

## 1. Постановка задачи

Интерполирование функции с помощью многочлена Лагранжа степени  $m$  на неравномерной сетке узлов.

Вычисляется значение интерполяционного многочлена Лагранжа в точке  $xx$  по значению функции в точках наименее удалённых от точки  $xx$ .

## 2. Теоретическая часть

Данная задача предполагает использование алгоритма интерполирования в форме Лагранжа на неравномерной сетке узлов, где

форма Лагранжа описывается:

### 1.2 Интерполяционная формула Лагранжа

Введём в рассмотрение вспомогательные многочлены

$$L_n^{(i)}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}. \quad (2)$$

Очевидно, что  $L_n^{(i)}(x)$  есть многочлен степени  $n$  и что выполняются равенства

5

$$L_n^{(i)}(x)|_{x_j} = \begin{cases} 1, & x_j = x_i \\ 0, & x_j \neq x_i \end{cases}, \quad i, j = 0, 1, \dots, n.$$

Многочлены  $L_n^{(i)}(x)$  называются **коэффициентами Лагранжа**, а интерполяционный многочлен  $P_n(x)$ , записанный в виде

$$P_n(x) = f(x_0)L_n^{(0)}(x) + f(x_1)L_n^{(1)}(x) + \dots + f(x_n)L_n^{(n)}(x),$$

называется **интерполяционным многочленом в форме Лагранжа** и обозначается  $L_n(x)$ :

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}. \quad (3)$$

Неравномерная сетка представляет собой набор значений такой, что разность между его элементами не константна.

Также стоит учитывать погрешности:

Дана таблица значений некоторой функции  $f(x)$ ; требуется для заданного значения  $x^*$  вычислить значение  $f(x^*)$  с заданной точностью EPS или с наилучшей возможной точностью при имеющейся информации.

Пусть есть некоторая формула или некоторое правило для построения интерполяционных многочленов  $P_m(x)$ . Каждый многочлен вычисляется по значению в узлах матрицы, наименее удалённых от точки  $x^*$ , поэтому перед началом всех вычислений перенумеруем узлы матрицы в порядке возрастания  $|x_i - x^*|$ . Предполагая функцию  $f(x)$  гладкой, примем следующий практический критерий оценки погрешности

$$\varepsilon_m = |f(x^*) - P_m(x^*)| \cong |P_{m+1}(x^*) - P_m(x^*)|. \quad (35)$$

Далее строим интерполяционный процесс, вычисляем многочлены возрастающих степеней с одновременной оценкой погрешностей:

$$P_0(x^*), P_1(x^*), \varepsilon_0, P_2(x^*), \varepsilon_1, P_3(x^*), \varepsilon_2, \dots, P_{m+1}(x^*), \varepsilon_m, \dots \quad (36)$$

Интерполяционный процесс прекращается при выполнении одного из следующих условий:

- $\varepsilon_m < \text{EPS}$ , то есть достигается заданная точность интерполяции;
- $\varepsilon_m > \varepsilon_{m+1}$ , то есть абсолютное значение разности между двумя последовательными интерполяционными значениями перестаёт уменьшаться (проверка начинается с  $m = 2$ );

### 3. Алгоритм

- Функция `lagrange_interpolation(X, Y, N, XX, m, eps)` выполняет интерполяцию Лагранжа для заданной функции на неравномерной сетке узлов. Она принимает следующие аргументы:
  - **X**: Массив координат узлов интерполяции.
  - **Y**: Массив значений функции в узлах интерполяции.
  - **N**: Количество узлов интерполяции.
  - **XX**: Точка, в которой вычисляется значение интерполяционного многочлена.
  - **m**: Максимальная степень интерполяционного многочлена Лагранжа.
  - **eps**: Критерий остановки (точность).
- `func_a(x)`: Функция, представляющая собой  $y = (1/10)x^3 + x^2 + (1/2)x$ .
- `func_b(x)`: Функция, представляющая собой  $y = (1/2)x^4 + 2x^3 + (1/2)x^2 + (1/5)x$ .

### 4. Тестирование

| Тест | Тестовая точка | Актуальное значение | Приближенное значение | Точность               | Степень многочлена |
|------|----------------|---------------------|-----------------------|------------------------|--------------------|
| 1    | -6.4           | 11.5456             | 11.545599999999999    | 1.7763568394002505e-15 | 5                  |

| Тест | Тестовая точка | Актуальное значение | Приближенное значение   | Точность                | Степень многочлена |
|------|----------------|---------------------|-------------------------|-------------------------|--------------------|
| 2    | 0              | 0                   | -3.0357660829594124e-18 | -3.0357660829594124e-18 | 5                  |
| 3    | 20             | 1210                | 1210.00000000000018     | 1.8189894035458565e-12  | 5                  |