COMPOSITIO MATHEMATICA

INGEBRIGT JOHANSSON

Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus

Compositio Mathematica, tome 4 (1937), p. 119-136.
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1937__4__119_0>

Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus

von

Ingebrigt Johansson

Oslo

---

§ 1. Einleitung.

Unter den logischen Axiomen die A. Heyting [1]) zur Ableitung der formalen Regeln der intuitionistischen Logik aufgestellt hat, gibt es zwei, bei denen man stutzen muß:

2.14 $\vdash\vdash b \supset (a \supset b)$.

4.1 $\vdash\vdash \neg a \supset (a \supset b)$.

Der Sinn dieser Axiome ist natürlich nur, daß die Folgebeziehung im Kalkül eine etwas andere Bedeutung hat als im gewöhnlichen Sprachgebrauch. Man darf nämlich $a \supset b$ in den folgenden drei Fällen schreiben:

1. Wenn b als logische Folge von a erkannt ist.
2. Wenn b als richtig erkannt ist.
3. Wenn a als falsch (absurd) erkannt ist.

Mit dem zweiten Fall kann man sich recht leicht versöhnen; der dritte Fall aber (der aus 4.1 folgt) bedeutet eine schwer übersehbare Erweiterung des Folgebegriffes. Es wird der Mühe wert sein, zu untersuchen, ob man diese nicht vermeiden kann.

V. Glivenko [2]) verteidigt 2.14 und 4.1 damit, daß sie beide aus

(1) $$\vdash (\neg a \vee b) \supset (a \supset b)$$

folgen; und diese Formel hält er für evident. Es ist aber eben dieselbe Formel, die C. I. Lewis [3]) in seinem „calculus of strict

---

[1]) A. Heyting, Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik [Sitz.-Ber. Akad. Berlin **1930**, 42—56].

[2]) V. Glivenko, Sur quelques points de la logique de M. Brouwer [Bull. Acad. Belgique, sciences, (5) **15** (1929), 183—188].

[3]) C. I. Lewis, The calculus of strict implication [Mind (new series) **23** (1914), 240—247], insbes. 242; vgl. auch C. I. Lewis and C. H. Langford, Symbolic Logic, 142 oben.

implication" verwirft. Er läßt dagegen die Umkehrung

(2) $$\vdash (a \supset b) \supset (\neg a \vee b)$$

zu, da er sonst auf dem Standpunkt der klassischen Logik steht.

In dem klassischen Kalkül gelten (1) und (2) zugleich; in dem intuitionistischen gilt (1), aber nicht (2); und in dem „calculus of strict implication" gilt (2), aber nicht (1). In dem in dieser Arbeit zu behandelnden *Minimalkalkül* gilt weder (1) noch (2). — (Hier wird nicht behauptet, daß sich diese vier Kalküle in allen Hinsichten so einfach zu einander verhalten. Außerdem ist zu bemerken, daß unser Negationszeichen $\neg$ vielleicht besser mit dem „impossible" als mit dem „false" bei Lewis zu identifizieren wäre; und dann würde auch das Voranstehende nicht mehr gelten.)

Der Minimalkalkül unterscheidet sich von dem von Heyting aufgestellten intuitionistischen Formalismus nur darin, daß sein Axiom 4.1 fehlt. Es sind überraschend wenig Sätze, die dabei wegfallen (s. § 2).

An Stelle der hinfälligen Sätze wird man übrigens gewisse Schlußschemata finden (s. § 3); es ist deshalb nicht zu befürchten, daß allgemein benutzte Schlußweisen einen formalen Ausdruck entbehren müssen.

Die Möglichkeit $\neg a$ durch $a \supset \curlywedge$ (wo $\curlywedge$ „Widerspruch" oder „etwas Falsches" bedeutet) zu ersetzen, ist wahrscheinlich recht allgemein bekannt; sie hängt ja mit dem Axiom 4.11 bei Heyting eng zusammen. Die Auffassung von $\curlywedge$ als undefiniertes Grundzeichen und die Definition von $\neg$ durch

$$\neg a \underset{D}{=} a \supset \curlywedge$$

liegt dann sehr nahe. Wenn wir hierbei keine Voraussetzung über $\curlywedge$ machen, so erhalten wir unseren Kalkül (s. § 4). Der Name Minimalkalkül wird eben durch diese Tatsache gerechtfertigt; man kann sich kaum eine engere Logik denken, wenn eine Negation darin vorkommen soll, und die Sätze über $\supset$, $\wedge$ und $\vee$ dieselben sein sollen wie bei Heyting.

Durch die Arbeit von Gentzen [4]) sind die Untersuchungen über das logische Schließen in eine neue Bahn hineingeleitet worden. Seine beiden Darstellungsweisen für die intuitionistische und die klassische Logik schließen sich dem praktischen Denken enger

---

[4]) G. GENTZEN, Untersuchungen über das logische Schließen [Math. Zeitschrift 39, 176—210, 405—431].

an als alle früheren Kalküle, die sämtlich von ziemlich zufällig gewählten Axiomen ausgehen. Es zeigt sich nun sehr leicht Entsprechendes für den Minimalkalkül zu leisten (s. § 5). Man kann sogar behaupten, die Darstellungen von Gentzen seien diesem Kalkül besser angepaßt als den anderen.

Die vorliegende Arbeit würde sich nicht ohne großen Papieraufwand so schreiben lassen, daß sie selbständig lesbar werden könnte. Die Arbeiten von Heyting [1]) und Gentzen [4]), die der Leser notwendigerweise zur Hand haben muß, sind wohl auch meistens recht leicht zugänglich, so daß es unnötig war, etwas daraus abzuschreiben.

§ 2. Vergleich des Minimalkalküls mit dem intuitionistischen Kalkül von Heyting.

Im Minimalkalkül sind diejenigen Sätze, die nur $\supset$, $\wedge$, $\vee$ und Aussagenvariable enthalten, genau dieselben wie in der angegebenen Arbeit von Heyting [1]). Seine §§ 2 und 3 gehen folglich ungeändert in den Minimalkalkül über. Sein § 4 wird aber hinfällig, weil, wie erwähnt wurde, sein Axiom 4.1 $\vdash\vdash \neg a \supset (a \supset b)$ nicht anerkannt wird. Bei uns ist 4.11 (s. unten) das einzige Axiom über $\neg$.

Unten folgt das, was an Stelle seines § 4 zu setzen wird. Um den Vergleich zu erleichtern, numerieren wir unsere Sätze ganz entsprechend. Die mit $*$ und $**$ bezeichneten sind schwächer als die entsprechenden bei ihm, die übrigen sind dieselben.

4.11 $\vdash\vdash (a \supset b) \wedge (a \supset \neg b) \supset \neg a.$

4.12 $\vdash (a \supset b \wedge \neg b) \supset \neg a.$

Beweis: $\vdash (a \supset b \wedge \neg b) \supset$ [2.24] $(a \supset b) \wedge (a \supset \neg b) \supset$ [4.11] $\neg a.$

4.13 $\vdash \neg(a \wedge \neg a).$

Beweis: $\left[\binom{a}{b}\binom{a \wedge \neg a}{a} 4.12\right].$

4.2 $\vdash (a \supset b) \supset (\neg b \supset \neg a).$
4.21 $\vdash (a \supset \neg b) \supset (b \supset \neg a).$
4.22 $\vdash (a \supset b) \supset (\neg\neg a \supset \neg\neg b).$
4.23 $\vdash (a \wedge b \supset c) \supset (a \wedge \neg c \supset \neg b).$
4.24 $\vdash (a \supset b) \wedge \neg b \supset \neg a.$
4.3 $\vdash a \supset \neg\neg a.$
4.31 $\vdash \neg a \supset \neg\neg\neg a.$
4.32 $\vdash \neg\neg\neg a \supset \neg a.$

Beweise ungeändert.

4.4* $\vdash a \wedge \neg a \supset \neg b$. Andere Form 4.1* $\vdash \neg a \supset (a \supset \neg b)$.
Beweis: $\vdash a \wedge \neg a \supset$ [2.14] $(b \supset a \wedge \neg a) \supset$ [4.12] $\neg b$.

4.41* $\vdash (a \wedge \neg a) \vee b \supset \neg\neg b$.
Beweis: $\vdash a \wedge \neg a \supset$ [4.4*] $\neg\neg b$.

$$\frac{\begin{array}{l}\vdash \qquad\qquad b \supset [4.3]\ \neg\neg b.\end{array}}{\vdash (a \wedge \neg a) \vee b \supset \neg\neg b.}\ [3.12]$$

4.41** $\vdash (a \wedge \neg a) \vee \neg b \supset \neg b$.
Beweis: [4.41*, 4.32].

4.42* $\vdash (a \vee b) \wedge \neg a \supset \neg\neg b$.
Beweis: $\vdash (a \vee b) \wedge \neg a \supset$ [3.41] $(a \wedge \neg a) \vee (b \wedge \neg a) \supset$ [2.2, 3.34] $(a \wedge \neg a) \vee b \supset$ [4.41] $\neg\neg b$.

4.42** $\vdash (a \vee \neg b) \wedge \neg a \supset \neg b$.
Beweis: [4.42*, 4.32].

4.43 $\vdash \neg b \supset (\neg a \supset \neg(a \vee b))$. (Satz ungeändert, Beweis neu.)
Beweis: $\neg b \supset$ [4.42*, 2.27] $(a \vee b \supset \neg\neg a) \supset$ [4.21] $(\neg a \supset \neg(a \vee b))$.

4.44 $\vdash \neg(a \vee b) \supset\subset \neg a \wedge \neg b$.
Beweis ungeändert.

4.46* $\vdash \neg a \vee b \supset (a \supset \neg\neg b)$.
Beweis: $\vdash (\neg a \vee b) \wedge a \supset$ [4.3, 2.12] $(\neg a \vee b) \wedge \neg\neg a \supset$ [4.42*] $\neg\neg b$.
Mittels 2.27 folgt hieraus die Behauptung.

4.46** $\vdash \neg a \vee \neg b \supset (a \supset \neg b)$.
Beweis: $\vdash \neg a \vee \neg b \supset$ [4.46*] $(a \supset \neg\neg\neg b) \supset$ [4.32, 2.291] $(a \supset \neg b)$.

4.47* $\vdash a \vee b \supset (\neg a \supset \neg\neg b)$.
Beweis: [4.42*, 2.27].

4.47** $\vdash a \vee \neg b \supset (\neg a \supset \neg b)$.
Beweis: [4.42**, 2.27].

4.5 $\vdash (b \wedge a \supset \neg a) \supset (b \supset \neg a)$.
4.51 $\vdash a \wedge \neg(a \wedge b) \supset \neg b$.
4.511 $\vdash \neg\neg a \wedge \neg(a \wedge b) \supset \neg b$.
4.52 $\vdash \neg(a \wedge b) \supset (a \supset \neg b)$.
4.521 $\vdash (a \supset \neg b) \supset \neg(a \wedge b)$.
4.53 $\vdash \neg a \vee \neg b \supset \neg(a \wedge b)$.
4.54 $\vdash \neg(a \wedge b) \wedge (a \vee \neg a) \supset \neg a \vee \neg b$.

Beweise ungeändert.

4.541 $\vdash \neg(a \wedge b) \wedge (\neg a \vee \neg\neg a) \supset \neg a \vee \neg b$ (Verschärfung von 4.54).
Beweis: $\vdash \neg(a \wedge b) \wedge \neg a \supset$ [2.22] $\neg a$.
$\vdash \neg(a \wedge b) \wedge \neg\neg a \supset$ [4.511] $\neg b$.
Mittels 3.42 und 3.3 folgt hieraus die Behauptung.

Sätze über die doppelte Negation.

$$\left.\begin{array}{ll}
4.6 & \vdash \neg\neg a \wedge \neg\neg b \supset \neg\neg(a \wedge b). \\
4.61 & \vdash \neg\neg(a \wedge b) \supset \neg\neg a \wedge \neg\neg b. \\
4.62 & \vdash \neg\neg a \vee \neg\neg b \supset \neg\neg(a \vee b). \\
4.63 & \vdash \neg\neg(a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg\neg a) \supset \neg\neg a \vee \neg\neg b. \\
4.7 & \vdash (a \supset \neg(b \wedge c)) \supset (a \wedge b \supset \neg c).
\end{array}\right\} \text{Beweise ungeändert.}$$

4.71* $\vdash (a \supset b \vee \neg c) \supset (a \wedge c \supset \neg\neg b)$.
Beweis: $\vdash (a \supset b \vee \neg c) \wedge a \supset$ [2.15] $b \vee \neg c \supset$ [4.46*] $(c \supset \neg\neg b)$.
Mittels 2.27 folgt hieraus die Behauptung.

4.71** $\vdash (a \supset \neg b \vee \neg c) \supset (a \wedge c \supset \neg b)$.
Beweis: [4.71*, 4.32].

Zum „Satz vom ausgeschlossenen Dritten".

$$\left.\begin{array}{ll}
4.8 & \vdash \neg\neg(a \vee \neg a). \\
4.82 & \vdash (a \vee \neg a \supset b) \supset \neg\neg b. \\
4.83 & \vdash (a \vee \neg a \supset \neg b) \supset \neg b. \\
4.9 & \vdash (a \supset b) \supset \neg(a \wedge \neg b).
\end{array}\right\} \text{Beweise ungeändert.}$$

4.91 $\vdash a \vee b \supset \neg(\neg a \wedge \neg b)$.
Beweis: $\vdash a \vee b \supset$ [4.3] $\neg\neg(a \vee b) \supset$ [4.44, 4.2] $\neg(\neg a \wedge \neg b)$.

4.92 $\vdash a \wedge b \supset \neg(\neg a \vee \neg b)$.
Beweis: [4.53, 4.21] (ungeändert).

Die Begründung des Funktionenkalküls bietet keine Schwierigkeiten. Man hat nur zwei neue Axiome

(3) $\vdash\vdash \forall x f x \supset f x, \quad \vdash\vdash f x \supset \exists x f x,$

und zwei neue Schlußschemata

(4) $$\begin{array}{c} \vdash A \supset f x \\ A \text{ enthält nicht } x \\ \hline \vdash A \supset \forall x f x. \end{array} \qquad \begin{array}{c} \vdash f x \supset A \\ A \text{ enthält nicht } x \\ \hline \vdash \exists x f x \supset A. \end{array}$$

aufzustellen; dann erhält man im wesentlichen dieselben Sätze wie im intuitionistischen Kalkül [5]).

Ein Vergleich mit der Arbeit von Heyting wird zeigen, daß von den von ihm angegebenen Formeln nur die folgenden fehlen:

4.1 $\vdash\vdash \neg a \supset (a \supset b)$.
4.4 $\vdash a \wedge \neg a \supset b$.

---

[5]) A. Heyting, Mathematische Grundlagenforschung, Intuitionismus, Beweistheorie [1934], 17—18.

4.41 $\vdash (a \wedge \neg a) \vee b \supset b.$
4.42 $\vdash (a \vee b) \wedge \neg a \supset b.$
4.45 $\vdash b \vee \neg b \supset (\neg\neg b \supset b).$
4.46 $\vdash \neg a \vee b \supset (a \supset b).$
4.47 $\vdash a \vee b \supset (\neg a \supset b).$
4.71 $\vdash (a \supset b \vee \neg c) \supset (a \wedge c \supset b).$
4.81 $\vdash \neg\neg(\neg\neg a \supset a).$

Daß diese Sätze bei uns wirklich unbeweisbar sind, folgt — für sämtliche bis auf den letzten — sehr bequem aus der Gruppe

(5)

$\supset$	0	1
0	0	0
1	1	0

$\wedge$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\vee$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\neg$	0	1
	0	0

die Heyting dazu benutzt hat, die Unabhängigkeit des Axioms 4.1 von den übrigen zu beweisen. Setzen wir nämlich $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$, so erhalten wir für jede der ersten acht Formeln den „Wert" 1.

Für 4.81 liefert die Gruppe keine Entscheidung, da diese Formel sowohl für $a = 0$ wie für $a = 1$ den „Wert" 0 annimmt. Dagegen zeigt die Gruppe

(6)

$\supset$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	1	0	3	2	1
2	2	0	0	2	2
3	3	0	3	0	3
4	4	0	0	0	0

$\wedge$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	1	1	1	1
2	2	1	2	1	2
3	3	1	1	3	3
4	4	1	2	3	4

$\vee$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	2	4	4
3	0	3	4	3	4
4	0	4	4	4	4

wenn wir $\neg n = n \supset 4$ $(n = 0, 1, 2, 3, 4,)$ setzen, und $a = 1$ (oder 2 oder 3) wählen, daß 4.81 unbeweisbar sein muß:

$$\neg\neg(\neg\neg 1 \supset 1) = \neg\neg(\neg 0 \supset 1) = \neg\neg(4 \supset 1) = \neg\neg 1 = \neg 0 = 4.$$

Die Gruppe (6) kann übrigens folgendermaßen interpretiert werden:

$0 =$ eine beliebige logisch gültige Aussage, z.B. $p \supset p$,
$1 = p$, eine beliebige feste Aussage,
$2 = q \supset p$, wo q eine beliebige feste Aussage ist,
$3 = (q \supset p) \supset p$,
$4 = ((q \supset p) \supset p) \vee (q \supset p)$.

Diese fünf Aussagen bilden nämlich im folgenden Sinne eine logische Gruppe:

1) Wenn x und y Elemente der Gruppe sind, so ist jede der Aussagen $x \supset y$, $x \wedge y$ und $x \vee y$ mit einem Element der Gruppe äquivalent ($\supset\subset$). Die Tabellen (6) sagen uns in jedem Falle, welches von ihnen das ist. — Zur Bestätigung der in diesen Tabellen enthaltenen 75 Äquivalenzen braucht man nur die in § 2 und § 3 bei Heyting entwickelten Formeln, also letzten Endes nur die negationsfreien Axiome. Der Leser möge selbst einige Stichproben machen.

2) Von den fünf Aussagen der Gruppe sind keine zwei äquivalent. Denn erstens ist 0 mit keiner der anderen äquivalent; sonst müßte nämlich eine der letzteren logisch gültig sein, und jede solche Annahme läßt sich (z.B. durch das Entscheidungsverfahren von Gentzen [4])) widerlegen. Und zweitens sind keine zwei von den Aussagen 1, 2, 3 und 4 äquivalent; das sieht man leicht aus der ersten Tabelle (6): es sind nämlich die Aussagen $2 \supset 1$, $3 \supset 1$, $4 \supset 1$, $3 \supset 2$, $4 \supset 2$ und $4 \supset 3$ beziehungsweise mit 3, 2, 1, 2, 2, und 3 äquivalent, also nicht logisch gültig.

Man sollte eigentlich die Gruppe (6) auf alle Axiome der §§ 2 und 3 bei Heyting und außerdem auf 4.11 durchprüfen. Nachdem wir uns aber von der Richtigkeit der obigen Deutung der Elemente dieser Gruppe überzeugt haben, ist es nicht nötig, so umständlich vorzugehen; es genügt die folgende Überlegung:

Wir denken uns, daß wir in irgend eines der negationsfreien Axiome für die Aussagenvariablen a, b, c, ... irgendwelche der Aussagen 0, 1, 2, 3 und 4 einsetzen. Wir haben dann einen Ausdruck, der logisch gültig ist, also mit 0 äquivalent ($\supset\subset$) ist. Wenn wir diesen Ausdruck nach den Tabellen (6) Schritt für Schritt reduzieren, so wird er stets nur in einen äquivalenten Ausdruck umgewandelt; er bleibt also fortwährend mit 0 äquivalent. Und da 0 mit keiner der anderen Elemente der Gruppe äquivalent ist, so kann die Reduktion weder mit 1, 2, 3 oder 4 enden; sie endet also mit 0.

Was das Axiom 4.11 anbetrifft, so haben wir uns zunächst unter a und b zwei beliebige von den Aussagen 0, 1, 2, 3 und 4 zu denken, und dann $\neg a$ und $\neg b$ durch $a \supset 4$ und $b \supset 4$ zu ersetzen. Wir erhalten dann den Ausdruck

$$(a \supset b) \wedge (a \supset (b \supset 4)) \supset (a \supset 4).$$

Dieser ist aber logisch gültig (vgl. (23) in § 4), so daß man die weitere Überlegung genau wie oben für die negationsfreien Axiome fortsetzen kann.

Da schließlich auch die bei Heyting [1]) angegebenen Forderungen

I. $0 \wedge 0 = 0$,

II. $0 \supset a$ nur dann $= 0$, wenn $a = 0$

für die Gültigkeit der beiden fundamentalen Schlußregeln in der Gruppe (6) erfüllt sind, so ist es klar, daß jede im Minimalkalkül gültige Formel den „Wert" 0 annehmen muß.

§ 3. Kritische Bemerkungen zum Minimalkalkül.

Wenn wir die Liste der unbeweisbaren Formeln auf Seite [5]—[6] 123—124 durchgehen, so finden wir es recht befriedigend, daß 4.1 und 4.4 hinfällig sind; es war ja eben unsere Absicht solche Formeln zu vermeiden. Dagegen wird man zunächst nicht geneigt sein 4.41 aufzugeben. Die Ersatzformeln 4.41* und 4.41** befriedigen uns nicht; die letztere Formel besagt zwar, daß 4.41 für negatives b noch gilt, die erstere aber, daß man für positives b an der letzten Stelle b in $\neg\neg b$ abschwächen muß.

Man wird 4.41 folgendermaßen verteidigen können: Bei der Aufstellung der Grundformeln der intuitionistischen Logik ist dafür gesorgt, daß eine Disjunktion $A \vee B$ nur dann rein-logisch gültig sein kann, wenn mindestens eine der Formeln A und B rein-logisch gültig ist. Einen formalen Beweis dafür, daß dies wirklich erreicht ist, hat Gentzen in einer Klammer kurz angedeutet (vgl. Seite [17] 135 dieser Arbeit). Wenn also $\vdash (a \wedge \neg a) \vee b$ beweisbar ist, so ist entweder $\vdash a \wedge \neg a$ beweisbar oder $\vdash b$ beweisbar; und da das erste — dank sei der Widerspruchsfreiheit der reinen Logik — nicht der Fall sein kann, so muß $\vdash b$ beweisbar sein.

Wir könnten nun versuchen 4.41 als Axiom aufzustellen um die Gültigkeit dieser Formel zu sichern. Das hat aber keinen Zweck; denn dann werden 4.4 und 4.1 sofort beweisbar; man erhält 4.4 einfach so:

$$a \wedge \neg a \supset [3.1]\ (a \wedge \neg a) \vee b \supset [4.41]\ b,$$

und hieraus erhält man 4.1 durch 2.27.

Aus diesen Schwierigkeiten gibt es einen Ausweg, der darin besteht, daß man das Schlußschema

$$(7) \qquad \frac{\text{Wenn} \quad \vdash b \vee (a \wedge \neg a)}{\text{so} \qquad \vdash b.}$$

aufstellt. Wie wir am Ende des § 5 sehen werden, ist dies Schema sogar beweisbar, wohlgemerkt durch Betrachtungen *über* den Kalkül.

Nachdem das Schema (7) aufgestellt ist, ergeben sich als Ersatz für 4.42 (und 4.47), 4.45, 4.46 und 4.71 die folgenden Schemata:

$$(8)\quad \frac{\vdash (a \vee b) \wedge \neg a}{\vdash b}$$

Beweis: $\vdash (a \vee b) \wedge \neg a$

$$\frac{\vdash (a \vee b) \wedge \neg a \supset [3.41]\, (a \wedge \neg a) \vee (b \wedge \neg a)}{\dfrac{\vdash (a \wedge \neg a) \vee (b \wedge \neg a)}{\vdash b \wedge \neg a}\ (7)}$$

$$\frac{\vdash b \wedge \neg a \supset [2.2] b}{\vdash b}$$

$$(9)\quad \frac{\vdash (b \vee \neg b) \wedge \neg\neg b}{\vdash b}$$

Beweis direkt aus (8).

$$(10)\quad \frac{\vdash (\neg a \vee b) \wedge a}{\vdash b}$$

Beweis: $\vdash (\neg a \vee b) \wedge a$

$$\frac{\vdash (\neg a \vee b) \wedge a \supset [4.3,\ 2.12]\, (\neg a \vee b) \wedge \neg\neg a}{\dfrac{\vdash (\neg a \vee b) \wedge \neg\neg a}{\vdash b}\ (8)}$$

$$(11)\quad \frac{\vdash (a \supset b \vee \neg c) \wedge a \wedge c}{\vdash b}$$

Beweis:

$$\frac{\vdash (a \supset b \vee \neg c) \wedge a \wedge c}{\dfrac{\vdash (b \vee \neg c) \wedge c}{\vdash b}\ (10)}$$

Der Leser wird bemerkt haben, daß zwischen dem Zeichen $\supset$ und dem Strich im Schlußschema genau zu unterscheiden ist. Um uns mit dieser Tatsache noch mehr vertraut zu machen, vergleichen wir die Formeln

$$B \supset C, \quad (A \supset B) \supset (A \supset C), \quad (A \supset B) \wedge A \supset C$$

mit den Schemata

$$\frac{\vdash B}{\vdash C}, \qquad \frac{\vdash A \supset B}{\vdash A \supset C}, \qquad \frac{\vdash (A \supset B) \wedge A}{\vdash C}.$$

Die zweite und dritte Formel muß (nach 2.291 und 2.27) richtig sein, wenn es die erste ist. Von den Schlußschemata ist aber nur das dritte eine Folge des ersten; das zweite ist im allgemeinen viel stärker. Denn wenn wir z.B. das Schlußschema

$$(12)\quad \frac{\vdash A \supset (a \wedge \neg a) \vee b}{\vdash A \supset b}$$

zulassen wollten, so würde man 4.4 folgendermaßen beweisen können

$$\frac{\vdash a \wedge \neg a \supset [3.1]\, (a \wedge \neg a) \vee b}{\vdash a \wedge \neg a \supset b}\ (12).$$

Ein dem natürlichen Denken näherliegender Grund, warum wir (12) nicht gern anerkennen wollen, wenn wir dem Zeichen $\supset$ unsere scharfe Deutung geben, ergibt sich durch die folgende Betrachtung: Wir deuten A als Axiomensystem (= Konjunktion von Einzelaxiomen) irgend einer Theorie. Dann besagt

$$\vdash A \supset (a \wedge \neg a) \vee b, \tag{13}$$

daß $(a \wedge \neg a) \vee b$ ein in dieser Theorie gültiger Satz ist. Wir können aber daraus nicht ohne weiteres schließen, daß $\vdash A \supset b$ gilt, d.h. daß b ein in der Theorie gültiger Satz ist; denn die Gültigkeit von (13) beruht vielleicht bloß darauf, daß das Axiomensystem widerspruchsvoll ist. (Ich nenne das Axiomensystem A dann widerspruchsvoll, wenn eine solche Aussage a existiert, daß $\vdash A \supset a \wedge \neg a$ gültig ist.) Nur wenn man 4.4 $\vdash a \wedge \neg a \supset b$ anerkennt, so wird auch in diesem Falle $\vdash A \supset b$ gelten.

Es ist zu bemerken, daß die Schemata (7)—(11) eigentlich dem Minimalkalkül selbst nicht angehören; sie sind bloß Ausdrücke für gewisse Eigenschaften des Kalküls. Beispielsweise ist die Bedeutung von (7) streng genommen nur die folgende: Wenn wir eine Beweiskette für einen Satz vom Typus $\vdash b \vee (a \wedge \neg a)$ kennen, so können wir sie so abändern, daß sie in eine Beweiskette für den Satz $\vdash b$ übergeht. *Alles was mit den Schematen* (7)—(11) *beweisbar ist, ist es auch ohne dieselben.* Die Gültigkeit dieser Schemata legt aber die Vermutung nahe, daß der Minimalkalkül, wenn man ihn zur Formalisierung eines Faches benutzen will, ebenso leistungsvoll sein wird, wie der intuitionistische.

Bei Heyting waren die Formeln $a \vee \neg a$ und $\neg\neg a \supset a$ in dem Sinne äquivalent, daß das Aufstellen des einen als logisches Axiom die andere zu einem beweisbaren Satz machte. Dies ist im Minimalkalkül nicht mehr der Fall; denn die Prüfung dieser beiden Aussagen auf die Gruppe (5) (Seite [6] 124) zeigt, daß die erste immer den „Wert" 0, die zweite aber für $a = 1$ den „Wert" 1 annimmt. Dagegen gilt folgendes:

Wenn man die Formel

$$\neg\neg a \supset a \tag{14}$$

als logisches Axiom hinzunimmt, so werden die Formeln

$$a \vee \neg a \tag{15}$$

$$a \wedge \neg a \supset b \tag{16}$$

beweisbar, und wenn man (15) *und* (16) *als Axiome aufstellt, so wird* (14) *beweisbar.*

Beweis: 1. Wenn man in (14) a durch $a \vee \neg a$ ersetzt und 4.8 benutzt, so folgt (15).

2. Wenn man in 4.4* $\neg b$ für b einsetzt, so folgt mittels (14): $a \wedge \neg a \supset \neg\neg b \supset b$.

3. Wenn man (16) als Axiom aufstellt, so erhält man den Kalkül von Heyting, und in diesem folgt (14) aus (15) mittels 4.45.

Es wäre übrigens interessant, zu untersuchen, wie sich die logischen Gesetze gestalten würden, wenn man (15), aber nicht (16) unter die Axiome aufnimmt. Da 4.46 nicht gelten wird, wohl aber die Umkehrung davon, so ist einige Ähnlichkeit mit dem „calculus of strict implication" von C. I. Lewis[3]) zu erwarten; eine völlige Übereinstimmung ist aber ausgeschlossen.

Die Sätze von Glivenko [2]) gelten im Minimalkalkül nicht mehr, da schon 4.81 $\vdash \neg\neg(\neg\neg a \supset a)$ hinfällig ist (vgl. § 2).

§ 4. Die Aussage $\curlywedge$ („Widerspruch") und deren Deutungen.

Im Minimalkalkül gilt:

(17) $$\vdash \neg a \wedge \neg\neg a \supset\subset \neg b \wedge \neg\neg b.$$

Beweis: $\vdash \neg a \wedge \neg\neg a \supset [4.4^*]\, \neg(b \vee \neg b) \supset [4.44]\, \neg b \wedge \neg\neg b.$

Der Ausdruck $\neg a \wedge \neg\neg a$ ist also von der Aussagenvariablen a unabhängig, und wir können ihn deshalb kurz mit $\curlywedge$ (ohne Angabe von a) bezeichnen:

(18) $$\vdash \curlywedge \underset{D}{=} \neg a \wedge \neg\neg a.$$

(Im intuitionistischen Kalkül würde man $\curlywedge \underset{D}{=} a \wedge \neg a$ setzen können.)

(19) $$\vdash a \wedge \neg a \supset \curlywedge.$$

Beweis: $\vdash a \wedge \neg a \supset \neg\neg a \wedge \neg a \supset \curlywedge.$

(20) $$\vdash a \wedge \curlywedge \supset\subset a \wedge \neg a.$$

Beweis: $\vdash a \wedge \curlywedge \supset [(18)]\, a \wedge \neg a \wedge \neg\neg a \supset a \wedge \neg a.$
[(19), 2.2, 2.24].

(21) $$\vdash \neg a \supset\subset (a \supset \curlywedge).$$

Beweis: $\vdash \neg a \supset [2.26]\, (a \supset a \wedge \neg a) \supset [(19), 2.291]\, (a \supset \curlywedge).$
$\vdash (a \supset \curlywedge) \supset [(18)]\, (a \supset \neg a \wedge \neg\neg a) \supset [4.12]\, \neg a.$

Wir haben oben $\curlywedge$ durch $\neg$ definiert. Man kann aber auch umgekehrt $\curlywedge$ zu Grunde legen, und $\neg$ folgendermaßen definieren:

(22) $$\vdash \neg a \underset{D}{=} a \supset \curlywedge.$$

Das Bemerkenswerteste ist aber, daß wir dabei keinen Ersatz für das Axiom 4.11 (unser einziges Axiom über $\neg$) brauchen; mit $\curlywedge$ ist nur wie mit einer Aussagenvariablen zu operieren. Es gilt nämlich ohne Voraussetzungen über $\curlywedge$

(23) $\vdash (a \supset b) \land (a \supset (b \supset \curlywedge)) \supset [2.24]\, (a \supset b \land (b \supset \curlywedge)) \supset [2.15, 2.291] (a \supset \curlywedge)$,

was nach der Definition (22) eben 4.11 ist. (Um den intuitionistischen Kalkül zu bekommen, muß man $\vdash\vdash \curlywedge \supset b$ hinzunehmen.)

Da also 4.11 bewiesen ist, so folgen sofort alle Formeln des § 2 dieser Arbeit, sowie die obigen Sätze (17), (19) und (20). An Stelle von (21) tritt natürlich die Definition (22), und (18) ist zu ersetzen durch

(24) $\vdash \neg a \land \neg\neg a \supset\subset \curlywedge.$

Beweis: $\vdash (a \supset \curlywedge) \land ((a \supset \curlywedge) \supset \curlywedge) \supset [2.15]\, \curlywedge.$

$$\left.\begin{array}{l} \vdash \curlywedge \supset [2.14]\, (a \supset \curlywedge) \\ \vdash \curlywedge \supset [2.14]\, ((a \supset \curlywedge) \supset \curlywedge) \end{array}\right\} [2.24] \vdash \curlywedge \supset (a \supset \curlywedge) \land ((a \supset \curlywedge) \supset \curlywedge).$$

Überhaupt gilt ganz allgemein: *Eine beliebige aus* $\supset$, $\land$, $\lor$, $\neg$ *und Aussagenvariablen aufgebauten Formel ist im Minimalkalkül dann und nur dann gültig, wenn die Formel, die daraus durch Einführung von* $\curlywedge$ *statt* $\neg$ *nach* (22) *entsteht, mittels der negationsfreien Axiome allein* (d.h. unter Ausschluß von 4.11) *ableitbar ist.* Denn sei erstens eine Formel mit $\neg$ (und ohne $\curlywedge$) mittels der negationsfreien Axiome und 4.11 abgeleitet. Wenn wir überall (d.h. in der ganzen Ableitung) $\neg$ durch $\curlywedge$ nach (22) ersetzen, so erhalten wir eine Ableitung der entsprechenden Formel mit $\curlywedge$ mittels der negationsfreien Axiome und (23). Indem wir dann die obige Ableitung von (23) voransetzen, erhalten wir eine Ableitung mittels der negationsfreien Axiome allein. — Sei zweitens eine beliebige Formel mit $\neg$ (und ohne $\curlywedge$) gegeben, und sei daraus mittels (22) eine Formel mit $\curlywedge$ (und ohne $\neg$) hergestellt. Für letztere Formel, in der $\curlywedge$ natürlich nur als zweites Glied bei $\supset$ auftritt, sei eine Ableitung mittels der negationsfreien Axiome bekannt. Da $\curlywedge$ in dieser Ableitung genau wie eine Aussagenvariable (nämlich ohne Sondervoraussetzungen, wie z.B. $\curlywedge \supset b$) behandelt worden ist, so können wir dafür $\neg p \land \neg\neg p$ (p beliebig) einsetzen. Diese Aussage bezeichnen wir in Übereinstimmung mit (18) wiederum mit $\curlywedge$ (wonach dies Zeichen nicht mehr als Aussagenvariable gelten kann). Mittels der negationsfreien Axiome und 4.11 haben wir aber oben die Äquivalenz (21) abgeleitet, und mit ihrer Hilfe erhalten wir offenbar eine Ableitung für die ursprüngliche unbewiesene Formel mit $\neg$ aus der als bewiesen vorausgesetzten Formel mit $\curlywedge$; denn diese enthält, wie schon bemerkt wurde, $\curlywedge$ nur als zweites Glied bei $\supset$. Die ursprüngliche Formel läßt sich also mittels der negationsfreien Axiome und 4.11 ableiten.

Hieraus folgt als Sonderfall, *daß jede negationsfreie Formel, sofern sie logisch gültig ist, aus den negationsfreien Axiomen allein ableitbar ist.*

Die Auffassung von $\curlywedge$ als eine undefinierte Grundaussage ist mit der von Kolmogoroff [6]) angegebenen „aufgabentheoretischen" Deutung der intuitionistischen Logik verwandt. Bei ihm bezeichnet nämlich $\neg a$ die Aufgabe „vorausgesetzt, daß die Lösung von a gegeben ist, einen Widerspruch zu erhalten", und das stimmt mit der Definition von $\neg a$ als $a \supset \curlywedge$, wenn man $\curlywedge$ als die Aufgabe „einen Widerspruch zu erhalten" deutet. Diese Aufgabe ist nicht definiert; es ist aber eine stillschweigende Voraussetzung bei Kolmogoroff, daß $\vdash \curlywedge \supset b$ gilt, d.h., daß die folgende Aufgabe gelöst ist; „Vorausgesetzt, daß ein Widerspruch erhalten ist, eine beliebige Aufgabe zu lösen." Wenn wir diese Voraussetzung weglassen, und also das Zeichen $\supset$ schärfer deuten, so erhalten wir eine „aufgabentheoretische" Deutung für den Minimalkalkül.

Obwohl wir im Minimalkalkül die Aussage $\curlywedge$ nur wie eine Aussagenvariable behandeln, so kann man sich bei der Anwendung dieser Logik zur Formalisierung einer mathematischen Disziplin sehr wohl denken, daß sie eine ganz bestimmte von vornherein als falsch betrachtete Aussage ist.

Es soll zum Schluß eine Auffassung vertreten werden, die unter Umständen bequem sein kann: Wir verstehen unter dem Axiomensystem A die Konjunktion aller als richtig vorausgesetzten Aussagen, und unter dem Widerspruchsystem $\curlywedge$ die Disjunktion aller als absurd vorausgesetzten Aussagen. Als Beispiel denken wir uns, daß wir die Geometrie axiomatisch begründen wollen. Zunächst ist dann eine Reihe von undefinierten Grundprädikaten aufzustellen:

Px, „x ist ein Punkt",
Gu, „u ist eine Gerade",
Vxu, „der Punkt x liegt auf der Geraden u",
$\bar{V}xu$, „der Punkt x liegt außerhalb der Geraden u",
usw.

---

[6]) A. Kolmogoroff, Zur Deutung der intuitionistischen Logik [Math. Zeitschrift **35** (1932), 58].

Dann definiert man eine Reihe von Axiomen:

$$A_1 \underset{D}{=} \forall x \forall u\, (Vxu \vee \overline{V}xu \supset Px \wedge Gu),$$
$$A_2 \underset{D}{=} \forall x \forall y \exists u\, (Px \wedge Py \supset Vxu \wedge Vyu),$$
$$A_3 \underset{D}{=} \exists x \exists y \exists z \forall u\, (Vxu \wedge Vyu \supset \overline{V}zu),$$

usw.

und eine Reihe von Widersprüchen:

$$\curlywedge_1 \underset{D}{=} \exists x \exists y\, (Vxu \wedge \overline{V}xu),$$
$$\curlywedge_2 \underset{D}{=} \exists x\, (Px \wedge Gx),$$

usw.

Und schließlich setzt man

$$A \underset{D}{=} A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots,$$
$$\curlywedge \underset{D}{=} \curlywedge_1 \vee \curlywedge_2 \vee \ldots .$$

Eine Aussage a heißt in der Geometrie richtig, wenn $\vdash A \supset a$ gilt, und absurd, wenn $\vdash A \supset (a \supset \curlywedge)$ oder, was dasselbe ist, $\vdash A \wedge a \supset \curlywedge$ gilt. Für die Absurdität von a genügt es offenbar, daß $\vdash A \wedge a \supset \curlywedge_i$ gilt, denn dann gilt auch $\vdash A \wedge a \supset \curlywedge$.

Es ist allerdings bei dieser Begründungsweise einer Disziplin genau darauf zu achten, daß kein $\curlywedge_i$ logisch gültig ist, so daß man nicht $\vdash \curlywedge$ schreiben darf. Dies wäre jedenfalls für das Schlußschema (7) (Seite [8] 126) tödlich; denn jede Aussage von der Form $\neg a$ würde logisch gültig sein, so daß $\vdash a \wedge \neg a$ nicht unmöglich wäre. Übrigens ist natürlich auch $\vdash A \supset \curlywedge$ unerwünscht, da unsere Disziplin in diesem Falle widerspruchsvoll ist.

Der Leser wird bemerken, daß sowohl $\neg$ als $\curlywedge$ *definierte* Zeichen sind, wenn man eine Theorie in dieser Weise formalisiert. Dafür aber treten gewisse Grundprädikate *zu Paaren* auf, wie V (auf) und $\overline{V}$ (außerhalb) oben.

§ 5. Anschluß an die Untersuchungen von Gentzen.

Wir wollen jetzt nach dem Vorbild von G. Gentzen [4]) einen Kalkül des natürlichen Schließens und einen Schlußweisenkalkül (Sequenzkalkül) aufstellen und nachher deren Äquivalenz mit unserem Minimalkalkül beweisen. Es ist dann das einfachste, daß wir von den entsprechenden intuitionistischen Kalkülen ausgehen und bloß die darin vorzunehmenden Änderungen angeben:

1. In dem Kalkül des natürlichen Schließens [7]) hat man nur das Schlußschema

$$\frac{\curlywedge}{\mathfrak{D}} \tag{25}$$

wegzulassen. In Analogie mit den Bezeichnungen NJ (natürlich-intuitionistisch) und NK (natürlich-klassisch) wollen wir den so definierten Kalkül NM (natürlich-minimal) nennen. Gleichzeitig betrachten wir $\neg\mathfrak{A}$ als Abkürzung für $\mathfrak{A} \supset \curlywedge$. (Die Möglichkeit hiervon hat übrigens auch Gentzen selbst erkannt.) Die Schemata NE und NB sind dann bloß Spezialfälle von FE und FB.

2. In dem Schlußweisenkalkül [8]) haben wir (wie für den Intuitionismus) mehrgliedrige Sukzedentia zu verbieten und außerdem die Schemata NES und NEA für die Nicht-Einführungen zu streichen, dafür aber $\neg\mathfrak{A}$ als Abkürzung für $\mathfrak{A} \supset \curlywedge$ gelten zu lassen. An Stelle der weggelassenen Schemata treten die folgenden Herleitungsteile:

$$\text{Für NES:} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathfrak{A}, \Gamma \to \curlywedge & \\ \hline \Gamma \to \mathfrak{A} \supset \curlywedge & \text{FES} \\ \hline \Gamma \to \neg\mathfrak{A} & \text{Bezeichnungswechsel} \end{array} \right.$$

$$\text{Für NEA:} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Gamma \to \mathfrak{A} \qquad \curlywedge \to \curlywedge & \\ \hline \mathfrak{A} \supset \curlywedge, \Gamma \to \curlywedge & \text{FEA} \\ \hline \neg\mathfrak{A}, \Gamma \to \curlywedge & \text{Bezeichnungswechsel} \end{array} \right.$$

In Analogie mit den Benennungen LJ (logistisch-intuitionistisch) und LK (logistisch-klassisch) wollen wir den eben definierten Kalkül als LM (logistisch-minimal) bezeichnen. An Stelle von Sequenzen mit leerem Sukzedens treten offenbar solche mit $\curlywedge$ im Sukzedens; das Sukzedens wird also immer genau ein Glied haben. — Man könnte auch NES und NEA beibehalten, müßte aber dann Verdünnung im (leeren) Sukzedens verbieten.

3. In dem logistischen Kalkül nach Glivenko [9]) haben wir natürlich 2.42 $(\neg\mathfrak{A}) \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})$ zu streichen; wenn wir gleichzeitig $\neg\mathfrak{A}$ als Abkürzung für $\mathfrak{A} \supset \curlywedge$ auffassen, ist 2.41 beweisbar und kann weggelassen werden. Der so entstehende Kalkül, den wir LHM nennen wollen, ist eben unser Minimalkalkül; denn der

[7]) Vgl. [4]), 184ff.
[8]) Vgl. [4]), 190ff.
[9]) Vgl. [4]), 419.

Kalkül von Heyting, auf den wir uns beim Aufbau des Minimalkalküls gestützt haben, ist mit dem Kalkül von Glivenko äquivalent, und bleibt es auch, wenn man in beiden Kalkülen von dem Zeichen $\neg$ absieht und nur Axiome und Sätze über $\supset$, $\wedge$ und $\vee$ allein in Betracht zieht.

Um zu zeigen, daß die drei Kalküle NM, LM und LHM äquivalent sind, haben wir nur in den Äquivalenzbeweisen[10]) für NJ, LJ und LHJ einige Änderungen vorzunehmen. Zunächst bemerken wir dann, daß wir den Zeichen $\neg$ und $\curlywedge$ keine Aufmerksamkeit zu schenken brauchen, denn in allen drei Kalkülen ist $\neg\mathfrak{A}$ Abkürzung für $\mathfrak{A}\supset\curlywedge$, und mit $\curlywedge$ können wir nicht anders operieren als mit einer Aussagenvariablen. Die Änderungen in den einzelnen Paragraphen sind die folgenden:

Im § 3 kommt die Herleitung von 2.42 in Wegfall; dies ist, wie man leicht sieht, die einzige Stelle, wo das Schema (25) benutzt wurde. Die Herleitung von 2.41 wird überflüssig.

Im § 4 fällt die Ersetzung von $\curlywedge$ durch $A\wedge\neg A$ weg, da wir uns um die Zeichen $\curlywedge$ und $\neg$ nicht zu kümmern brauchen. Ebenso fallen die Abschnitte 4.24, 4.25 und 4.29 weg.

Im § 5 fällt zunächst $\mathfrak{Gf}$ 7 (der Ersatz für NEA) weg. Im Abschnitt 5.2 wird die Einsetzung von $A\wedge\neg A$ in den leeren Sukzedentia nie aktuell, weil die Sukzedentia im LM-Kalkül nie leer werden können. Weiter fallen $\mathfrak{Gf}$ 9, $\mathfrak{Sf}$ 4 und $\mathfrak{Sf}$ 8 weg. Der ganze Abschnitt 5.3, darunter $\mathfrak{Sf}$ 9, wird überflüssig, und im Abschnitt 5.43 sind $\mathfrak{Sf}$ 18 und $\mathfrak{Gf}$ 10 zu streichen. Im Abschnitt 5.5 kommen schließlich die Korrespondenzen zwischen $\mathfrak{Gf}$ 10 und 2.42 und zwischen $\mathfrak{Sf}$ 18 und 2.41 in Wegfall.

Daß hierdurch die Äquivalenz der drei Kalküle NM, LM und LHM wirklich bewiesen ist, kann natürlich nur dadurch eingesehen werden, daß man die Darlegungen von Gentzen mit den oben angegebenen Vereinfachungen genau durchstudiert.

Der Hauptsatz bei Gentzen, dessen Beweis[11]) vierzehn Seiten einnimmt, gilt auch für den Minimalkalkül:

Jede LM-Herleitung läßt sich in eine LM-Herleitung mit gleicher Endsequenz umwandeln, in welcher keine Schnitte vorkommen.

Beweis: Wir denken uns eine LM-Herleitung gegeben. Darin kommen die Schlußfiguren NEA und NES nicht vor, und wir

---

[10]) Vgl. [4]), 420—428.

[11]) Vgl. [4]), 196.

können voraussetzen, daß das Zeichen $\neg$ auch nicht als Abkürzung benutzt wird. Die konstante Aussage $\curlywedge$ kann keine besondere Schwierigkeiten bereiten, da man damit nicht anders operieren kann als mit einer Aussagenvariablen. Wir schaffen nach den Methoden von Gentzen alle Schnitte weg. Dabei bleibt die Herleitung fortwährend eine LM-Herleitung; denn man führt (wie ein genaues Studium des Gentzenschen Beweises lehrt) nie eine NEA oder NES ein, wenn eine solche nicht schon vor der Verwandlung in dem in Betracht kommenden Herleitungsteil vorhanden war. Hiermit ist der Hauptsatz auch für den Minimalkalkül bewiesen.

Wenn eine LM-Herleitung mit einer Endsequenz vom Typus $\rightarrow \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ *vorliegt, so kann man eine LM-Herleitung finden, deren Endsequenz entweder* $\rightarrow \mathfrak{A}$ *oder* $\rightarrow \mathfrak{B}$ *ist.*

Beweis: Wir denken uns in der gegebenen LM-Herleitung alle Schnitte nach dem vorigen Satze weggeschafft, und können dann zeigen, daß die Endsequenz die Untersequenz einer OES sein muß, weil sie keine der anderen Schlußfiguren sein kann. Zunächst ist zu bemerken, daß die LM-Herleitung nicht aus der einzigen Sequenz $\rightarrow \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ bestehen kann, weil diese keine Grundsequenz $\mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{C}$ ist. Die Endsequenz ist also Untersequenz einer Schlußfigur. — Diese kann keine Verdünnung, Zusammenziehung oder Vertauschung im Sukzedens sein, weil solche im LM-Kalkül nicht vorkommen. Sie kann kein Schnitt sein, weil alle Schnitte weggeschafft sind. Sie kann keine OEA, UEA, EEA, AEA oder FEA, sowie auch keine Verdünnung, Zusammenziehung oder Vertauschung im Antezedens sein, weil das Antezedens von $\rightarrow \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ leer ist. Und sie kann schließlich keine UES, AES, EES oder FES sein, weil das äußerste Zeichen im Sukzedens von $\rightarrow \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ ein $\vee$ ist. — Die letzte Schlußfigur ist also eine OES, und ihr Obersequenz muß dann entweder $\rightarrow \mathfrak{A}$ oder $\rightarrow \mathfrak{B}$ sein. Wenn man also die letzte Schlußfigur wegläßt, so hat man eine LM-Herleitung der behaupteten Art.

Es war für den Beweis sehr wichtig, daß man alle Schnitte wegschaffen konnte; denn die letzte Schlußfigur hätte sonst sehr wohl ein Schnitt sein können. Der Satz gilt übrigens auch im intuitionistischen LJ-Kalkül [12]) nicht aber im klassischen LK-Kalkül.

Aus dem letzten Satz folgt sofort ein Beweis für das Schlußschema

---

[12]) Vgl. [4]), 407, unten.

$$\frac{\text{Wenn} \quad \vdash b \vee (a \wedge \neg a)}{\text{so} \quad \vdash b},$$

das wir auf S. [8] 126 aufgestellt und benutzt haben. Denn $\vdash A$ ist mit der Aussage „es gibt eine LM-Herleitung mit der Endsequenz $\rightarrow A$" gleichbedeutend, und $\vdash a \wedge \neg a$ ist unmöglich (vgl. jedoch Schlußabschnitt von § 4).

(Eingegangen den 19. November 1935.)