Segunda Lista de Exercícios

Prof. Dr. Gilberto Pereira Sassi

Universidade Federal Fluminense
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Estatística

19 de Julho de 2016

1. Numa amostra de cinco funcionários de uma dada empresa foram observadas duas variáveis: X: anos de experiência num dado cargo e Y: tempo, em minutos, gasto em execução de uma certa tarefa relacionada com o cargo. As observações são mostradas na Tabela 1. Você diria que a variável X pode ser usada para explicar a variação de Y? Justifique.

Tabela 1:

x	y
1	7
2	8
4	3
4	2
5	2

Solução: Pelo diagrama de Dispersão da Figura 1, aparentemente as duas variáveis estão negativamente associadas. O coeficiente de correlação linear é dado por

$$\begin{aligned}\mathrm{cor}(x,y) &= \frac{1}{n}\left\{\frac{(x_1-\bar{x})\cdot(y_1-\bar{y})}{s_x\cdot s_y}+\cdots+\frac{(x_n-\bar{x})\cdot(y_n-\bar{y})}{s_x\cdot s_y}\right\}\\ &= -0,74,\end{aligned}$$

ou seja, temos indícios de que as duas variáveis estão negativamente associadas. Isto é, quanto maior a experiência do funcionário mais rápido ele executada a tarefa.

2. Uma amostra de dez casais e seus respectivos salários anuais (em salário mínimo) foi colhida no bairro Saco Grande II conforme amostra na Tabela 2.

   a) Construa o diagrama de dispersão.

   Solução: Para cada ponto da Tabela 2, desenhamos um ponto correspondente às coordenadas (x, y) no plano cartesiano conforme Figura. Note que não existe padrão aparente na distribuição dos pontos.

   b) Encontre o coeficiente de correlação entre o salário dos homens e das mulheres.

Figura 1: Diagrama de dispersão para as variáveis X e Y.

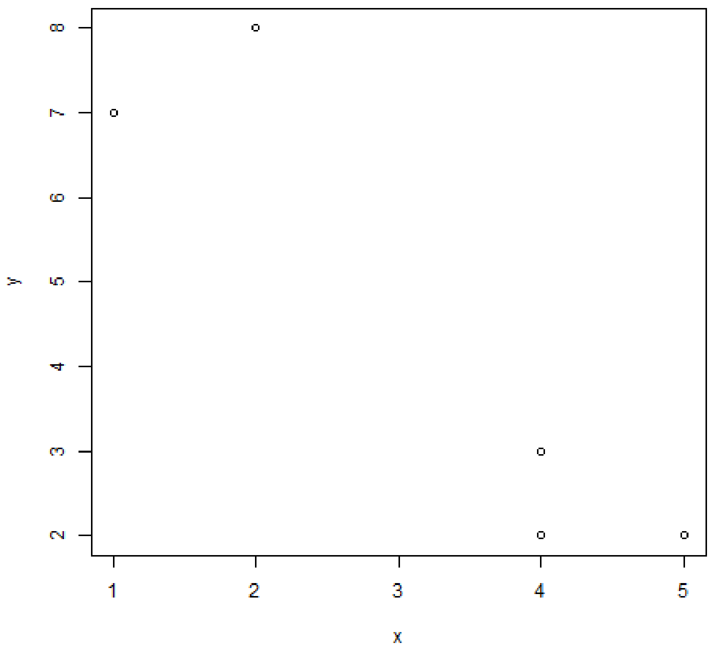
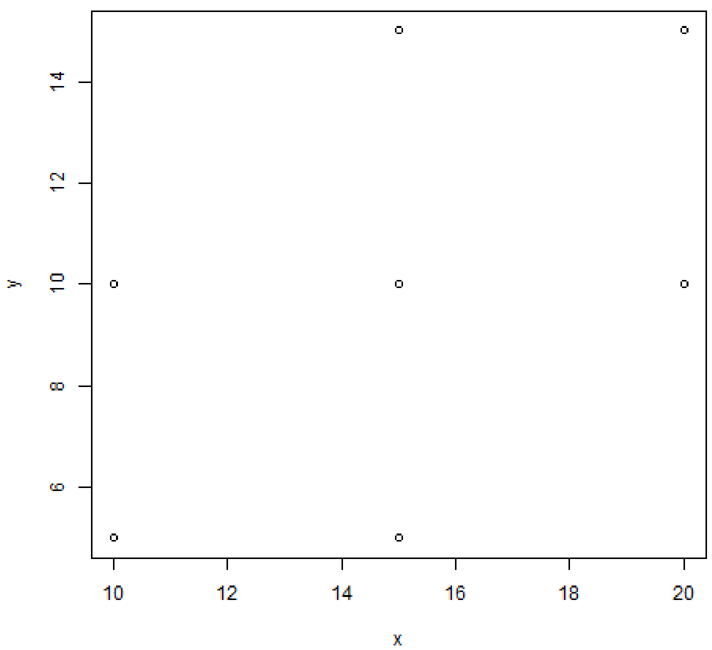


Figura 2: Diagrama de dispersão para as variáveis X e Y.



Casal	Salário homem (X)	Salário mulher (Y)
1	10	5
2	10	10
3	10	10
4	15	5
5	15	10
6	15	10
7	15	15
8	20	10
9	20	10
10	20	15

Solução:

$$\begin{aligned}\operatorname{cor}(x,y) &= \frac{n-1}{n}\left\{\frac{x_1y_1+\cdots x_ny_n-n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{(x_1^2+\cdots+x_n^2-n\bar{x}^2)\cdot(y_1^2+\cdots+y_n^2-n\bar{y}^2)}}\right\}\\ &= 0,37,\end{aligned}$$

ou seja, o coeficiente de correlação linear é baixo e as duas variáveis aparentam estar não associadas ou relacionadas.

3. Considere o experimento que consiste no lançamento de duas moedas.

a) Liste os elementos do evento pelo menos uma cara e calcule sua probabilidade.

Solução: $A = \{$(cara, coroa), (coroa, cara), (cara, cara)$\}$. Assumindo o princípio equiprobabilidade, temos que

$$\begin{aligned}P(A) &= \frac{\text{Número de elementos de } A}{\text{Número de resultados possíveis do experimento}}\\ &= \frac{3}{4}\\ &= 0,75.\end{aligned}$$

b) Liste os elementos do evento duas caras e calcule sua probabilidade.

Solução: $A = \{$(cara, cara)$\}$. Assumindo o princípio equiprobabilidade, temos que

$$\begin{aligned}P(A) &= \frac{\text{Número de elementos de } A}{\text{Número de resultados possíveis do experimento}}\\ &= \frac{1}{4}\\ &= 0,25.\end{aligned}$$

c) Liste os elementos do complementar do evento em b) e calcule sua probabilidade.

Solução: $A^c = \{(\text{cara, coroa}), (\text{coroa, coroa}), (\text{coroa, cara})\}$. Assumindo o princípio equiprobabilidade, temos que

$$
\begin{aligned}
P(A) &= \frac{\text{Número de elementos de } A}{\text{Número de resultados possíveis do experimento}} \\
&= \frac{3}{4} \\
&= 0,75.
\end{aligned}
$$

4. Expresse em termos de evento:

a) A ocorre mas B não ocorre.

Solução: $A \bigcap B^c$.

b) Exatamente um dos eventos A e B ocorrem.

Solução: $(A \cap B^c) \bigcup (A^c \cap B)$.

c) Nenhum dos dois eventos ocorrem.

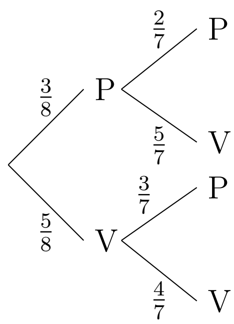
Solução: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

5. Considere uma urna contendo três bolas pretas e cinco bolas vermelhas. Retire duas bolas da urna, sem reposição.

a) Construa o diagrama de árvore.

Solução: Na Figura 3, mostramos o diagrama de árvore para este experimento.

Figura 3: Diagrama de Árvore.



b) Qual a probabilidade retirarmos uma bola preta na primeira e na segunda extração?

Solução:

$$
\begin{aligned}
P(\text{Bola preta na}1^\circ \text{ e na } 2^\circ \text{ extração}) &= P(\text{Bola preta na } 2^\circ\text{extração} \mid \text{Bola preta na } 1^\circ\text{extração}) \cdot \\
&\cdot P(\text{Bola preta na } 1^\circ\text{extração}) \\
&= \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \\
&= 0,125.
\end{aligned}
$$

c) Qual a probabilidade de retirarmos uma bola preta na segunda extração.

$$\begin{aligned}
P(\text{Bola preta na } 2^\circ \text{ extração}) &= P(\text{Bola preta na } 2^\circ\text{extração} \mid \text{Bola preta na } 1^\circ\text{extração})\cdot \\
&\cdot P(\text{Bola preta na } 1^\circ\text{extração}) + \\
&+ P(\text{Bola preta na } 2^\circ\text{extração} \mid \text{Bola vermelha na } 1^\circ\text{extração})\cdot \\
&\cdot P(\text{Bola vermelha na } 1^\circ\text{extração}) \\
&= \frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}+\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7} \\
&= 0,375.
\end{aligned}$$

d) Bola vermelha na primeira Extração.

$$P(\text{Bola vermelha na } 1^\circ \text{ extração}) = \frac{5}{8} = 0,625.$$

6. A probabilidade de que A resolve o problema é de $\frac{2}{3}$, e a probabilidade de que B resolva o problema é de $\frac{3}{4}$. Se ambos tentarem independentemente, qual a probabilidade do problema ser resolvido?

   Solução: Considere os eventos $A = \{\text{A resolver o problema }\}$ e $B = \{\text{B resolver o problema}\}$. Então,

$$\begin{aligned}
P(A\cup B) &= P(A)+P(B)-P(A\cap B) \\
&= P(A)+P(B)-P(A)P(B) \\
&= \frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4} \\
&= 0,92.
\end{aligned}$$

7. Uma companhia produz circuitos em três fábricas I, II e III. A fábrica I produz 40% dos circuitos, enquanto II e III produzem 30% cada uma. As probabilidades de que um circuito integrado produzido por essas fábricas não funcione são $0,01$, $0,04$ e $0,03$, respectivamente. Escolhido um circuito da produção das três fábricas, qual a probabilidade de o mesmo não funcionar?

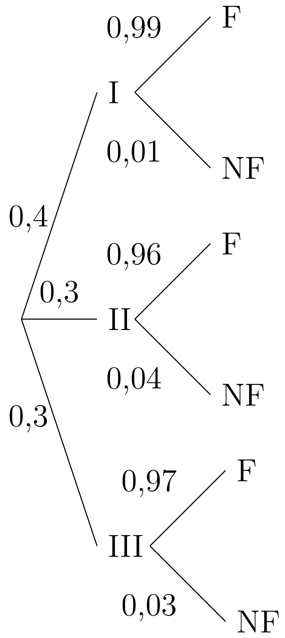
   Solução: Primeiro desenhamos o diagrama de árvore na Figura 4, em que F indica que o circuito funcionou e NF que o circuito não funcionou.

$$\begin{aligned}
P(NF) &= P(NF\mid I)P(I)+P(NF\mid II)P(II)+P(NF\mid III)P(III) \\
&= 0,01\cdot 0,4+0,04\cdot 0,3+0,03\cdot 0,3 \\
&= 0,025.
\end{aligned}$$

8. Um restaurante popular apresenta apenas dois tipos de refeições: salada completa ou um prato à base de carne. Considere que 20% dos fregueses do sexo masculino preferem salada, 30% das mulheres escolhem carne, 75% dos fregueses sãos homens e os seguintes eventos:

   H freguês é homem

Figura 4: Diagrama de árvore.



M freguês é mulher

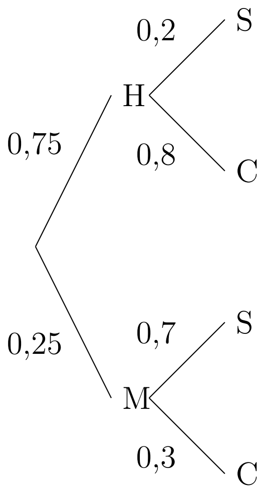
S freguês prefere salada

C fregu es prefere carne

a) Construa o diagrama de árvore.

Solução: Na Figura 5, mostramos o diagrama de árvore.

Figura 5: Diagrama de árvore.



b) Calcule $P(H), P(S \mid H)$ e $P(C \mid M)$;

Solução: Do diagrama de árvore, temos que $P(H)$, $P(S \mid H) = 0,2$ e $P(C \mid M) = 0,3$.

c) Calcule $P(H \cap S)$ e $P(H \cup S)$;

Solução: $P(H \cap S) = P(S \mid H)P(H) = 0,2 \cdot 0,75 = 0,15.$

$$\begin{aligned}
P(H \cup S) &= P(H) + P(S) - P(S \cap H) \\
&= 0,75 + P(S \mid H)P(H) + P(S \mid M)P(M) - 0,15 \\
&= 0,75 + 0,2 \cdot 0,75 + 0,7 \cdot 0,25 - 0,15 \\
&= 0.925.
\end{aligned}$$

d) Calcule $P(M \mid S)$.

Solução: Pelo Teorema de Bayes, temos que

$$\begin{aligned}
P(M \mid S) &= \frac{P(S \mid M)P(M)}{P(S \mid H)P(H) + P(S \mid M)P(M)} \\
&= \frac{0,7 \cdot 0,25}{0,2 \cdot 0,75 + 0,7 \cdot 0,25} \\
&= 0,54.
\end{aligned}$$

9. Para $X \sim N(100, 100)$, calcule:

a) $P(X < 115)$;

Solução: X tem distribuição normal com média 100 e desvio padrão 10, então

$$\begin{aligned}
P(X < 15) &= P\left(\frac{X - 100}{10} \leq \frac{15 - 100}{10}\right) \\
&= P(Z < -8.5) \\
&= P(Z > 8.5) \\
&= 1 - P(Z < 8.5) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

b) $P(X \leq 80)$;

Solução: X tem distribuição normal com média 100 e desvio padrão 10, então

$$\begin{aligned}
P(X \leq 80) &= P\left(\frac{X - 100}{10} \leq \frac{80 - 100}{10}\right) \\
&= P(Z \leq -2) \\
&= P(Z \geq 2) \\
&= 1 - P(Z \leq 2) \\
&= 1 - 0.9772 \\
&= 0,0228.
\end{aligned}$$

c) $P(|X - 100| \leq 10)$;

Solução: X tem distribuição normal com média 100 e desvio padrão 10, então

$$\begin{aligned}
P(|X-100| \leq 10) &= P(-10 \leq X-100 \leq 10) \\
&= P(-10 \leq X-100 \leq 10) \\
&= P\left(-1 \leq \frac{x-100}{10} \leq 1\right) \\
&= P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1) \\
&= P(Z \leq 1) - P(Z \geq 1) \\
&= P(Z \leq 1) - (1 - P(Z \leq 1)) \\
&= 2P(Z < 1) - 1 \\
&= 2 \cdot 0,8413 - 1 \\
&= 0,68.
\end{aligned}$$

d) O valor de a tal que $P(100-a \leq X \leq 100+a) = 0.95$.

Solução: Primeiro note que

$$\begin{aligned}
P(100-a \leq X \leq 100+a) &= P(-a \leq X-100 \leq a) \\
&= P\left(\frac{-a}{10} \leq Z \leq \frac{a}{10}\right) \\
&= P\left(Z \leq \frac{a}{10}\right) - P\left(Z \leq \frac{-a}{10}\right) \\
&= P\left(Z \leq \frac{a}{10}\right) - P\left(Z \geq \frac{a}{10}\right) \\
&= P\left(Z \leq \frac{a}{10}\right) - \left[1 - P\left(Z \leq \frac{a}{10}\right)\right] \\
&= 2 \cdot P\left(Z \leq \frac{a}{10}\right) - 1,
\end{aligned}$$

então temos que

$$2 \cdot P\left(Z \leq \frac{a}{10}\right) - 1 = 0.95$$

e

$$\begin{aligned}
P\left(Z \leq \frac{a}{10}\right) &= \frac{1+0.95}{2} \\
&= 0,975.
\end{aligned}$$

Usando a tabela da distribuição normal padrão, temos que $\frac{a}{10} = 1,96$ e $a = 19,6$.

10. As alturas de 10.000 alunos de um colégio têm distribuição aproximadamente normal com média 170cm e desvio padrão 10cm.

a) Qual o número esperado de alunos com altura superior a 165cm?

Solução: Primeiro, calculamos a proporção (isto é, a probabilidade) de alunos com mais 16cm

$$\begin{aligned}P(X > 165) &= P\left(\frac{X-170}{10} > \frac{165-170}{10}\right)\\&= P(Z > -0,5)\\&= P(Z < 0,5)\\&= 0,6915.\end{aligned}$$

Logo, o número esperado de alunos com mais de 165cm é $0,6915 \cdot 10.000 = 6915$.

b) Qual o intervalo simétrico em torno da média que conterá 75% dos alunos?

Solução: Precisamos achar a tal que

$$P(170 - a \leq X \leq 170 + a) = 0,75$$

ou seja, precisamo achar a com

$$P\left(Z \leq \frac{a}{10}\right) = \frac{0,75+1}{2} = 0,875.$$

Usando a tabela da distribuição normal padrão, temos que $\frac{a}{10} = 1,15$ e $a = 11,5$ e o intervalo em torno da média que contém 75% dos alunos é $(158,5; 181,5)$.

11. Fazendo o teste

$$\begin{aligned}H_0 &: \mu = 1150(\sigma = 150),\\H_1 &: \mu = 1200(\sigma = 200),\end{aligned}$$

e $n = 100$, estabeleceu-se a seguinte região crítica:

$$RC = [1170, \infty[.$$

a) Qual a probabilidade α de rejeitar H_0 quando verdadeira?

Solução: Sob H_0, $\bar{X} \sim N\left(1150; 150^2\right)$ e então

$$\begin{aligned}\alpha &= P(H_1 \mid H_0)\\&= P\left(\bar{X} > 1170 \mid H_0\right)\\&= P\left(\frac{\bar{X}-1150}{150} > \frac{1170-1150}{150} \mid H_0\right)\\&= P(Z > 0,133)\\&= 1 - P(Z < 0,133)\\&= 1 - 0,5517\\&= 0,4483\end{aligned}$$

b) Qual a probabilidade β de aceitar H_0 quando H_1 é verdadeira?

Solução: Sob H_1, $\bar{X} \sim N(1200; 200^2)$ e então

$$
\begin{aligned}
\beta &= P(H_0 \mid H_1) \\
&= P(X < 1170 \mid H_1) \\
&= P\left(\frac{X - 1200}{200} < \frac{1170 - 1200}{150}\right) \\
&= P\left(Z < 0,2\right) \\
&= 0,5793.
\end{aligned}
$$

12. Seja p a probabilidade de obter coroa num lançamento de uma moeda. Para testar a hipótese

$$
\begin{aligned}
H_0 &: p = 0,5 \\
H_1 &: p \neq 0,5
\end{aligned}
$$

decidiu-se lançar uma moeda três vezes. Se sair três coroas, rejeita-se H_0. Quais as probabilidades de erro tipo I e do erro tipo II para $p = \dfrac{2}{3}$?

Solução: Seja C o evento de sair três coroas no lançamento de três moedas. Como os lançamentos das moedas são independentes, temos que

$$
\begin{aligned}
\alpha &= P(H_1 \mid H_0) \\
&= P(C \mid H_0) \\
&= 0,5^3 \\
&= 0,125.
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\beta &= P(H_0 \mid H_1) \\
&= P(C^c \mid H_1) \\
&= 1 - P(C \mid H_1) \\
&= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 \\
&= 0,7.
\end{aligned}
$$

13. O salário médio dos empregados das indústrias siderúrgicas é de $2,5$ salários mínimos, com desvio padrão de $0,5$ salários mínimos. Se uma firma particular emprega 49 empregados com salário médio de $2,3$ salários mínimos, podemos afirmar que essa indústria paga salários inferiores, ao nível de 5%?

Solução: Desejamos testar estatisticamente

$$
\begin{aligned}
H_0 &: \mu \geq 2,5 \\
H_1 &: \mu < 2,5,
\end{aligned}
$$

A região crítica será da forma $[-\infty, c[$. Como $\alpha = 0,05$, temos que

$$\begin{aligned}
0,05 &= P(H_1 \mid H_0) \\
&= P(\bar{X} < c \mid H_0) \\
&= P\left(\frac{\bar{X} - 2,5}{0,5} < \frac{c - 2,5}{0,5} \mid H_0\right) \\
&= P\left(Z < \frac{c - 2,5}{0,5}\right)
\end{aligned}$$

Usando a tabela de distribuição normal, temos que $\dfrac{c - 2,5}{0,5} = -1,65$ e $c = 1,675$. Como $2,3 > 1,675$, concluímos que esta particular firma não tem salário inferior ao nível de significância de 5%.

14. Uma companhia de cigarros anuncia que o índice médio de nicotina dos cigarros que fabrica apresenta-se abaixo de 23 mg por cigarro. Um laboratório realiza 6 análises desse índice, obtendo: 27, 24, 21, 25, 26, 22. Sabe-se que o índice de nicotina se distribui normalmente, com variância igual $4,86mg^2$. Pode-se aceitar, ao nível de significância de 10%, a afirmação do fabricante?

Solução: Desejamos testar as hipóteses

$$\begin{aligned}
H_0 &: \mu \geq 23 \\
H_1 &: \mu < 23.
\end{aligned}$$

Rejeitamos H_0 se $\bar{X} < c$ em que

$$\begin{aligned}
0,1 &= P\left(H_1 \mid H_0\right) \\
&= P(\bar{X} < c \mid H_0) \\
&= P\left(\frac{\bar{X} - 23}{\sqrt{4,86}} < \frac{c - 23}{\sqrt{4,86}} \mid H_0\right) \\
&= P\left(Z < \frac{c - 23}{\sqrt{4,86}}\right).
\end{aligned}$$

Usando a tabela da distribuição normal temos que $\dfrac{c - 23}{\sqrt{4,86}}$ e $c = 20,16$. Como $\bar{X} = 24,16 > c$, não rejeitamos H_0 ao nível de significância de 10%. Isto é, não podemos aceitar a afirmação do fabricante ao nível de significância de 10%.

15. Deseja-se estimar qual a porcentagem média da receita familiar gasta com alimentação em uma grande vila industrial. Para isso, selecionou-se uma amostra com 16 famílias, que apresentou os resultados mostrados na Tabela 2. Dê um intervalo de confiança de 95% para a porcentagem

Tabela 2:

41	44	35	42	34	22	42	42
38	62	29	63	38	45	48	40

média de todas as famílias de moradores da família.

Solução: Sabemos que

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{16}}}$$

tem distribuição t-Student com 15 graus de liberdade. Pela tabela da distribuição t-Student, temos que

$$P\left(-2,145 \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{16}}} \leq 2,145\right) = 0,95,$$

e o intervalo de confiança é

$$\begin{aligned}
IC(95\%) &= \left(-2,145\frac{S}{4} + \bar{X}; 2,145\frac{S}{4} + \bar{X}\right) \\
&= \left(-2,145\frac{10,25}{4} + 41,56; 2,145\frac{10,25}{4} + 41,56\right) \\
&= (36,06; 47,06).
\end{aligned}$$

16. Estamos desconfiados de que a média das receitas municipais *per capita* das cidades pequenas no estado de São Paulo (0 - 20.000) é maior que a receita *per capita* do estado que é 1.229 unidades monetárias. Para comprovar ou não essa hipótese, sorteamos dez cidades pequenas, e obtivemos os seguintes resultados: 1.230, 582, 2.093, 2.621, 1.045, 1.439, 717, 1.838, 1.359. Verifique, ao nível de significância de 5%, se a nossa suspeita é verdade.

Solução: Desejamos decidir entre as seguinte hipóteses

$$\begin{aligned}
H_0 &: \mu \leq 1229 \\
H_1 &: \mu > 1229.
\end{aligned}$$

Sabemos que

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{10}}}$$

tem distribuição t-Student com 9 graus de liberdade. Rejeitamos H_0 se $\bar{X} > c$ com

$$\begin{aligned}
0,05 &= P(H_1 \mid H_0) \\
&= P(\bar{X} > c \mid H_0) \\
&= P\left(\frac{\bar{X}-1229}{\frac{S}{\sqrt{10}}} > \frac{c-1229}{\frac{S}{\sqrt{10}}} \mid H_0\right) \\
&= P\left(t > \frac{c-1229}{\frac{S}{\sqrt{10}}}\right).
\end{aligned}$$

Pela tabela da distribuição t-Student, temos que $\dfrac{c-1229}{\dfrac{S}{\sqrt{10}}} = 1,833$ e $c = 1620,74$. Como $\bar{x} = 1350$, ao nível de significância 5%, a afirmação não é verdadeira. Isto é, ao nível de significância de 5%, as cidades pequenas não tem receita *per capita* maior que o estado.

17. Calcule o intervalo de confiança para a média de uma variável X com distribuição normal em cada um dos casos Tabela 3.

Tabela 3:

Méduа amostral	Tamanho amostral	Desvio Padrão da População	Desvio Padrão Amostral	Coeficiente de Confiança
170	20	Desconhecido	20	95%
165	15	Desconhecido	33	90%
180	5	Desconhecido	28	99%
170	20	15	–	95%
165	15	30	–	90%
180	5	30	–	99%

Solução: Farei os intervalos de confiança para as amostras com 100 elementos. Os outros casos são semelhantes.

Quando desconhecemos o desvio padrão da populacional, o intervalo de confiança com coeficiente de confiança γ é dado por

$$IC(\gamma) = \left(-t_c\frac{S}{\sqrt{n}} + \bar{X}; t_c\frac{S}{\sqrt{n}} + \bar{X}\right)$$

em que $\bar{X}$ é média amostral, S é o desvio padrão amostral e t_c é tal que

$$P(-t_c \leq t \leq t_c) = \gamma$$

e t tem distribuição t-Student com $n-1$ graus de liberdade. Em nosso caso, $S = 20$, $\bar{X} = 170$, $n = 20$, $\gamma = 95\%$ e, usando a tabela da distribuição t-Student, $t_c = 2,086$. Logo, o intervalo de confiança com coeficiente de confiança 90% é

$$\begin{aligned} IC(0,95) &= \left(-2,086\frac{20}{\sqrt{20}} + 170; 2,086\frac{20}{\sqrt{20}} + 170\right) \\ &= (160,67; 179,33) \end{aligned}$$

Quando conhecemos o desvio padrão da população, o intervalo de confiança com coeficiente de confiança γ é dado por

$$IC(\gamma) = \left(-z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \bar{X}; z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \bar{X}\right)$$

em que $\bar{X}$ é a média amostral, σ é o desvio padrão da população e z é tal que

$$P(-z \leq Z \leq z) = \gamma$$

e Z tem distribuição normal padrão. Em nosso caso, $\sigma = 15$, $\bar{X} = 170$, $n = 20$, $\gamma = 95\%$ e, usando a tabela da distribuição normal padrão, $z = 1,96$. Logo, o intervalo de confiança para a média com coeficiente de confiança 90% é

$$\begin{aligned} IC(0,95) &= \left(-1,96\frac{15}{\sqrt{20}} + 170; 1,96\frac{15}{\sqrt{20}} + 170\right) \\ &= (163,43; 176,57). \end{aligned}$$

18. Uma população tem desvio padrão igual a 10.

a) Que tamanho deve ter uma amostra para que, com probabilidade 87,4%, o erro (em valor absoluto) em estimar a média seja inferior a uma unidade?

Solução: O erro em valor absoluto ao estimar a média populacional pela média amostral é $e = |\bar{x} - \mu|$. Pelo Teorema Central do Limite, sabemos que $\bar{X}$ tem distribuição normal com média μ e desvio padrão $\dfrac{10}{\sqrt{n}}$. Então, a probabilidade de e ser menor que um é dada por

$$\begin{aligned} P(e < 1) &= P(|\bar{X} - \mu| < 1) \\ &= P(-1 < \bar{X} - \mu < 1) \\ &= P\left(-\frac{1}{\frac{10}{\sqrt{n}}} < \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{10}{\sqrt{n}}} < \frac{1}{\frac{10}{\sqrt{n}}}\right) \\ &= P\left(-\frac{\sqrt{n}}{10} < Z < \frac{n}{10}\right) \\ &= 2P\left(Z < \frac{\sqrt{n}}{10}\right) - 1 \\ &= 0,874. \end{aligned}$$

Ou seja, $P\left(Z < \dfrac{\sqrt{n}}{10}\right) = \dfrac{1 + 0,874}{2} = 0,937$ e, usando a tabela da distribuição normal padrão, temos que $\dfrac{\sqrt{n}}{10} = 1,53$. Isto é, $n = (1,53 \cdot 10)^2$ e $n = 234,09$. Consequentemente, a amostra deve ter $n = 235$ elementos para ter um erro menor que uma unidade com probabilidade 87,4%.

b) Supondo-se colhida uma amostra com o tamanho amostral do item anterior, qual o intervalo de confiança com coeficiente de confiança 99% se $\bar{x} = 50$?

Solução: O intervalo de confiança quando conhecemos o desvio padrão é dado por

$$IC(\gamma) = \left(-z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \bar{X}; z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \bar{X}\right).$$

Em nosso caso, $\gamma = 0,99$, $\sigma = 10$, $n = 235$, $\bar{X} = 50$ e, usando a tabela da distribuição normal padrão, $z = 1,65$. Logo,

$$\begin{aligned} IC(0,99) &= \left(-1,65\frac{10}{\sqrt{235}} + 50; 1,65\frac{10}{\sqrt{235}} + 50\right) \\ &= (48,92; 51,08). \end{aligned}$$