

Segunda Lista de Exercícios – GET00122

Prof. Dr. Gilberto Pereira Sassi

Universidade Federal Fluminense
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Estatística

24 de Outubro de 2016

1. Considere uma urna contendo três bolas vermelhas e cinco bolas pretas. Retire três bolas, sem reposição, e defina a variável aleatória discreta X : número de bolas pretas. Obtenha a função de probabilidade, desenhe o gráfico da função de distribuição acumulada, calcule a média, o desvio padrão, o primeiro quartil, o segundo quartil e o terceiro quartil.
2. Seja X com distribuição dada Tabela; calcule $E(X)$. Considere a variável aleatória $(X - a)^2$ e calcule $E[(X - a)^2]$ para $a = 0; 0,25; 0,5; 0,75; 1$. Obtenha o gráfico de $E[(X - a)^2] = g(a)$. Para qual valor de a , $g(a)$ é mínimo?
3. O tempo T , em minutos, necessário para um operário processar certa peça é uma variável aleatória com a seguinte distribuição de probabilidade na Tabela 1.

Tabela 1: Tempo para um operário processar certa peça.

t	2	3	4	5	6	7
p(t)	0,1	0,1	0,3	0,2	0,2	0,1

- (a) Calcule o tempo médio de processamento.
Para cada peça processada, o operário ganha um fixo de \$2,00, mas, se ele processa peça em menos de seis minutos, ganha \$0,50 em cada minuto poupado. Por exemplo, se ele processa a peça em quatro minutos, recebe a quantia adicional de \$1,00.
 - (b) Encontre a distribuição, a média e a variância da variável aleatória G : quantia em \$ ganha por peça.
4. Se $X \sim b(n, p)$, sabendo-se que $E(X) = 12$ e $\text{Var}(X) = 3$, determinar:
 - (a) n ;
 - (b) p ;
 - (c) $P(X < 12)$;

- (d) $P(X \geq 14)$;
- (e) $E(Z)$ e $\text{Var}(Z)$, em que $Z = \frac{X - 2}{\sqrt{3}}$;
- (f) $P(Y \geq \frac{14}{16})$, em que $Y = \frac{X}{n}$;
- (g) $P(Y \geq \frac{12}{16})$, em que $Y = \frac{X}{n}$;
5. Numa central telefônica, o número de chamadas chega segundo uma distribuição de Poisson, com média de oito chamadas por minuto. Determinar qual a probabilidade de que num minuto se tenha:
- (a) dez ou mais chamadas;
- (b) menos que nove chamadas;
- (c) entre sete (inclusive) e nove (exclusive) chamadas.
6. Num certo tipo de fabricação de fita magnética, ocorrem cortes a uma taxa de um por 2.000 pés. Qual a probabilidade de que um rolo com 2.000 pés de fita magnética tenha:
- (a) nenhum corte?
- (b) no máximo dois cortes?
- (c) pelo menos dois cortes?
7. Suponha que a probabilidade de que um item produzido por uma máquina seja defeituoso é de 0,2. Se dez itens produzidos por essa máquina são selecionadas ao acaso, qual é a probabilidade de que não mais do que um defeituoso seja encontrado? Use a binomial e a distribuição de Poisson e compare os resultados.
8. Um florista faz estoque de uma flor de curta duração que lhe custa \$0,50 e que ele vende a \$1,50 no primeiro dia em que a flor está na loja. Toda flor que não é vendida nesse primeiro dia não serve mais e é jogada fora. Seja X a variável aleatória que denota o número de flores que os fregueses comprem em um dia casualmente escolhido. O florista descobriu que a função de probabilidade de X é dada pela Tabela 2.

Tabela 2: Função de probabilidade da variável aleatória discreta X .

x	0	1	2	3
p(x)	0,1	0,4	0,3	0,2

9. Na manufatura de certo artigo, é sabido que um entre dez dos artigos é defeituoso. Qual a probabilidade de que uma casual de tamanho quanto contenha:
- (a) nenhum defeituoso?
- (b) exatamente um defeituoso?
- (c) exatamente dois defeituosos?
- (d) não mais do que dois defeituosos?

10. Um curso de treinamento aumenta a produtividade de uma certa população de funcionários em 80% dos casos. Se dez funcionários quaisquer participam desse curso, encontre a probabilidade de:
- (a) exatamente sete funcionários aumentarem a produtividade;
 - (b) não mais do que oito funcionários aumentarem a produtividade;
 - (c) pelo menos três funcionários não aumentarem a produtividade.
11. Determinado tipo de parafuso é vendido em caixas com 1.000 peças. É uma característica da fabricação produzir 10% com defeito. Normalmente, cada caixa é vendida por \$13,50. Um comprador faz a seguinte proposta: de cada caixa, ele escolhe uma amostra de 20 peças; se a caixa não tiver parafusos defeituosos, ele paga \$20,00; um ou dois defeituosos, ele paga \$10,00; três ou mais defeituosos, ele paga \$8,00. Qual alternativa é a mais vantajosa para o fabricante? Justifique.
12. Uma fábrica produz válvulas, das quais 20% são defeituosas. As válvulas são vendidas em caixas de dez peças. Se uma caixa não tiver nenhuma defeituosa, seu preço de venda é \$10,00; tendo uma, o preço \$8,00; duas ou três, o preço é \$6,00; mais do que três, o preço é \$2,00. Qual o preço médio de uma caixa?
13. Suponha que um computador queira decidir se vai aceitar ou não um item. Para isso, ele retira uma amostra de tamanho n do lote e conta o número x de defeituosos. Se $x \leq a$, o lote é aceito, e se $x > a$, o lote é rejeitado; o número a é fixado pelo computador. Suponha que $n = 19$ e $a = 2$. Encontrar a probabilidade de aceitar de aceitar o lote:
- (a) $p = 0,1$;
 - (b) $p = 0,2$;
 - (c) $p = 0,05$.
14. Suponha que X seja uma variável aleatória, com função de probabilidade $p(x) = 2^{-x}$, $x = 1, 2, 3, \dots$. Calcule:
- (a) $P(X \text{ ser par})$;
 - (b) $P(X \leq 3)$;
 - (c) $P(X > 10)$.
15. Num teste tipo certo/errado, com 50 questões, qual é a probabilidade de que um aluno 80% das questões, supondo que ele as responde ao acaso?
16. Encontre a mediana, os quantis de ordens de $p = 0,25; 0,6; 0,8$ da variável aleatória Z com função de probabilidade pela Tabela 3.

Tabela 3: Função de probabilidade.

z	0	1	2	3
p(z)	0,25	0,25	0,25	0,25

17. Dada a função

$$f(x) = \begin{cases} 2 \exp(-2x), & \text{se } x > 0, \\ 0, & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

- (a) Mostre que esta é a uma função de densidade de probabilidade;
- (b) Calcule a probabilidade de $X > 10$.

18. Uma variável aleatória X tem distribuição triangular no intervalo $[0, 1]$ se sua função de densidade de probabilidade for dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ Cx, & 0 \leq x \leq 0,5 \\ c(1-x), & 0,5 \leq x \leq 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

- (a) Qual o valor de C ?
- (b) Faça o gráfico de $f(x)$.
- (c) Determine $P(X \leq 0,5)$, $P(X > 0,5)$ e $P(0,25 \leq X \leq 0,75)$.

19. Suponha que estamos atirando dardos num alvo circular de raio de $10cm$, e seja X a distância do pontos atingido pelo dardo ao centro do alvo. A função de densidade de probabilidade de X é

$$f(x) = \begin{cases} kx, & \text{se } 0 \leq x \leq 10, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- (a) Qual a probabilidade de acertar o centro do alvo, se esse for um círculo de $1cm$ de raio?
- (b) Mostre que a probabilidade de acertar qualquer círculo concêntrico é proporcional à sua área.

20. Encontre o valor da constante c se

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^2}, & x \leq 10, \\ 0, & x > 10, \end{cases}$$

for uma densidade. Encontre $P(X > 15)$.

21. Determine a esperança e a variância da variável aleatória cuja função densidade de probabilidade é

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x), & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

22. A variável aleatória contínua X tem função densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & -1 \leq x \leq 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Se $b \in (-1, 0)$, calcule $P(\frac{b}{2} < X < b)$.

(b) Calcule a $E(X)$ e $\text{Var}(x)$.

23. Certa liga é formada pela minuta fundida de dois metais. A liga resultante contém certa porcentagem de chumbo, X , que pode ser considerada uma variável aleatória com função de densidade de probabilidade

$$f(x) = \frac{3}{5}10^{-5}x(1-x), \quad 0 \leq x \leq 100.$$

Suponha que L , o lucro líquido obtido na venda dessa ligada (por unidade de peso), seja $L = 10 + 15X$. Calcule $E(L)$, o lucro esperado por unidade.

24. A demanda diária de arroz num supermercado, em centenas de quilos, é uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{3}, & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ -\frac{x}{3} + 1, & \text{se } 1 \leq x < 3, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Qual a probabilidade de se vender mais do que $150kg$, num dia escolhido ao acaso?

(b) Em 30 dias, quanto o gerente do supermercado espera vender?

(c) Qual a quantidade de arroz que deve ser deixada à disposição dos clientes diariamente para que não falte arroz em 95% dos dias

25. Seja X com função densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x^2), & \text{se } -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Calcule a média e a variância de X .

26. A temperatura T de destilação do petróleo é crucial na determinação da qualidade final do produto. Suponha que T seja considerada uma variável aleatória contínua com distribuição uniforme no intervalo $(150, 300)$. Suponha que o custo para o custo para produzir um galão de petróleo seja C_1 reais. Se o óleo for destilado a um temperatura inferior a 200° , o produto é vendido a C_3 reais.

(a) Fazer o gráfico da função de densidade de probabilidade T .

(b) Qual o lucro médio por galão?

27. Se $X \sim N(10, 4)$, calcular:

(a) $P(8 < X < 10)$;

(b) $P(9 \leq X \leq 12)$;

(c) $P(X > 10)$;

(d) $P(X < 8 \text{ ou } X > 11)$.

28. Para $X \sim N(100, 100)$, calcule:

- (a) $P(X < 115)$;
- (b) $P(X \geq 80)$;
- (c) $P(|X - 100| \leq 100)$;
- (d) o valor a , tal que $P(100 - a \leq X \leq 100 + a) = 0,95$.
29. As alturas de 10.000 alunos de um colégio têm distribuição aproximadamente normal, com média 170cm e desvio padrão 5cm .
- (a) Qual o número esperado de alunos com altura superior a 165cm ?
- (b) Qual o intervalo simétrico em torno da média que conterá 75% dos alunos?
30. As vendas de um determinado produto têm distribuição aproximadamente normal, com média 500 unidades e desvio padrão 50 unidades. Se a empresa decide fabricar 600 unidades no mês em estudo, qual é a probabilidade de que não possa atender a todos pedidos desse mês, por estar com a produção esgotada?
31. Suponha que as amplitudes de vida de dois aparelhos técnicos, D_1 e D_2 , tenham distribuições $N(42, 36)$ e $N(45, 9)$, respectivamente. Se os aparelhos são feitos para usados por um período de 45 horas, qual o aparelho deve ser preferido? E se for um período de 49 horas?
32. O diâmetro X de rolamentos esféricos produzidos por uma fábrica tem distribuição $N(0,6140; (0,0025)^2)$. O lucro T de cada rolamento depende do seu diâmetro. Assim,
- $T = 0,1$ se o rolamento for bom ($0,610 \leq X \leq 0,618$)
- $T = 0,05$ se o rolamento for recuperável ($0,608 < X < 0,610$) ou ($0,618 < X < 0,620$)
- $T = -0,1$ se o rolamento for defeituoso ($X < 0,608$ ou $X > 0,620$)
- Calcule:
- (a) as probabilidades de que os rolamentos sejam bons, recuperáveis e defeituosos.
- (b) $E(T)$.
33. Seja Y com distribuição binomial de parâmetros $n = 10$ e $p = 0,4$. Determine a aproximação normal para:
- (a) $P(3 < Y < 8)$;
- (b) $P(Y \geq 7)$;
- (c) $P(Y < 5)$.
34. De um lote de produtos manufaturados, extraímos 100 itens ao acaso; se 10% dos itens manufaturados são defeituosos, calcule a probabilidade de 12 itens serem defeituosos. Use a aproximação normal.

35. Numa determinada localidade, a distribuição de renda (em reais) é uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{10} + \frac{1}{10}, & 0 \leq x \leq 2, \\ -\frac{3x}{40} + \frac{9}{20}, & 2 < x \leq 6, \\ 0, & 0 < x \text{ ou } x > 6. \end{cases}$$

- (a) Qual a renda média nessa localidade?
- (b) Escolhida uma pessoa ao acaso, qual a probabilidade de sua renda ser superior a \$3.000,00?
- (c) Qual a mediana da variável?
36. As notas de Estatística Básica dos alunos de determinada universidade se distribuem com uma distribuição normal com média 6,4 e desvio padrão 0,8. O professor atribui graus A, B e C de acordo com a Tabela 4.

Tabela 4: Conceito para turma de Estatística Básica.

Nota	Grau
$X < 5$	C
$5 \leq X < 7,5$	B
$7,5 \leq X \leq 10$	A

37. O peso bruto de latas de conserva é uma variável aleatória contínua com distribuição normal com média 1.000g e desvio padrão 20g.
- (a) Qual a probabilidade de uma lata pesar menos de 980g?
- (b) Qual a probabilidade de uma lata pesar de mais 1010g?
38. Uma enchedora automática de garrafas de refrigerantes está regulada para que o volume médio líquido em cada garrafa seja de 1.000cm^3 e o desvio padrão de 10cm^3 . Pode-se admitir que a variável volume seja normal.
- (a) Qual a porcentagem de garrafas em que o volume de líquido é menor que 990cm^3 ?
- (b) Qual é a porcentagem das garrafas em que o volume líquido não se desvia da média em mais que dois desvios padrões?
- (c) O que acontecerá com a porcentagem do item (b) se a máquina for regulada de forma que a média seja 1.200cm^3 e o desvio padrão 20cm^3 ?
39. O diâmetro de certo tipo de anel industrial é uma variável aleatória contínua com distribuição normal, de média 0,10cm e desvio padrão 0,02cm. Se o diâmetro de um anel diferir da média em mais que 0,03cm, ele é vendido por \$5,00; caso contrário, é vendido por \$10,00. Qual o preço médio de venda de cada anel?