1. **Постановка задачи**

Интерполирование функции с помощью многочлена Лагранжа степени `m` на неравномерной сетке узлов.

Вычисляется значение интерполяционного многочлена Лагранжа в точке `XX` по значению функции в точках наименее удалённых от точки `XX`.

2. **Теоретическая часть**

Данная задача предполагает использование алгоритма интерполирования в форме Лагранжа на неравномерной сетке узлов, где

форма Лагранжа описывается:

1.2 Интерполяционная формула Лагранжа

Введём в рассмотрение вспомогательные многочлены

$$L_n^{(i)}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}. \qquad (2)$$

Очевидно, что $L_n^{(i)}(x)$ есть многочлен степени n и что выполняются равенства

5

1.2 Интерполяционная формула Лагранжа

Введём в рассмотрение вспомогательные многочлены

$$L_n^{(i)}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}. \qquad (2)$$

Очевидно, что $L_n^{(i)}(x)$ есть многочлен степени n и что выполняются равенства

5

Неравномерная сетка представляет собой набор значений такой, что разность между его элементами не константна.

Также стоит учитывать погрешности:

Дана таблица значений некоторой функции $f(x)$; требуется для заданного значения x^* вычислить значение $f(x^*)$ с заданной точностью EPS или с наилучшей возможной точностью при имеющейся информации.

Пусть есть некоторая формула или некоторое правило для построения интерполяционных многочленов $P_m(x)$. Каждый многочлен вычисляется по значению в узлах матрицы, наименее удалённых от точки x^*, поэтому перед началом всех вычислений перенумеруем узлы матрицы в порядке возрастания $|x_i - x^*|$. Предполагая функцию $f(x)$ гладкой, примем следующий практический критерий оценки погрешности

$$\varepsilon_m = |f(x^*) - P_m(x^*)| \cong |P_{m+1}(x^*) - P_m(x^*)|. \qquad (35)$$

Далее строим интерполяционный процесс, вычисляем многочлены возрастающих степеней с одновременной оценкой погрешностей:

$$P_0(x^*),\ P_1(x^*),\ \varepsilon_0,\quad P_2(x^*),\ \varepsilon_1,\quad P_3(x^*),\ \varepsilon_2,\quad \ldots,\ P_{m+1}(x^*),\ \varepsilon_m, \ldots (36)$$

Интерполяционный процесс прекращается при выполнении одного из следующих условий:

— $\varepsilon_m <$ EPS, то есть достигается заданная точность интерполяции;

— $\varepsilon_m > \varepsilon_{m+1}$, то есть абсолютное значение разности между двумя последовательными интерполяционными значениями перестаёт уменьшаться (проверка начинается с $m = 2$);

3. **Алгоритм**

- Функция `lagrange_interpolation(X, Y, N, XX, m, eps)` выполняет интерполяцию Лагранжа для заданной функции на неравномерной сетке узлов. Она принимает следующие аргументы:
  - `X`: Массив координат узлов интерполяции.
  - `Y`: Массив значений функции в узлах интерполяции.
  - `N`: Количество узлов интерполяции.
  - `XX`: Точка, в которой вычисляется значение интерполяционного многочлена.
  - `m`: Максимальная степень интерполяционного многочлена Лагранжа.
  - `eps`: Критерий остановки (точность).
- `func_a(x)`: Функция, представляющая собой y = (1/10)x^3 + x^2 + (1/2)x.
- `func_b(x)`: Функция, представляющая собой y = (1/2)x^4 + 2x^3 + (1/2)x^2 + (1/5)x.

4. **Тестирование**

Тест	Тестовая точка	Актуальное значение	Приближенное значение	Точность	Степень многочлена
1	-6.4	11.5456	11.545599999999999	1.7763568394002505e-15	5

Тест	Тестовая точка	Актуальное значение	Приближенное значение	Точность	Степень многочлена
2	0	0	-3.0357660829594124e-18	-3.0357660829594124e-18	5
3	20	1210	1210.0000000000018	1.8189894035458565e-12	5