Segunda Lista de Exercícios – GET00122

Prof. Dr. Gilberto Pereira Sassi

Universidade Federal Fluminense
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Estatística

12 de Outubro de 2016

1. Considere uma urna contendo três bolas vermelhas e cinco bolas pretas. Retire três bolas, sem reposição, e defina a variável aleatória discreta X: número de bolas pretas. Obtenha a função de probabilidade, desenhe o gráfico da função de distribuição acumulada, calcule a média, o desvio padrão, o primeiro quartil, o segundo quartil e o terceiro quartil.

2. Seja X com distribuição dada Tabela; calcule $\mathrm{E}(X)$. Considere a variável aleatória $(X-a)^2$ e calcule $E\left[(X-a)^2\right]$ para $a = 0; 0,25; 0,5; 0,75; 1$. Obtenha o gráfico de $E\left[(X-a)^2\right] = g(a)$. Para qual valor de a, $g(a)$ é mínimo?

3. O tempo T, em minutos, necessário para um operário processar certa peça é uma variável aleatória com a seguinte distribuição de probabilidade na Tabela 1.

   Tabela 1: Tempo para um operário processar certa peça.

t	2	3	4	5	6	7
p(t)	0,1	0,1	0,3	0,2	0,2	0,1

   (a) Calcule o tempo médio de processamento.

   Para cada peça processada, o operário ganha um fixo de $\$2,00$, mas, se ele processa peça em menos de seis minutos, ganha $\$0,50$ em cada minuto poupado. Por exemplo, se ele processa a peça em quatro minutos, recebe a quantia adicional de $\$1,00$.

   (b) Encontre a distribuição, a média e a variância da variável aleatório G: quantia em \$ ganha por peça.

4. Se $X \sim b(n,p)$, sabendo-se que $\mathrm{E}(X) = 12$ e $\mathrm{Var}(X) = 3$, determinar:

   (a) n;

   (b) p;

   (c) $P(X < 12)$;

(d) $P(X \geq 14)$;

(e) $\text{E}(Z)$ e $\text{Var}(Z)$, em que $Z = \dfrac{X-2}{\sqrt{3}}$;

(f) $P(Y \geq \frac{14}{16})$, em que $Y = \dfrac{X}{n}$;

(g) $P(Y \geq \frac{12}{16})$, em que $Y = \dfrac{X}{n}$;

5. Numa central telefônica, o número de chamadas chega segundo uma distribuição de Poisson, com média de oito chamadas por minuto. Determinar qual a probabilidade de que num minuto se tenha:

   (a) dez ou mais chamadas;

   (b) menos que nove chamadas;

   (c) entre sete (inclusive) e nove (exclusive) chamadas.

6. Num certo tipo de fabricação de fita magnética, ocorrem cortes a uma taxa de um por 2.000 pés. Qual a probabilidade de que um rolo com 2.000 pés de fita magnética tenha:

   (a) nenhum corte?

   (b) no máximo dois cortes?

   (c) pelo menos dois cortes?

7. Suponha que a probabilidade de que um item produzido por uma máquina seja defeituoso é de 0,2. Se dez itens produzidos por essa máquina são selecionadas ao acaso, qual é a probabilidade de que não mais do que um defeituoso seja encontrado? Use a binomial e a distribuição de Poisson e compare os resultados.

8. Um florista faz estoque de uma flor de curta duração que lhe custa $\$0,50$ e que ele vende a $\$1,50$ no primeiro dia em que a flor está na loja. Toda flor que não é vendida nesse primeiro dia não serve mais e é jogada fora. Seja X a variável aleatória que denota o número de flores que os fregueses compram em um dia casualmente escolhido. O florista descobriu que a função de probabilidade de X é dada pela Tabela 2.

Tabela 2: Função de probabilidade da variável aleatória discreta X.

x	0	1	2	3
p(x)	0,1	0,4	0,3	0,2

9. Na manufatura de certo artigo, é sabido que um entre dez dos artigos é defeituoso. Qual a probabilidade de que uma casual de tamanho quanto contenha:

   (a) nenhum defeituoso?

   (b) exatamente um defeituoso?

   (c) exatamente dois defeituosos?

   (d) não mais do que dois defeituosos?

10. Um curso de treinamento aumenta a produtividade de uma certa população de funcionários em 80% dos casos. Se dez funcionários quaisquer participam desse curso, encontre a probabilidade de:

    (a) exatamente sete funcionários aumentarem a produtividade;

    (b) não mais do que oito funcionários aumentarem a produtividade;

    (c) pelo menos três funcionários não aumentarem a produtividade.

11. Determinado tipo de parafuso é vendido em caixas com 1.000 peças. É uma característica da fabricação produzir 10% com defeito. Normalmente, cada caixa é vendida por $\$13,50$. Um comprador faz a seguinte proposta: de cada caixa, ele escolhe uma amostra de 20 peças; se a caixa não tiver parafusos defeituosos, ele paga $\$20,00$; um ou dois defeituosos, ele paga $\$10,00$; três ou mais defeituosos, ele paga $\$8,00$. Qual alternativa é a mais vantajosa para o fabricante? Justifique.

12. Uma fábrica produz válvulas, das quais 20% são defeituosas. As válvulas são vendidas em caixas de dez peças. Se uma caixa não tiver nenhuma defeituosa, seu preço de venda é $\$10,00$; tendo uma, o preço $\$8,00$; duas ou três, o preço é $\$6,00$; mais do que três, o preço é $\$2,00$. Qual o preço médio de uma caixa?

13. Suponha que um computador queira decidir se vai aceitar ou não um itens. Para isso, ele retira uma amostra de tamanho n do lote e conta o número x de defeituosos. Se $x \leq a$, o lote é aceito, e se $x > a$, o lote é rejeitado; o número a é fixado pelo computador. Suponha que $n = 19$ e $a = 2$. Encontrar a probabilidade de aceitar de aceitar o lote:

    (a) $p = 0,1$;

    (b) $p = 0,2$;

    (c) $p = 0,05$.

14. Suponha que X seja uma variável aleatória, com função de probabilidade $p(x) = 2^{-x}, x = 1, 2, 3, \ldots$. Calcule:

    (a) $P(X \text{ ser par})$;

    (b) $P(X \leq 3)$;

    (c) $P(X > 10)$.

15. Num teste tipo certo/errado, com 50 questões, qual é a probabilidade de que um aluno 80% das questões, supondo que ele as respondas ao acaso?

16. Encontre a mediana, os quantis de ordens de $p = 0,25; 0,6; 0,8$ da variável aleatória Z com função de probabilidade pela Tabela 3.

Tabela 3: Função de probabilidade.

z	0	1	2	3
p(z)	0,25	0,25	0,25	0,25

17. Dada a função

$$f(x) = \begin{cases} 2\exp(-2x), & \text{se } x > 0, \\ 0, & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

   (a) Mostre que esta é a uma função de densidade de probabilidade;

   (b) Calcule a probabilidade de $X > 10$.

18. Uma variável aleatória X tem distribuição triangular no intervalo $[0,1]$ se sua função de densidade de probabilidade for dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ Cx, & 0 \leq x \leq 0,5 \\ c(1-x), & 0,5l \leq x \leq 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

   (a) Qual o valor de C?

   (b) Faça o gráfico de $f(x)$.

   (c) Determine $P(X \leq 0,5)$, $P(X > 0,5)$ e $P(0,25 \leq X \leq 0,75)$.

19. Suponha que estamos atirando dardos num alvo circular de raio de $10cm$, e seja X a distância do pontos atingido pelo dardo ao centro do alvo. A função de densidade de probabilidade de X é

$$f(x) = \begin{cases} kx, & \text{se } 0 \leq x \leq 10, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

   (a) Qual a probabilidade de acertar o centro do alvo, se esse for um círculo de $1cm$ de raio?

   (b) Mostre que a probabilidade de acertar qualquer círculo concêntrico é proporcional à sua área.

20. Encontre o valor da constante c se

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{x^2}, & x \leq 10, \\ 0, & x < 10, \end{cases}$$

for uma densidade. Encontre $P(X > 15)$.

21. Determine a esperança e a variância da variável aleatória cuja função densidade de probabilidade é

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x), & 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

22. A variável aleatória contínua X tem função densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & -1 \leq x \leq 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Se $b \in (-1, 0)$, calcule $P(\frac{b}{2} < X < b)$.

(b) Calcule a $\mathrm{E}(X)$ e $\mathrm{Var}(x)$.

23. Certa liga é formada pela minuta fundida de dois metais. A liga resultante contém certa porcentagem de chumbo, X, que pode ser considerada uma variável aleatória com função de densidade de probabilidade

$$f(x) = \frac{3}{5}10^{-5}x(1-x), \quad 0 \leq x \leq 100.$$

Suponha que L, o lucro líquido obtido na venda dessa ligada (por unidade de peso), seja $L = 10 + 15X$. Calcule $\mathrm{E}(L)$, o lucro esperado por unidade.

24. A demanda diária de arroz num supermercado, em centenas de quilos, é uma variável aleatório contínua com função densidade de probabilidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{3}, & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ -\frac{x}{3} + 1, & \text{se } 1 \leq x < 3, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Qual a probabilidade de se vender mais do que $150kg$, num dia escolhido ao acaso?

(b) Em 30 dias, quanto o gerente do supermercado espera vender?

(c) Qual a quantidade de arroz que deve ser deixada à disposição dos clientes diariamente para que não falte arroz em 95% dos dias

25. Seja X com função densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x^2), & \text{se } -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Calcule a média e a variância de X.

26. A temperatura T de destilação do petróleo é crucial na determinação da qualidade final do produto. Suponha que T seja considerada uma variável aleatória contínua com distribuição uniforme no intervalo $(150, 300)$. Suponha que o custo para o custo para produzir um galão de petróleo seja C_1 reais. Se o óleo for destilado a um temperatura inferior a $200°$, o produto é vendido a C_3 reais.

(a) Fazer o gráfico da função de densidade de probabilidade T.

(b) Qual o lucro médio por galão?

27. Se $X \sim N(10, 4)$, calcular:

(a) $P(8 < X < 10)$;

(b) $P(9 \leq X \leq 12)$;

(c) $P(X > 10)$;

(d) $P(X < 8 \text{ ou } X > 11)$.

28. Para $X \sim N(100, 100)$, calcule:

(a) $P(X < 115)$;
(b) $P(X \geq 80)$;
(c) $P(|X - 100| \leq 100)$;
(d) o valor a, tal que $P(100 - a \leq X \leq 100 + a) = 0,95$.

29. As alturas de 10.000 alunos de um colégio têm distribuição aproximadamente normal, com média $170cm$ e desvio padrão $5cm$.

    (a) Qual o número esperado de alunos com altura superior a $165cm$?
    (b) Qual o intervalo simétrico em torno da média que conterá 75% dos alunos?

30. As vendas de um determinado produto têm distribuição aproximadamente normal, com média 500 unidades e desvio padrão 50 unidades. Se a empresa decide fabricar 600 unidades no mês em estudo, qual é a probabilidade de que não possa atender a todos pedidos desse mês, por estar com a produção esgotada?

31. Suponha que as amplitudes de vida de dois aparelhos técnicos, D_1 e D_2, tenham distribuições $N(42, 36)$ e $N(45, 9)$, respectivamente. Se os aparelhos são feitos para usados por um período de 45 horas, qual o aparelho deve ser preferido? E se for um período de 49 horas?

32. O diâmetro X de rolamentos esféricos produzidos por uma fábrica tem distribuição $N(0,6140; (0,0025)^2)$. O lucro T de cada rolamento depende do seu diâmetro. Assim,

    $T = 0,1$ se o rolamento for bom $(0,610 \leq X \leq 0,618)$

    $T = 0,05$ se o rolamento for recuperável $(0,608 < X < 0,610)$ ou $(0,618 < X < 0,620)$

    $T = -0,1$ se o rolamento for defeituoso $(X < 0,608$ ou $X > 0,620)$

    Calcule:

    (a) as probabilidades de que os rolamentos sejam bons, recuperáveis e defeituosos.
    (b) $\mathrm{E}(T)$.

33. Seja Y com distribuição binomial de parâmetros $n = 10$ e $p = 0,4$. Determine a aproximação normal para:

    (a) $P(3 < Y < 8)$;
    (b) $P(Y \geq 7)$;
    (c) $P(Y < 5)$.

34. De um lote de produtos manufaturados, extraímos 100 itens ao acaso; se 10% dos itens manufaturados são defeituosos, calcule a probabilidade de 12 itens serem defeituosos. Use a aproximação normal.

35. Numa determinada localidade, a distribuição de renda (em reais) é uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{10} + \dfrac{1}{10}, & 0 \leq x \leq 2, \\ -\dfrac{-3x}{40} + \dfrac{9}{20}, & 2 < x \leq 6, \\ 0, & 0 < x \text{ ou } x > 6. \end{cases}$$

   (a) Qual a renda média nessa localidade?

   (b) Escolhida uma pessoa ao acaso, qual a probabilidade de sua renda ser superior a $\$3.000,00$?

   (c) Qual a mediana da variável?

36. As notas de Estatística Básica dos alunos de determinada universidade se distribuem com uma distribuição normal com média $6,4$ e desvio padrão $0,8$. O professor atribui graus A, B e C de acordo com a Tabela 4.

Tabela 4: Conceito para turma de Estatística Básica.

Nota	Grau
$X < 5$	C
$5 \leq X < 7,5$	B
$7,5 \leq X \leq 10$	A

37. O peso bruto de latas de conserva é uma variável aleatória contínua com distribuição normal com média $1.000g$ e desvio padrão $20g$.

   (a) Qual a probabilidade de uma lata pesar menos de $980g$?

   (b) Qual a probabilidade de uma lata pesar de mais $1010g$?

38. Uma enchedora automática de garrafas de refrigerantes está regulada para que o volume médio líquido em cada garrafa seja de $1.000cm^3$ e o desvio padrão de $10cm^3$. Pode-se admitir que a variável volume seja normal.

   (a) Qual a porcentagem de garrafas em que o volume de líquido é menor que $990cm^3$?

   (b) Qual é a porcentagem das garrafas em que o volume líquido não se desvia da média em mais que dois desvios padrões?

   (c) O que acontecerá com a porcentagem do item (b) se a máquina for regulada de forma que a média seja $1.200cm^3$ e o desvio padrão $20cm^3$?

39. O diâmetro de certo tipo de anel industrial é uma variável aleatória contínua com distribuição normal, de média $0,10cm$ e desvio padrão $0,02cm$. Se o diâmetro de um anel diferir da média em mais que $0,03cm$, ele é vendido por $\$5,00$; caso contrário, é vendido por $\$10,00$. Qual o preço médio de venda de cada anel?