

# Отчёт о выполнении индивидуального задания "Решение систем линейных уравнений с разреженными матрицами специального вида"

---

## Постановка задачи

Портреты матриц систем во всех вариантах задания различны и определяются номером варианта.

Однако по структуре они похожи – имеют по три диагонали и «испорчены» либо двумя столбцами, либо двумя строками, либо одним столбцом и одной строкой.

Во всех вариантах исходные системы уравнений задаются шестью векторами: **a**, **b**, **c**, **f**, **p**, **q**. Векторы **a**, **b**, **c** содержат значения трех диагоналей матрицы, **f** – вектор правой части системы, **p**, **q** – векторы для строк или столбцов, которые «портят» матрицы системы.

# Теоретическая часть

Вариант \ 14

Система (1)

В данном варианте мы имеем диагональные векторы **a**, **b**, **c** и испорченный вектор **p** по индексу  $0 < k < n - 1$

						<b>k</b>			
*	*					*			
*	*	*				*			
	*	*	*			*			
		*	*	*		*			
			*	*	*	*			
				*	*	*			
					*	*	*		
						*	*	*	
						*	*	*	*
						*		*	*

$$\begin{cases}
 b_1 * x_1 + c_1 * x_2 + p_k * x_k & = f_1 & k > 2 \\
 b_1 * x_1 + c_1 * x_2 & = f_1 & k = 2 \\
 a_i * x_{i-1} + b_i * x_i + c_i * x_{i+1} + p_i * x_k & = f_i & i \notin (1, k-1, k, k+1, n-1) \\
 a_i * x_{i-1} + b_i * x_i + p_i * x_{i+1} & = f_i & i = k-1, k \neq 2 \\
 a_i * x_{i-1} + p_i * x_i + c_i * x_{i+1} & = f_i & i = k \\
 p_i * x_{i-1} + b_i * x_i + c_i * x_{i+1} & = f_i & i = k+1, k \neq n-1 \\
 b_n * x_n + a_{n-1} * x_{n-1} + p_k * x_k & = f_n & k < n-1 \\
 b_n * x_n + a_{n-1} * x_{n-1} & = f_n & k = n-1
 \end{cases}$$

, где  $n$  - размерность системы,  $k \in [1, n-1]$

Оценки точности:

$$\delta_{\tilde{x}} = \max_i \left| \frac{\tilde{x}_i - 1}{1} \right| = \max_i |\tilde{x}_i - 1|.$$

, где  $\delta_{\tilde{x}_i}$  - оценка точности,  $\tilde{x}_i$  - вектор решения для  $x = (1, 1, \dots, 1)$

Оценки погрешностей:

$$\delta_x = \max_i \delta x_i,$$

$$\delta x_i = \begin{cases} \left| \frac{x_i - x_i^*}{x_i^*} \right|, & \text{если } |x_i^*| > q \\ |x_i - x_i^*|, & \text{если } |x_i^*| \leq q, \end{cases}$$

, где  $\delta_x$  - оценка погрешности,  $x_i^*$  - вектор решения для  $x$ , где  $x$  - точное решение системы.

$q$  - сравнительно малое число, задаётся системно

Алгоритм

Для описания решения системы (1) воспользуемся символическим изображением алгоритма:

Шаг первый

						k			
1	*					*			
0	1	*				*			
	0	1	*			*			
		0	1	*		*			
			0	1	*	*			
				0	1	*			
					0	*	*		
						*	*	*	
						*	*	*	*
						*		*	*

Шаг второй

						k			
1	*					*			
0	1	*				*			
	0	1	*			*			
		0	1	*		*			
			0	1	*	*			
				0	1	*			
					0	*	0		
						*	1	0	
						*	*	1	0
						*		*	1

Шаг третий

						k			
1	*					0			
0	1	*				0			
	0	1	*			0			
		0	1	*		0			
			0	1	*	0			
				0	1	0			
					0	1	0		
						0	1	0	
						0	*	1	0
						0		*	1

Шаг четвертый, обратный ход

						k			
1	*					0			
0	1	*				0			
	0	1	*			0			
		0	1	*		0			
			0	1	*	0			
				0	1	0			
					0	1	0		
						0	1	0	
						0	0	1	0
						0		0	1

Шаг пятый, обратный ход

						k			
1	0					0			
0	1	0				0			
	0	1	0			0			
		0	1	0		0			
			0	1	0	0			
				0	1	0			
					0	1	0		
						0	1	0	
						0	0	1	0
						0		0	1

После проделанных шагов полученный вектор **f'** и будет решением системы (1)



## Основные процедуры

Деление строки на число:

```
def div_line_by(self, line_idx, divisor):
    if divisor == 0:
        return None

    if line_idx > 0:
        self.a[line_idx - 1] /= divisor

    if line_idx < self.size - 1:
        self.c[line_idx] /= divisor

    self.b[line_idx] /= divisor
    self.p[line_idx] /= divisor
    self.f[line_idx] /= divisor
```

Вычитание строк

```
def subtract_from(self, from_idx, source_idx):
    if from_idx < source_idx:
        value = self.c[from_idx]

        if source_idx == self.k + 2:
            self.a[from_idx - 1] -= self.p[source_idx] * value

        self.c[from_idx] -= value
        self.b[from_idx] -= self.a[source_idx - 1] * value
        self.p[from_idx] -= self.p[source_idx] * value
        self.f[from_idx] -= self.f[source_idx] * value
    else:
        value = self.a[from_idx - 1]

        self.a[from_idx - 1] -= value

        if source_idx == self.k - 2:
            self.c[from_idx] -= self.p[source_idx] * value

        self.b[from_idx] -= self.c[source_idx] * value
        self.p[from_idx] -= self.p[source_idx] * value
        self.f[from_idx] -= self.f[source_idx] * value
```

Процедура соответствующая первому проходу алгоритма

```
def gauss_until_k(self):
    for i in range(self.k):
```

```
self.div_line_by(i, self.b[i])
self.subtract_from(i + 1, i)
```

Процедура соответствующая второму проходу алгоритма

```
def gauss_past_k(self):
    for i in range(self.size - 1, self.k, -1):
        self.div_line_by(i, self.b[i])
        self.subtract_from(i - 1, i)
```

Процедура соответствующая третьему проходу алгоритма

```
def gauss_line_k(self):
    self.div_line_by(self.k, self.b[self.k])
    f_k = self.f[self.k]

    self.a[self.k] = 0
    self.c[self.k - 1] = 0
    for i in range(self.k):
        value = self.p[i]
        self.p[i] -= value
        self.f[i] -= value * f_k

    for i in range(self.size - 1, self.k, -1):
        value = self.p[i]
        self.p[i] -= value
        self.f[i] -= value * f_k
```

Процедура соответствующая четвертому проходу алгоритма

```
def reverse_gauss_past_k(self):
    for i in range(self.k, self.size - 1):
        self.subtract_from(i + 1, i)
```

Процедура соответствующая пятому проходу алгоритма

```
def reverse_gauss_until_k(self):
    for i in range(self.k - 1, 0, -1):
        self.subtract_from(i - 1, i)
```

Основные процедуры решения

```
def input_matrix_vec(self, a, b, c, p, f, k):
    self.vec_form = True
    self.k = k
    self.size = b.shape[0]
    self.shape = (self.size, self.size)

    self.a = np.copy(a)
    self.b = np.copy(b)
    self.c = np.copy(c)
    self.p = np.copy(p)
    self.set_f(f)

def solve(self):
    if not self.vec_form:
        self.build_vectors()

    self.gauss_until_k()

    self.gauss_past_k()

    self.gauss_line_k()

    self.reverse_gauss_until_k()

    self.reverse_gauss_past_k()
    return self.f
```

Результаты тестирования

Номер теста	Размерность системы	Диапазон значений	Средняя точность	Средняя погрешность
1	10	(-10, 10)	1.17E-13	5.69E-13
2	10	(-100, 100)	4.20E-14	1.27E-12
3	10	(-1000, 1000)	5.18E-11	4.11E-11
4	100	(-10, 10)	4.02E-12	8.61E-12
5	100	(-100, 100)	6.78E-12	8.95E-12
6	100	(-1000, 1000)	1.36E-13	3,53E-12
7	1000	(-10, 10)	3.61E-11	1.27E-10
8	1000	(-100, 100)	1.17E-12	5.46E-11
9	1000	(-1000, 1000)	3.83E-11	2.46E-10