测试技术与传感器

石义芳 信息与控制研究所，科技馆916
syf2008@hdu.edu.cn

传感器的地位和作用

- IT技术
  - *信息采集、信息传输、信息处理*
- 信息产业三大支柱
  - *传感器技术、通信技术、计算机技术*
- 什么是传感器？
- 形形色色的传感器

传感器在日常生活中的应用

- 数码相机、数码摄像机：自动对焦---红外测距传感器
- 自动感应灯：亮度检测---光敏电阻
- 空调、冰箱、电饭煲：温度检测---热敏电阻、热电偶
- 电话、麦克风：话音转换---驻极电容传感器
- 遥控接收：红外检测---光敏二极管、光敏三极管
- 可视对讲、可视电话：图像获取---面阵CCD
- 智能楼宇
- 物联网

传感器的应用

- 汽车传感器：车电子控制系统的信息源，关键部件，核心技术
  - *普通轿车：约安装几十到近百只传感器，*
  - *豪华轿车：传感器数量可多达二百余只。*
- 发动机：向发动机的电子控制单元（ECU）提供发动机的工作状况信息，对发动机工作状况进行精确控制

  温度、压力、位置、转速、流量、气体浓度和爆震传感器
- 底盘：控制变速器系统、悬架系统、动力转向系统、制动防抱死系统等

  车速、踏板、加速度、节气门、发动机转速、水温、油温
- 车身：提高汽车的安全性、可靠性和舒适性等

  温度、湿度、风量、日照、加速度、车速、测距、图象等

绪论

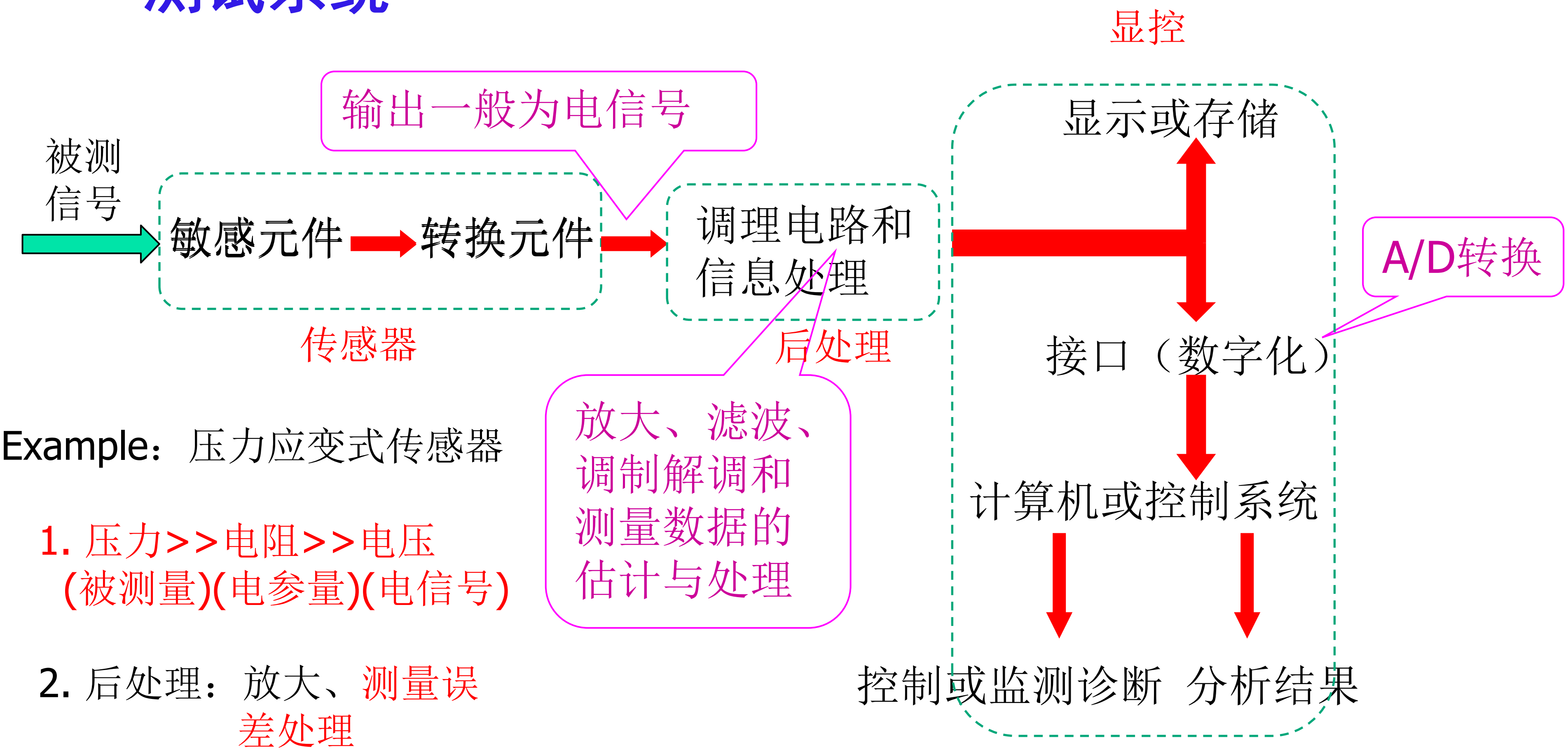
测试与测试技术

1）为探索认知，对迄今未知事物而进行的一系列定量操作。

2）测试由相应的测试系统完成和实现

绪论

测试系统



Example：压力应变式传感器

1. 压力>>电阻>>电压
   (被测量)(电参量)(电信号)

2. 后处理：放大、测量误差处理

3. 显控：存储、可视化、分析等

测试系统的组成

课程安排

- 课程安排
  - *讲　课*　　**32**　　*学时*
  - *习题课*　　**0**　　*学时*
  - *实验课*　　**8**　　*学时*
  - *总　计*　　**40**　　*学时*

省级精品课程

jpkc.hdu.edu.cn/auto/ckcg

第2章 检测技术的理论基础

2.1　测量概论

- 测量定义、方法分类，
- 测量误差表示

2.2　测量数据的估计和处理

- 测量误差分类
- 测量误差处理

2.1.1测量

- 测量是以确定被测量的值或获取测量结果为目的的一系列操作。
- 测量也就是将被测量与同种性质的标准量进行比较，确定被测量对标准量的倍数。

$$x = nu$$

或

$$n = \frac{x}{u}$$

测量结果=测量数据+测量单位+测量误差

式中：x——被测量值

u——标准量，即测量单位

n——比值（纯数），含有测量误差

2.1.2测量方法

- 根据获得测量值的方法分为
  - ***直接测量：*** 电流表测电流、弹簧秤称称重量
  - ***间接测量：*** 测水塔的水量、曹冲称象；直测量+函数
  - ***组合测量：*** 若干个被测量及测量量的情况；求解联立方程组
- 根据测量方式分为
  - ***偏差式测量：*** 用仪表指针的位移（即偏差）决定被测量的量值。模拟电流/压表、体重秤等。
  - ***零位式测量：*** 指零仪表指零时，被测量与已知标准量相等。天平、电位差计等。
  - ***微差式测量：*** 将被测量与已知的标准量相比较，取得差值后，再用偏差法测得此差值。游标卡尺等。

2.1.2测量方法

- 根据测量条件分为
  - ***等精度测量：***用相同精度仪表与相同测量方法对同一被测量进行多次重复测量
  - ***不等精度测量：***用不同精度的仪表或不同的测量方法，或在环境条件相差很大时对同一被测量进行多次重复测量
- 根据被测量变化的快慢分为
  - *静态测量--被测量不变或缓慢变化*
  - *动态测量– 被测量随时间变化*

**2.1.3测量误差

测量误差：*测量值*与*真实值*的*差值*，
反映测量质量的好坏。

- 误差的表示方法
  - *绝对误差*
  - *相对误差*
  - *引用误差*
  - *基本误差*
  - *附加误差*
- 测量误差的性质
  - *系统误差*
  - *随机误差*
  - *粗大误差*

误差的表示方法（1）

- （1）绝对误差

绝对误差可用下式定义:

$$\Delta = x - L$$

式中: Δ——绝对误差;

x——测量值;

L——真值。

采用绝对误差表示测量误差，不能很好说明测量质量的好坏。 例如，在温度测量时，绝对误差Δ=1 ℃，对体温测量来说是不允许的，而对测量钢水温度来说却是一个极好的测量结果。

误差的表示方法（2）

- （2）相对误差
  - *相对误差可用下式定义:*

$$\delta = \frac{\Delta}{L} \times 100\ \%$$

式中: δ——相对误差, 一般用百分数给出;

Δ——绝对误差;

L——真值。

- 标称（示值）相对误差(*实际使用最多*)：

$$\delta = \frac{\Delta}{x} \times 100\ \%$$

误差的表示方法（3）

- （3）引用误差(实际使用最多)

  引用误差可用下式定义:

$$\gamma = \frac{\Delta_{max}}{x_{max} - x_{min}} = \frac{\Delta_{max}}{\text{测量上限}-\text{测量下限}}$$

引用误差是仪表中通用的一种误差表示方法，常以精度等级表示，如0.5级仪表的引用误差≤±0.5%。

- （4）基本误差
  - 仪表在规定的标准条件下所具有的误差。
- （5）附加误差
  - 仪表的使用条件偏离额定条件下出现的误差，如不同温度、湿度 *等条件*

- **例1-1** 某电压表的精度等级S为1.5级，试算出它在0V～100V量程的最大绝对误差。

解：电压表的量程是：x_m=100V－0V=100V

∵ 精度等级S=1.5

即引用误差为：γ＝±1.5％

∴ 可求得最大绝对误差：Δm= γ x_m =100V×(±1.5％)= ±1.5V

故：该电压表在0V～100V量程的最大绝对误差是±1.5V。

- **例1-2** 某1.0级电流表，满度值x_m=100uA，求测量值分别为x_1=100uA，x_2=80uA，x_3=20uA时的绝对误差和示值相对误差。
- 解：∵ 精度等级S=1.0
- 即引用误差为：γ＝±1.0％
- ∴ 可求得最大绝对误差：Δm= γ x_m =100uA×(±1.0％)= ±1.0uA
- 依据***误差的整量化***原则：认为仪器在同一量程各示值处的绝对误差是常数，且等于Δm。
- （注意：1.通常，测量仪器在同一量程不同示值处的绝对误差实际上未必处处相等，但对使用者来讲，在没有修正值可以利用的情况下，只能**按最坏情况处理**，于是就有了***误差的整量化***处理原则。2.因此，为减小测量中的示值误差，在进行量程选择时应尽可能**使示值接近满度值**，一般示值不小于满度值的2/3。）
- 故：三个测量值处的绝对误差分别为：$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = \Delta m = \pm 1.0uA$
- 三个测量值处的示值（标称）相对误差分别为：

$$\gamma_{x_1} = \frac{\Delta x_1}{x_1} \times 100\% = \frac{\pm 1\mu A}{100\mu A} \times 100\% = \pm 1\%$$

$$\gamma_{x_2} = \frac{\Delta x_2}{x_2} \times 100\% = \frac{\pm 1\mu A}{80\mu A} \times 100\% = \pm 1.25\%$$

$$\gamma_{x_3} = \frac{\Delta x_3}{} \times 100\% = \frac{\pm 1\mu A}{} \times 100\% = \pm 5\%$$

例1-3 要测量100°C的温度，现有0.5级、测量范围0～300 °C和1.0级、测量范围0～100 °C的两种温度计，试分析各自产生的示值误差。问选用哪一个温度计更合适？

解：①对0.5级温度计，可能产生的最大绝对值误差为：$\Delta x_{m_1}=\gamma_{m_1}\cdot x_{m_1}=(\pm0.5\%)\times300℃=\pm1.5℃$

按照**误差整量化原则**，认为该量程内的绝对误差为：

$$\Delta x_1=\Delta x_{m_1}=\pm1.5℃$$

所以示值相对误差为：

$$\gamma_{x_1}=\frac{\Delta x_1}{x_1}\times100\%=\frac{\pm1.5℃}{100℃}\times100\%=\pm1.5\%$$

②对1.0级温度计，可能产生的最大绝对值误差为：

$$\Delta x_{m_2}=\gamma_{m_2}\cdot x_{m_2}=(\pm1.0\%)\times100℃=\pm1.0℃$$

按照**误差整量化原则**，认为该量程内的绝对误差为：

$$\Delta x_2=\Delta x_{m_2}=\pm1.0℃$$

所以示值相对误差为：

$$\gamma_{x_2}=\frac{\Delta x_2}{x_2}\times100\%=\frac{\pm1.0℃}{100℃}\times100\%=\pm1.0\%$$

③结论：

用1.0级小量程的温度计测量所产生的示值相对误差反而比选用0.5级的较大量程的温度计测量所产生的示值相对误差小，因此选用1.0级小量程的温度计更合适。

测量误差的性质（1）

- （1）随机误差
  - 对同一被测量进行多次重复测量时，绝对值和符号不可预知地随机变化，但就误差的总体而言，具有一定的统计规律性的误差称为随机误差。
- （2）系统误差
  - 对同一被测量进行多次重复测量时，如果误差按照一定的规律出现，则把这种误差称为系统误差。例如，标准量值的不准确及仪表刻度的不准确而引起的误差。
- （3）粗大误差
  - 明显偏离测量结果的误差。

1.2测量数据的估计和处理

- 1.2.1随机误差的统计处理
- 1.2.2系统误差的通用处理方法
- 1.2.3粗大误差
- 1.2.4测量数据处理中的几个问题

随机误差的统计处理

- 正态分布
  - 随机误差具有以下特征:

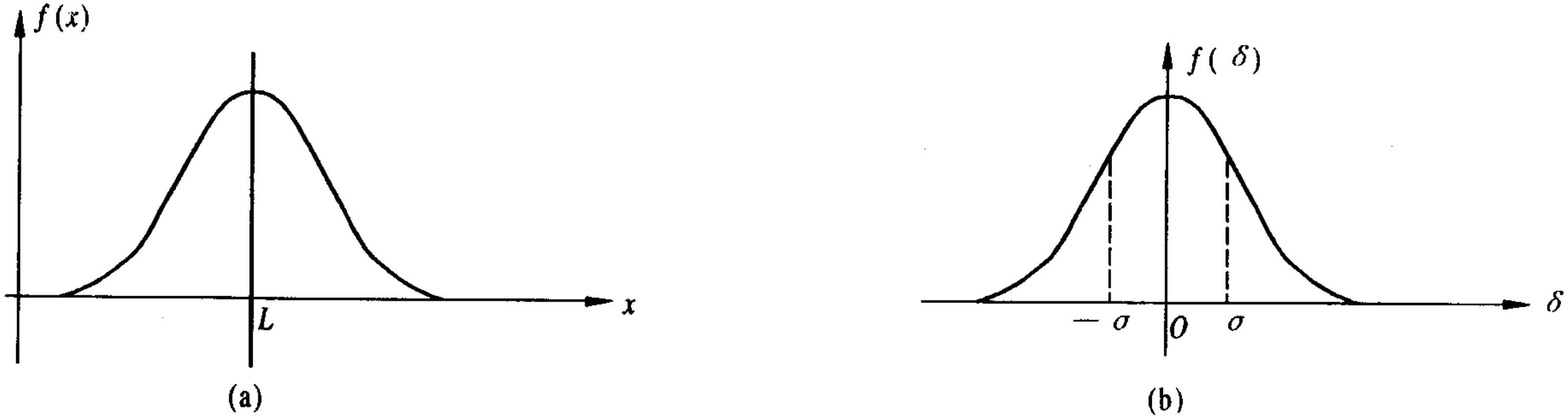
① 绝对值相等的正误差与负误差出现的次数大致相等——对称性。

② 在一定测量条件下的有限测量值中，其随机误差的绝对值不会超过一定的界限——有界性。

③ 绝对值小的误差出现的次数比绝对值大的误差出现的次数多——单峰性

④对同一量值进行多次测量，其误差的算术平均值随着测量次数n的增加趋向于零——抵偿性。（凡是具有抵偿性的误差原则上可以按随机误差来处理）

这种误差的特征符合正态分布



随机误差的统计处理

- 随机误差的数字特征
  - 算术平均值。对被测量进行等精度的n次测量,，得n个测量值$x_1,x_2,\ldots,x_n$,，它们的算术平均值为：

$$\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

  - 标准偏差 σ

  简称标准差（总体标准差），又称均方根误差，刻划总体的分散程度，可以描述测量数据和测量结果的精度。

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-L)^2}{n}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2}{n}}$$

随机误差的统计处理

- 标准差无偏估计值（样本标准差）-测量均值代替真值（表征有限次测量的分散性）：

$$\sigma_s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n-1}}$$

- 有限次测量中，算术平均值不可能等于真值，即 $\overline{x_i}$ 也有偏差，$\overline{x_i}$ 的均方根偏差（样本均值标准差）：

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma_s}{\sqrt{n}}$$

正态分布随机误差的概率计算

- 几个概念：
  - 置信概率： $P_\alpha = P(-k\sigma \le v \le +k\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-k\sigma}^{+k\sigma} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}dv$
  - 置信系数： k
  - 显著度： $\alpha = 1 - P_\alpha$

k	0.6745	1	1.96	2	2.58	3	4
Pa	0.5	0.6827	0.95	0.9545	0.99	0.9973	0.99994

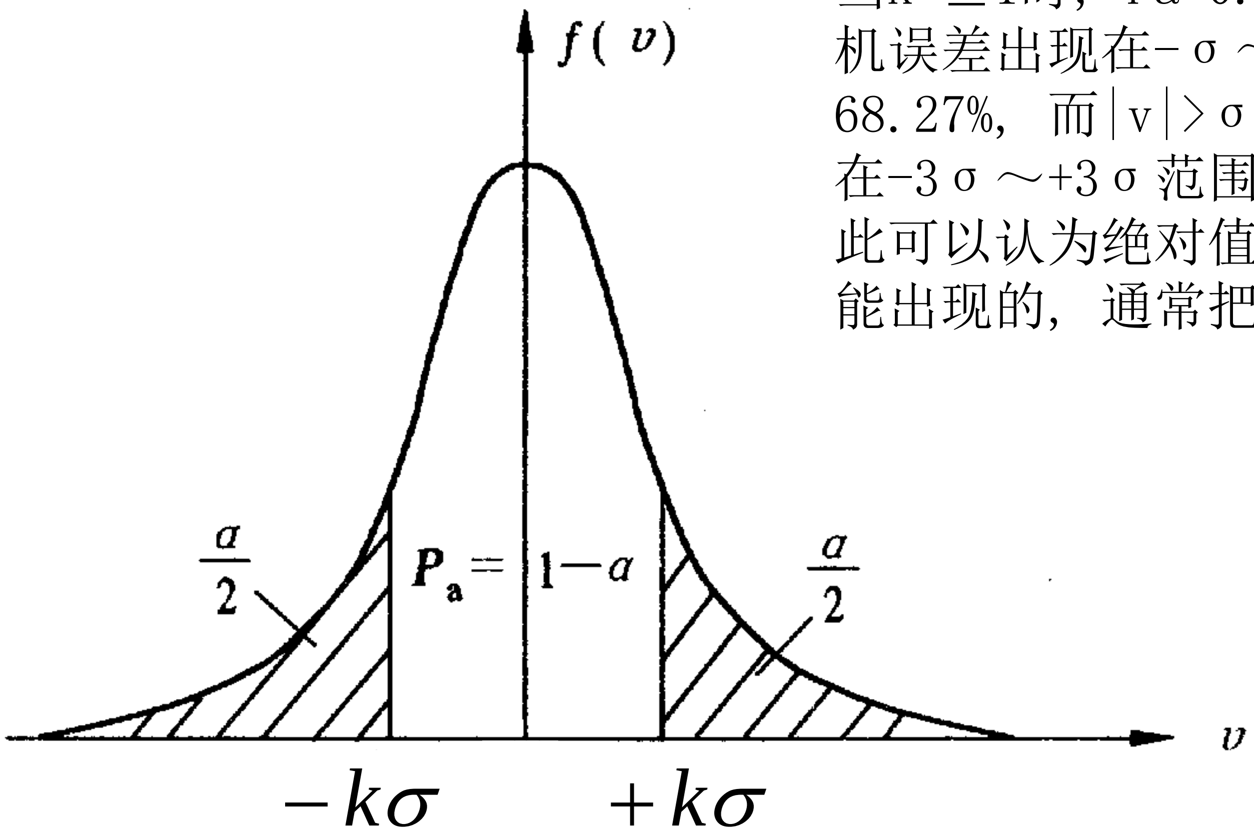
几个典型的k值及其相应的概率

- 含有随机误差的测量结果可表示为（测量结果及其均方根偏差）：

$$x = \bar{x} \pm 3\sigma_{\bar{x}} \qquad (P_\alpha = 0.9973)$$

样本均值± 样本均值误差

正态分布随机误差的概率计算



当k=±1时，Pa=0.6827，即测量结果中随机误差出现在-σ～+σ范围内的概率为68.27%，而|v|>σ的概率为31.73%。出现在-3σ～+3σ范围内的概率是99.73%，因此可以认为绝对值大于3σ的误差是不可能出现的，通常把这个误差称为极限误差

例题

例1-1对某一温度进行10次精密测量，测量数据如表所示，设这些测得值已消除系统误差和粗大误差，求测量结果。

序号	测量值 x_i	残余误差 v_i	v_i^2
1	85.71	0.03	0.0009
2	85.63	-0.05	0.0025
3	85.65	-0.03	0.0009
4	85.71	0.03	0.0009
5	85.69	0.01	0.0001
6	85.69	0.01	0.0001
7	85.70	0.02	0.0004
8	85.68	0	0
9	85.66	-0.02	0.0004
10	85.68	0	0
	$\overline{x}=85.68$	$\sum v_i=0$	$\sum v_i^2=0.0062$

$$\sigma_s=\sqrt{\frac{0.0062}{10-1}}=0.026$$

$$\sigma_{\overline{x}}=\frac{0.206}{\sqrt{10}}=0.008\approx 0.01$$

$$x=\overline{x}\pm\sigma_{\overline{x}}=85.68\pm 0.01, P_\alpha=68.27\%$$

或$x=\overline{x}\pm 3\sigma_{\overline{x}}=85.68\pm 0.03, P_\alpha=99.73\%$

不等精度直接测量的权与误差

- 加权算术平均值 $\overline{x}_p$

$$\overline{x}_p = \frac{\sum_{i=1}^{m} \overline{x}_i p_i}{\sum_{i=1}^{m} p_i}$$

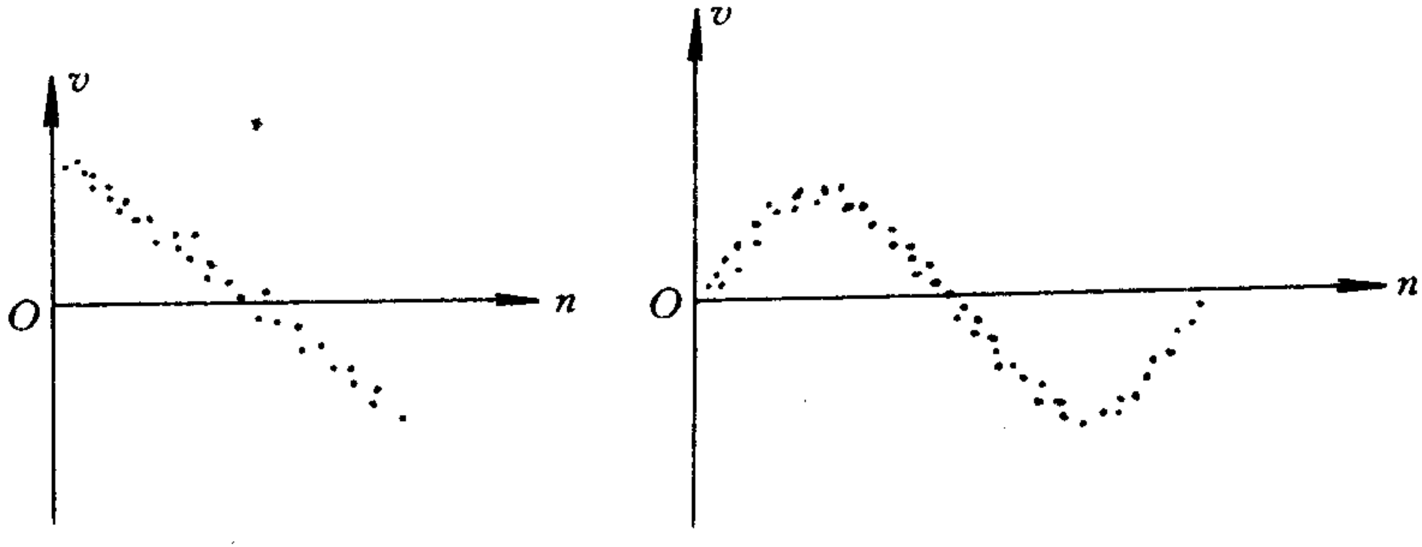
- 加权的标准误差 $\sigma_{\overline{x}_p}$

$$\sigma_{\overline{x}_p} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m} p_i v_i^2}{(m-1)\sum_{i=1}^{m} p_i}}$$

系统误差的通用处理方法

- 系统误差产生的原因
  - ①传感器、仪表不准确（刻度不准、放大关系不准确）②测量方法不完善（如仪表内阻未考虑）③安装不当④环境不合⑤操作不当
- 系统误差的判别（P29）
  - ①实验对比法，例如一台测量仪表本身存在固定的系统误差，即使进行多次测量也不能发现，只有用更高一级精度的测量仪表测量时，才能发现这台测量仪表的系统误差。
  - ②残余误差观察法（绘出先后次序排列的残差）
  - ③准则检验

系统误差的通用处理方法



(a)　　(b)

累进性系统误差　　正弦性系统误差

系统误差的通用处理方法

- ③准则检验法
  - 马利科夫判据是将残余误差前后各半分两组，若“Σv_i前”与“Σv_i后”之差明显不为零，则可能含有线性系统误差。
  - 阿贝检验法则检查残余误差是否偏离正态分布，若偏离，则可能存在变化的系统误差。将测量值的残余误差按测量顺序排列，且设$A=v_1^2+v_2^2+\ldots+v_n^2$, $B=(v_1-v_2)^2+(v_2-v_3)^2+\ldots+(v_{n-1}-v_n)^2+(v_n-v_1)^2$。

若 $\left|\frac{B}{2A}-1\right|>\frac{1}{\sqrt{n}}$ 则可能含有变化的系统误差。

系统误差的通用处理方法

- 系统误差的消除
  - 消除系统误差产生的根源
    - ✓ 检查仪器的安装、调式、放置是否合理；测量者操作是否完善；测量环境是否符合要求等；
  - 在测量结果中进行修正
    - ✓ 已知系统误差：利用修正值对结果进行修正
    - ✓ 变值系统误差：找出规律，利用变化规律曲线对结果进行修正
    - ✓ 未知系统误差：按随机误差处理
  - 在测量系统中采取补救措施
    - ✓ 找出误差规律，在测量过程中消除误差，如热电偶测温时，采用冷端补偿法

粗大误差

- 剔除坏值的几条原则：
  - 3σ准则（莱以达准则）： *如果一组测量数据中某个测量值的残余误差的绝对值$|v_i|>3\sigma$时，则该测量值为可疑值（坏值），应剔除。*
  - 肖维勒准则： *假设多次重复测量所得n个测量值中，某个测量值的残余误差$|v_i|>Zc\sigma$，则剔除此数据。实用中$Zc<3$，所以在一定程度上弥补了3σ准则的不足。*

σ 值如何取？

表 1－3　肖维勒准则中的 Z_c 值

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Z_c	1.38	1.54	1.65	1.73	1.80	1.86	1.92	1.96	2.00	2.03
n	13	14	15	16	18	20	25	30	40	50
Z_c	2.07	2.10	2.13	2.15	2.20	2.24	2.33	2.39	2.49	2.58

粗大误差

- 格拉布斯准则：*某个测量值的残余误差的绝对值$|v_i|>G\sigma$，则判断此值中含有粗大误差，应予剔除。 G值与重复测量次数n和置信概率Pa有关。*

表 1－4　格拉布斯准则中的 *G* 值

测量次数 n	置信概率 P_a 0.99	置信概率 P_a 0.95	测量次数 n	置信概率 P_a 0.99	置信概率 P_a 0.95
3	1.16	1.15	11	2.48	2.23
4	1.49	1.46	12	2.55	2.28
5	1.75	1.67	13	2.61	2.33
6	1.94	1.82	14	2.66	2.37
7	2.10	1.94	15	2.70	2.41
8	2.22	2.03	16	2.74	2.44
9	2.32	2.11	18	2.82	2.50
10	2.41	2.18	20	2.88	2.56

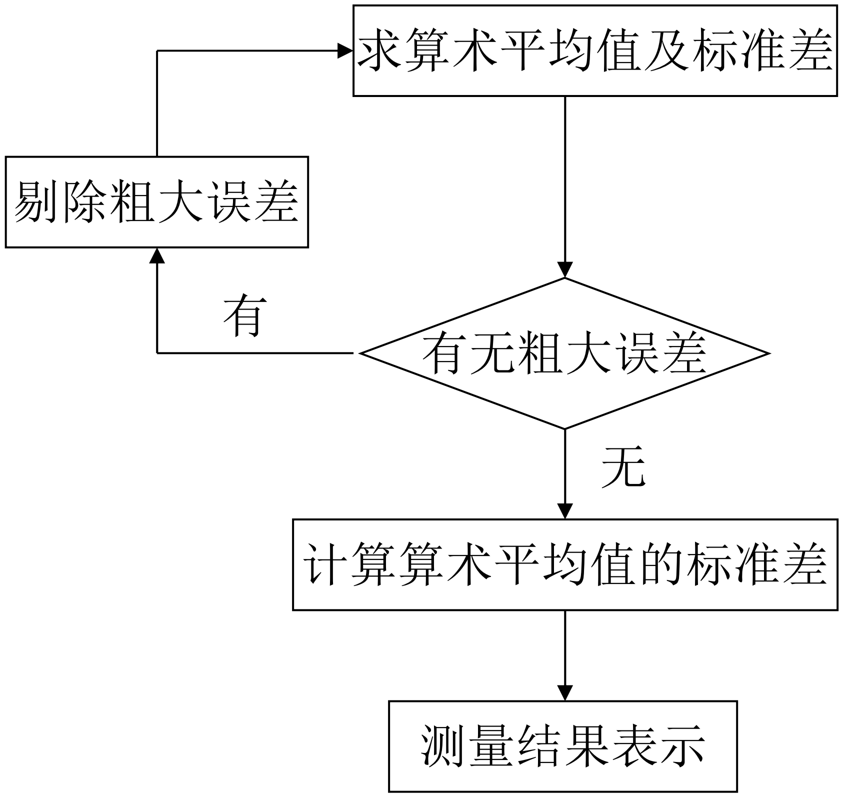
— 12 —

- 注意： 以上准则以数据呈正态分布为前提，当偏离正太分布或测量次数很少时，判断可靠性降低

测量误差处理总结

- 对测量数据处理时：
  - ① 先剔除粗大误差
  - ② 再设法消除系统误差，或加以修正，将系统误差减小至可忽略的程度
  - ③ 若此时测量数据仍不稳定，说明存在随机误差，最后对含有随机误差的测量数据进行处理（表示）

- 见书P31
- 解题步骤：



测量数据处理中的几个问题

- **2.3　不等精度测量误差处理、间接测量数据处理**
  - *不等精度测量的权与误差*
  - *间接测量中的测量数据处理（误差的合成、误差的分配）*

- **2.4　测量数据的估计和处理**
  - *最小二乘法的应用（最小二乘法原理）*
  - *用经验公式拟合实验数据——回归分析*

不等精度直接测量的权与误差

- 在科学实验或高精度测量中，绝对的等精度测量难以保证，为了提高测量的可靠性和精度，必须考虑条件的变化，进行不等精度的测量。

- 在不等精度测量时, 对同一被测量进行m组测量, 得到m组测量列（进行多次测量的一组数据称为一测量列）的测量结果及其误差, 它们不能同等看待。精度高的测量列具有较高的可靠性, 将这种可靠性的大小称为“权”。

- “权”可理解为各组测量结果相对的可信赖程度。 测量次数多, 测量方法完善, 测量仪表精度高, 测量的环境条件好, 测量人员的水平高, 则测量结果可靠, 其权也大。权是相比较而存在的。

不等精度直接测量的权与误差

- 权用符号p表示，有两种定量计算方法:

① 用各组测量列的测量次数n的比值表示，并取测量次数较小的测量列的权为1,则有

$$p_1 : p_2 : \ldots : p_m = n_1 : n_2 : \ldots : n_m$$

② 用各组测量列的误差平方的倒数的比值表示，并取误差较大的测量列的权为1，则有

$$p_1 : p_2 : \ldots : p_m = \left(\frac{1}{\sigma_1}\right)^2 : \left(\frac{1}{\sigma_2}\right)^2 : \ldots : \left(\frac{1}{\sigma_m}\right)^2$$

- 权只表示相对可靠度，无量纲，计算时，通常以最小的权数为1
- 以含有随机误差不等精度测量数据为例，加权算术平均值+标准误差，例2-6

误差的合成

- 系统误差的合成：已知各环节的误差求总误差

$$y = f(x_1, x_2, \cdots x_n)$$

  - 绝对误差 $$\Delta y = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n$$

  - 相对误差 $$\delta_y = \frac{\Delta y}{y} = \frac{1}{y}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y}{\partial x_i}\Delta x_i$$

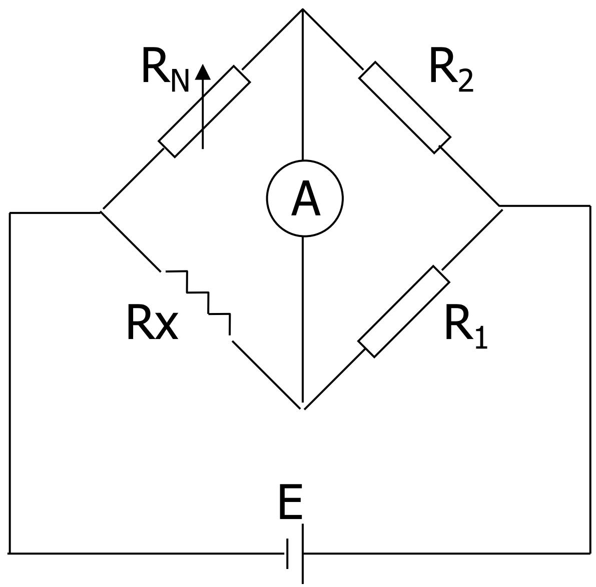
例：线性间接测量 $y = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$

- 随机误差的合成
  - 标准差的合成 $$\sigma^2(y) = \sqrt{(\frac{\partial y}{\partial x_1})^2\sigma_1^2 + (\frac{\partial y}{\partial x_2})^2\sigma_2^2 + \cdots + (\frac{\partial y}{\partial x_n})^2\sigma_n^2}$$
- 总合成误差：

$$\varepsilon = \Delta y + \sigma(y)$$

绝对误差的合成（例题）

- 〔例1-4〕用手动平衡电桥测量电阻R_X。已知R_1=100Ω, R_2=1000Ω, R_N=100Ω,各桥臂电阻的恒值系统误差分别为 ΔR_1=0.1Ω, ΔR_2=0.5Ω, ΔR_N=0.1Ω。求消除恒值系统误差后的R_X.



解：平衡电桥测电阻原理：$R_1 \cdot R_N = R_2 \cdot R_x$

即：$R_x = \dfrac{R_1}{R_2} R_N$

不考虑R_1、R_2、R_N的系统误差时，有

$$R_{x0} = \frac{R_1}{R_2} R_N = \frac{100}{1000} \times 100 = 10\Omega$$

由于R_1、R_2、R_N存在误差，测量电阻R_X也将产生系统误差。

可得：$\Delta R_x = \dfrac{R_N}{R_2}\Delta R_1 + \dfrac{R_1}{R_2}\Delta R_N - \dfrac{R_1 R_N}{R_2^2}\Delta R_2 = 0.015\Omega$

消除ΔR_1、ΔR_2、ΔR_N的影响，即修正后的电阻应为

$$R_x = R_{x0} + \Delta R_x = 10 - 0.015 = 9.985\Omega$$

误差的分配

- 误差的分配：已知总误差，求各环节的误差
- 等准确度分配
  - 系统误差 $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \cdots = \Delta x_n \Rightarrow \Delta x_i = \Delta y / \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}$
  - 随机误差 $\sigma_{x_1} = \sigma_{x_2} = \cdots = \sigma_{x_n} \Rightarrow \sigma_{x_i} = \sigma(y) / \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial y}{\partial x_i})^2}$
- 等作用分配
  - 系统误差 $\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 = \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n \Rightarrow \Delta x_i = \Delta y / (n \frac{\partial f}{\partial x_i})$
  - 随机误差 $(\frac{\partial f}{\partial x_1})^2 \sigma_{x_1} = (\frac{\partial f}{\partial x_2})^2 \sigma_{x_2} = \cdots = (\frac{\partial f}{\partial x_n})^2 \sigma_{x_n} \Rightarrow \sigma_{x_i} = \sigma(y) / (\sqrt{n} \left|\frac{\partial y}{\partial x_i}\right|)$

最小二乘法的应用

- 问题的提出
  - *已知铂电阻与温度之间具有如下关系：*

$$R_t = R_0(1 + \alpha t + \beta t^2)$$

可用实验方法得到 $R_t \leftrightarrow t$ *的对应数据，如何求方程中的三个参数？*

  - *设* $y = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m$
  - *对应：* $y \leftrightarrow R_t \quad x_1 \leftrightarrow R_0 \quad x_2 \leftrightarrow \alpha R_0 \quad x_3 \leftrightarrow \beta R_0 \quad a_1 \leftrightarrow 1 \quad a_2 \leftrightarrow t \quad a_3 \leftrightarrow t^2$

最小二乘法的应用

- 如果测量了n次（$n>m$），理论值为：

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m$$
$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m$$
$$\cdots$$
$$y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m$$

a的第一个i下标意思为第i次测量（$i=1\cdots n$）

- 理论值与实际测量值的误差为：

$$v_1 = l_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m)$$
$$v_2 = l_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m)$$
$$\cdots$$
$$v_n = l_n - (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m)$$

最小二乘法则是“残余误差的平方和为最小”， 即 $\sum_{i=1}^{n} v_i^2 = v^2$ 最小

最小二乘法的应用

- 为此可得到m个方程的组：

$$\frac{\partial v^2}{\partial x_1}=0 \quad \frac{\partial v^2}{\partial x_2}=0 \quad \cdots \quad \frac{\partial v^2}{\partial x_m}=0$$

- 求解该方程组可得到最小二乘估计的**正规方程**，从而解得最小二乘解 x_1、x_2 … x_m

矩阵法

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad \hat{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad L=\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \cdots \\ l_n \end{pmatrix} \quad V=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

则 $V=L-AX$

最小二乘法的应用

- 最小二乘条件 $\frac{\partial v^2}{\partial x_1}=0 \quad \frac{\partial v^2}{\partial x_2}=0 \quad \cdots \quad \frac{\partial v^2}{\partial x_m}=0$ 变为方程组

$$2v_1\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+2v_2\frac{\partial v_2}{\partial x_1}+\cdots+2v_n\frac{\partial v_n}{\partial x_1}=0 \Rightarrow \quad a_{11}v_1+a_{21}v_2+\cdots+a_{n1}v_n=0$$

$$2v_1\frac{\partial v_1}{\partial x_2}+2v_2\frac{\partial v_2}{\partial x_2}+\cdots+2v_n\frac{\partial v_n}{\partial x_2}=0 \Rightarrow \quad a_{12}v_1+a_{22}v_2+\cdots+a_{n2}v_n=0$$

$$\cdots$$

$$2v_1\frac{\partial v_1}{\partial x_m}+2v_2\frac{\partial v_2}{\partial x_m}+\cdots+2v_n\frac{\partial v_n}{\partial x_m}=0 \Rightarrow \quad a_{1m}v_1+a_{2m}v_2+\cdots+a_{nm}v_n=0$$

即 $A'V=0$

将V 代入：

$$A'(L-AX)=0$$

$$(A'A)X=A'L$$

$$X=(A'A)^{-1}A'L$$

最小二乘法的应用（例题）

- 〔例１－５〕铜的电阻值R与温度t之间关系为$R_t=R_0(1+at)$,在不同温度下,测定铜电阻的电阻值如下表所示。试估计0°C时的铜电阻电阻值R0和铜电阻的电阻温度系数a。

t_i(°C)	19.1	25.0	30.1	36.0	40.0	45.1	50.0
R_i(Ω)	76.3	77.8	79.75	80.80	82.35	83.9	85.10

解：列出误差方程

$$r_{ti} - r_0(1+\alpha t_i) = v_i \qquad (i=1,2,3, \ldots,7)$$

式中: r_{ti}是在温度t_i下测得铜电阻电阻值。

令$x=r_0$, $y=\alpha r_0$, 则误差方程可写为

$$76.3-(x+19.1y)=v_1$$

$$77.8-(x+25.0y)=v_2$$

$$79.75-(x+30.1y)=v_3$$

$$80.80-(x+36.0y)=v_4$$

$$82.35-(x+40.0y)=v_5$$

$$83.9-(x+45.1y)=v_6$$

$$85.10-(x+50.0y)=v_7$$

其正规方程按式(1 - 39）为

$$\left.\begin{aligned}[a_1a_1]x+[a_1a_2]y=[a_{11}r_t]\\ [a_2a_1]x+[a_2a_2]y=[a_{21}r_t]\end{aligned}\right\}$$

于是有

$$\left.\begin{aligned}nx+\sum_{i=1}^{7}t_iy=\sum_{i=1}^{7}r_{t_i}\\ \sum_{i=1}^{7}t_i\ x+\sum_{i=1}^{7}t_i^2y=\sum_{i=1}^{7}r_{t_i}t_i\end{aligned}\right\}$$

将各值代入上式, 得到

$$\left.\begin{aligned}7x+245.3y=566\\ 245.3x+9325.38y=20\,044.5\end{aligned}\right\}$$

解得

x=70.8 Ω

y=0.288Ω/°C

即

r_0=70.8Ω

$$\alpha = \frac{y}{R_0} = \frac{0.288}{70.8} = 4.07 \times 10^{-3} /^{\circ} C$$

- 用矩阵求解, 则有

$$A'A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 19.1 & 25.0 & 30.1 & 36.0 & 40.0 & 45.1 & 50.0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1 & 19.1\\ 1 & 25.0\\ 1 & 30.1\\ 1 & 36.0\\ 1 & 40.0\\ 1 & 45.1\\ 1 & 50.0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}7 & 245.3\\ 245.3 & 9325.38\end{bmatrix}$$

$$|A'A|=\begin{vmatrix}7 & 245.3\\ 245.3 & 9325.38\end{vmatrix}=5108.7\neq 0$$ （有解）

$$(A'A)^{-1}= \frac{1}{|A'A|}\begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{vmatrix} = \frac{1}{5108.7}\begin{vmatrix} 9325.85 & -245.3 \\ -245.3 & 7 \end{vmatrix}$$

$$A'L= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 19.1 & 25.0 & 30.1 & 36.0 & 40.0 & 45.1 & 50.0 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} 76.3 \\ 77.8 \\ 79.75 \\ 80.80 \\ 82.35 \\ 83.9 \\ 85.10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 566 \\ 20044.5 \end{pmatrix}$$

$$\hat{X}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=(A'A)^{-1}A'L=\frac{1}{5108.7}\begin{pmatrix}9325.83 & -245.3\\-245.3 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}566\\20\,044.5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}70.8\\0.288\end{pmatrix}$$

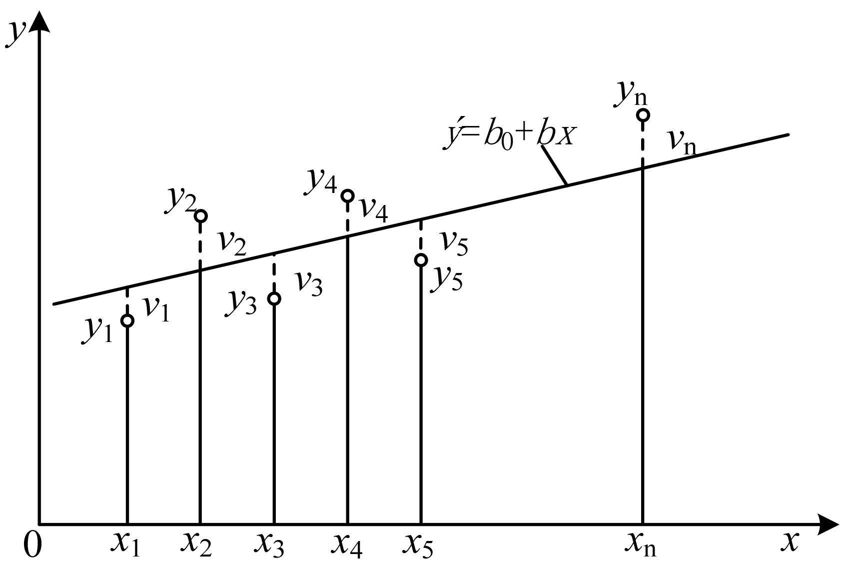
$$R_0=x=70.8\ \Omega$$

$$\alpha=\frac{y}{R_0}=\frac{0.288}{70.8}=4.07\times10^{-3}/℃$$

用经验公式拟合实验数据——回归分析

- 用经验公式拟合实验数据，工程上把这种方法称为回归分析。回归分析就是应用数理统计的方法，对实验数据进行分析和处理，从而得出反映变量间相互关系的经验公式，也称回归方程。

例2－9 设有n对测量数据(x_i, y_i)，用一元线性回归方程 $\hat{y} = b_0 + bx$ 拟合，根据测量数据值，求方程中系数b_0、b的最佳估计值。



则误差方程组是：

$$\begin{cases} y_1 - \hat{y}_1 = y_1 - (b_0 + bx_1) = v_1 \\ y_2 - \hat{y}_2 = y_2 - (b_0 + bx_2) = v_2 \\ \qquad \vdots \\ y_n - \hat{y}_n = y_n - (b_0 + bx_n) = v_n \end{cases}$$

$\sum_{i=1}^{n} v_i^2 = \min$ ，可求得回归方程中的系数：

$$\begin{cases} b_0 = \dfrac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \\ b = \dfrac{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \end{cases}$$

课后练习：课本P42页，习题2-1, 2-2, 2-3, 2-4, 2-7