1. **Постановка задачи**

Необходимо реализовать метод обратных итераций с исчерпыванием определения пары со вторым минимальным по модулю собственным значением симметричной матрицы простой структуры

Для решения линейной системы уравнений использовать метод Халецкого

2. **Теоретическая часть**

Данная задача преполагает использование алгоритма обратных итераций с исчерпыванием, то есть нахождение второго минимального по модулю собственного значения. Этот алгоритм использует знание, которое нужно получить с помощью обычного метода обратных итераций

Описание и формулы данных алгоритмов:

2.3. Метод обратных итераций

Если матрица A невырожденная, то наибольшее по модулю собственное значение матрицы $A^{(-1)}$ будет равно $1/\lambda_1$. Итерационная схема (2.1.2), примененная к матрице $A^{(-1)}$, имеет вид

$$\begin{cases} \nu^{(k)} = x^{(k)} / \left\| x^{(k)} \right\| \\ x^{(k+1)} = A^{-1}\nu^{(k)} \Leftrightarrow Ax^{(k+1)} = \nu^{(k)}, \end{cases} \quad \text{k} = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.3.1}$$

причем $\alpha^{(k)} = \nu^{(k)^T} x^{(k+1)} \to 1/\lambda_1$, $\nu^{(k)} \to \pm x_1$ при $\text{k} \to \infty$. На каждом итерационном шаге вектор $x^{(k+1)}$ находится как решение системы линейных уравнений $Ax^{(k+1)} = \nu^{(k)}$.

Замечание 1. Скорость сходимости итерационного процесса (c8) зависит от отношения $\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right|$:

$$\begin{aligned} \alpha^{(k)} &= \frac{1}{\lambda_1}\left[1 + O\left(\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right|^{2k}\right)\right], \\ \nu^{(k)} &= \left(\frac{\lambda_1}{|\lambda_1|}\right)^k \frac{\xi_1}{|\xi_1|}\left[x_1 + O\left(\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right|^k\right)\right] \to \pm x_1. \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

2.4. Метод обратных итераций с исчерпыванием

Если пара (λ_1, x_1) найдена, то следующую пару (λ_2, x_2) можно найти, применяя итерационный процесс (2.1.2) к матрице $B = A^{-1}(E - x_1 x_1^T)$:

$$\begin{cases} \nu^{(k)} = x^{(k)} / \left\| x^{(k)} \right\| \\ A x^{(k+1)} = (E - x_1 x_1^T) \nu^{(k)}, \end{cases} \quad \text{k} = 0, 1, 2, \ldots \qquad (2.4.1)$$

при этом $\nu^{(k)} \to \pm x_2$, $\alpha^{(k)} = \nu^{(k)^T} x^{(k+1)} \to 1/\lambda_2$ при $\text{k} \to \infty$.

Замечание 3. Если для решения системы уравнений с матрицей A применяется один из методов LU-разложения матрицы A, то один раз найденное LU-разложение используется и для определения пары (λ_1,x_1), и для определения пары (λ_2,x_2).

> Таким образом:
> Для начала необходимо составить квадратную симметричную матрицу размерности N, имеющую заранее известные собственные значения, для этого можно взять матрицу

$$\begin{gathered} A = H \Lambda H^T, \text{где} \\ H = E - 2\omega\omega^T, \\ \Lambda = diag(\lambda_i), \\ \omega - \text{случайный пронормированный вектор} \end{gathered}$$

> Далее идет основная часть алгоритма:
> Находим собственную пару (λ_1, g_1) с помощью метода обратных итераций, описанного выше.
> Случайно генерируем и нормализуем вектор $x^{(0)}$, после чего запускаем итерационный процесс нашего метода, с помощью которого находим

$$\begin{gathered} \nu^{(k)} \approx g_2, \\ \sigma^{(k)} \approx \lambda_2, \\ \text{где } k \ - \text{количество итераций} \end{gathered}$$

3. **Алгоритм**

- Функция `TEST_generate_householder_mat()` генерирует вышеупомянутую матрицу A
- Функция `inverse_iteration()` - это реализация алгоритма обратных итераций, для нахождения первой минимальной собственной пары
- Функция `inverse_iteration_with_shift_one()` - это реализация алгоритма обратных итераций с исчерпыванием, для нахождения второй минимальной собственной пары
- Функция `TEST()` нужна для тестирования случайно сгенерированных матриц и оценки погрешностей вычислений

4. **Тестирование**

№ теста	Размерность системы N	Диапазон значений λ	ε Точность	Ср. оценка точности собств. значений	Ср. оценка точности собств. векторов	Средняя мера точности r	Среднее число итераций

№ теста	Размерность системы N	Диапазон значений λ	ε Точность	Ср. оценка точности собств. значений	Ср. оценка точности собств. векторов	Средняя мера точности r	Среднее число итераций
1	10	2	1e-13	1.332e-13	1.120e-06	3.114e-07	77.5
2	10	2	1e-13	2.132e-13	1.340e-06	7.556e-09	42.5
3	10	50	1e-13	1.547e-11	2.281e-06	1.230e-05	37.8
4	10	50	1e-13	1.024e-11	3.130e-06	3.284e-06	35.4
5	30	2	1e-13	1.012e-14	2.779e-07	4.057e-10	30.6
6	30	2	1e-13	9.349e-07	1.309e-02	3.302e-09	75.7
7	30	50	1e-13	4.109e-11	3.002e-06	4.603e-07	52.5
8	30	50	1e-13	3.076e-11	3.919e-06	2.734e-06	89.0
9	50	2	1e-13	8.733e-06	3.767e-02	2.021e-08	127.2
10	50	2	1e-13	1.608e-06	1.418e-02	2.637e-10	141.0
11	50	50	1e-13	4.060e-12	2.419e-06	1.812e-06	59.1
12	50	50	1e-13	5.678e-11	4.289e-06	2.767e-06	59.7