R t} \right) \\ &= \hbar \sum_i \tilde{s}_i(t) \tilde{\Gamma}_i(t). \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

Por lo que la ecuación maestra en la aproximación de Born es ahora

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\rho}} &= - \sum_{i,j} \int_0^t dt' \text{tr}_R \{ [\tilde{s}_i(t) \tilde{\Gamma}_i(t), [\tilde{s}_j(t') \tilde{\Gamma}_j(t'), \tilde{\rho}(t') R_0]] \} \\ &= - \sum_{i,j} \int_0^t dt' \left\{ [\tilde{s}_i(t) \tilde{s}_j(t') \tilde{\rho}(t') - \tilde{s}_j(t') \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_i(t)] \langle \tilde{\Gamma}_i(t) \tilde{\Gamma}_j(t') \rangle_R \right. \\ &\quad \left. + [\tilde{\rho}(t') \tilde{s}_j(t') \tilde{s}_i(t) - \tilde{s}_i(t) \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_j(t')] \langle \tilde{\Gamma}_j(t') \tilde{\Gamma}_i(t) \rangle_R \right\},\end{aligned}\quad (2.2.16)$$

donde hemos usado la propiedad cíclica de la traza $-\text{tr}(ABC) = \text{tr}(ABC) = \text{tr}(BCA)$ - y escribimos

$$\langle \tilde{\Gamma}_i(t) \tilde{\Gamma}_j(t') \rangle_R = \text{tr}_R [R_0 \tilde{\Gamma}_i(t) \tilde{\Gamma}_j(t')], \quad (2.2.17a)$$

$$\langle \tilde{\Gamma}_j(t) \tilde{\Gamma}_i(t) \rangle_R = \text{tr}_R [R_0 \tilde{\Gamma}_j(t') \tilde{\Gamma}_i(t)]. \quad (2.2.17b)$$

Las propiedades del reservorio entran en la ecuación (2.2.16) a través de las funciones de correlación (2.2.17a) y (2.2.17b). Podemos justificar el reemplazo de $\tilde{\rho}(t')$ por $\tilde{\rho}(t)$ si estas funciones de correlación decaen muy rápidamente en la escala en la cual $\tilde{\rho}(t)$ varía. En un caso ideal, tomamos

$$\langle \tilde{\Gamma}_i(t) \tilde{\Gamma}_j(t') \rangle_R \propto \delta(t - t'). \quad (2.2.18)$$

La aproximación de Markov se basa entonces, tal y como se sugiere, en la existencia de dos escalas de tiempo ampliamente separadas: una escala de tiempo lenta para las dinámicas del sistema S, y una rápida que caracteriza el decaimiento de las funciones de correlación del reservorio.

Integrando sobre el tiempo, tras aplicar las deltas de dirac, se vuelve al cuadro de Schrödinger

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar} [H_S, \rho] + e^{-(i/\hbar)H_S t} \dot{\tilde{\rho}} e^{(i/\hbar)H_S t}. \quad (2.2.19)$$

Tras desarrollo matemático trivial podemos llegar a lo que se conoce como *ecuación maestra*, en este caso expresada en su forma de Lindblad

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar} [H_S, \rho] + \frac{1}{2} \sum_m [2C_m \rho C_m^\dagger - C_m^\dagger C_m \rho - \rho C_m^\dagger C_m], \quad (2.2.20)$$

donde los términos C_m son conocidos como *operadores de colapso* u *operadores de salto* y son proporcionales a los operadores s_i que están incluidos en el Hamiltoniano de interacción 2.2.14. Estos operadores estarán dados de acuerdo al sistema que manejemos, pero siempre serán operadores no-hermitianos, lo cual provocará que la probabilidad en nuestro sistema no se conserve. Esto será más evidente al momento de desarrollar la teoría de trayectorias cuánticas, y será al explicar esta teoría cuando profundizaremos sobre su interpretación física.

2.3. Ecuación Maestra para cavidad óptica con pérdidas

Sabiendo que es posible derivar una ecuación maestra para distintos tipos de sistemas abiertos, probaremos ahora un caso simple: el caso de una cavidad óptica con pérdidas. Definiendo el Hamiltoniano para nuestro sistema tenemos

$$H_S = \hbar\omega_C a^\dagger a, \quad (2.3.1a)$$

$$H_R = \sum_j \hbar\omega_j r_j^\dagger r_j, \quad (2.3.1b)$$

$$H_{SR} = \sum_j \hbar(\kappa_j^* a r_j^\dagger + \kappa_j a^\dagger r_j) = \hbar(a\Gamma^\dagger + a^\dagger\Gamma). \quad (2.3.1c)$$

El sistema S es un oscilador armónico con frecuencia ω_C y operadores de creación y aniquilación a y a^\dagger , respectivamente; mientras que tanto el Hamiltoniano del ambiente, así como el de interacción están dados tal y como se explica en la sección 2.1. Haciendo la relación con (2.2.16) nombramos ahora nuestros operadores como

$$s_1 = a, \quad s_2 = a^\dagger, \quad (2.3.2a)$$

$$\Gamma_1 = \Gamma^\dagger = \sum_j \kappa_j^* r_j^\dagger, \quad \Gamma_2 = \Gamma = \sum_j \kappa_j r_j, \quad (2.3.2b)$$

Teniendo estos operadores, uno puede, de manera análoga a como se hizo en la sección 2.2, obtener una ecuación maestra que describa nuestro sistema, la cual en este caso en particular está dada en su forma de Lindblad por

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = & -i\omega_C[a^\dagger a, \rho] + \kappa(\bar{n} + 1)(2a\rho a^\dagger - a^\dagger a\rho - \rho a^\dagger a) \\ & + \kappa\bar{n}(2a^\dagger \rho a - a a^\dagger \rho - \rho a a^\dagger), \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

donde $\bar{n}(\omega_j, T)$ es el número promedio de número de fotones en el reservorio para un oscilador con frecuencia ω_j en equilibrio térmico a temperatura T y está dado por

$$\bar{n}(\omega_j, T) = \frac{e^{-\hbar\omega_j/k_B T}}{1 - e^{-\hbar\omega_j/k_B T}}. \quad (2.3.4)$$

Dicho término viene de las ecuaciones (2.2.17) donde el operador de densidad del reservorio R_0 se considera en equilibrio térmico a temperatura T y está dado por

$$R_0 = \prod_j e^{-\hbar\omega_j r_j^\dagger r_j / k_B T} (1 - e^{-\hbar\omega_j / k_B T}). \quad (2.3.5)$$

Si uno analiza la función (2.3.4) uno puede darse cuenta que para $T = 0$, $\bar{n} = 0$. Mientras que si uno aumenta la temperatura, el número promedio de fotones también aumentará

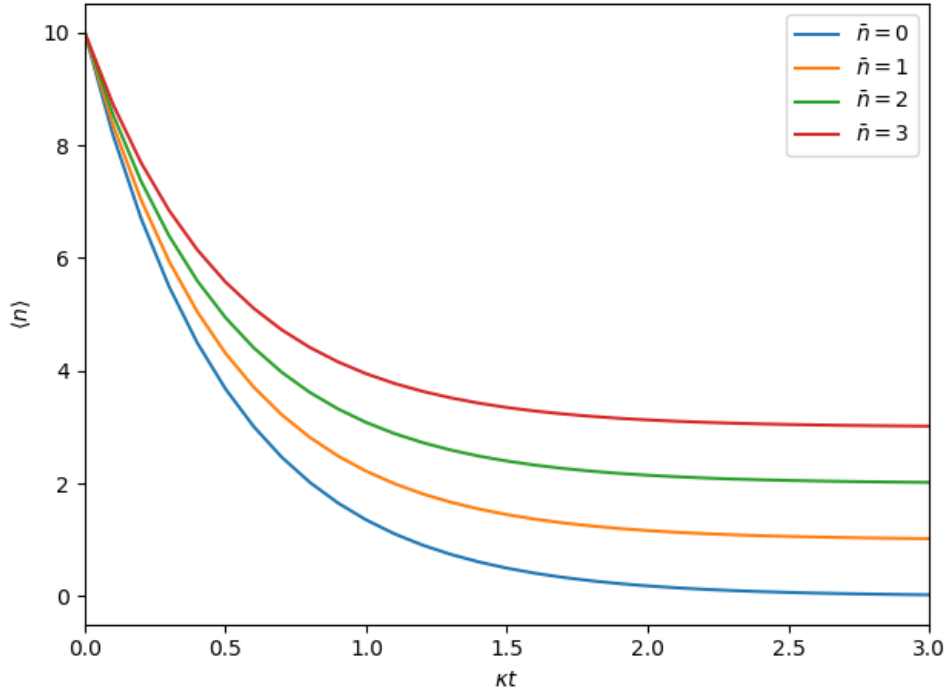


Figura 2.2: Número promedio de fotones para el modo de una cavidad con pérdidas preparado en el estado de Fock $|10\rangle$.

afectando la influencia del reservorio en nuestro sistema, lo cual se verá reflejado en la tasa de pérdidas de nuestra cavidad. Esto lo podemos verificar obteniendo los valores esperados de nuestro sistema, los cuales obtenemos trazando el producto del operador por nuestra matriz de densidad. De manera que si queremos $\langle n \rangle$, esto lo obtenemos calculando

$$\begin{aligned}
 \langle \dot{n} \rangle &= -i\omega_C \text{tr}(a^\dagger a a^\dagger \rho - a^\dagger a \rho a^\dagger a) + \kappa(\bar{n} + 1) \text{tr}(2a^\dagger a^2 \rho a^\dagger - a^\dagger a a^\dagger a \rho \\
 &\quad - a^\dagger a \rho a^\dagger a) + \kappa\bar{n} \text{tr}(2a^\dagger a a^\dagger \rho a - a^\dagger a^2 a^\dagger \rho - a^\dagger a \rho a a^\dagger) \\
 &= 2\kappa(\bar{n} + 1) \text{tr}[a^{\dagger 2} a^2 \rho - (a^\dagger a)^2 \rho] + 2\kappa\bar{n} \text{tr}(a a^\dagger \rho) \\
 &= -2\kappa(\bar{n} + 1) \langle n \rangle + 2\kappa\bar{n}(1 + \langle n \rangle) \\
 &= -2\kappa(\langle n \rangle - \bar{n}),
 \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

con solución

$$\langle n(t) \rangle = \langle n(0) \rangle e^{-2\kappa t} + \bar{n}(1 - e^{-2\kappa t}). \tag{2.3.7}$$

Gráficamente (2.3.7) vemos como el aumentar el número de fotones térmicos excita nuestra cavidad lo que provoca que el mínimo de número de fotones en nuestra cavidad sea mayor a cero y la tasa de decaimiento sea menor.

2.4. Emisión espontánea y átomo de dos niveles

Si bien un modo de la cavidad excitado por luz térmica no es precisamente el ejemplo más interesante de fuente óptica - en cierta forma no es ni siquiera una fuente dado que el campo saliente observado es el mismo campo que excita el modo - éste resulta de gran importancia ya que nos provee las fundaciones para analizar otros sistemas físicos. Uno puede analizar la ecuación maestra para un modo de cavidad óptica excitado por luz térmica y esto nos puede dar una idea de la manera en que se comporta un campo eléctrico en una cavidad con pérdidas. Pero, ¿cómo saber la manera en que interactúa la materia con dicho campo? En este caso el átomo amortiguado de dos niveles resulta ideal para establecer una descripción elementaria. Al hacer tal descripción resulta fundamental el estudio del átomo como fuente de emisión de fotones, con lo cual veremos que un átomo excitado puede ser una fuente de radiación a través de emisión espontánea y emisión estimulada. La manera en que abordaremos estos fenómenos físicos será a través del desarrollo de una ecuación maestra que describa nuestro átomo interactuando con el ambiente.

2.4.1. Ecuación Maestra para átomo de dos niveles en equilibrio térmico

Empezaremos manejando un sistema que consiste en un átomo de dos niveles en equilibrio térmico, el cual está radiativamente amortiguado por su interacción con los modos del campo de radiación en equilibrio térmico a temperatura T . Este campo actúa como un reservorio de osciladores armónicos. El reservorio es esencialmente el mismo considerado que en la ecuación maestra para el modo de cavidad óptica. Sin embargo, la geometría ahora es diferente; los modos del campo electromagnético impactan el átomo desde todas las direcciones en un espacio tridimensional, en lugar de entrar en una cavidad óptica propagándose en una sola dimensión. Empleando el mecanismo general para describir un sistema S interactuando con un reservorio R , nuestro Hamiltoniano estará dado, bajo la aproximación de onda rotante y la aproximación dipolar, por

$$H_S = \frac{1}{2} \hbar \omega_A \sigma_z \quad (2.4.1a)$$

$$H_R = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \hbar \omega_{\mathbf{k}} r_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger r_{\mathbf{k}, \lambda}, \quad (2.4.1b)$$

$$H_{SR} = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \hbar (\kappa_{\mathbf{k}, \lambda}^* r_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger \sigma_- + \kappa_{\mathbf{k}, \lambda} r_{\mathbf{k}, \lambda} \sigma_+), \quad (2.4.1c)$$

con

$$\kappa_{\mathbf{k}, \lambda} = -i e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_A} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2 \hbar \epsilon_0 V}} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}, \lambda} \cdot \mathbf{d}_{21}. \quad (2.4.2)$$

En nuestro átomo hemos considerado dos estados: el estado base $|1\rangle$ y el estado excitado $|2\rangle$, con energías correspondientes E_1 y E_2 donde $E_1 < E_2$. La sumatoria en el Hamiltoniano de interacción se extiende sobre todos los osciladores del reservorio (modos del campo

electromagnético) con vectores de onda \mathbf{k} y estados de polarización λ , y sus frecuencias correspondientes ω_k y vectores unitarios de polarización $\hat{e}_{\mathbf{k},\lambda}$; el átomo está posicionado en \mathbf{r}_A y V es el volumen de cuantización. El término \mathbf{d}_{21} es un elemento de la matriz de polarización que nos acoplará el átomo con el ambiente y que está definido como

$$\mathbf{d}_{12} \equiv e \langle 1 | \hat{\mathbf{q}} | 2 \rangle, \quad \mathbf{d}_{21} = (\mathbf{d}_{12})^*, \quad (2.4.3)$$

donde e es la carga electrónica y \hat{q} es el operador de coordenada para el electrón ligado. En nuestro sistema hemos fijado $\langle 1 | \hat{\mathbf{q}} | 1 \rangle = \langle 2 | \hat{\mathbf{q}} | 2 \rangle = 0$, asumiendo estados cuya simetría garantiza que no habrá momento dipolar permanente. Teniendo esto en mente, y empleando el formalismo presentado en la sección 2.2 podemos avanzar directamente a (2.2.16), donde a partir de (2.2.15) y (2.4.1) hacemos la identificación:

$$s_1 = \sigma_-, \quad s_2 = \sigma_+, \quad (2.4.4a)$$

$$\Gamma_1 = \Gamma^\dagger = \sum_{\mathbf{k},\lambda} \kappa_{\mathbf{k},\lambda}^* r_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger, \quad \Gamma_2 = \Gamma = \sum_{\mathbf{k},\lambda} \kappa_{\mathbf{k},\lambda} r_{\mathbf{k},\lambda}. \quad (2.4.4b)$$

Teniendo estos elementos, realizando el proceso mostrado en la sección 2.2, es posible llegar a la *ecuación maestra para un átomo de dos niveles en equilibrio térmico*:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = & -i \frac{1}{2} \omega_A [\sigma_z, \rho] + \frac{\gamma}{2} (\bar{n} + 1) (2\sigma_- \rho \sigma_+ - \sigma_+ \sigma_- \rho - \rho \sigma_+ \sigma_-) \\ & + \frac{\gamma}{2} \bar{n} (2\sigma_+ \rho \sigma_- - \sigma_- \sigma_+ \rho - \rho \sigma_- \sigma_+), \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

donde γ es la constante de amortiguamiento de nuestro sistema, la cual está dada por

$$\gamma = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\omega_A^3 d_{12}^2}{3\hbar c^3}. \quad (2.4.6)$$

Analizando más a fondo la ecuación 2.4.5 podemos notar que la manera en que hemos agrupado los términos nos permite identificar una tasa de transición de $|2\rangle \rightarrow |1\rangle$, descrita por el término proporcional a $(\gamma/2)(\bar{n} + 1)$ y otra tasa de transición de $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$, descrita por el término proporcional a $(\gamma/2)\bar{n}$. La primera tasa de transición espontánea contiene un término independiente de \bar{n} , y otro que nos dice la tasa de transición inducida por fotones térmicos, proporcional a \bar{n} ; la segunda tasa de transición proporcionada por el término \bar{n} nos da la tasa de transiciones de absorción relacionada con la toma de fotones térmicos del campo electromagnético en equilibrio.

Al ver entonces como dichos términos están asociados con el proceso de emisión espontánea uno esperaría entonces alguno de estos términos en la ecuación maestra coincidiera con el coeficiente A de Einstein, que es lo que precisamente ocurre si uno compara γ con el resultado obtenido en la teoría de Wigner-Weisskopf del ancho de línea natural [16], lo cual nos hace corroborar nuestro procedimiento. Desde luego, algo más que podemos hacer - y que será posible debido a la simplicidad del caso que manejamos - es resolver las

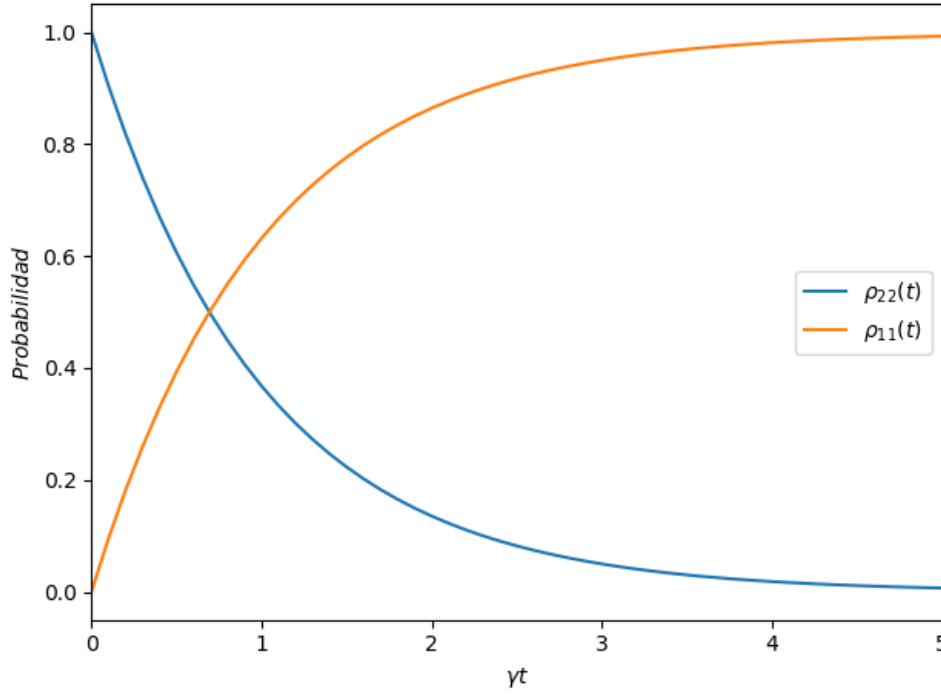


Figura 2.3: Evolución temporal de los coeficientes ρ_{22} y ρ_{11} asociados con las probabilidades de que nuestro ensemble se encuentre en el estado excitado y en el estado base, respectivamente, tomando como estado inicial el estado excitado.

ecuaciones para la evolución temporal de los coeficientes de nuestra matriz de densidad, con las cuales deberíamos de obtener un decaimiento exponencial para el coeficiente relacionado a nuestro estado excitado, en el caso $\rho_{22}(0) = 1$, y considerando $\bar{n} = 0$. Resolviendo

$$\begin{aligned}
 \dot{\rho}_{22} &= -i\frac{1}{2}\omega_A \langle 2 | (\sigma_z \rho - \rho \sigma_z) | 2 \rangle \\
 &\quad + \frac{\gamma}{2}(\bar{n} + 1) \langle 2 | (2\sigma_- \rho \sigma_+ - \sigma_+ \sigma_- \rho - \rho \sigma_+ \sigma_-) | 2 \rangle \\
 &\quad + \frac{\gamma}{2}\bar{n} \langle 2 | (2\sigma_+ \rho \sigma_- - \sigma_- \sigma_+ \rho - \rho \sigma_- \sigma_+) | 2 \rangle \\
 &= -\gamma(\bar{n} + 1)\rho_{22} + \gamma\bar{n}\rho_{11},
 \end{aligned} \tag{2.4.7a}$$

de manera similar uno obtiene:

$$\dot{\rho}_{11} = -\gamma\bar{n}\rho_{11} + \gamma(\bar{n} + 1)\rho_{22}, \tag{2.4.7b}$$

$$\dot{\rho}_{21} = -\left[\frac{\gamma}{2}(2\bar{n} + 1) + i\omega_A\right]\rho_{21}, \tag{2.4.7c}$$

$$\dot{\rho}_{12} = -\left[\frac{\gamma}{2}(2\bar{n} + 1) - i\omega_A\right]\rho_{12}. \tag{2.4.7d}$$

Solucionando las ecuaciones diferenciales acopladas (2.4.7a) y (2.4.7b) para el caso de $\bar{n} = 0$, obtenemos las soluciones

$$\rho_{22}(t) = e^{-\gamma t}, \quad (2.4.8a)$$

$$\rho_{11}(t) = 1 - e^{-\gamma t}. \quad (2.4.8b)$$

Donde hemos asumido $\rho_{22}(t=0) = 1$ y hemos usado la condición de normalización $\rho_{11} + \rho_{22} = 1$. Tal y como esperábamos, el resultado que obtenemos es decaimiento exponencial en nuestro estado excitado.

2.4.2. Ecuación Maestra para átomo de dos niveles excitado por un campo clásico

El siguiente caso que abordaremos será el de un átomo de dos niveles irradiado por un rayo láser monocromático fuerte sintonizado a la transición atómica. Esto dará pauta para que podamos explorar el fenómeno conocido como *fluorescencia resonante* el cual nos ayudará a comprender algunas de las sutilezas que pueden surgir al momento de manejar amortiguamiento para átomos interactuantes y campos. De manera resumida uno puede describir el fenómeno de resonancia fluorescente como el proceso bajo el cual, dado el sistema previamente mencionado, un átomo absorbe fotones del rayo láser (el cual, recordemos, está sintonizado a la frecuencia de la transición atómica) y esto provoca que el átomo pase a un estado excitado para eventualmente después de cierto tiempo que dependerá del tiempo de vida promedio γ^{-1} , el átomo vuelva a su estado base emitiendo un fotón a uno de los muchos modos del campo electromagnético como scattering fluorescente. Este proceso está mediado por la interacción del átomo con el reservorio (2.4.1c) en la cual se basa nuestro tratamiento de emisión espontánea.

El fenómeno de fluorescencia resonante es un tema de estudio que se remonta a más de un siglo [17, 18]. Si bien por ahora nos limitaremos a obtener una ecuación maestra que nos describa el sistema planteado, más adelante, de manera similar que con los casos anteriores, revisitaremos este fenómeno, ahora visto desde la perspectiva de trayectorias cuánticas, lo cual nos permitirá obtener una mayor comprensión.

Con el fin de describir la ecuación maestra correspondiente, empezaremos definiendo el Hamiltoniano para nuestro sistema, que en este caso estará compuesto por

$$H_S = \frac{1}{2}\hbar\omega_A\sigma_z - dE(e^{-i\omega_A t}\sigma_+ + e^{i\omega_A t}\sigma_-), \quad (2.4.9a)$$

$$H_R = \sum_{\mathbf{k},\lambda} \hbar\omega_k r_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger r_{\mathbf{k},\lambda}, \quad (2.4.9b)$$

$$H_{SR} = \sum_{\mathbf{k},\lambda} \hbar \left(\kappa_{\mathbf{k},\lambda}^* r_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger \sigma_- + \kappa_{\mathbf{k},\lambda} r_{\mathbf{k},\lambda} \sigma_+ \right); \quad (2.4.9c)$$

donde ambas interacciones han sido escritas bajo las aproximaciones dipolar y de onda rotante. El campo del láser en el sitio del átomo es

$$\mathbf{E}(t) = \hat{e}2E\cos(\omega_A(t) + \phi), \quad (2.4.10)$$

donde \hat{e} es un vector de polarización unitario, E es la amplitud real, y la fase ϕ está elegida de tal modo que $d = \hat{e} \cdot \mathbf{d}_{12}e^{i\phi}$ también sea real.

Teniendo nuestro Hamiltoniano definido no es necesario empezar desde cero, ya que debido a la similitud con los ejemplos anteriores podemos ir directamente a (2.2.16), con s_1, s_2, Γ_1 , y Γ_2 identificados tal y como en (2.4.4). La única diferencia con respecto al caso de emisión espontánea que debemos de considerar al pasar de ésta ecuación a nuestro resultado final será que ahora los operadores del sistema \tilde{s}_1 y \tilde{s}_2 están dados por

$$\tilde{s}_1 = \sigma_-(t) \equiv \exp\left[(i/\hbar) \int_0^t dt' H_S(t')\right] \sigma_- \exp\left[-(i/\hbar) \int_0^t dt' H_S(t')\right], \quad (2.4.11a)$$

$$\tilde{s}_2 = \sigma_+(t) \equiv \exp\left[(i/\hbar) \int_0^t dt' H_S(t')\right] \sigma_+ \exp\left[-(i/\hbar) \int_0^t dt' H_S(t')\right], \quad (2.4.11b)$$

donde H_S incluye la interacción con el láser. Por lo que debemos de analizar que efecto tiene esto en el amortiguamiento del átomo.

Las ecuaciones (2.4.11) son simplemente las soluciones formales a las ecuaciones de movimiento de Heisenberg para la interacción átomo-campo descrita por el Hamiltoniano (2.4.9a). De manera, que si uno resuelve las ecuaciones de Heisenberg, uno obtiene

$$\tilde{s}_1(t) = \sigma_-(t) = e^{-i\omega_A t} [\sigma_- + \frac{1}{2}(1 - \cos\Omega t)(\sigma_+ - \sigma_-) - \frac{1}{2}i(\sin\Omega t)\sigma_z], \quad (2.4.12a)$$

$$\tilde{s}_2(t) = \sigma_+(t) = e^{i\omega_A t} [\sigma_+ + \frac{1}{2}(1 + \cos\Omega t)(\sigma_+ - \sigma_-) + \frac{1}{2}i(\sin\Omega t)\sigma_z], \quad (2.4.12b)$$

donde $\sigma_+ = \sigma_+(0)$, $\sigma_- = \sigma_-(0)$ y $\sigma_z = \sigma_z(0)$ denotan operadores en el cuadro de Schrödinger, y Ω está dado por

$$\Omega \equiv 2\left(\frac{d}{\hbar}E\right), \quad (2.4.13)$$

que se conoce como *frecuencia de Rabi* y es proporcional a la amplitud del campo estimulante.

Teniendo estos elementos uno puede proseguir substituyendo las soluciones completas (2.4.12) en (2.2.16) y realizando las integrales correspondientes, de manera que al final, ignorando los efectos térmicos ($\bar{n} = 0$) uno obtiene la *ecuación maestra para resonancia fluorescente*

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = & -i\frac{1}{2}\omega_A[\sigma_z, \rho] - i(\Omega/2)[e^{-i\omega_A t}\sigma_+ + e^{i\omega_A t}\sigma_-, \rho] \\ & + \frac{\gamma}{2}(2\sigma_- \rho \sigma_+ - \sigma_+ \sigma_- \rho - \rho \sigma_+ \sigma_-). \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

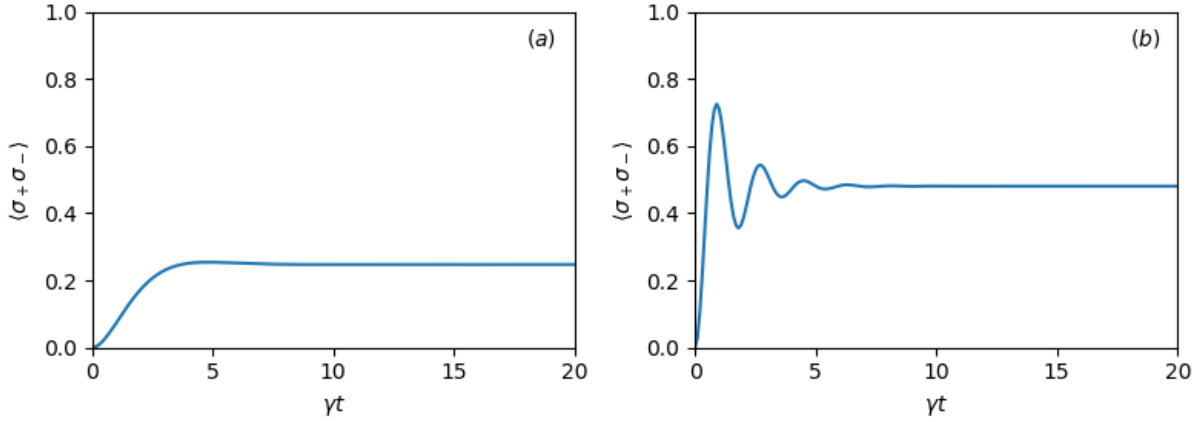


Figura 2.4: Probabilidad de que un átomo experimentando resonancia fluorescente se encuentre en el estado superior. (a) Excitación débil, $\Omega/\gamma = 0,7$; (b) excitación fuerte, $\Omega/\gamma = 3,5$.

Para una derivación detallada de cada una de las ecuaciones maestras presentadas en esta sección, uno puede consultar los libros de Carmichael [2,19]. Para nuestros fines es suficiente con presentar esta ecuación maestra y a partir de ella, obtener valores que nos den una mayor intuición del fenómeno físico en cuestión, esto lo podemos lograr numéricamente auxiliándonos con la paquetería QuantumOptics.jl [20]. En este caso en particular es fácil de ver como el aumentar la razón Ω/γ aumentará el valor del coeficiente de probabilidad correspondiente al estado excitado, algo que se aprecia en la figura 2.4. Sin embargo, muchas veces esto no es suficiente para comprender totalmente el fenómeno en cuestión; a final de cuentas uno puede pensar de la probabilidad como una estimación que se puede obtener a partir de la realización de múltiples experimentos aleatorios de los cuales uno puede obtener la frecuencia con la que suceden, pero a veces puede que sea de utilidad tener acceso a cada uno de los experimentos realizados que integran esta probabilidad. Es ahí cuando la Teoría de Trayectorias Cuánticas, cobrará importancia y, al retomar algunos de los sistemas presentados hasta ahora, veremos como puede esta teoría ampliar nuestra comprensión de cada uno de ellos.

2.5. Modelo de Jaynes-Cummings con pérdidas

En este primer capítulo nos hemos enfocado en dos clases de sistemas: el modo de una cavidad y el átomo de dos niveles. En ambos casos esto ha sido considerando una interacción con el ambiente que afecta nuestro sistema. El paso natural podría ser combinar estos dos sistemas y manejar lo que se conoce como modelo de Jaynes-Cummings. Con este fin empezaremos con una descripción básica este modelo, para después proseguir describiendo este modelo en el caso en el que interactúa con el ambiente, lo cual provocará pérdidas en nuestro sistema.

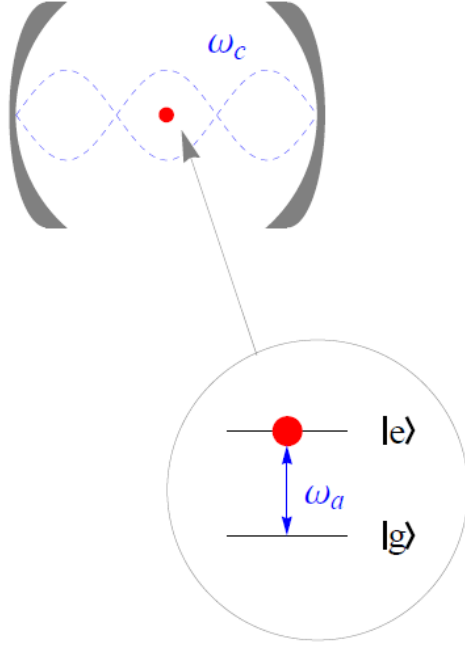


Figura 2.5: Ilustración del modelo de Jaynes-Cummings. El átomo en la cavidad óptica se muestra como el punto en rojo en la parte superior. Los niveles de energía del átomo que se acoplan al modo del campo dentro de la cavidad se muestran en el círculo inferior. La transferencia entre los dos niveles puede provocar, ya sea, una emisión de un fotón por el átomo hacia al modo de la cavidad, en el caso de que el átomo decaiga al estado base, o bien, que el átomo absorba un fotón del modo de la cavidad al momento de pasar al estado excitado.

2.5.1. Modelo de Jaynes-Cummings

Como se ha mencionado previamente el propósito de esta tesis es hallar una relación entre el número de emisiones espontáneas y el número de pérdidas en nuestra cavidad, en un sistema que involucra un átomo de dos niveles dentro de una cavidad, además, dicho sistema interactúa con un campo clásico estimulante. Al momento de modelar nuestro sistema resulta conveniente comenzar con un arreglo simple y añadir niveles de complejidad hasta llegar al sistema deseado. Para este propósito el modelo de Jaynes-Cummings resulta ideal. El modelo de Jaynes-Cummings fue introducido en 1963 [21], con el fin de comparar el fenómeno de emisión espontánea dentro de las teorías semi-clásicas y cuánticas de la luz. Este modelo consiste en un átomo de dos niveles localizado en el antinodo de una onda estacionaria de una cavidad la cual soporta un modo casi resonante con el átomo, y donde se ignora el acoplamiento a todos los modos no-resonantes. En nuestro caso en particular consideraremos una cavidad de longitud L y cintura de modo gaussiana ω_0 . Uno puede describir este sistema mediante el Hamiltoniano

$$H_S = H_A + H_C + H_I, \quad (2.5.1)$$

donde

$$H_A = \frac{1}{2} \hbar \omega_A \sigma_z \quad (2.5.2a)$$

$$H_C = \hbar \omega_C a^\dagger a \quad (2.5.2b)$$

$$H_I = \hbar g \hat{E} \hat{S} \quad (2.5.2c)$$

con constante de acoplamiento dipolar

$$g \equiv \sqrt{\frac{\omega_C d^2}{2\hbar\epsilon_0 V_Q}}, \quad V_Q \equiv \pi(w_0/2)^2 L, \quad (2.5.3)$$

donde V_Q es el volumen del modo.

De los casos vistos anteriormente, es claro que, en el Hamiltoniano 2.5.1, el primer término está relacionado al átomo, mientras que el segundo está relacionado al modo de la cavidad. El tercer término describe el acoplamiento entre el átomo y el modo de la cavidad, donde tenemos el operador de campo $\hat{E} = (a + a^\dagger)$. La manera en que está acoplado el átomo al campo es mediante un operador de polarización $\hat{S} = (\sigma_+ + \sigma_-)$. Donde la interpretación de cada uno de los productos es la siguiente:

$a\sigma_+$: un fotón es absorbido y ocurre una transición en el átomo del estado $g \rightarrow$ estado e
 $a^\dagger\sigma_-$: emisión de un fotón y des-excitación del átomo.

Estos dos procesos conservan la energía y serán los relevantes para los cálculos que queremos realizar. Por otro lado los términos $a^\dagger\sigma_+$ y $a\sigma_-$ no conservan la energía. Su representación física es:

$a^\dagger\sigma_+$: un fotón es emitido y el átomo es excitado. $a\sigma_-$: un fotón es absorbido y el átomo pasa al estado base.

Teniendo el Hamiltoniano H_I pasando al cuadro de interacción y desarrollando, uno obtiene

$$H_I^I = \hbar g (a\sigma_- e^{-i(\omega_c + \omega_a)t} + a^\dagger\sigma_+ e^{i(\omega_c + \omega_a)t} + a\sigma_+ e^{(-\omega_c + \omega_a)t} + a^\dagger\sigma_- e^{-i(-\omega_c + \omega_a)t}), \quad (2.5.4)$$

donde tras aplicar la aproximación de onda rotante, volviendo al cuadro de Schrödinger y juntando con el Hamiltoniano del átomo y el de la cavidad, finalmente obtenemos el Hamiltoniano de Jaynes-Cummings

$$H_{JC} = \frac{1}{2}\hbar\omega_A\sigma_z + \hbar\omega_C a^\dagger a + \hbar g(a^\dagger\sigma_- + a\sigma_+). \quad (2.5.5)$$

Teniendo este Hamiltoniano, podemos proceder a explorar la dinámica de nuestro sistema.

Separando nuestro Hamiltoniano en dos partes, dadas por $H_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_A\sigma_z + \hbar\omega_C a^\dagger a$ y $H_1 = \hbar g(a\sigma_+ + \sigma_- a^\dagger)$. Además considerando los eigenestados de H_0 , $|e, n\rangle$ y $|g, n+1\rangle$.

$$H_0 |e, n\rangle = \hbar\left(\frac{\omega_A}{2} + n\omega_C\right) |e, n\rangle \quad (2.5.6)$$

$$H_0 |g, n+1\rangle = \hbar\left[-\frac{\omega_A}{2} + (n+1)\omega_C\right] |g, n+1\rangle \quad (2.5.7)$$

Ahora, dado que la interacción acopla solamente $|e, n\rangle$ a $|g, n+1\rangle$, para cada n , y ningún otro estado; entonces, podemos considerar el subespacio $\epsilon_n = \{|e, n\rangle, |g, n+1\rangle\}$ y nuestro Hamiltoniano total puede ser escrito de la forma

$$H = \sum_n H_n, \quad (2.5.8)$$

donde H_n actúa solamente en ϵ_n y puede ser escrito como

$$H_n = \hbar\omega_C \left(n + \frac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \delta & 2g\sqrt{n+1} \\ 2g\sqrt{n+1} & -\delta \end{bmatrix}, \quad (2.5.9)$$

uno fácilmente puede diagonalizar el Hamiltoniano, y obtener los siguientes eigenvalores

$$E_{1n} = \hbar\omega_C \left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar}{2}R_n, \quad (2.5.10)$$

$$E_{2n} = \hbar\omega_C \left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{\hbar}{2}R_n, \quad (2.5.11)$$

con

$$\delta = \omega_A - \omega_C \quad (2.5.12)$$

$$R_n = \sqrt{\delta^2 + 4g^2(n+1)}. \quad (2.5.13)$$

Los eigenestados correspondientes son

$$|1n\rangle = \cos(\theta_n) |e, n\rangle + \sin(\theta_n) |g, n+1\rangle \quad (2.5.14a)$$

$$|2n\rangle = -\sin(\theta_n) |e, n\rangle + \cos(\theta_n) |g, n+1\rangle \quad (2.5.14b)$$

con

$$\cos(\theta_n) = \frac{2g\sqrt{n+1}}{\sqrt{(R_n - \delta)^2 + 4g^2(n+1)}}, \quad (2.5.15a)$$

$$\sin(\theta_n) = \frac{R_n - \delta}{\sqrt{(R_n - \delta)^2 + 4g^2(n+1)}}. \quad (2.5.15b)$$

Podemos escribir

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} |1n\rangle \\ |2n\rangle \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\theta_n & \sin\theta_n \\ -\sin\theta_n & \cos\theta_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |e, n\rangle \\ |g, n+1\rangle \end{bmatrix} \\ &\equiv R(\theta_n) \begin{bmatrix} |e, n\rangle \\ |g, n+1\rangle \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.5.16)$$

Donde obtenemos, lo que se conoce como 'dressed states' los cuales los eigenestados de nuestro sistema átomo-campo y son superposiciones de nuestros estados base desacoplados ('bare states').

Con el fin de tener una idea más clara de la dinámica de nuestro sistema, podemos ver el caso de las oscilaciones cuánticas de Rabi.

Escribiendo nuestro estado como

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left(-\frac{iHt}{\hbar}\right) |\psi(0)\rangle, \quad (2.5.17)$$

expresando nuestro estado en términos de los llamados 'dressed states', tenemos

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^2 \exp\left(-\frac{iE_j t}{\hbar}\right) |j, n\rangle \langle j, n|\psi(0)\rangle, \quad (2.5.18)$$

donde E_j son los eigenvalores correspondientes de nuestros 'dressed states'.

Ahora, podemos escribir nuestro vector de estado en términos tanto de nuestra base original como de la base nuestros dressed states, de la siguiente manera:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n [C_{en} |e, n\rangle + C_{g,n+1} |g, n+1\rangle] \quad (2.5.19a)$$

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n [C_{1n} |1n\rangle + C_{2n} |2n\rangle]. \quad (2.5.19b)$$

Para facilitar nuestros cálculos podemos cambiar al marco rotante a frecuencia $(n + \frac{1}{2})\omega_C$, y escribimos 2.5.18 como

$$\begin{bmatrix} C_{1n}(t) \\ C_{2n}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(-i\frac{R_n}{2}t) & 0 \\ 0 & \exp(i\frac{R_n}{2}t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{1n}(0) \\ C_{2n}(0) \end{bmatrix} \quad (2.5.20)$$

También haciendo uso de 2.5.16, podemos escribir

$$\begin{bmatrix} C_{en}(t) \\ C_{gn+1}(t) \end{bmatrix} = R^{-1}(\theta_n) \begin{bmatrix} \exp(-i\frac{R_n}{2}t) & 0 \\ 0 & \exp(i\frac{R_n}{2}t) \end{bmatrix} R(\theta_n) \begin{bmatrix} C_{en}(0) \\ C_{gn+1}(0) \end{bmatrix}, \quad (2.5.21)$$

desarrollando, uno llega a

$$\begin{bmatrix} C_{en}(t) \\ C_{gn+1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{R_n}{2}t - i\delta R_n^{-1} \sin\frac{R_n}{2}t & -2ig\sqrt{n+1}R_n^{-1} \sin\frac{R_n}{2}t \\ -2ig\sqrt{n+1}R_n^{-1} \sin\frac{R_n}{2}t & \cos\frac{R_n}{2}t - i\delta R_n^{-1} \sin\frac{R_n}{2}t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{en}(0) \\ C_{gn+1}(0) \end{bmatrix} \quad (2.5.22)$$

Por lo que si nuestro átomo está inicialmente en el estado excitado y $\delta = 0$, obtenemos

$$|C_{en}(t)|^2 = \cos^2 g\sqrt{n+1}t, \quad (2.5.23a)$$

$$|C_{gn+1}(t)|^2 = \sin^2 g\sqrt{n+1}t. \quad (2.5.23b)$$

Esto se conoce como oscilación cuántica de Rabi, lo cual se puede ver en la figura 2.5.1. Es importante notar como el número promedio de fotones y la probabilidad de que el átomo se encuentre en el estado excitado se encuentran desfasados por $\pi/2$ lo nos ilustra un proceso cíclico de absorción de fotones y de como una vez absorbidos son re-emitidos por emisión estimulada.

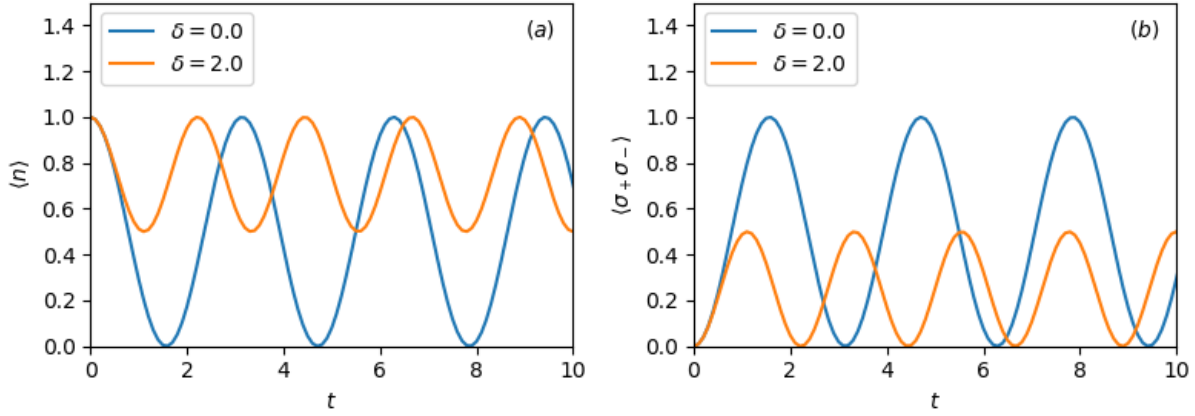


Figura 2.6: Evolución temporal de los valores esperados para modelo de Jaynes-Cummings con un estado inicial $|\psi(0)\rangle = |g, 1\rangle$, con constante de acoplamiento $g = 1,0$. (a) Numero promedio de fotones; (b) probabilidad de que el átomo se encuentre en el estado excitado.

2.5.2. Ecuación Maestra para modelo de Jaynes-Cummings con pérdidas

Tras haber introducido el modelo de Jaynes-Cummings, podemos empezar a considerar el caso en el que este modelo está interactuando con el ambiente, para esto podemos considerar dos casos: uno en el que el haya pérdidas debido a que estamos manejando una cavidad defectuosa en la que algunos de los fotones escapan, y otro caso en el que el átomo está acoplado al ambiente, de manera que habrá pérdidas debido a las emisiones espontáneas que ocurran. Podemos, entonces, empezar definiendo el Hamiltoniano con el cual describiremos nuestro sistema. En ambos casos nuestro H_S será el Hamiltoniano de Jaynes-Cummings que hemos derivado previamente y que se muestra en (2.5.5). Las diferencias se encontrarán principalmente en el Hamiltoniano de interacción para reflejar los acoplamientos correspondientes, de manera que en el caso de que el ambiente esté acoplado al modo de la cavidad nuestro H_{SR} estará dado por 2.3.1c mientras que para el caso del acoplamiento entre el ambiente y el átomo H_{SR} va a estar dado por 2.4.1c. Por lo que si uno desarrolla, se llegará eventualmente a ecuaciones maestras, donde las diferencias entre cada una se verán reflejada en los operadores de colapso correspondientes. Para el caso de acoplamiento entre el ambiente y el átomo, tendremos

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[H_{JC}, \rho] + \frac{\gamma}{2}(2\sigma_- \rho \sigma_+ - \sigma_+ \sigma_- \rho - \rho \sigma_+ \sigma_-). \quad (2.5.24)$$

Mientras que la ecuación maestra correspondiente al caso en el que el ambiente está acoplado al modo de la cavidad será

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[H_{JC}, \rho] + \kappa(2a\rho a^\dagger - a^\dagger a \rho - \rho a^\dagger a). \quad (2.5.25)$$

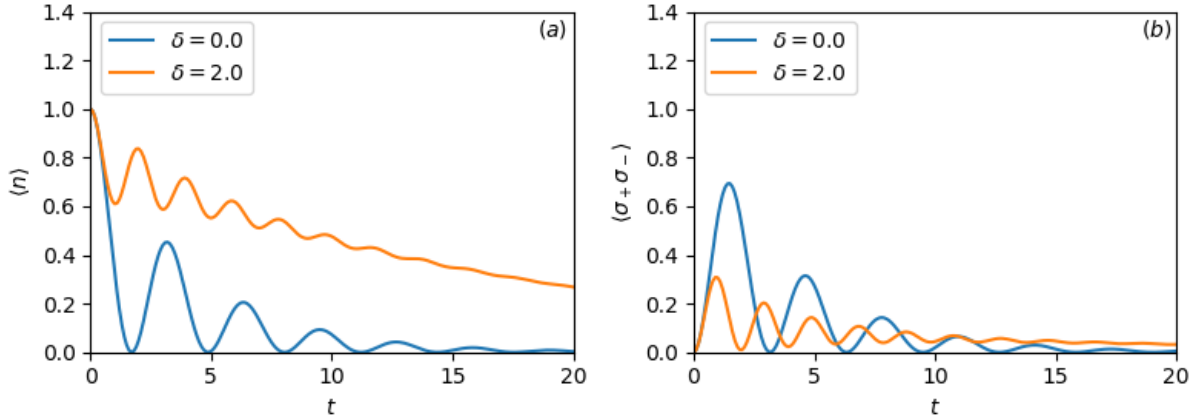


Figura 2.7: Evolución temporal de los valores esperados para modelo de Jaynes-Cumming con emisiones espontáneas en átomo en un estado inicial $|\psi(0)\rangle = |g, 1\rangle$, con constante de acoplamiento $g = 1,0$ y tasa de decaimiento $\gamma = 0,5$. (a) Numero promedio de fotones; (b) probabilidad de que el átomo se encuentre en el estado excitado.

Ambos casos se están considerando con $\bar{n} = 0$. Uno puede notar de las figuras 2.7 y 2.8 que las dinámicas son bastante similares, y en ambos casos la disipación existente en el sistema es clara. Quizá el cambio más notario entre las dos sistemas se aprecia en las tasas de decaimiento, donde los términos de colapso, al ser proporcionales a κ en lugar de $\gamma/2$, provocarán que se presente una tasa de decaimiento mayor en el sistema.

Por último uno podría considerar el caso en donde existen pérdidas tanto a defectos en la cavidad, como debido a emsiones espontáneas. En tal caso uno debe de incorporar ambos tipos de decaimiento a nuestra ecuación maestra por lo que uno tendría

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = & -\frac{i}{\hbar}[H_{JC}, \rho] + \frac{\gamma}{2}(2\sigma_- \rho \sigma_+ - \sigma_+ \sigma_- \rho - \rho \sigma_+ \sigma_-) \\ & + \kappa(2a \rho a^\dagger - a^\dagger a \rho - \rho a^\dagger a), \end{aligned} \quad (2.5.26)$$

Donde al haber dos tipos de decaimiento lo que uno esperaría sería simplemente una mayor tasa de disminución en los valores esperados tanto de $\langle n \rangle$ como $\langle \sigma_+ \sigma_- \rangle$.

Cada uno de estos ejemplos nos acerca más al caso central de esta tesis, donde se considerarán ambos tipos de decaimientos pero a la vez habrá un láser que estimulará nuestro sistema. Quizá la adición del láser irradiando podrá parecer una implementación sencilla pero al analizar el sistema, veremos que esto traerá cambios considerables en la dinámica de nuestro sistema. También es necesario introducir una herramienta que nos haga posible registrar los diferentes decaimientos que ocurran en nuestro sistema. Para esto, la teoría de trayectorias cuánticas resultará ideal.

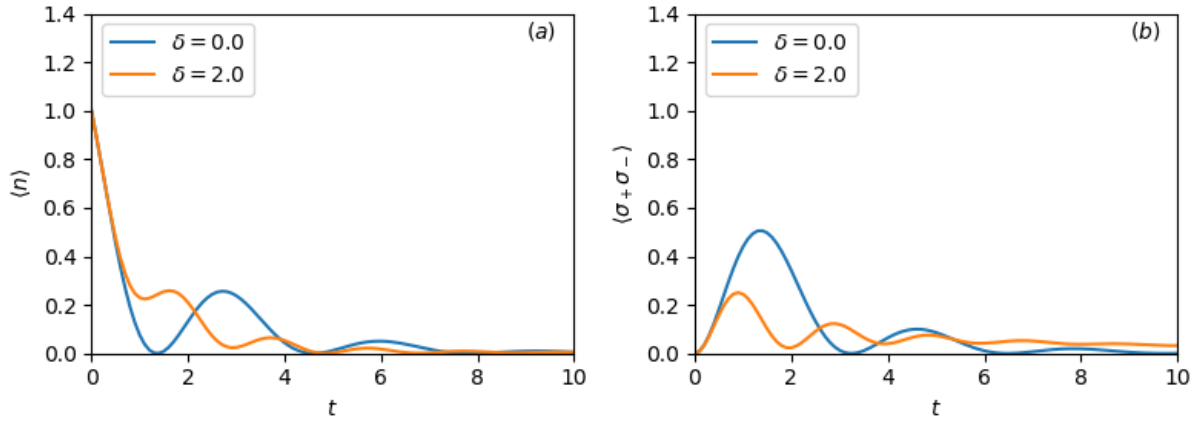


Figura 2.8: Evolución temporal de los valores esperados para modelo de Jaynes-Cumming con pérdidas en la cavidad en un estado inicial $|\psi(0)\rangle = |g, 1\rangle$, con constante de acoplamiento $g = 1,0$ y tasa de decaimiento $\kappa = 0,5$. (a) Numero promedio de fotones; (b) probabilidad de que el átomo se encuentre en el estado excitado.

Capítulo 3

Teoría de Trayectorias Cuánticas

Tras haber manejado diversos sistemas abiertos, principalmente, usando la ecuación maestra, ahora introduciremos otro método para analizar dichos sistemas: la Teoría de Trayectorias Cuánticas. Las técnicas de Trayectorias Cuánticas fueron desarrolladas dentro del campo de la óptica cuántica a principios de los años 1990's [2] como un medio para simular sistemas disipativos numéricamente, y pueden ser aplicadas para cualquier sistema donde la evolución de un operador densidad pueda ser descrito mediante una ecuación maestra. Estas técnicas involucran rescribir la ecuación maestra como un promedio estocástico sobre trayectorias individuales, las cuales pueden evolucionar en el tiempo numéricamente como estados puros. Estas técnicas nos permitan evitar el tener que propagar en el tiempo una matriz de densidad completa, y reemplazar esta tarea compleja con un muestreo estocástico. La ventaja clave es que en caso de manejar un espacio de Hilbert de dimensión N_H , entonces propagar una matriz de densidad significa propagar una matriz de densidad de tamaño N_H^2 , mientras que el sampleo estocástico de estados requiere únicamente vectores de estado de dimensión N_H . El precio que uno debe de pagar al hacer este tipo acercamiento es que uno debe de obtener un gran numero de muestras para que los errores estadísticos sean pequeños, y es importante que el numero de muestras requerida resulte más pequeño que el tamaño del espacio de Hilbert para que el método resulte eficiente.

Dentro del campo de la óptica cuántica, estas técnicas fueron desarrolladas en paralelo por grupos de investigación entre los que destacan los encabezados por K. Mølmer, C. Gardiner, I.C. Percival, G. Mahler y H.J. Carmichael [2, 22–25], y surgieron de estudios de distintos fenómenos relacionados a los sistemas cuánticos abiertos. Nosotros nos enfocaremos en la versión desarrollada por Carmichael [2], que se basó en el estudio de la generación de estados no-clásicos de la luz. Justamente el término *trayectorias cuánticas* fue acuñado por Carmichael, mientras que otros acercamientos son referidos como *acercamiento de salto cuántico* [26], o *método de función de onda de Monte Carlo* [27]. Este último término no debe de ser confundido con las llamadas *técnicas cuánticas de Monte Carlo* — el tratamiento Monte Carlo realizado aquí es clasico, en el sentido que no existe una suma coherente de amplitudes involucradas en evaluar valores esperados de las muestras obtenidas.

3.1. Trayectorias Clásicas y Cuánticas

3.1.1. Trayectorias Clásicas

El concepto de trayectorias clásicas es bastante claro en mecánica clásica; puede ser definido como el camino seguido por un punto en el espacio de fase. Para sistemas cerrados, la trayectoria estará dada por las ecuaciones de Hamilton. Dicha trayectoria es determinista y reversible en el tiempo. Si dos sistemas interactúan, cada sistema tendrá una trayectoria bien definida en su propio espacio de fase. Sin embargo, para un gran número de sistemas interactuantes puede que sea impráctico intentar resolver las ecuaciones de Hamilton. Para estos casos resulta conveniente hacer un tratamiento estadístico y asignar una distribución de probabilidad a los observables de nuestro sistema y una ecuación que nos de su evolución temporal, la cual es la ecuación de Fokker-Planck, que data en su uso por Fokker en 1915 [28], y por Planck en 1917 [29] para la descripción de movimiento Browniano. En su contexto tradicional uno puede escribirla como una ecuación diferencial para una densidad de probabilidad condicional

$$\frac{\partial P(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, 0)}{\partial t} = \left(- \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} A_i(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} D_{i,j}(\mathbf{x}) \right) P(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, 0), \quad (3.1.1)$$

donde \mathbf{x} es un vector de n variables aleatorias x_1, \dots, x_n y, $A_i(\mathbf{x})$ y $D_{i,j}(\mathbf{x})$ son funciones generales de estas variables; la matriz $D_{i,j}(\mathbf{x})$ es simétrica y positiva definida por definición. Siendo una ecuación diferencial parcial, la ecuación de Fokker-Planck puede ser solucionada analíticamente únicamente en casos especiales. Debido a esto, uno suele recurrir a métodos numéricos en los cuales una manera de proceder es mediante un conjunto equivalente de ecuaciones estocásticas diferenciales que pueden ser simuladas por método de Monte Carlo.

3.1.2. Trayectorias Cuánticas

Si bien a un sistema interactuante generalmente no se le puede asignar una función de onda, si se le puede asignar un estado más general, un operador de densidad ρ . La matriz de densidad representa un ensemble de vectores de estado, de manera similar en la que una distribución de probabilidad representa un ensemble de puntos en el espacio de fase. Como hemos visto anteriormente, al tratar como un reservorio los otros sistemas con los que interactúa nuestra matriz de densidad en un sistema abierto, es posible desarrollar una ecuación de evolución temporal Markoviana, la cual llamamos *ecuación maestra*. Uno puede pensar en esta ecuación como la forma cuántica análoga a la ecuación de Fokker-Planck.

Si bien existe una fuerte analogía entre la ecuación clásica para la evolución de una función de distribución en el espacio de fases, y la ecuación maestra, uno podría preguntarse entonces, ¿cuál es el análogo cuántico de las trayectorias individuales que forman el ensemble clásico? Se sabe que es posible escribir ecuaciones de movimiento de Heisenberg, las cuales nos proveen ecuaciones estocásticas diferenciales y que se conocen como

ecuaciones cuánticas de Langevin [3]. Pero, ¿qué hay de las imágenes que las trayectorias estocásticas clásicas proveen? ¿Es posible construir un formalismo que nos provea imágenes similares, imágenes de trayectorias estocásticas cuánticas? Si se quiere lograr el análogo cuántico apropiado que nos provea de dichas imágenes, resulta mucho más conveniente desarrollar una ecuación estocástica para el vector de estado del sistema. Logrando esto, entonces parecería que la ecuación maestra para la matriz de densidad podría ser considerada meramente como un ensemble de trayectorias cuánticas representando la evolución estocástica de sistemas individuales.

Es posible definir tales trayectorias, y existe mucho trabajo relacionado al tema [2, 22–25, 30]. Dentro del trabajo de Carmichael se le llama "desenmarañamiento" (unraveling) de la ecuación maestra, al ensemble de trayectorias cuánticas obtenidas. A diferencia del caso clásico existe una gran cantidad de desenmarañamientos de la ecuación maestra. La razón de esto se debe a que en general no existe una manera única de descomponer una matriz de estado en un ensemble de vectores de estado. Esta es una característica particular de la mecánica cuántica. Una de las maneras en que determinaremos dichos desenmarañamientos, es a través de registros de medición obtenidos de nuestro sistema.

3.1.3. Teoría Cuántica de Medición

Hasta ahora nos hemos limitado a la parte física de la teoría cuántica, que consiste en evolución la cual puede ser generado por un Hamiltoniano cuántico. Esto incluye evolución irreversible, no-unitaria la cual resulta de un sistema interactuando con un reservorio. Sin embargo, existe otro lado de la teoría cuántica, la cual tiene que ver con cambios en el sistema, los cuales fundamentalmente son no-unitarios e incluso no-lineales. Esto tiene que ver con lo relacionado al proceso de medición, que es de gran importancia en la teoría cuántica. Dado el contexto de nuestro tema es importante mencionar que la medición ofrece un modo de desentrelazar sistemas que en un punto se entrelazaron. Dicho de manera más específica, si dos sistemas interactúan y se entrelazan y luego se aplica una medición en uno de los sistemas, proyectándolo en un estado puro, entonces el segundo sistema también será proyectado a un estado puro. Relacionando esto con el estudio de los sistemas cuánticos abiertos, en el caso en que se haga una medición al reservorio después de que ha interactuado con el sistema, esto provocará que el sistema sea proyectado a un estado puro. Dentro del contexto de trayectorias cuánticas, esto nos dice que diferentes ensembles pueden resultar de diferentes elecciones de mediciones en el reservorio.

Desde este punto de vista, **una trayectoria cuántica es la evolución de un sistema condicionado a los resultados de medición hechos en dicho sistema.** De modo que si tenemos un estado inicial definido y, dado cierto arreglo experimental, monitoreamos las partículas entrantes y salientes, tomando en cuenta los tiempos y locaciones en los cuales el número de partículas cambia, entonces podremos saber como ha evolucionado nuestro estado cuántico, condicionado a un registro individual de mediciones. En otras palabras, si tenemos un entendimiento del trasfondo de las mediciones obtenidas podemos usar este

entendimiento para actualizar nuestro conocimiento del estado después de la medición.

3.2. Desenmarañando la dinámica de sistemas cuánticos abiertos

Al momento de manejar sistemas acoplados a reservorios sabemos que es posible llegar a ecuaciones maestras que nos describan la dinámica de dichos sistemas acoplados, tal y como lo realizamos durante gran parte del capítulo 2. Una gran variedad de ecuaciones maestras describen la evolución de sistemas cuánticos disipativos, los cuales a su vez, puede escribirse en la forma de Lindblad(2.2.20). Desarrollando una solución de la ecuación maestra por medio de una expansión de Dyson veremos que es posible desenmarañar nuestro operador de densidad en una serie de evoluciones suaves interrumpidas por saltos cuánticos. Esto eventualmente nos logrará introducir un mecanismo que nos permitirá manejar interacciones sistema-reservorio usando la ecuación de Schrödinger en lugar de la ecuación de Liouville, lo cual computacionalmente, en un gran número de casos, resulta más eficiente. Empezando con la ecuación de Lindblad, la cual podemos expresar como

$$\dot{\rho} = \mathcal{L}\rho, \quad (3.2.1)$$

donde \mathcal{L} es un superoperador que actúa de acuerdo al lado derecho de (2.2.20), y que a su vez podemos separar como

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \sum_n \mathcal{L}_n, \quad (3.2.2)$$

$$\mathcal{L}_0\rho = -\frac{i}{\hbar}[H_S, \rho], \quad (3.2.3)$$

$$\mathcal{L}_n\rho = \frac{1}{2}[2C_n\rho C_n^\dagger - C_n^\dagger C_n\rho - \rho C_n^\dagger C_n], \quad (3.2.4)$$

ρ es el operador de densidad reducido para el sistema "pequeño" S (obtenido de trazar los grados de libertad del reservorio R del operador de densidad del sistema completo $S + R$), y H_S describe la evolución Hamiltoniana del sistema pequeño S en el cuadro de interacción. Los operadores C_n actúan en el espacio de estados del sistema pequeño S y expresan la interacción de S con el reservorio R. El número de operadores C_n depende de la naturaleza del problema.

Una solución formal de (3.2.1) es

$$\rho(t) = \exp(\mathcal{L}t)\rho(0). \quad (3.2.5)$$

Definamos ahora

$$J_n\rho = C_n\rho C_n^\dagger, \quad (3.2.6)$$

y también definimos

$$S = \sum_n J_n. \quad (3.2.7)$$

Ahora aplicamos una transformación expresada como,

$$\tilde{\rho} = e^{[-(\mathcal{L}-S)t]} \rho(t), \quad (3.2.8)$$

la cual nos permitirá realizar una expansión de Dyson del operador de densidad. Derivando (3.2.8) con respecto al tiempo obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\rho}}{dt} &= [-(\mathcal{L} - S)] e^{[-(\mathcal{L}-S)t]} \rho(t) + e^{[-(\mathcal{L}-S)t]} \mathcal{L} \rho(t) \\ &= e^{[-(\mathcal{L}-S)t]} S e^{[(\mathcal{L}-S)t]} \tilde{\rho}(t) . \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Integrando esta ecuación e invirtiendo la transformación obtenemos

$$\rho(t) = \rho(0) + \int_0^t dt' e^{(\mathcal{L}-S)(t-t')} S e^{(\mathcal{L}-S)t'} \tilde{\rho}(t') . \quad (3.2.10)$$

Reiterando multiplas veces obtenemos

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^t dt_m \int_0^{t_m} dt_{m-1} \dots \int_0^{t_2} dt_1 \{ e^{(\mathcal{L}-S)(t-t_m)} S e^{(\mathcal{L}-S)(t_m-t_{m-1})} \dots \\ &\quad \times \dots e^{(\mathcal{L}-S)(t_2-t_1)} S e^{(\mathcal{L}-S)t_1} \} \rho(0) . \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

Escribiendo de manera explícita los superoperadores J_n relacionados con los saltos cuánticos tenemos,

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\{n_i\}} \int_0^t dt_m \int_0^{t_m} dt_{m-1} \dots \int_0^{t_2} dt_1 \{ e^{(\mathcal{L}-S)(t-t_m)} J_{n_m} e^{(\mathcal{L}-S)(t_m-t_{m-1})} \dots \\ &\quad \times \dots e^{(\mathcal{L}-S)(t_2-t_1)} J_{n_1} e^{(\mathcal{L}-S)t_1} \} \rho(0) . \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

Cada término en la doble suma se puede considerar como una trayectoria cuántica, donde el operador de densidad reducida al tiempo t está dado por la suma de todas las posibles trayectorias cuánticas. Para cada una de estas trayectorias, (3.2.12) muestra que la evolución puede ser considerada como una sucesión de emisiones de fotones, que provocarán cambios abruptos en nuestro sistema a los cuales nos referiremos como *saltos cuánticos*, asociados a los operadores J_n , intercalados con una serie de evoluciones, asociadas con los operadores $e^{(\mathcal{L}-S)t}$. Cada una de estas trayectorias puede involucrar cualquier número de saltos cuánticos, desde $m = 0$ hasta $m = \infty$, y los tiempos en los que ocurren dichos saltos puede ser cualquier secuencia ordenada de m tiempos en el intervalo $[0, t]$. La probabilidad de cada trayectoria está dada por la traza del término correspondiente en (3.2.12). De modo que a cierto tiempo t , para un estado inicial $\rho(0)$ y cierta secuencia de saltos cuánticos, nuestro operador de densidad condicionado a tal secuencia de saltos cuánticos estará dado por

$$\rho_c(t) = \frac{\bar{\rho}_c(t)}{\text{tr}[\bar{\rho}_c(t)]}, \quad (3.2.13a)$$

donde $\bar{\rho}_c(t)$ es el operador de densidad sin normalizar

$$\bar{\rho}_c(t) = e^{(\mathcal{L}-S)(t-t_m)} J_{n_m} \dots J_{l_2} e^{(\mathcal{L}-S)(t_2-t_1)} J_{k_1} e^{(\mathcal{L}-S)t_1} \rho(0). \quad (3.2.13b)$$

Es importante no perder de vista la imagen física de lo que estamos realizando, y tener en cuenta que cada vez que actúa un operador J_n eso representa un fotón emitido, cuyo origen depende de cual de los operadores de J_n sea el que haya causado el colapso. De esta manera tenemos una infinidad de caminos cuánticos, *trayectorias cuánticas*, cuya definición está basada en separar los tiempos en los que los fotones se materializan como fotoelectrones en un detector, de una evolución cuántica en la cual los fotones, aunque presentes, no se materializan. La descomposición es reminiscente a la Integral de Trayectoria de Feynman [31]; pero basada en una ecuación maestra en lugar de la Ecuación de Schrödinger, por lo que no es precisamente lo mismo. Nos referiremos a las trayectorias cuánticas ρ , como un desenmarañamiento de la dinámica de la fuente, dado que es una descomposición de los muchos caminos que la ecuación maestra (3.2.1) evoluciona en el tiempo como un único paquete.

3.3. Función de onda estocástica

Si bien las ecuaciones (3.2.13) nos definen una trayectoria definida para una serie de emisiones a distintos tiempos, hace falta un elemento clave dentro de nuestro desarrollo: la aleatoriedad con la que suceden las emisiones de fotones en nuestro sistema. Por lo que debemos de incorporar esta aleatoriedad dentro de nuestra teoría en una manera que resulte estadísticamente correcta. Es posible describir las secuencias de fotoelectrones por estadística clásica [32], por lo que pueden ser descritas dentro del lenguaje de procesos estocásticos clásicos. De modo que la aleatoriedad asociada con los tiempos de emisión que van en la integral (3.2.12) están definidos por una aleatoriedad clásica. Por lo que podemos identificar los propagadores $e^{(\mathcal{L}-S)\delta t}$ como la parte particularmente cuántica dentro de la evolución de nuestro operador de densidad, además de la acción de los operadores J_n , lo cual sólo afecta indirectamente la determinación de los tiempos de emisión. Si se quiere ver de una manera más concreta, si a un tiempo t nuestro operador de densidad es $\rho(t)$, entonces la probabilidad para que una emisión ocurra en el intervalo $[t, t + \delta t]$ está dada por

$$p_c(t) = \text{tr}[S\rho_c(t)]\delta t. \quad (3.3.1)$$

Después de esto el paso natural es adaptar este formalismo, que se maneja usando una matriz de densidad, a uno que se adecúe al uso de una función de onda. Para esto podemos notar que en la gran mayoría de los casos, la manera en que están dados los superoperadores $(\mathcal{L} - S)$ y S nos permite factorizar el operador de densidad condicionado como un estado puro:

$$\rho_c(t) = |\phi_c(t)\rangle \langle \phi_c(t)|; \quad (3.3.2)$$

igualmente escribimos

$$\bar{\rho}_c(t) = |\bar{\phi}_c(t)\rangle \langle \bar{\phi}_c(t)|; \quad (3.3.3)$$

esto quedará claro al momento de ver ejemplos más adelante. Pero una vez que hemos decidido trabajar sobre una función de onda en lugar de un operador de densidad, debemos de reemplazar el propagador $e^{(\mathcal{L}-S)\delta t}$ por uno que funcione para nuestro estado $|\phi(t)\rangle$. Dicha propagación sin emisión de fotones estará dada por

$$|\phi(t + \delta t)\rangle = e^{-(i/\hbar)H\delta t} |\phi(t)\rangle \quad (3.3.4)$$

donde H es un Hamiltoniano *no - hermitiano* el cual está dado de la forma

$$H = H_S - \frac{i\hbar}{2} \sum_m C_m^\dagger C_m . \quad (3.3.5)$$

Teniendo todos estos elementos podemos resumir nuestro proceso para el cambio de la función de onda $|\phi(t)\rangle \rightarrow |\phi(t + \delta t)\rangle$ en dos pasos:

- (a) Calculamos $|\phi^1(t + \delta t)\rangle$ obtenido de la evolución de $|\phi(t)\rangle$ con el Hamiltoniano dado previamente en (3.3.5). Para δt pequeño, obtenemos

$$|\phi^1(t + \delta t)\rangle = \left(1 - \frac{iH\delta t}{\hbar}\right) |\phi(t)\rangle . \quad (3.3.6)$$

Dado que H no es hermitiano $|\phi^1(t + \delta t)\rangle$ no está normalizado. Por lo tanto,

$$\langle \phi^1(t + \delta t) | \phi^1(t + \delta t) \rangle = \langle \phi(t) | \left(1 + \frac{iH^\dagger\delta t}{\hbar}\right) \left(1 - \frac{iH\delta t}{\hbar}\right) | \phi(t) \rangle \quad (3.3.7)$$

$$\equiv 1 - \delta p$$

$$\delta p = \delta t \frac{i}{\hbar} \langle \phi(t) | H - H^\dagger | \phi(t) \rangle \equiv \sum_m \delta p_m , \quad (3.3.8)$$

$$\delta p_m \equiv \delta t \langle \phi(t) | C_m^\dagger C_m | \phi(t) \rangle \geq 0 .$$

Siempre podemos ajustar δt de tal modo que $\delta p \ll 1$.

- (b) El segundo paso corresponde a un experimento de pensamiento (**gedanken experiment**) de un proceso de medición. Consideramos la posibilidad de un salto cuántico. Para decidir si un salto cuántico ha sucedido, definimos un numero aleatorio ϵ uniformemente distribuido entre cero y uno y lo comparamos con δp . Surgen dos escenarios:

- (I) $\epsilon \geq \delta p$ Esta será la gran mayoría de los casos, dado que $\delta p \ll 1$. En este caso, no hay salto cuántico y $|\phi(t + \delta t)\rangle = \frac{|\phi^1(t + \delta t)\rangle}{\sqrt{1 - \delta p}}$

- (II) $\epsilon < \delta p$

Un salto cuántico ocurre a uno de los estados $C_m |\phi(t)\rangle$ de acuerdo a la probabilidad relativa entre los posibles tipos de salto, $\Pi_m = \frac{\delta p_m}{\delta p}$ (notar que $\sum_m \Pi_m = 1$).

De modo que

$$|\phi(t + \delta t)\rangle = \frac{C_m | \phi(t) \rangle}{\sqrt{\frac{\delta p_m}{\delta t}}} . \quad (3.3.9)$$

3.4. Equivalencia entre Método de Trayectorias Cuánticas y la Ecuación Maestra

Algo más que podemos hacer para terminar de entender la relación entre la Ecuación Maestra y el Método de Trayectorias Cuánticas, es precisamente probar su equivalencia. Podemos comenzar a hacer esto definiendo $\bar{\sigma}(t) = Av[\sigma(t) = |\phi(t)\rangle\langle\phi(t)|]$, donde Av significa el promedio de muchas trayectorias cuánticas a tiempo t , todas ellas empezando de $|\phi(0)\rangle$.

Mostraremos que $\bar{\sigma}(t)$ coincide con ρ .

Calcularemos $\bar{\sigma}(t + \delta t)$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(t + \delta t) = (1 - \delta p) \frac{|\phi^1(t + \delta t)\rangle\langle\phi^1(t + \delta t)|}{\sqrt{1 - \delta p}\sqrt{1 - \delta p}} \\ + \delta p \sum_m \Pi_m \frac{C_m |\phi(t)\rangle\langle\phi(t)| C_m^\dagger}{\sqrt{\frac{\delta p_m}{\delta t}} \sqrt{\frac{\delta p_m}{\delta t}}}. \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

Lo cual podemos expresar como

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(t + \delta t) = (1 - \frac{i\delta t}{\hbar}(H_S - \frac{i\hbar}{2} \sum_m C_m^\dagger C_m)) |\phi(t)\rangle\langle\phi(t)| \\ \left[1 + \frac{i\delta t}{\hbar}(H_S + \frac{i\hbar}{2} \sum_m C_m^\dagger C_m) \right] \\ + \delta t \sum_m C_m |\phi(t)\rangle\langle\phi(t)| C_m^\dagger, \end{aligned}$$

para finalmente llegar a

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(t + \delta t) = \sigma(t) + \frac{i\delta t}{\hbar} \left\{ \sigma(H_S + \frac{i\hbar}{2} \sum_m C_m^\dagger C_m) - (H_S - \frac{i\hbar}{2} \sum_m C_m^\dagger C_m) \sigma \right\} \\ + \delta t \sum_m C_m \sigma C_m^\dagger \\ = \sigma - \frac{i\delta t}{\hbar} [H_S, \sigma] + \delta t \sum_m \frac{1}{2} [2C_m \sigma C_m^\dagger - C_m^\dagger C_m \sigma - \sigma C_m^\dagger C_m]. \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

De manera que promediando sobre un numero muy grande de trayectorias recobramos la ecuación maestra (2.2.20).

Similarmente que con los métodos utilizados con la ecuación maestra, uno está interesado en calcular valores promedios de distintos observables. Usando este método, para cada trayectoria, obtenemos $\langle\phi^i(t)|A|\phi(t)\rangle$ para muchas soluciones $|\phi^i(t)\rangle$, de manera que $\langle A \rangle_n = \frac{1}{n} \sum_n \langle\phi^i(t)|A|\phi^i(t)\rangle$ y $\langle A \rangle_n \rightarrow \langle A \rangle$ cuando $n \rightarrow \infty$.

La equivalencia entre la ecuación maestra y el método de trayectorias cuánticas es válida siempre y cuando $\eta_i \delta t \ll 1$, donde $\eta_i \hbar$ es un eigenvalor de energía de nuestro sistema.

3.5. Errores estadísticos y convergencia

Es importante tener una idea de la efectividad de nuestro método y del grado de error existente en nuestros cálculos. Usando el método mencionado previamente podemos realizar N trayectorias. Asumiendo que los números aleatorios usados en la implementación numérica son estadísticamente aleatorios y no están correlacionados, uno puede considerar estas trayectorias como estadísticamente independientes, por lo que podemos estimar el valor esperado correcto $\langle X \rangle$ de cualquier operador de interés \hat{X} como

$$\bar{X}(t) = \frac{1}{N} \sum_i X_i \equiv \frac{1}{N} \sum_i \langle \phi_i(t) | \hat{X} | \phi_i(t) \rangle. \quad (3.5.1)$$

El teorema del límite central nos dice que para un número suficientemente grande N , la distribución de probabilidad para \bar{X} será aproximada por una distribución Gaussiana con promedio $\langle X \rangle$. El error estadístico en este promedio es la desviación estándar de la distribución, la cual puede ser estimada en la varianza de los valores X_i de la siguiente manera. Consideramos

$$\begin{aligned} \text{Var}[\bar{X}] &= \langle (\bar{X} - \langle X \rangle)^2 \rangle = \left\langle \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \right)^2 - 2\bar{X} \langle X \rangle + \langle X \rangle^2 \right\rangle \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \langle X_i X_j \rangle - \langle X \rangle^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \langle X_i^2 \rangle + \frac{N-1}{N} \langle X \rangle^2 - \langle X \rangle^2 \\ &= \frac{1}{N} (\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2) = \frac{1}{N} \text{Var}[X]. \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

En la derivación de este resultado estándar, hemos usado la independencia de las trayectorias $\langle X_i X_{j \neq i} \rangle = \langle X_i \rangle \langle X_{j \neq i} \rangle$, y que $\langle \bar{X} \rangle = \langle X \rangle$, i.e., la varianza escrita en la última línea es la verdadera varianza de la distribución para X . Como resultado, se puede mostrar [33], que debemos de usar la aproximación

$$\text{Var}[X] \equiv \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2}{N-1}, \quad (3.5.3)$$

si queremos calcular la varianza basados en las trayectorias obtenidas.

De esta manera, siempre podemos calcular el error estadístico σ_A en nuestra cantidad estimada $\langle A \rangle$ tomando el estimado de la población de desviación estándar δA de nuestras N trayectorias, y dividiendo por \sqrt{N} ,

$$\sigma_A = \frac{\delta A}{\sqrt{N}}. \quad (3.5.4)$$

El número de trayectorias necesarias para una buena convergencia dependerá tanto de los detalles de la dinámica y la cantidad que esté siendo calculada. Para variables con promedio diferente de cero, típicamente nos gustará tener $\frac{\sigma_A}{\langle A \rangle} \ll 1$, lo cual implica que $\sqrt{N} \gg \delta A / \langle A \rangle$.

3.6. Ejemplos ilustrativos

Para terminar de comprender el significado físico de la teoría de Trayectorias Cuánticas y las maneras en que puede ser implementada, puede ser útil analizar diversos ejemplos, comparándolos con su solución exacta y así darnos una idea de la manera en que funciona este método. Todas las simulaciones que se muestran en esta sección fueron desarrolladas en el lenguaje de programación Julia, donde se hizo uso del paquete QuantumOptics.jl [20].

3.6.1. Emisión espontánea de átomo de dos niveles

Quizá el ejemplo más simple que podemos presentar, y que mencionamos brevemente en la sección anterior, es la emisión espontánea de un átomo de dos niveles. En este caso la imagen proporcionada por la teoría de trayectorias cuánticas es algo que ya ha sido obtenido previamente, y que puede remontarse hasta el artículo de Einstein donde presenta los llamados coeficientes de Einstein que dan las tasas de emisión o absorción de luz por un átomo [34]. Esto es útil ya que nos permite una manera de comparar nuestros resultados obtenidos usando trayectorias cuánticas.

Para empezar a modelar este sistema primeramente consideramos un átomo de dos niveles donde el nivel más bajo lo representaremos con el ket $|1\rangle$ y el nivel superior con el estado $|2\rangle$, tal y como es descrito por medio de la ecuación maestra (2.4.5) (con $\bar{n} = 0$). Al momento de querer aplicar nuestro formalismo de trayectorias cuánticas, necesitamos identificar nuestros operadores de colapso, así como la parte hermitiana de nuestro Hamiltoniano. Relacionando la ecuación maestra obtenida para el átomo de dos niveles en equilibrio térmico (2.4.5) (en este caso para $\bar{n} = 0$) con la ecuación de Lindblad es fácil ver que en este caso el operador de colapso será

$$\hat{C} = \sqrt{\gamma}\sigma_- . \quad (3.6.1)$$

Mientras que la parte hermitiana de nuestro Hamiltoniano que nos da evolución dinámica relacionada únicamente al átomo de dos niveles estará dada por (2.4.1a). Por lo que nuestro hamiltoniano total que nos describe la evolución dinámica de nuestro sistema, basándonos en (3.3.5) será

$$H = \frac{1}{2}\hbar\omega_A\sigma_z - i\hbar\frac{\gamma}{2}\sigma_+\sigma_- \quad (3.6.2a)$$

Donde nuestro hamiltoniano no-hermitiano actuará sobre la ecuación no-unitaria de Schrödinger

$$\frac{d}{dt} |\bar{\psi}_c(t)\rangle = \frac{1}{i\hbar} H |\bar{\psi}_c(t)\rangle \quad (3.6.2b)$$

que nos dará la evolución para nuestro estado condicional no-normalizado $|\bar{\psi}_c(t)\rangle$. Dicha evolución será interrumpida por colapsos dados por (3.6.1)

$$|\bar{\psi}_c(t)\rangle \rightarrow \hat{C} |\bar{\psi}_c(t)\rangle . \quad (3.6.3)$$

La probabilidad de que un colapso ocurra en el intervalo $(t, t + \Delta t]$ estará dada por

$$p_c(t) = \frac{(\gamma \Delta t) \langle \bar{\psi}_c(t) | \sigma_+ \sigma_- | \bar{\psi}_c(t) \rangle}{\langle \bar{\psi}_c(t) | \bar{\psi}_c(t) \rangle} \quad (3.6.4)$$

El fenómeno de emisión espontánea es lo suficientemente simple como para resolver (3.6.2b) con el Hamiltoniano dado por (3.6.2a). Usando la condición inicial

$$|\bar{\psi}_c(t)\rangle \equiv |\psi_c(0)\rangle = c_1(0) |1\rangle + c_2(0) |2\rangle, \quad (3.6.5)$$

encontramos que las amplitudes de probabilidad sin normalizar \bar{c}_1 y $\bar{c}_2(t)$ obedecen las ecuaciones

$$\dot{\bar{c}}_1 = \frac{1}{2}i\omega\bar{c}_1, \quad (3.6.6a)$$

$$\dot{\bar{c}}_2 = -(\gamma/2 + \frac{1}{2}i\omega)\bar{c}_2. \quad (3.6.6b)$$

Las soluciones son

$$\bar{c}_1(t) = c_1(t) = c_1(0)e^{\frac{1}{2}i\omega t}. \quad (3.6.7a)$$

$$\bar{c}_2(t) = c_2(0)e^{-(\gamma/2)t}e^{-\frac{1}{2}i\omega t}. \quad (3.6.7b)$$

Las amplitudes normalizadas son entonces

$$c_1(t) = \frac{c_1(0)}{\sqrt{|c_1(0)|^2 + |c_2(0)|^2}e^{\gamma t}}e^{\frac{1}{2}i\omega t}, \quad (3.6.8a)$$

$$c_2(t) = \frac{c_2(0)e^{-(\gamma/2)t}}{\sqrt{|c_1(0)|^2 + |c_2(0)|^2}e^{-\gamma t}}e^{-\frac{1}{2}i\omega t}. \quad (3.6.8b)$$

Las ecuaciones (3.6.8) nos proveen la solución para la función de onda condicionada durante la evolución coherente que ocurre entre los colapsos:

$$\begin{aligned} |\psi_c(t)\rangle &= c_1(t) |1\rangle + c_2(t) |2\rangle \\ &= \frac{c_1(0)e^{\frac{1}{2}i\omega t} |1\rangle + c_2(0)e^{-(\gamma/2)t}e^{\frac{1}{2}i\omega t} |2\rangle}{\sqrt{|c_1(0)|^2 + |c_2(0)|^2}e^{-\gamma t}}. \end{aligned} \quad (3.6.9)$$

La probabilidad de colapso durante $(t, t + \Delta T]$ está dada por

$$p_c = (\gamma \Delta t) \frac{|c_2(0)|^2 e^{-\gamma t}}{c_1(0)^2 + |c_2(0)|^2 e^{-\gamma t}}; \quad (3.6.10)$$

para un átomo inicialmente excitado ($c_1(0) = 0$) esta probabilidad es independiente del tiempo. Claramente sólo existe un colapso en cada trayectoria dado que (3.6.1), (3.6.3) y (3.6.7) dan (después de normalizar los estados antes y después del colapso)

$$|\psi_c(t)\rangle = c_1(t) |1\rangle + c_2(t) |2\rangle \rightarrow |1\rangle. \quad (3.6.11)$$

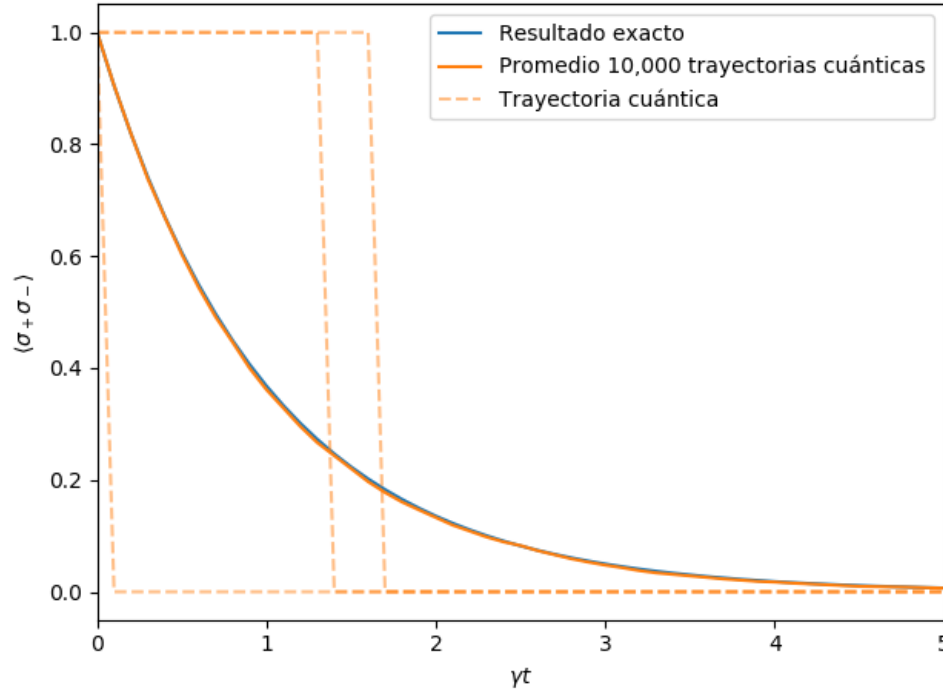


Figura 3.1: Probabilidad de que átomo de dos niveles se encuentre en el estado excitado, con estado inicial $|\psi(0)\rangle = |2\rangle$. Promediando 10,000 de estas trayectorias se obtiene un decaimiento exponencial.

Una vez que el átomo alcanza el estado $|1\rangle$ la ecuación no-unitaria de Schrödinger [soluciones (3.6.8)] simplemente lo mantienen ahí para siempre; por lo que sólo puede haber una y sólo una emisión de un átomo sin una fuente que lo excite.

De la solución (3.6.9) podemos darnos una idea de a que nos referimos con *función de onda condicionada*. La ecuación (3.6.8) nos da el estado del átomo condicionado al hecho de que aún no ha emitido un fotón; es el estado del átomo antes de que ocurra el colapso. Encontramos entonces que si $c_1(0) \neq 0$ este estado se aproxima a $|1\rangle$ para tiempos mucho mayores que el tiempo de vida γ^{-1} . Lo que esto nos dice es que si esperamos un gran número de tiempos de vida sin ver una fotoemisión, es muy probable que el átomo comenzó en el estado de baja energía $|1\rangle$, desde el cual no puede emitir. Por lo que con el puro acto de esperar un fotón que nunca observamos, hemos obtenido información de que el átomo se encuentra en su estado de baja energía: el acto de no observar un fotón también nos proporciona información; de modo que el átomo llega al estado de baja energía, ya sea mediante un colapso y fotoemisión [Eq.(3.6.11)], o por el hecho de que eventualmente nos convencemos de que estuvo en el estado de baja energía todo el tiempo.

Un átomo que inicia en el estado excitado debe colapsar al estado base. Una posible

trayectoria para la función de onda condicionada está definida por una función $c_2(t)$, que comienza con $c_2(0) = 1$, y permanece constante hasta que a cierto tiempo aleatorio, cambia al valor $c_2(t) = 0$ permaneciendo ahí para siempre; similarmente, la función $c_1(t)$ comienza con $c_1(0) = 0$ y cambia al valor $c_1(t) = 1$, permaneciendo ahí por siempre. Este es el salto cuántico que esperamos cuando el átomo emite su cuanto de energía. El tiempo de emisión para cada trayectoria cuántica es aleatorio; computacionalmente está determinado comparando un número aleatorio con la probabilidad de colapso (3.6.10) a cada paso de la simulación estocástica, tal como se describe en la sección 3.3. Para una mayor comprensión podemos simular este sistema usando trayectorias cuánticas, donde en la figura 3.1 vemos que efectivamente, si el átomo empieza en el estado excitado, eventualmente decae y permanece en el estado base para siempre, dado que no hay nada que lo excite. Simulando muchas de estas trayectorias y promediando obtenemos el decaimiento exponencial. Esto corresponde al decaimiento exponencial obtenido de la probabilidad de emisión $(\gamma\Delta t)\rho_{22}(t)$, donde $\rho_{22}(t) = e^{-\gamma t}$, resultado que obtuvimos previamente en la sección 2.4.1.

3.6.2. Cavity con pérdidas

De manera similar al caso de emisión espontánea para un átomo de dos niveles podemos simular una cavidad con pérdidas. Al analizar la ecuación maestra correspondiente expresada en su forma de Lindblad (2.3.3), es fácil ver que el operador de colapso está dado por

$$\hat{C} = \sqrt{2\kappa}a, \quad (3.6.12)$$

donde κ representa el coeficiente de pérdida. Mientras que la parte hermitiana de nuestro Hamiltoniano, que corresponde al modo de nuestra cavidad y que modelaremos como un oscilador armónico, está dada por (2.3.1a), de manera que nuestro Hamiltoniano es

$$H = \hbar\omega_C a^\dagger a - i\hbar\kappa a^\dagger a. \quad (3.6.13)$$

Para este sistema la probabilidad de colapso estará dada por

$$p_c(t) = (2\kappa\Delta t) \frac{\langle \bar{\psi}_c(t) | a^\dagger a | \bar{\psi}_c(t) \rangle}{\langle \bar{\psi}_c(t) | \bar{\psi}_c(t) \rangle}. \quad (3.6.14)$$

Si bien en este caso también es posible una solución analítica, no nos molestaremos con los detalles, y en lugar de eso nos enfocaremos en entender el mecanismo con el que funciona la teoría de trayectorias cuánticas en este problema. Primeramente tenemos que definir un estado inicial, el cual será un estado en la base fock $|N\rangle$ donde dicho estado evolucionará cada Δt bajo el hamiltoniano (3.6.13) y al terminar cada intervalo Δt se calculará la probabilidad de colapso y se comparará con un número aleatorio y de ser mayor la probabilidad de colapso entonces se actuará el operador de colapso (3.6.12), de manera que nuestro estado pasara del estado $|n\rangle$ al estado $|n-1\rangle$. Evidentemente de iniciar con un estado $|N\rangle$ éste experimentará N saltos cuánticos, a N tiempos aleatorios, hasta que el modo de la cavidad alcance el estado vacío, donde permanecerá por siempre, tal y como se observa en

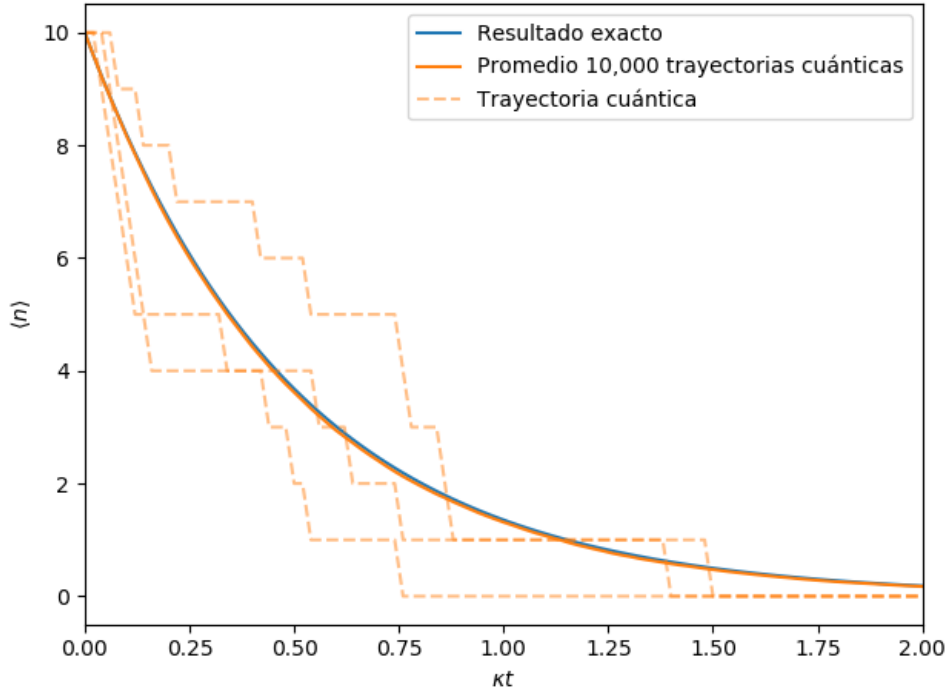


Figura 3.2: Número promedio de fotones para el modo de una cavidad con pérdidas preparado en el estado de Fock $|10\rangle$. En la gráfica podemos apreciar la efectividad del método de trayectorias cuánticas y la manera en que se aproxima al resultado exacto al realizar 10,000 trayectorias.

la figura 4.7.

En promedio, el tiempo entre colpasos incrementará conforme el nivel de excitación decrezca; esto se debe a que la probabilidad de colapso (3.6.14) depende del promedio condicionado del flujo de fotones $2\kappa \langle \psi_c(t) | a^\dagger a | \psi_c(t) \rangle$, el cual decrecerá conforme el sistema descienda en forma de escalera aleatoriamente.

3.6.3. Modelo de Jaynes-Cummings con emisión espontánea

De manera similar a como ocurrió en la sección 2.5 tras ver el caso de emisión espontánea de dos niveles, y el caso de la cavidad con pérdidas, lo ideal es ahora combinarlos y analizar lo que se conoce como modelo de Jaynes-Cummings - ahora visto desde la perspectiva de trayectorias cuánticas. Para esto empezaremos describiendo el Hamiltoniano de nuestro sistema, donde la parte hermitiana estará dada por el Hamiltoniano de Jaynes-Cummings (2.5.5) y consideraremos decaimientos en el átomo de dos niveles, los cuales ocurrirán mediante la aplicación del operador de colapso (3.6.1). De modo que nuestro Hamiltoniano total estará dado por

$$H = \frac{1}{2}\hbar\omega_A + \hbar\omega_C a^\dagger a + \hbar g(a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-) - i\hbar\frac{\gamma}{2}\sigma_+\sigma_- \quad (3.6.15)$$

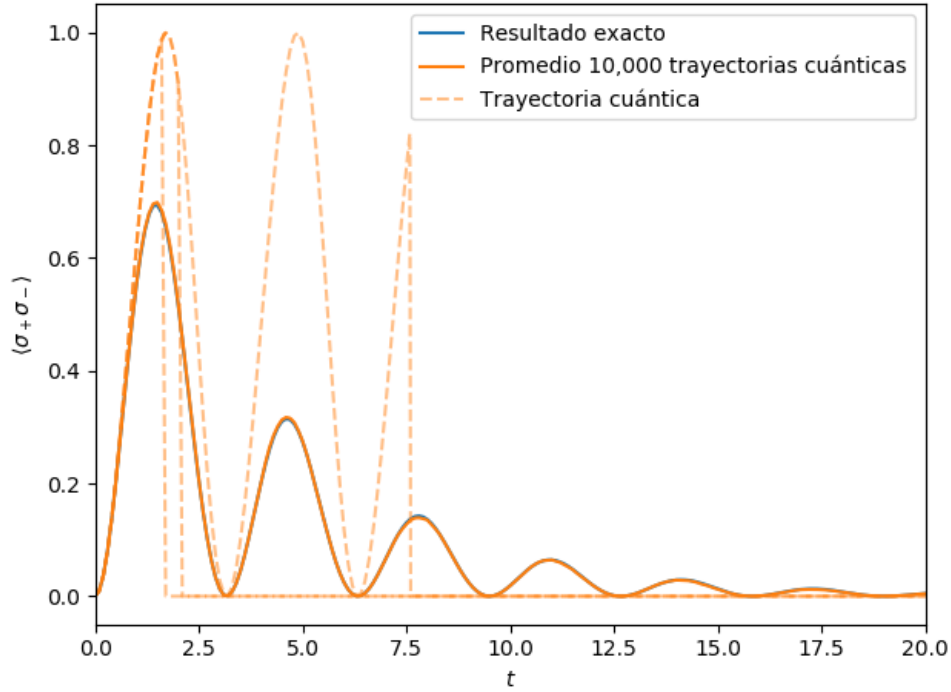


Figura 3.3: Probabilidad de que átomo de dos niveles (interactuando con el ambiente) acoplado al modo de una cavidad se encuentre en el estado excitado, con estado inicial $|\psi(0)\rangle = |1, b\rangle$ (b , se refiere en esta ocasión al estado base, y 1 al número de fotones en la cavidad), $g = \omega_A = \omega_C = 1$.

En la figura 3.3 vemos como, tras haber analizado casos un tanto triviales en espacios discretos, estamos ante un caso que cuenta con mayor complejidad, y nos damos cuenta de como la teoría de trayectorias cuánticas nos revela detalles que quizá no resultaban tan evidentes al momento de solucionar únicamente la ecuación maestra de nuestro sistema. En particular podemos observar oscilaciones de Rabi, las cuales si bien anteriormente se producían ininterrumpidamente al manejar el modelo de Jaynes-Cumming sin pérdidas, ahora se detienen de manera abrupta al ocurrir una emisión espontánea. Debido a que la probabilidad de colapso está dada por (3.6.4), esto normalmente ocurrirá cuando haya una probabilidad significativa de que el átomo esté en el átomo excitado. Al emitirse el fotón al ambiente, se interrumpirá el proceso de oscilación de Rabi, ya que el fotón no podrá ser tras-pasado al modo de la cavidad, lo cual a su vez, impedirá que el átomo vuelva a ser excitado.

Uno muy fácilmente puede hacer una implementación a nuestro algoritmo de trayectorias cuánticas, de tal manera que se mantenga un registro de los decaimientos ocurridos en nuestro sistema. Pero debido a que no haya nada que estimule continuamente el átomo, sólo podríamos registrar un decaimiento.

3.6.4. Fluorescencia resonante

Tras haber analizado casos tanto de la cavidad como del átomo de niveles, considerando pérdidas, el paso natural - y que nos acercará al modelo central de nuestro trabajo - es considerar la adición de un campo estimulante. En particular veremos la adición de un campo estimulante para un átomo de dos niveles con emisión espontánea, algo que ya habíamos visto en 2.4.2, sólo que ahora lo analizaremos desde la perspectiva de trayectorias cuánticas y veremos como esto puede aumentar nuestra comprensión del problema.

Para empezar a analizar la fluorescencia resonante desde la perspectiva de teoría de trayectorias cuánticas, debemos de comenzar escribiendo el Hamiltoniano no-hermitiano que describa nuestro fenómeno. Éste resulta fácil de obtener a partir de la ecuación maestra (2.4.14), donde rápidamente podemos identificar que nuestro operador de colapso, al igual que en el caso de emisión espontánea, estará dado por (3.6.1). Igualmente la parte hermitiana de nuestro Hamiltoniano resulta fácil de identificar por lo que nuestro Hamiltoniano completo será

$$H = \frac{1}{2}\hbar\omega_A\sigma_z + (\Omega/2)[e^{-i\omega_A t}\sigma_+ + e^{i\omega_A t}\sigma_-] - i\hbar\frac{\gamma}{2}\sigma_+\sigma_-. \quad (3.6.16)$$

Si bien hemos aumentado la complejidad al añadir el láser que irradia el átomo, el proceso estocástico sigue siendo un tanto sencillo, ya que la relación de colapso (3.6.11) se mantendrá. De modo que al final de cada colapso (fotoemisión) el átomo se encontrará en su estado de baja energía; por lo que la evolución entre colapsos se resolverá siempre bajo la misma condición inicial, con la particularidad de que, a diferencia del caso de emisión espontánea donde el átomo permanecía en el estado de baja energía, aquí el átomo volverá a evolucionar a un estado $|\psi_c(t)\rangle = c_1(t)|1\rangle + c_2(t)|2\rangle$ con $c_2(t) \neq 0$, donde t es ahora el tiempo desde el colapso previo. De esta forma el átomo continuamente genera una probabilidad distinta de cero de volver a colapsar y emitir otro fotón.

Nuevamente es posible resolver las ecuaciones diferenciales para las amplitudes de probabilidad. Obteniendo soluciones similares a (3.6.7a) y (3.6.7b):

$$\dot{\bar{c}}_1 = \frac{1}{2}i\omega_A\bar{c}_1 + i(\Omega/2)e^{i\omega_A t}\bar{c}_2, \quad (3.6.17a)$$

$$\dot{\bar{c}}_2 = -(\gamma/2 + \frac{1}{2}i\omega_A)\bar{c}_2 + i(\Omega/2)e^{-i\omega_A t}\bar{c}_1. \quad (3.6.17b)$$

Para un estado inicial $|\psi_c(0)\rangle = |1\rangle$ las soluciones a estas ecuaciones dan las amplitudes sin normalizar

$$\bar{c}_1(t) = e^{-(\gamma/4)t}e^{\frac{1}{2}i\omega_A t} \left[\cosh(\delta t) + \frac{(\gamma/2)}{2\delta} \sinh(\delta t) \right], \quad (3.6.18a)$$

$$\bar{c}_2(t) = ie^{-(\gamma/4)t}e^{-\frac{1}{2}i\omega_A t} \frac{\Omega}{2\delta} \sinh(\delta t), \quad (3.6.18b)$$

donde

$$2\delta = \sqrt{(\gamma/2)^2 - \Omega^2} \quad (3.6.19)$$

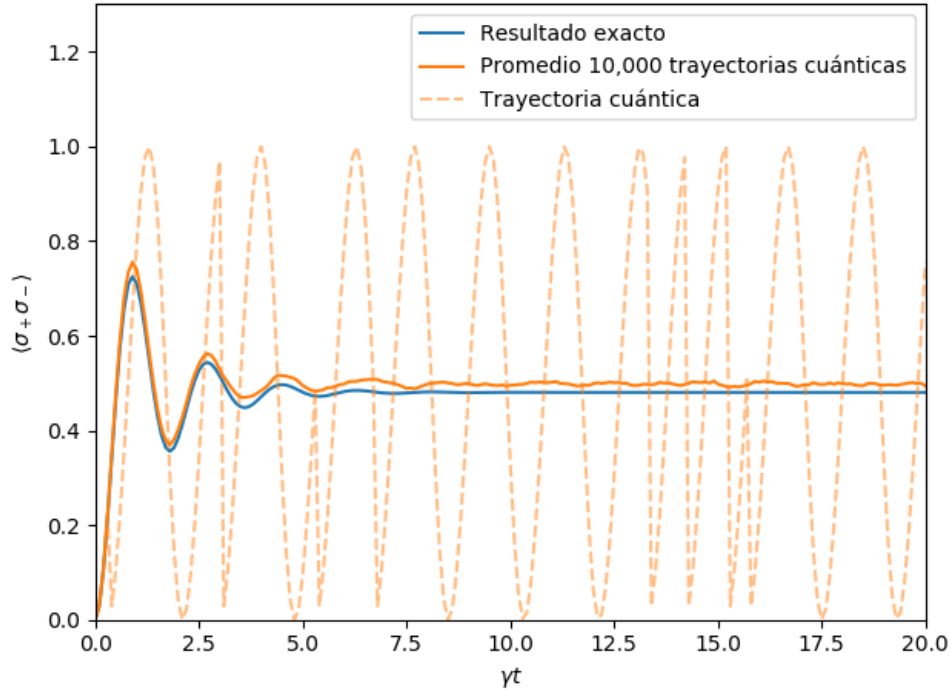


Figura 3.4: Trayectorias cuánticas mostrando la probabilidad condicionada de que un átomo experimentando resonancia fluorescente se encuentre en el estado superior, con excitación fuerte, $\Omega/\gamma = 3,5$.

La probabilidad de colapso en el intervalo de tiempo $(t, t + \Delta t]$ está dada entonces por

$$p_c(t) = (\gamma \Delta t) |c_2(t)|^2 = (\gamma \Delta t) \frac{|\bar{c}_2(t)|^2}{|\bar{c}_1(t)|^2 + |\bar{c}_2(t)|^2}. \quad (3.6.20)$$

En nuestras simulaciones de trayectorias cuánticas para el caso de fluorescencia resonante podemos observar dos casos: primeramente en la figura 3.4 al graficar la probabilidad del estado superior $|\bar{c}_2(t)|^2$, vemos como la gráfica que originalmente habíamos tenido solucionando de manera exacta la ecuación maestra, puede ser vista como el promedio de una serie de oscilaciones de Rabi interrumpidas por decaimientos espontáneos y - a diferencia de los casos vistos anteriormente donde el átomo permanecía en el estado base - aquí el átomo es excitado nuevamente y las oscilaciones de Rabi son reanudadas. Mientras que en la figura 3.5 vemos que la amplitud de nuestro campo estimulante no es lo suficientemente fuerte como para formar oscilaciones de Rabi. En ambos casos la teoría de trayectorias cuánticas nos ofrece otra perspectiva acerca de nuestro sistema.

Tras haber analizado una serie de sistemas cuánticos abiertos, tanto desde la perspectiva de la ecuación maestra como usando teoría de trayectorias cuánticas, ahora podemos decir que estamos listos para atacar el problema central de esta tesis donde tendremos tanto

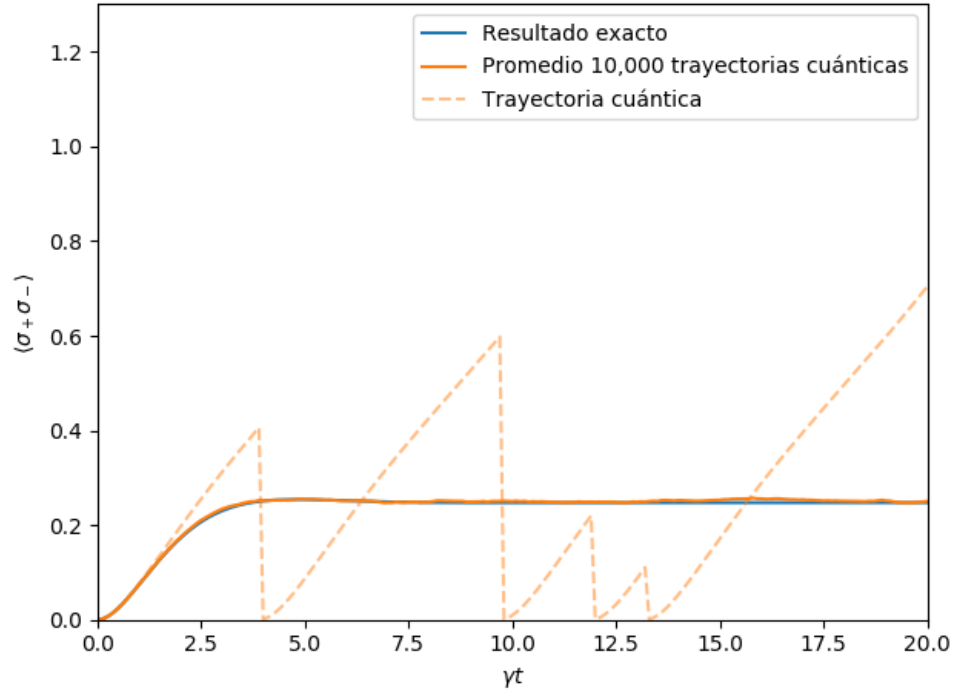


Figura 3.5: Trayectorias cuánticas mostrando la probabilidad condicionada de que un átomo experimentando resonancia fluorescente se encuentre en el estado superior, con excitación débil, $\Omega/\gamma = 0,7$.

pérdidas como un campo estimulante, en nuestro modelo de átomo de dos niveles dentro de la cavidad. Combinar estos elementos aumentará significativamente la complejidad de nuestro sistema por lo que, si bien los casos vistos en esta sección resultarán de gran ayuda, será necesario un análisis más profundo.

Capítulo 4

Estimación de número de emisiones espontáneas de un átomo midiendo emisión estimulada en modos de una cavidad óptica

Habiendo introducido los conceptos necesarios de sistemas cuánticos abiertos y de la teoría de trayectorias cuánticas, podemos por fin emplear nuestros conocimientos para resolver el problema principal que nos hemos trazado en esta tesis. Para abordar dicho problema será necesario introducirnos en el área de la electrodinámica cuántica de cavidades (en inglés *cavity Q.E.D.*). En nuestro caso en particular consideraremos una cavidad óptica la cual contiene un átomo de dos niveles, y contamos con un campo estimulante que actuará de dos maneras: en una acoplado a un modo de la cavidad y en otra acoplado al átomo de dos niveles. Teniendo este sistema nosotros queremos lograr estimar el número de emisiones espontáneas del átomo de dos niveles en el espacio libre en base en el número de emisiones estimuladas medidas en modos de una cavidad óptica. Para comenzar esta labor es necesario explicar primeramente el sistema que manejaremos.

4.1. Modelo impulsado de Jaynes-Cumming

Tras haber introducido el modelo de Jaynes-Cumming en la sección 2.5, tanto en su versión convencional como en el caso en que se incluyen pérdidas, simplemente será necesario hacer la adición de un láser. Este sistema puede ser visto como una extensión al modelo presentado en la sección 2.5.2, al cual le añadiremos el campo estimulante clásico

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_0 \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 e^{-(x^2+y^2)/w_L^2} e^{-i[\omega_L(t-z/c)-\phi_0]} + \text{c.c.}, \quad (4.1.1)$$

el cual está en resonancia con el modo de la cavidad y viaja en la dirección positiva z —i.e., incidente en el espejo de la izquierda en la figura 4.1. De manera que la ecuación maestra correspondiente simplemente será una generalización de la ecuación (2.5.26) en la

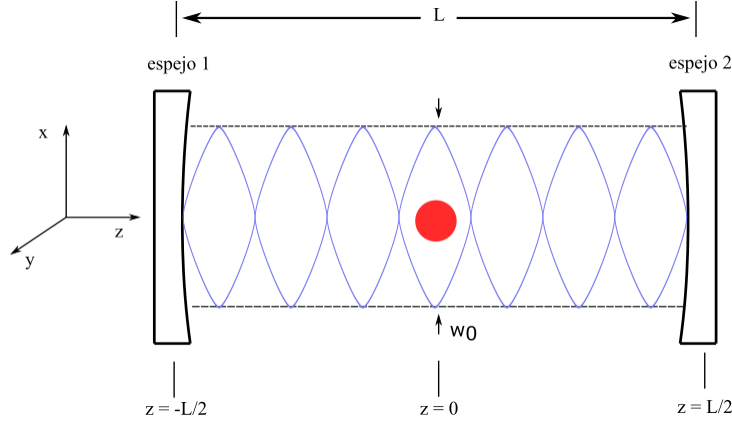


Figura 4.1: Diagrama esquemático de átomo en cavidad

cual haremos la adición del campo estimulante. En el caso resonante ($\omega_L = \omega_A = \omega_C$), entonces, la ecuación maestra conocida como *ecuación maestra para un átomo en cavidad con un impulso coherente al modo de la cavidad* está dada por:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = & -i\frac{1}{2}\omega_C[\sigma_z, \rho] - i\omega_C[a^\dagger a, \rho] \\ & + g[a^\dagger\sigma_- - a\sigma_+, \rho] + \bar{\mathcal{E}}_0[a^\dagger e^{-i\omega_C t} - a e^{i\omega_C t}, \rho] \\ & + \frac{\gamma}{2}(2\sigma_- \rho \sigma_+ - \sigma_+ \sigma_- \rho - \rho \sigma_+ \sigma_-) \\ & + \kappa(2a\rho a^\dagger - a^\dagger a \rho - \rho a^\dagger a) \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

donde hemos introducido la amplitud de campo impulsador escalado

$$\bar{\mathcal{E}}_0 \equiv e^{i(\phi_T + \phi_0 - \phi_C - \phi'_C)} \sqrt{\frac{2\epsilon_0 V_Q}{\hbar\omega_C}} (c/2L) \sqrt{T_1} \mathcal{E}_0. \quad (4.1.3)$$

Ahora, si bien es posible resolver numéricamente la ecuación (4.1.2), este puede ser un proceso bastante tardado. Si consideramos n_{max} como el número más grande de fotones mantenido en una base truncado de estados de Fock, existen $(2n_{max} + 1)(n_{max} + 2)$ elementos de matriz en la representación de ρ . Doscientos estados de fotón nos dan un sistema de 10^5 ecuaciones acopladas. Por otro lado el tratar este sistema con el método de trayectorias cuánticas requiere únicamente 400 ecuaciones para los mismos 200 estados de Fock debido a que podemos hacer una formulación basada en la función de onda en lugar de la matriz de densidad. Desde luego existe la desventaja de que se necesita un número grande de simulaciones para calcular promedios temporales. Sin embargo, el método de trayectorias cuánticas claramente tiene un potencial computacional que merece ser explorado.

Para comenzar a analizar este sistema desde el punto de vista de trayectorias cuánticas, es necesariamente primeramente identificar nuestro Hamiltoniano no-hermitiano así como los operadores de colapsos correspondientes. Tomando como referencia (2.2.20) podemos identificar los operadores de colapso correspondientes a (4.1.2) los cuales son

4. Estimación de número de emisiones espontáneas de un átomo midiendo emisión estimulada en modos de una cavidad óptica

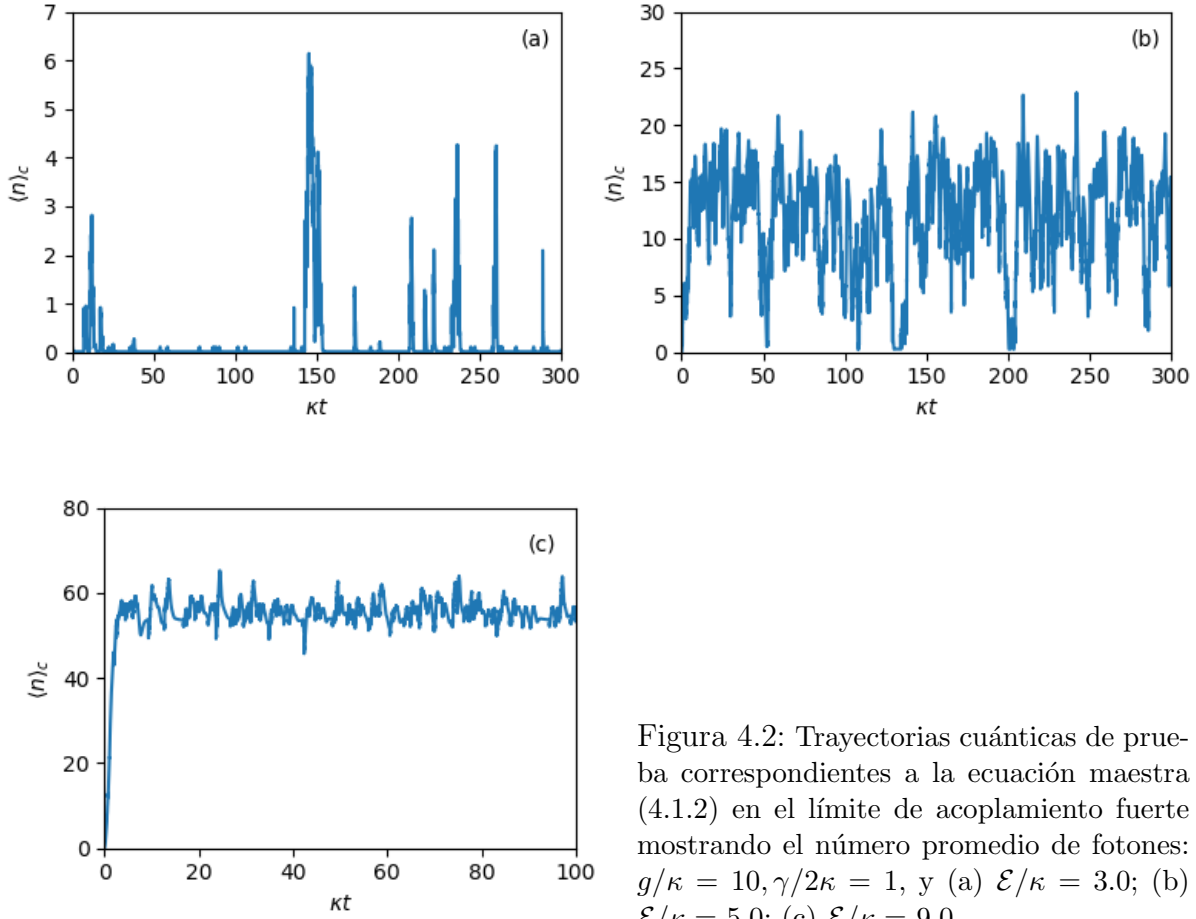


Figura 4.2: Trayectorias cuánticas de prueba correspondientes a la ecuación maestra (4.1.2) en el límite de acoplamiento fuerte mostrando el número promedio de fotones: $g/\kappa = 10, \gamma/2\kappa = 1$, y (a) $\mathcal{E}/\kappa = 3.0$; (b) $\mathcal{E}/\kappa = 5.0$; (c) $\mathcal{E}/\kappa = 9.0$.

$$\hat{C}_1 = \sqrt{2\kappa}a, \quad (4.1.4a)$$

$$\hat{C}_2 = \sqrt{\gamma}\sigma_-. \quad (4.1.4b)$$

De igual manera resulta sencillo identificar la parte hermitiana de nuestro Hamiltoniano, de modo que al final nuestro Hamiltoniano no-hermitiano es

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{2}\hbar\omega_C\sigma_z + \hbar\omega_C a^\dagger a + i\hbar g(a\sigma_+ - a^\dagger\sigma_-) + i\hbar\mathcal{E}(ae^{i\omega_C t} - a^\dagger e^{-i\omega_C t}) \\ & - i\hbar\frac{\gamma}{2}\sigma_+\sigma_- - i\hbar\kappa a^\dagger a, \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

donde para facilitar la notación, no haremos distinción entre \mathcal{E} y $\bar{\mathcal{E}}_0$.

Teniendo este sistema, para cada paso de tiempo Δt calcularemos dos probabilidades de colapso

$$p_1(t) = (\gamma\Delta t) \frac{\langle \bar{\psi}_c(t) | \sigma_+\sigma_- | \bar{\psi}_c(t) \rangle}{\langle \bar{\psi}_c(t) | \bar{\psi}_c(t) \rangle}, \quad (4.1.6a)$$

$$p_2(t) = (2\kappa\Delta t) \frac{\langle \bar{\psi}_c(t) | a^\dagger a | \bar{\psi}_c(t) \rangle}{\langle \bar{\psi}_c(t) | \bar{\psi}_c(t) \rangle}, \quad (4.1.6b)$$

donde las operaciones de colapso correspondientes son

$$|\bar{\psi}_c(t)\rangle \rightarrow \sqrt{2\kappa a} |\bar{\psi}_c(t)\rangle, \quad (4.1.7a)$$

$$|\bar{\psi}_c(t)\rangle \rightarrow \sqrt{\gamma}\sigma_- |\bar{\psi}_c(t)\rangle. \quad (4.1.7b)$$

En la Fig. 4.2 mostramos la evolución del valor promedio condicionado de número de fotones. Es importante notar el cambio cualitativo en la naturaleza de las fluctuaciones analizando desde Fig. 4.2 (a) hasta Fig. 4.2 (c). En Fig. 4.2 (a) ocurren transiciones cuánticas individuales asociadas con la emisión de un fotón. Es en este régimen donde nuestro sistema se comporta de manera no-clásica y podemos notar una separación temporal entre las emisiones de fotones las cuales están relacionadas a los decaimientos, saltos cuánticos, que experimenta el átomo. Esto está relacionado con lo que se conoce como 'antibunching' de fotones [35]. En la figura 4.2 (b) se muestra una trayectoria cuántica en la región de umbral, por lo que notamos que las fluctuaciones ahora son mayores y parecen asemejarse más a un caso clásico; aunque ocasionalmente aún ocurren retornos a estados cercanos al vacío donde emisiones individuales son discernibles. Mientras que para el caso en la figura 4.2 (c) nuestro valor promedio de número de fotones se ha establecido y muestra algo similar a las fluctuaciones que esperaríamos para un estado coherente.

4.2. Análisis del sistema mediante ecuaciones de Maxwell-Bloch

Una manera de obtener una mayor comprensión de nuestro sistema, es mediante el cálculo de las ecuaciones de Maxwell-Bloch. Estas ecuaciones nos darán la dinámica de nuestro sistema a través de las tasas de cambio temporal de los valores esperados de ciertas variables. Uno puede obtener dichas ecuaciones a partir de la ecuación maestra usando las formulas $\langle O \rangle = \text{tr}(O\rho)$ y $\langle \dot{O} \rangle = \text{tr}(O\dot{\rho})$. Las ecuaciones de movimiento para nuestro interés son las relacionadas a las variables $\langle a \rangle$, $\langle \sigma_- \rangle$ y $\langle \sigma_z \rangle$, que corresponden al campo de la cavidad, la coherencia atómica, y la inversión atómica respectivamente.

Las ecuaciones de Maxwell-Bloch correspondientes a la ecuación (4.1.2) tienen la forma

$$\dot{z} = (g/2)v + \mathcal{E} - \kappa z, \quad (4.2.1a)$$

$$\dot{v} = gmz - (\gamma/2)v, \quad (4.2.1b)$$

$$\dot{m} = -2g(z^*v + v^*z) - \gamma(m + 2), \quad (4.2.1c)$$

donde con el fin de simplificar hemos definido $z = e^{i\omega_C t} \langle a \rangle$, $v = 2e^{i\omega_C t} \langle \sigma_- \rangle$, y $m = 2 \langle \sigma_z \rangle$. Teniendo estas ecuaciones uno puede proceder a obtener lo que se conoce como *soluciones*

de estado estable (steady state solutions) que es lo que uno que obtiene igualando las derivadas a cero y despejando. De (4.2.1a) uno puede obtener la ecuación

$$\langle a \rangle_{ss} = \frac{\mathcal{E}e^{-i\omega_C t} + g \langle \sigma_- \rangle_{ss}}{\kappa}. \quad (4.2.2)$$

Mientras que de (4.2.1b) y (4.2.1c) uno obtiene

$$\langle \sigma_- \rangle_{ss} = -\frac{2g}{\gamma} \frac{\langle a \rangle_{ss}}{1 + \frac{8g^2}{\gamma^2} |\langle a \rangle_{ss}|^2}. \quad (4.2.3)$$

El requerimiento de que tanto (4.2.2) y (4.2.3) sean válidas da como resultado

$$\left(\frac{\mathcal{E}}{\kappa}\right)^2 = |\langle a \rangle_{ss}|^2 \left(1 + \frac{2g^2}{\gamma\kappa} \frac{1}{1 + \frac{8g^2}{\gamma^2} |\langle a \rangle_{ss}|^2}\right)^2. \quad (4.2.4)$$

Esta ecuación será de gran importancia ya que, haciendo la aproximación $\gamma \gg g$, podemos despejar $|\langle a \rangle|^2$, lo cual nos permite obtener, de manera aproximada, una expresión para el valor esperado del número de fotones en la cavidad

$$|\langle a \rangle_{ss}|^2 = \left(\frac{\mathcal{E}/\kappa}{1 + 2g^2/\gamma\kappa}\right)^2. \quad (4.2.5)$$

Teniendo esta ecuación podemos fijar el número de fotones, lo cual será de gran ayuda al querer caracterizar los datos obtenidos de nuestras trayectorias cuánticas.

4.3. Obtención de distribución de probabilidad de número de emisiones

Habiendo estudiado nuestro sistema queremos obtener una estimación del número de emisiones espontáneas, midiendo emisión estimulada en los modos de la cavidad. Para ello será necesario primeramente obtener una distribución de probabilidad que nos dé información acerca de, dada cierto número de emisiones en los modos de la cavidad, cuántas emisiones espontáneas ocurren.

Empezamos considerando el Hamiltoniano (4.1.5) y aplicaremos el mismo procedimiento que empleábamos al momento de realizar trayectorias cuánticas, sólo que esta vez registraremos cada vez que ocurra un salto cuántico, ya sea uno relacionado a emisión espontánea o emisión de la cavidad, sumando +1, y así manteniendo un registro del número de emisiones espontáneas dado el número de emisiones de la cavidad. Dicho procedimiento puede verse resumido en el algoritmo 1.

Este procedimiento se realiza en trayectorias cuánticas definidas para intervalos de tiempo lo suficientemente largos para alcanzar a medir el número deseado de emisiones de la

Algorithm 1 Pseudocódigo de registro de pérdidas en la cavidad-emisiones espontáneas átomo

N : número de intervalos temporales
 N_A : número de emisiones espontáneas
 N_C : número de emisiones de la cavidad
 N_{max} : número máximo de emisiones cavidad
 N_{CA} : matriz que relaciona número de emisiones de la cavidad con el número de emisiones espontáneas

Condiciones iniciales:

$N_A = 0$; $N_C = 0$; $N_{CA} = \text{zeros}(N_{max}, 2)$; $k = 0$; $t = 0$; $|\phi(t = 0)\rangle = |0\rangle \otimes |\downarrow\rangle$

```

for  $i = 1$  to  $N$  do
   $|\phi^1(t + \delta t)\rangle = e^{-iH\delta t/\hbar} |\phi(t)\rangle$ 
   $\delta p_1 = \delta t \langle \phi(t) | C_1^\dagger C_1 | \phi(t) \rangle$ 
   $\delta p_2 = \delta t \langle \phi(t) | C_2^\dagger C_2 | \phi(t) \rangle$ 
   $\delta p = \delta p_1 + \delta p_2$ 
  if  $\delta p > \epsilon$  then
    if  $\frac{\delta p_1}{\delta p} > \epsilon$  then
       $|\phi(t + \delta t)\rangle = \frac{C_1 | \phi(t) \rangle}{\sqrt{\frac{\delta p_1}{\delta t}}}$ 
       $N_A = N_A + 1$ 
    else
       $|\phi(t + \delta t)\rangle = \frac{C_2 | \phi(t) \rangle}{\sqrt{\frac{\delta p_2}{\delta t}}}$ 
       $N_C = N_C + 1$ 
       $N_{CA}[k + 1, 1] = N_C$ 
       $N_{CA}[k + 1, 2] = N_A$ 
       $k = k + 1$ 
      if  $N_C = N_{max}$  then
        break
      end if
    end if
  end if
  else
     $|\phi(t + \delta t)\rangle = \frac{|\phi^1(t + \delta t)\rangle}{\sqrt{1 - \delta p}}$ 
     $t += \delta t$ 
  end if
end for
return  $N_{CA}$ 

```

cavidad. Sin embargo, hasta este paso sólo hemos considerado una trayectoria cuántica. Si queremos obtener una distribución de probabilidad debemos de realizar este procedimiento un gran número de veces — en nuestro caso repetimos el procedimiento 100,000 veces —

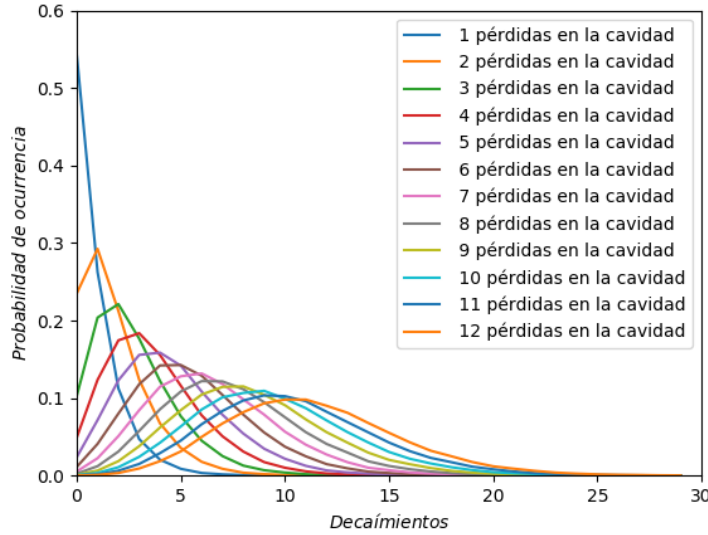


Figura 4.3: Distribución de probabilidad para diferente número de pérdidas de la cavidad en el caso cuando el láser está acoplado a un modo de la cavidad, repitiendo la simulación de Monte Carlo 100,000 veces, con $\mathcal{E} = \kappa = \gamma = 1$.

manteniendo registro del número de emisiones espontáneas con respecto al número de emisiones de la cavidad. Al ser necesario un número tan grande de simulaciones fue necesario hacer uso del cluster del IIMAS, además de que para realizar los cálculos numéricos de una manera más eficiente se trabajó en el cuadro de interacción algo que se explica más a detalle en el apéndice A. Para manejar un número tan grande de datos, simplemente creamos una matriz en la cual cada columna correspondería al número de emisiones de la cavidad, y el número de fila correspondería al número de emisiones espontáneas donde sumaríamos +1 cada vez que en alguna de las realizaciones obtuviéramos el número de emisiones correspondiente al número de fila. De esta manera obtenemos un registro del número de veces que hubo un determinado número de emisiones espontáneas para cada número de emisiones de la cavidad. Por lo que para obtener la distribución de probabilidad simplemente basta normalizar nuestros datos, dividiendo entre 100,000 los elementos de nuestra matriz.

Inicialmente al ser un sistema que, como se observa en la figura 4.2, puede variar de manera significativa de acuerdo a los parámetros que se fijen, debemos de tener especial cuidado al elegir dichos parámetros y estar conscientes de la situación física que representan. Ante esta dificultad optamos inicialmente por fijar nuestros parámetros igual a 1 y así primeramente darnos una idea general de la clase de datos que obtendríamos.

Desde un principio es fácil notar en figura 4.3 como conforme el aumento de emisiones espontáneas en nuestro sistema tendremos una mayor dispersión en nuestros datos. Tam-

bién uno puede ver como, al aumentar el número de emisiones de la cavidad, aumentará el número de emisiones espontáneas.

4.4. Caracterización de datos

Tras saber que somos capaces de obtener distribuciones de probabilidad que relacionen el número de emisiones espontáneas con el número de emisiones medidas en un modo de la cavidad, el siguiente paso es caracterizar los datos obtenidos de manera que nos proporcionen la mayor información posible con respecto a la relación entre estas dos cantidades. Esto no es una tarea del todo sencilla en el sentido de que, como vemos en la figura 4.2, la elección de parámetros que usemos no simplemente alteran la escala de tiempo de nuestra evolución dinámica, sino que también pueden afectar la forma en que se puede dar esta evolución. Por lo tanto es importante tener una noción física de lo que representan cada uno de estos parámetros y como afecta nuestro sistema los valores y proporciones que estos guarden entre ellos.

En este sentido es importante saber las distinciones que se suelen usar de acuerdo en las relaciones que existen entre nuestros parámetros, en particular con la constante de acoplamiento dipolar g , la cual afecta de manera más significativa nuestro sistema. Dentro de la literatura [2, 36] se conoce como 'acoplamiento débil' a las condiciones en las cuales la constante de acoplamiento dipolar es mucho más pequeña que al menos uno de las tasas de disipación, y 'acoplamiento fuerte' para referirse a las condiciones en la constante de acoplamiento dipolar es mucho mayor que las tasas de disipación. Otra de las relaciones que nos puede ayudar a obtener cierta intuición física de nuestro sistema es \mathcal{E}/κ lo cual nos da la amplitud de estado coherente dentro de la cavidad cuando el átomo no está presente - algo que puede calcularse fácilmente de las ecuaciones de Maxwell-Bloch. De tal manera que $(\mathcal{E}/\kappa)^2$ nos da el número de fotones dentro de la cavidad bajo esta misma condición. Si bien nosotros siempre contaremos con un átomo dentro de nuestra cavidad, esta relación seguirá estando asociada con el número de fotones en la cavidad, de modo que entre mayor sea el valor de \mathcal{E}/κ tendremos un mayor número de fotones hasta que este valor llegue hasta un valor estable que es lo que se espera de un estado coherente, y es un comportamiento que podemos observar en la figura 4.2. Finalmente, uno puede hablar acerca de la relación entre las tasas de decaimiento κ y γ que es lo que nos definirá en gran medida si en nuestro sistema se manejarán ondas ópticas o microondas. Mientras que en frecuencias ópticas la tasa de emisión espontánea y la tasa de decaimiento de cavidad son similares ($\gamma \sim 2\kappa$), en el caso del manejo de microondas la tasa de pérdidas en la cavidad es mucho mayor que la tasa de decaimiento espontánea ($\gamma \ll 2\kappa$), de tal manera que uno puede ignorar la emisión espontánea en comparación con las pérdidas en la cavidad.

Una manera que consideramos apropiada para caracterizar nuestros datos fue manteniendo constante el número de fotones en nuestra cavidad — algo que podemos lograr usando la ecuación (4.2.5). Además de eso, mantuvimos fija la constante de acoplamiento dipolar, así como el coeficiente de decaimiento en nuestro átomo.

4. Estimación de número de emisiones espontáneas de un átomo midiendo emisión estimulada en modos de una cavidad óptica

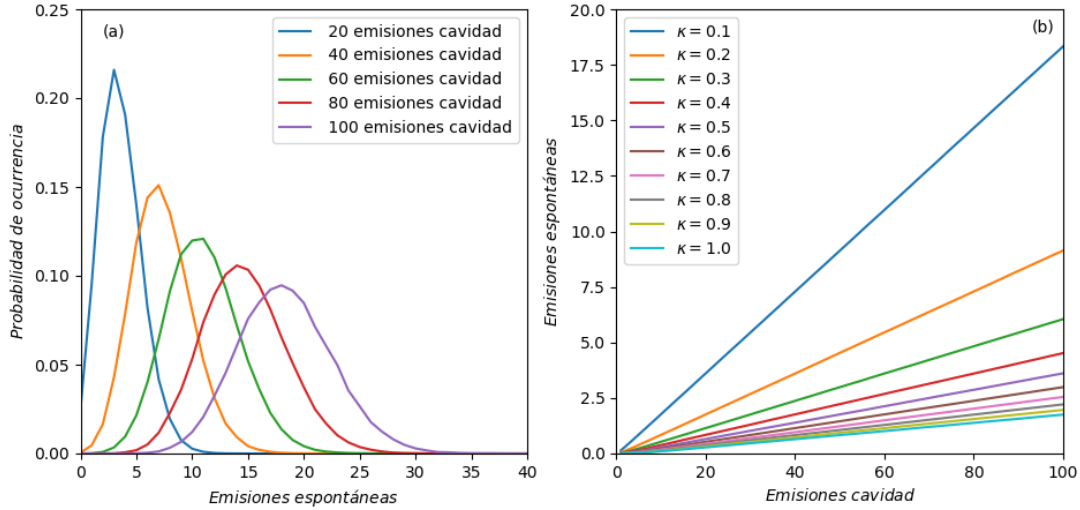


Figura 4.4: Distribución de probabilidad y estimación de número de emisiones espontáneas fijando el valor esperado del número de fotones $\langle n \rangle \approx 1$: $g = 0.1$, $\gamma = 1.0$, $\mathcal{E} = \kappa |\langle n \rangle| [1 + 2g^2/\gamma\kappa]$. (a) $\kappa = 0.1$; (b) tomando el valor promedio de número de emisiones espontáneas para diferentes κ .

El aumento de la proporción entre el número de emisiones espontáneas y emisiones medidas en el modo de la cavidad conforme la disminución de κ que se observa en la figura 4.4 (b) es fácil de explicar en el sentido de que al disminuir la tasa de pérdidas en la cavidad — manteniendo constante el parámetro de decaimiento en nuestro átomo — habrá un número menor de emisiones relacionadas a pérdidas en la cavidad, pero no estaremos afectando el número de emisiones espontáneas por lo que obtendremos un mayor número de emisiones espontáneas con respecto al número de pérdidas en la cavidad.

En estos casos la teoría de trayectorias cuánticas resulta bastante útil ya que nos puede ofrecer visualizaciones de la situación física que está ocurriendo.

En la figura 4.5 podemos observar que tenemos un valor condicionado de número promedio de fotones estable con valor aproximado a uno, además de que es claro que nuestro sistema se encuentra en una fase similar a la mostrada en la figura 4.5 (c). Mientras que al momento de calcular la probabilidad condicionada de que el átomo se encuentre en el estado superior vemos una disminución en el número de decaimientos para el caso en el que $\kappa = 1.0$.

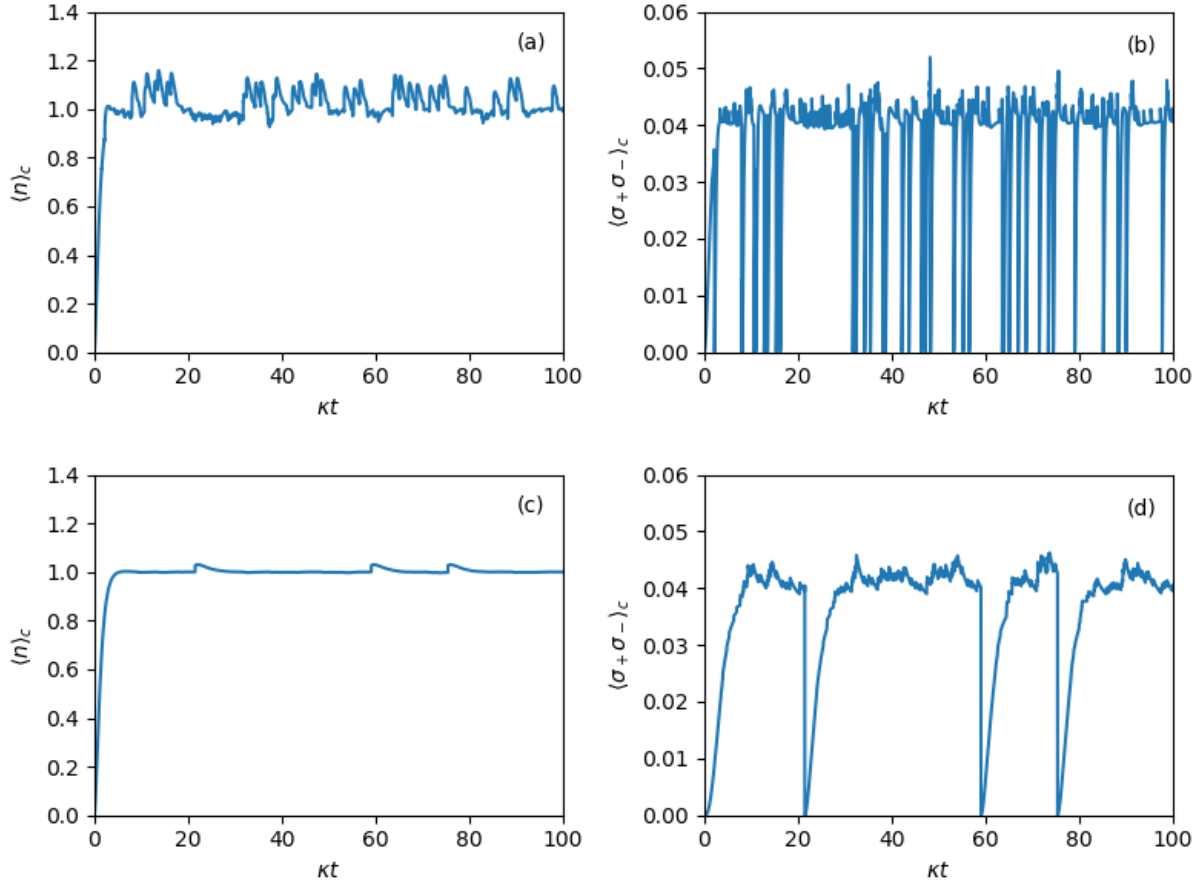


Figura 4.5: Valor esperado para número de fotones y probabilidad de que el átomo se encuentre en el estado superior. (a) y (b) $\kappa = 0.1$; (c) y (d) $\kappa = 1.0$.

4.5. Análisis de errores

Al estar lidiando con distribuciones de probabilidad y valores promedio es evidente que habrá cierta incertidumbre en nuestros resultados. Algo que podemos esperar es que entre mayormente dispersados se encuentren nuestros datos del valor promedio, mayor será la incertidumbre en nuestras estimaciones; una manera de cuantificar esto es a través del cálculo de la varianza y la desviación estándar. Desde el momento en que obtuvimos la distribución de probabilidad 4.3, resulta claro que nuestros datos estarán más esparcidos conforme el aumento de emisiones espontáneas. Tomando esto en cuenta, una manera posible de cuantificar la incertidumbre existente en nuestras estimaciones es considerando el número promedio de emisiones espontáneas y viendo que tanto aumenta la varianza con respecto a este número.

De la figura 4.5 notamos inmediatamente que nuestra varianza es, salvo un ligero error

4. Estimación de número de emisiones espontáneas de un átomo midiendo emisión estimulada en modos de una cavidad óptica

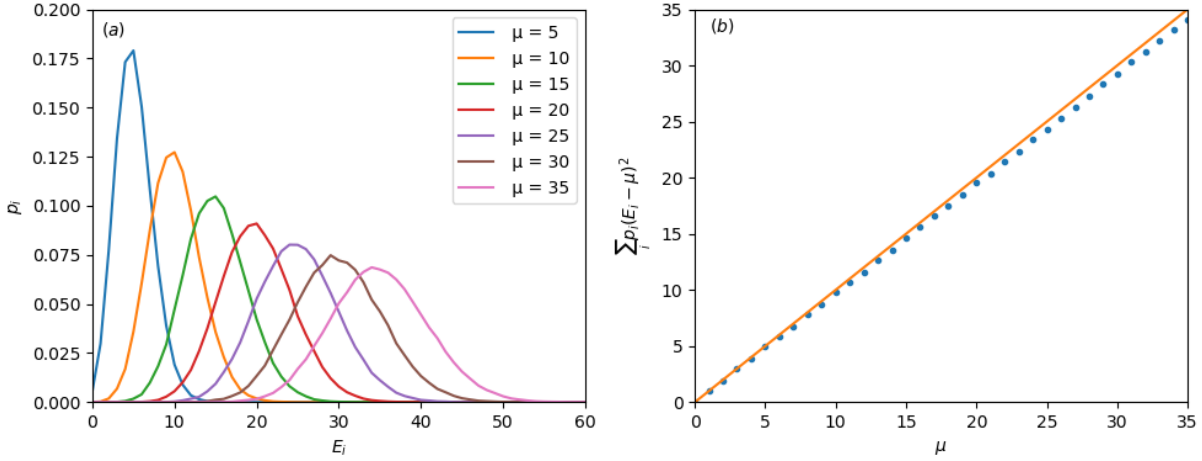


Figura 4.6: (a) Distribuciones de probabilidad para diferente número promedio de emisiones espontáneas μ ; (b) cálculo de varianza con respecto a número promedio de emisiones espontáneas μ . En ambos casos se considera $\langle n \rangle \approx 1$, $\gamma = 1$, $\kappa = g = 0,1$ y $\mathcal{E} = \kappa |\langle n \rangle| [1 + 2g^2/\gamma\kappa]$.

estadístico, igual a nuestro valor promedio. Esto es una característica de las distribuciones de Poisson, que es exactamente lo que estamos manejando. Tenemos una distribución de probabilidad discreta que nos dice la probabilidad de obtener cierto número de eventos — en este caso emisiones espontáneas — sólo que en vez de estar dadas para determinado intervalo de tiempo, están dadas para el caso en que haya habido cierto número de emisiones de la cavidad.

Sabiendo la dispersión existente en nuestros datos, podemos entonces ahora hacer una relación entre el número de emisiones espontáneas y el número de pérdidas en la cavidad, tomando en cuenta la desviación estándar correspondiente. Graficando, entonces, obtenemos la figura 4.7, donde efectivamente vemos que entre haya más emisiones cavidad, el número promedio de emisiones espontáneas aumentará y con ello también aumentará la desviación estándar, lo cual provocará mayor incertidumbre en nuestras estimaciones.

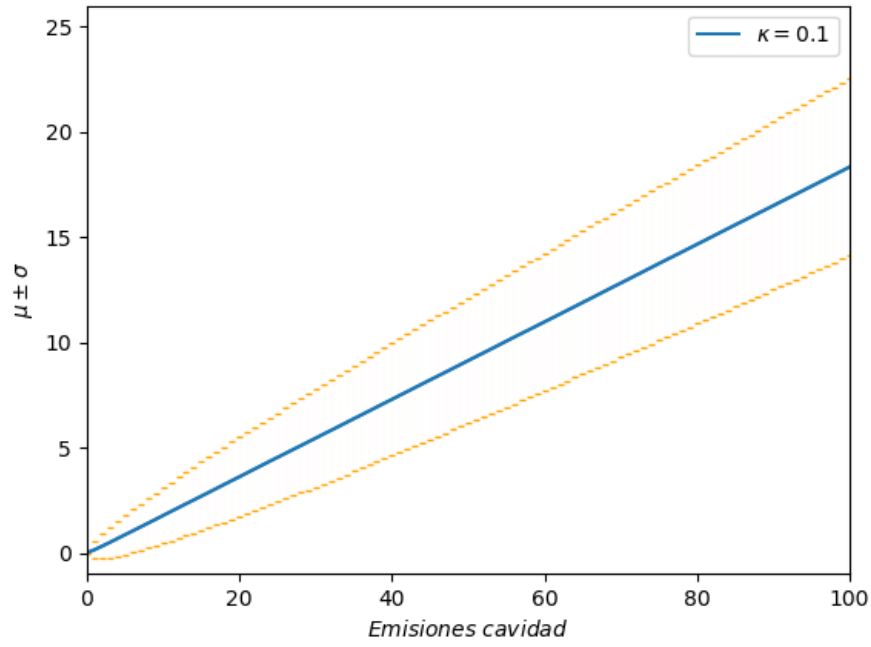


Figura 4.7: Número promedio de emisiones espontáneas $\pm \sigma$ con respecto a emisiones provenientes de pérdidas en la cavidad, bajo los parámetros $\langle n \rangle \approx 1$, $\gamma = 1$, $\kappa = g = 0,1$ y $\mathcal{E} = \kappa |\langle n \rangle| [1 + 2g^2/\gamma\kappa]$.

Capítulo 5

Estudio de correlación entre emisiones espontáneas y emisiones de cavidad

Habiendo realizado un gran número de simulaciones, de nuestros resultados es evidente que el número promedio de emisiones espontáneas aumenta conforme el incremento de las emisiones en la cavidad. Sin embargo, vale la pena explorar más a fondo y ver realmente como la correlación varían entre estas dos variables en base a los parámetros dados. En realidad uno podría incluso cuestionar si de verdad existe una correlación entre el número de emisiones de la cavidad y el número de emisiones espontáneas, y no simplemente ocurre que ambas variables están correlacionadas con el tiempo, por lo que entre más tiempo pase, habrá más tanto emisiones de la cavidad como emisiones espontáneas y no necesariamente que una de estas dos variables influya directamente a la otra

Para esto primero introduciremos lo que se conoce como *Coeficiente de correlación de Pearson*, que para dos variables X y Y está definido como

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad (5.0.1)$$

donde \bar{x} y \bar{y} son el promedio de las muestras de X y Y , respectivamente.

Teniendo una medida de correlación, ahora queremos obtener los datos necesarios para obtener información acerca de la correlación entre emisiones de cavidad y emisiones espontáneas. Estos datos los podemos obtener definiendo un intervalo de tiempo bajo el cual haremos simulaciones de trayectorias cuánticas y mantendremos registro del número de emisiones espontáneas y emisiones de cavidad al final del tiempo definido. Debido a que esencialmente estamos realizando simulaciones estocásticas, al final de cada tiempo habrá ligeras variaciones entre el número final de emisiones espontáneas y emisiones de cavidad.

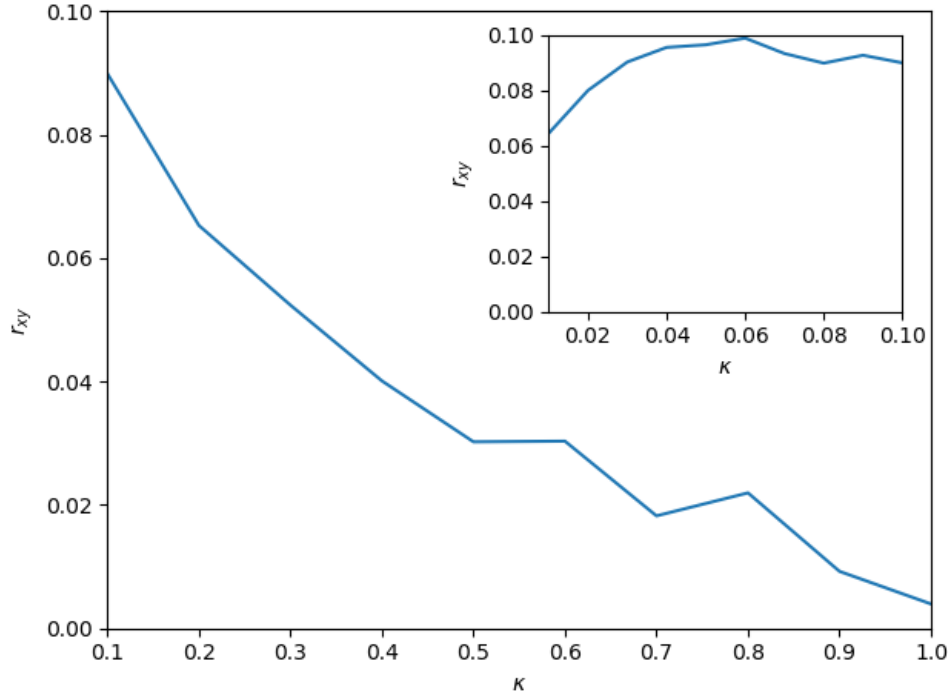


Figura 5.1: Cálculo de correlación fijando $\langle n \rangle \approx 1$, $\gamma = 1.0$, $g = 0.1$, y con $\mathcal{E} = \kappa |\langle n \rangle| [1 + 2g^2/\gamma\kappa]$.

Si realmente existe una correlación entre estas dos variables deberíamos esperar que el hecho de que haya más o menos emisiones de la cavidad al final de cada intervalo temporal afecta el número de emisiones espontáneas. Haciendo un gran número de simulaciones y probando para diferentes valores de κ podremos ver, primeramente si realmente hay una correlación, y como varía ésta con respecto a κ .

En la gráfica 5 podemos notar una disminución de la correlación con respecto a κ esto tiene sentido ya que al ser κ muy grande es como si no hubiera cavidad, por lo que no deberíamos ver correlación alguna. Surge la pregunta de que pasará si probamos con κ 's cada vez menores: ¿la correlación seguirá aumentando hasta llegar a 1? Existen dificultades numéricas al momento de querer verificar esto, ya que entre más disminuimos κ se necesita más tiempo para establecer más el número de fotones a 1, además de que el acoplamiento, al estar dado por g/κ se vuelve más fuerte lo que genera fluctuaciones en el número de fotones, que es algo que podemos observar en la figura 5.

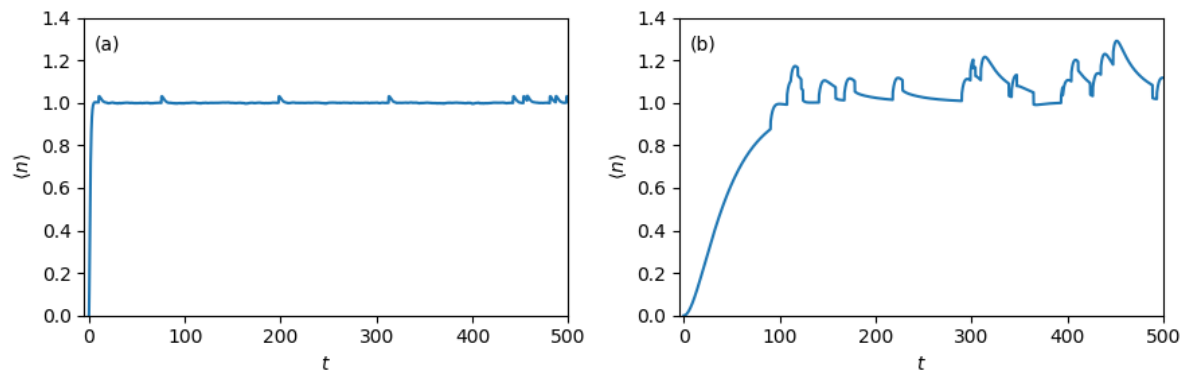


Figura 5.2: Calculo de correlación fijando $\langle n \rangle \approx 1$, $\gamma = 1.0$, $g = 0.1$, y con $\mathcal{E} = \kappa|\langle n \rangle|[1 + 2g^2/\gamma\kappa]$.

Capítulo 6

Conclusión

En este trabajo de tesis se han estudiado los sistemas cuánticos abiertos, desde la perspectiva tanto de la ecuación maestra como con técnicas de trayectorias cuánticas. Empezando con modelos simples como lo son un modo de una cavidad y un átomo de dos niveles, los cuales usamos como base para construir modelos más complejos y útiles, explicamos diversos fenómenos relacionados a la emisión y absorción de fotones. Uno de los modelos en los cuales pusimos especial énfasis fue el modelo de Jaynes-Cumming, el cual extendimos hasta llegar al modelo central de esta trabajo.

Sabiendo el modelo que manejaríamos y tras explorar su dinámica mediante la teoría de trayectorias cuánticas, diseñamos un algoritmo — el cual se puede ver como una implementación al algoritmo usado en trayectorias cuánticas — con el cual es posible mantener un registro del número de emisiones espontáneas y el número de emisiones del modo de la cavidad. Con esto nos fue posible obtener distribuciones de probabilidad que nos relacionan el número de emisiones espontáneas dado cierto número de emisiones del modo de la cavidad.

Teniendo un método para relacionar el número de emisiones con las emisiones del modo de la cavidad, exploramos la manera en que los parámetros de nuestro sistema influyen en esta relación y en el error de nuestras estimaciones. Esto resultó ser una tarea más compleja de lo que esperábamos, principalmente debido a que modificar cualquier de los parámetros puede alterar de manera significativa la dinámica del sistema, lo cual vuelve difícil las comparaciones del sistema bajo un set de parámetros y otro.

Dentro de nuestros resultados vimos que la razón entre el número de emisiones espontáneas y el número de emisiones de la cavidad disminuye conforme aumenta κ . Esto tiene sentido ya que al aumentar κ habrá más emisiones de la cavidad y, al mantener constante γ , la razón entre emisiones espontáneas y emisiones cavidad será menor. También fue posible calcular la varianza en nuestras distribuciones de probabilidad, la cual resultó ser igual al número promedio de emisiones espontáneas, algo característico de las distribuciones de probabilidad de Poisson.

Por último exploramos la correlación entre el número de emisiones de la cavidad y el número de emisiones espontáneas para un tiempo fijo, variando el ancho de línea de la cavidad, κ . Lo que encontramos es que la correlación disminuye conforme aumentamos κ , físicamente esto tiene bastante sentido, ya que si κ fuera muy grande sería equivalente a como si no hubiera cavidad, por lo que no esperaríamos que hubiera correlación entre ambas variables.

Respecto a las posibles aplicaciones de los resultados, uno debe de considerar las dificultades que existen al medir el fotón emitido por un átomo de dos niveles al decaer, principalmente por el hecho de que este fotón puede ser emitido a cualquiera de los modos del espacio. En este sentido, el hallar una correlación con otro sistema en el cual resulte más fácil medir emisiones, como lo es una cavidad, es algo bastante conveniente. También es claro que el manejo de sistemas cuánticos individuales y el sostenimiento de evoluciones coherentes por intervalos significativos de tiempo, será fundamental para el desarrollo de tecnologías cuánticas, como lo son las computadoras cuánticas [37,38], lo cual motiva a un mejor entendimiento de los sistemas cuánticos abiertos. Desde luego, independientemente de las aplicaciones posibles que puedan surgir, la búsqueda por el entendimiento de la naturaleza a escalas microscópicas es algo que vale la pena como un fin en sí mismo. Si es que se quiere explotar al máximo los efectos cuánticos, será necesario seguir perfeccionando el manejo de los sistemas cuánticos abiertos; será necesario seguir desenmarañando nuestros sistemas.

Apéndice

Apéndice A

Cambio al Cuadro de Interacción

Debido a que para nuestros fines será necesario calcular un gran número de trayectorias cuánticas, puede resultar de gran utilidad hallar una manera de realizar los cálculos de una manera mucho más eficiente. Con este propósito en mente cambiaremos al cuadro de interacción de modo que dividiremos nuestro Hamiltoniano (4.1.5) en dos partes

$$H = H_0 + H_1 \quad (\text{A.0.1})$$

donde

$$H_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_A\sigma_z + \hbar\omega_C a^\dagger a \quad (\text{A.0.2a})$$

$$H_1 = i\hbar g(a\sigma_+ - a^\dagger\sigma_-) + i\hbar\mathcal{E}(ae^{i\omega_L t} - a^\dagger e^{-i\omega_L t}) - i\hbar\kappa a^\dagger a - i\hbar\frac{\gamma}{2}\sigma_+\sigma_-. \quad (\text{A.0.2b})$$

De modo que nuestro Hamiltoniano H_1 en el cuadro de interacción estará dado por

$$H_{1,I} = i\hbar g(a\sigma_+ e^{i(-\omega_C + \omega_A)t} - a^\dagger\sigma_- e^{-i(-\omega_C + \omega_A)t}) + i\hbar\mathcal{E}(ae^{-i(\omega_C - \omega_L)t} - a^\dagger e^{i(\omega_C - \omega_L)t}) - i\hbar\kappa a^\dagger a - i\hbar\frac{\gamma}{2}\sigma_+\sigma_-, \quad (\text{A.0.3})$$

considerando el sistema en resonancia es decir $\omega_C = \omega_A = \omega_L$, $H_{1,I}$ queda de la forma

$$H_{1,I} = i\hbar g(a\sigma_+ - a^\dagger\sigma_-) + i\hbar\mathcal{E}(a - a^\dagger) - i\hbar\kappa a^\dagger a - i\hbar\frac{\gamma}{2}\sigma_+\sigma_- \quad (\text{A.0.4})$$

que es el Hamiltoniano que emplearemos al hacer uso de la ecuación de Schrödinger en el cuadro de interacción dada por

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_I(t)\rangle = H_{1,I} |\psi_I(t)\rangle. \quad (\text{A.0.5})$$

Al momento de cambiar al cuadro de interacción hemos logrado librarnos de la dependencia temporal, pero debemos ahora considerar que al cambiar al cuadro de interacción generamos una dependencia temporal en nuestro estado, esto debido a que

$$|\psi_I(t)\rangle = e^{iH_0 t/\hbar} |\psi(t)\rangle \quad (\text{A.0.6})$$

Normalmente esto podría generar un problema en el sentido de que parte de la velocidad en cuanto a cálculos que hemos adquirido librándonos de la parte temporal en nuestro Hamiltoniano la perderíamos al momento de incorporar la parte temporal en nuestro estado. Esto sin embargo, no será así, debido a que para nuestros propósitos sólo nos interesa calcular los valores esperados de $a^\dagger a$ y $\sigma_+ \sigma_-$. Debido a que nuestro Hamiltoniano H_0 está dado por (A.0.2a) al momento de calcular el valor esperado obtendremos

$$\begin{aligned} \langle \psi_I(t) | a^\dagger a | \psi_I(t) \rangle &= \langle \psi(t) | e^{iH_0 t/\hbar} a^\dagger a e^{-iH_0 t/\hbar} | \psi(t) \rangle \\ &\quad \langle \psi(t) | a^\dagger a | \psi(t) \rangle . \end{aligned} \tag{A.0.7}$$

Donde hemos considerado el hecho de que H_0 y $a^\dagger a$ conmutan. Esto sucede de igual manera para $\sigma_+ \sigma_-$, por lo que para nuestros intereses el factor temporal, inducido por cambiar al cuadro de interacción en nuestro estado, no hace diferencia.

Bibliografía

- [1] H.-P. Breuer, F. Petruccione *et al.*, *The theory of open quantum systems*. Oxford University Press on Demand, 2002.
- [2] H. J. Carmichael, *An open systems approach to quantum optics*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1993.
- [3] C. Gardiner, *Quantum noise*, ser. Springer series in synergetics. Springer-Verlag, 1991. [Online]. Available: <https://books.google.com.mx/books?id=eFAbAQAAIAAJ>
- [4] W. Nagourney, J. Sandberg, and H. Dehmelt, “Shelved optical electron amplifier: Observation of quantum jumps,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 56, pp. 2797–2799, Jun 1986. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.56.2797>
- [5] S. Gleyzes, S. Kuhr, C. Guerlin, J. Bernu, S. Deleglise, U. B. Hoff, M. Brune, J.-M. Raimond, and S. Haroche, “Quantum jumps of light recording the birth and death of a photon in a cavity,” *Nature*, vol. 446, no. 7133, p. 297, 2007.
- [6] M. A. Nielsen and I. Chuang, “Quantum computation and quantum information,” 2002.
- [7] C. Monroe and J. Kim, “Scaling the ion trap quantum processor,” *Science*, vol. 339, no. 6124, pp. 1164–1169, 2013.
- [8] D. D. Awschalom, L. C. Bassett, A. S. Dzurak, E. L. Hu, and J. R. Petta, “Quantum spintronics: engineering and manipulating atom-like spins in semiconductors,” *Science*, vol. 339, no. 6124, pp. 1174–1179, 2013.
- [9] M. H. Devoret and R. J. Schoelkopf, “Superconducting circuits for quantum information: an outlook,” *Science*, vol. 339, no. 6124, pp. 1169–1174, 2013.
- [10] J.-T. Shen and S. Fan, “Theory of single-photon transport in a single-mode waveguide. i. coupling to a cavity containing a two-level atom,” *Phys. Rev. A*, vol. 79, p. 023837, Feb 2009. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.79.023837>
- [11] N. Yoran and B. Reznik, “Deterministic linear optics quantum computation with single photon qubits,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 91, p. 037903, Jul 2003. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.91.037903>

- [12] M. Fiorentino and F. N. C. Wong, “Deterministic controlled-not gate for single-photon two-qubit quantum logic,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 93, p. 070502, Aug 2004. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.93.070502>
- [13] S.-B. Zheng and G.-C. Guo, “Efficient scheme for two-atom entanglement and quantum information processing in cavity qed,” *Physical Review Letters*, vol. 85, no. 11, p. 2392, 2000.
- [14] R. Thompson, G. Rempe, and H. Kimble, “Observation of normal-mode splitting for an atom in an optical cavity,” *Physical Review Letters*, vol. 68, no. 8, p. 1132, 1992.
- [15] K. M. Birnbaum, A. Boca, R. Miller, A. D. Boozer, T. E. Northup, and H. J. Kimble, “Photon blockade in an optical cavity with one trapped atom,” *Nature*, vol. 436, no. 7047, p. 87, 2005.
- [16] V. F. Weisskopf and E. P. Wigner, “Calculation of the natural brightness of spectral lines on the basis of dirac’s theory,” *Z. Phys.*, vol. 63, pp. 54–73, 1930.
- [17] J. F. W. Herschel *et al.*, “On a case of superficial colour presented by a homogeneous liquid internally colourless,” *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, vol. 135, pp. 143–145, 1845.
- [18] D. Brewster, “Xiii.—on the decomposition and dispersion of light within solid and fluid bodies,” *Earth and Environmental Science Transactions of The Royal Society of Edinburgh*, vol. 16, no. 2, pp. 111–121, 1846.
- [19] H. J. Carmichael, *Statistical methods in quantum optics 1: Master equations and Fokker-Planck equations*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [20] S. Krämer, D. Plankensteiner, L. Ostermann, and H. Ritsch, “Quantumoptics.jl: A julia framework for simulating open quantum systems,” *Computer Physics Communications*, vol. 227, pp. 109 – 116, 2018. [Online]. Available: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010465518300328>
- [21] E. T. Jaynes and F. W. Cummings, “Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 51, no. 1, pp. 89–109, Jan 1963.
- [22] J. Dalibard, Y. Castin, and K. Mølmer, “Wave-function approach to dissipative processes in quantum optics,” *Physical review letters*, vol. 68, no. 5, p. 580, 1992.
- [23] C. Gardiner, A. Parkins, and P. Zoller, “Wave-function quantum stochastic differential equations and quantum-jump simulation methods,” *Physical Review A*, vol. 46, no. 7, p. 4363, 1992.
- [24] N. Gisin and I. C. Percival, “Wave-function approach to dissipative processes: are there quantum jumps?” *Physics Letters A*, vol. 167, no. 4, pp. 315–318, 1992.

- [25] W. Teich and G. Mahler, “Stochastic dynamics of individual quantum systems: stationary rate equations,” *Physical Review A*, vol. 45, no. 5, p. 3300, 1992.
- [26] C. Cohen-Tannoudji, B. Zambon, and E. Arimondo, “Quantum-jump approach to dissipative processes: application to amplification without inversion,” *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 10, no. 11, pp. 2107–2120, Nov 1993. [Online]. Available: <http://josab.osa.org/abstract.cfm?URI=josab-10-11-2107>
- [27] K. Mølmer, Y. Castin, and J. Dalibard, “Monte carlo wave-function method in quantum optics,” *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 10, no. 3, pp. 524–538, Mar 1993. [Online]. Available: <http://josab.osa.org/abstract.cfm?URI=josab-10-3-524>
- [28] A. D. Fokker, “Die mittlere energie rotierender elektrischer dipole im strahlungsfeld,” *Annalen der Physik*, vol. 348, no. 5, pp. 810–820, 1914.
- [29] M. Planck, *Über einen Satz der statistischen Dynamik und seine Erweiterung in der Quantentheorie*. Reimer, 1917.
- [30] H. Wiseman and G. Milburn, “Interpretation of quantum jump and diffusion processes illustrated on the bloch sphere,” *Physical Review A*, vol. 47, no. 3, p. 1652, 1993.
- [31] R. P. Feynman, “Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 20, pp. 367–387, Apr 1948. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.20.367>
- [32] H. J. Carmichael, S. Singh, R. Vyas, and P. R. Rice, “Photoelectron waiting times and atomic state reduction in resonance fluorescence,” *Phys. Rev. A*, vol. 39, pp. 1200–1218, Feb 1989. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.39.1200>
- [33] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical recipes in C*. Cambridge university press Cambridge, 1992, vol. 2.
- [34] A. Einstein, “Zur Quantentheorie der Strahlung,” *Physikalische Zeitschrift*, vol. 18, 1917.
- [35] H. J. Kimble, M. Dagenais, and L. Mandel, “Photon antibunching in resonance fluorescence,” *Physical Review Letters*, vol. 39, no. 11, p. 691, 1977.
- [36] P. Alsing and H. J. Carmichael, “Spontaneous dressed-state polarization of a coupled atom and cavity mode,” *Quantum Optics: Journal of the European Optical Society Part B*, vol. 3, no. 1, pp. 13–32, feb 1991. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1088%2F0954-8998%2F3%2F1%2F003>
- [37] A. Steane, “Quantum computing,” *Reports on Progress in Physics*, vol. 61, no. 2, p. 117, 1998.

-
- [38] W. G. Unruh, “Maintaining coherence in quantum computers,” *Physical Review A*, vol. 51, no. 2, p. 992, 1995.