1. **Постановка задачи**

Необходимо реализовать **метод Халецкого** для решения СЛАУ с симметричными ленточными матрицами.

При численной реализации недопустимо использование матриц размерности (N, N).

2. **Теоретическая часть**

Данная задача преполагает использование алгоритма Холецкого, который основывается на теореме:

Если все главные миноры матрицы A отличны от нуля, то матрица A, согласно известной LU-теореме линейной алгебры [1], представима в виде произведения двух матриц

$$A = BC, \tag{1.1.1}$$

где B – нижняя треугольная матрица, C – верхняя треугольная матрица с единицами на главной диагонали. Соотношение (1.1.1) символически обозначено на рис. 1.1.1.

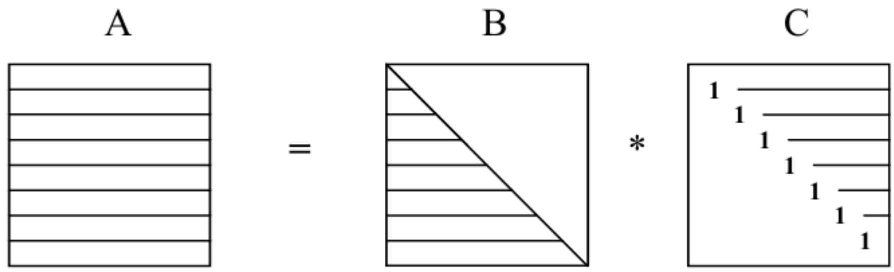

Рис. 1.1.1

Нетрудно видеть, что справедливы формулы:

$$b_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik} c_{kj}, \quad j = 1 \div N, \quad i = j \div N, \tag{1.1.2}$$

$$c_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik} c_{kj} \right) \Big/ b_{ii}, \quad i = 1 \div N, \quad j = i+1 \div N. \tag{1.1.3}$$

В самом деле, соотношения (1.1.2), (1.1.3) непосредственно следуют из правила перемножения двух матриц

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} c_{kj}, \tag{1.1.4}$$

После явного разложения матрицы две состовляющие B и C можно приступить к непосредственному решению системы:

Если матрица A представлена в виде (1.1.1), то решение системы линейных алгебраических уравнений

$$Ax = f \tag{1.1.5}$$

сводится к последовательному решению двух систем уравнений с треугольными матрицами

$$By = f, \tag{1.1.6}$$

$$Cx = y, \tag{1.1.7}$$

которые в символическом виде изображены на рис. 1.1.4.

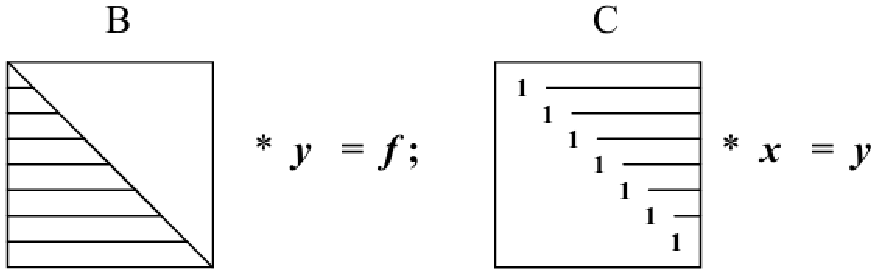

Рис. 1.1.4

Компоненты векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ определяются по формулам

$$y_i = \left(f_i - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik} y_k \right) \Big/ b_{ii}, \qquad i = 1 \div N, \tag{1.1.8}$$

$$x_i = y_i - \sum_{k=i+1}^{N} c_{ik} x_k, \quad i = N \div 1. \tag{1.1.9}$$

Вычисление элементов матриц B, C по формулам (1.1.2), (1.1.3) называется **прямым ходом метода Халецкого**, а определение $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x}$ по формулам (1.1.8), (1.1.9) – **обратным ходом метода Халецкого**.

Условие симметричности позволяет нам упростить вычисления:

Если матрица A симметрична, то метод Халецкого существенно упрощается [2]. В этом случае элементы матрицы C выражаются через элементы матрицы B

$$c_{ij} = \frac{b_{ji}}{b_{ii}}, \tag{1.1.10}$$

и матрицу C вычислять нет необходимости. В самом деле, соотношение (1.1.10) непосредственно следует из сопоставления формул (1.1.2), (1.1.3). Матрица B, как и в общем случае, определяется по столбцам: сначала 1-й столбец, затем 2-й и т. д. С учетом соотношения (1.1.10) формула для вычисления элементов b_{ij} записывается в виде:

$$b_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik} b_{jk} \Big/ b_{kk}, \ i = 1 \div N, j = i \div N. \qquad (1.1.11)$$

Расчетная формула (1.9) с учетом (1.10) принимает вид

$$x_i = y_i - \left(\sum_{k=i+1}^{N} b_{ki} x_k \right) \Big/ b_{ii}, \quad i = N \div 1. \qquad (1.1.12)$$

Также хранение матриц осуществляется с помощью ленточного представления:

Ниже мы будем полагать, что L << N. Тогда для хранения матриц A, B, C нецелесообразно пользоваться массивами размерности N × N, лучше хранить только элементы лент этих матриц в массивах размерности N × (2N – 1), N × L, которые будем называть прямоугольными. Рассмотрим сначала матрицу с полной лентой ширины (2L – 1). Наиболее естественным является размещение ленты в прямоугольном массиве, символически представленное на рис. 1.1.8.

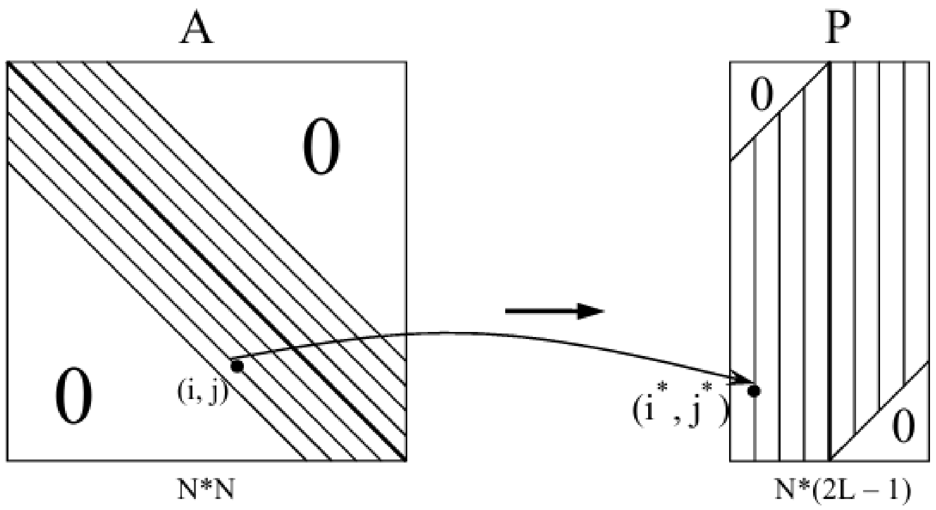

Рис. 1.1.8

Такое размещение предполагает, что каждая i-я строка ленты матрицы A хранится в i-ой строке матрицы P, самая нижняя кодиагональ ленты хранится в первом столбце, следующая кодиагональ – во втором столбце и т. д. Очевидно, что главная диагональ хранится в L-ом столбце, самая верхняя кодиагональ ленты – в (2L – 1)-ом столбце.

Пусть (i,j) – индексы некоторого элемента матрицы A, (i^*, j^*) – индексы этого же элемента в прямоугольном массиве P:

$$a_{ij} \to P_{i^* j^*}. \quad (1.1.20)$$

Тестирование:

Замечания об обязательных вычислительных экспериментах в вариантах 1–8.

1. В отчете должны быть приведены данные о решении систем уравнений с ленточными матрицами порядка 10^1, 10^2 с диапазоном элементов матриц $-10^1 \div 10^1$ и отношением $L/N \cong 1/10,\ \ 1/L$. Например, если тестируется матрица размерности N = 40 (400), то значение L можно взять 4 и 10 (38 и 90). Результаты тестирования помещаются в таблицу.

№ теста	Размерность системы	Отношение L/N	Средняя относительная погрешность решения
1	…	…	…

Минимальное количество строк таблицы равно 4.

О вычислении средней относительной погрешности решения см. замечание о тестировании в задании № 1.

2. В отчете должны быть приведены данные о решении систем уравнений с хорошо обусловленными квадратными матрицами. Хорошо обусловленная система уравнений (см. п. 3 раздела «О составлении численных примеров…») тестируется для двух размерностей порядка 10^1 и двух размерностей порядка 10^2. Результаты тестирования заносятся в таблицу.

№ теста	Размерность системы	Средняя относительная погрешность решения
1	…	…

3. В отчете должны быть приведены данные о решении систем уравнений с плохо обусловленными матрицами. Плохо обусловленные системы уравнений тестируется для двух размерностей порядка 10^1. При построении тестовых матриц (см. п. 4 раздела «О составлении численных примеров…») малые диагональные элементы матриц L, U получаются следующим образом. Матрицы L, U заполняются случайно сгенерированными элементами в диапазоне $-10^1 \div 10^1$, а затем диагональные элементы умножаются на 10^{-k}. В отчете должны быть данные для $k = 2, 4, 6$. Результаты вычислительных экспериментов помещаются в таблицу.

№ теста	Порядок k	Размерность системы	Средняя относительная погрешность решения
1	…	…	….

3. **Алгоритм**

- Функция `GenerateMatrix()` генерирует ленточную матрицу по заданным параметрам.
- Функция `Halecki()` является основой функцией программы, она осуществляет прямой и обратный проходы алгоритма, возвращая найденный вектор решения.
- Функция `GetPricision()` вычисляет отностительную погрешность решения.

- Функции `GetMatrixB`, `GetVectorY`, `GetVectorX` являются вспомогательными, они раскладывают матрицу по теореме, затем ищут вектор решения икс.

4. **Тестирование**

Данные о решении систем уравнений с ленточными матрицами:

Номер теста	Размерность	L/N	Погрешность
1	20	0.1	5.35 e-15
2	40	0.25	1.96 e-13
3	200	0.1	9.6 e-12
4	400	0.25	1.59 e-10

Данные о решении систем уравнений с хорошо обусловленными ленточными матрицами:

Номер теста	Размерность	Погрешность
1	34	8.74 e-16
2	56	6.89 e-16
3	374	3.14 e-15
4	634	4.01 e-15

Данные о решении систем уравнений с плохо обусловленными ленточными матрицами:

Номер теста	Размерность	Порядок k	Погрешность
1	20	2	7.63 e-12
2	60	2	3.91 e-11
3	20	4	2.36 e-08
4	60	4	1.03 e-05
5	20	6	0.0011
6	60	6	0.0014