第 1 章

测量概论

2.1 测量概述

2.1.1 测量定义

- 测量：以确定量值为目的的实验过程。

$$x \square nu \quad \text{或} \quad n \square \frac{x}{u}$$

式中：x——被测量值；

u——标准量，即测量单位；

n——比值（纯数），含有测量误差。

- 测量结果=测量数据+测量单位+测量误差
- 测量目的：获得被测参数真值。

2.1 测量概述

2.1.2 测量方法及其分类

- 按获得测量值的方法分：直接测量、间接测量、组合测量
- 按测量的精度分：等精度测量、不等精度测量
- 按侧量的方式分：偏差式测量、零位式测量、微差式测量
- 按被测量变化分：静态测量、动态测量
- 按敏感元件是否与被测介质接触分：接触测量、非接触测量
- 按测量系统是否向被测对象赋能分：主动式测量、被动式测量

2.1 测量概述

2.1.2 测量方法及其分类（续）

- 直接测量

无需经过函数关系运算，直接通过测量仪表，得到被测量的测量结果。即

$$y \square x$$

式中：x——被测量值；

y——直接测得的值。

- 直接测量种类：直接比较和间接比较

直接比较：直接把被测物理量和标准作比较。例如，用米尺测量长度。

特点是被测物理量和标准是同种物理量。

间接比较：把被测物理量通过仪器仪表变换为与之保持已知函数关系的另一种为人类感官所能直接接受的物理量。例如，水银温度计、弹簧秤、弹簧管压力表等。

2.1 测量概述

2.1.2 测量方法及其分类（续）

- 间接测量

指在直接测量基础上，根据已知函数关系，计算出被测物理量的大小。

被测量 y 是一个直接测量值 x 或几个直接测量值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的函数，即：

$$y = f(x) \qquad \text{或：} \quad y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

间接测量手续较多，耗时较长，一般用在不方便直接测量或者缺乏直接测量手段的场合。例如，电功率的测量，先测量电压 U、电流 I，再求功率 $P = UI$。

2.1 测量概述

2.1.2 测量方法及其分类（续）

- 组合测量

组合测量是指被测量的最后结果必须经过求解联立方程组才能得到的测量。即:

$$\begin{cases} x_1 = f(y_1, y_2, \ldots, y_m) \\ x_2 = f(y_1, y_2, \ldots, y_m) \\ \cdots \\ x_n = f(y_1, y_2, \ldots, y_m) \end{cases}$$

式中：$x_1, x_2, \cdots, x_n$——测量值；

$y_1, y_2, \cdots, y_m$——被测量，且 $n > m$（最小二乘法求解）。

特点：精度高，是一种特殊的精密测量方法，但操作复杂、费时，多用于科学实验或特殊场合。

2.1 测量概述

2.1.2 测量方法及其分类（续）

- 等精度测量

□指在测量过程中，影响误差大小的全部测量条件始终不变，如：同一测量者，用相同仪表与测量方法，在同样环境条件下，对同一被测量进行的多次重复测量。

□实际应用时，很难保证测量条件始终不变，只有近似的等精度测量。

- 不等精度测量

□指在不同测量条件下，用不同精度仪表或不同测量方法，或以不同测量次数，或环境条件相差很大时，或由不同测量者，对同一被测量进行的多次重复测量。

□不等精度测量多用于科学研究中的对比测量。

2.1 测量概述

2.1.2 测量方法及其分类（续）

- 偏差式测量

□指用仪表指针的位移决定被测量的量值的测量方法。

其中：仪表刻度须事先用标准器具标定、分度。

□测量过程简单、迅速，但测量结果精度较低。

例如：指针式万用表、弹簧秤等。

- 零位式测量

□用指零仪表的零位指示检测测量系统的平衡状态，当测量系统达到平衡时，用已知标准量决定被测量的量值的测量方法。

□测量精度较高，但测量过程复杂、费时，不适于高频信号。如，天平、电位差计等

2.1 测量概述

2.1.2 测量方法及其分类（续）

- 微差式测量

□指将被测量与已知标准量比较，取得差值后，再用偏差法测得该差值的测量方法。

设：N 为标准量，x 为被测量，Δ 为二者之差。

则：$x = N + \Delta$

因为：N 是标准量，其误差很小，且 $\Delta \ll N$，故有：

①先用零位式测量方法进行比较测量，测得 N；

②再选用高灵敏度的偏差式仪表测量 Δ；

③虽然 Δ 的精度较低，但N是标准量，$\Delta \ll x$，故最终测量精度很高。

□特点：测量反应速度快，测量精度高，综合了偏差式与零位式测量的优点，但测量过程复杂，适于在线控制参数的

2.1 测量概述

2.1.2 测量方法及其分类（续）

- 静态测量

□指测量过程中，对固定不变或变化缓慢的被测量进行的测量

□可不考虑时间因素的影响，只检测稳态值。

- 动态测量

□指测量过程中，对随时间而不断变化的被测量进行的测量

□动态测量时，被测量变化速度快，需检测其动态值。

2.1 测量概述

2.1.2 测量方法及其分类（续）

- 接触测量

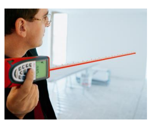
□指传感器和被测对象直接接触而进行的测量

如：水银温度计测温，称重等。

- 非接触测量

□指传感器和被测对象不直接接触而进行的测量。

如：红外测温，激光测距等。



2.1 测量概述

2.1.2 测量方法及其分类（续）

- 主动式测量

□指测量系统向被测对象施加能量而进行的测量。

- 被动式测量

□指测量系统无需向被测对象施加能量而进行的测量。

2.1.3 测量误差的分类

测量误差

• 测量的误差：测量值与真值之间的差值, 它反映测量质量优劣
• 测量可靠性：不同场合对测量结果可靠性的要求不同，
测量准确程度应与测量目的与要求相关，
要有性价比的意识
• 量值传递、经济核算、产品检验应保证测量结果足够准确度；
• 当测量值用作控制信号时, 则要注意测量的稳定性和可靠性。

误差原因

• 传感器本身性能不良
• 测量方法不完善
• 环境、干扰
… …

2.1.3 测量误差的分类（续）

研究误差目的

• 认识和掌握误差规律
误差的大小、范围、影响因素
• 评价检测装置和测量结果
• 提高测量的准确度、可靠性

“约定真值”的获得

• 计量基准
• 准确度高一级等级仪表
• 等精度测量条件下有限次测量的平均值

2.1.3 测量误差的分类（续）

按使用工作条件分类

• 基本误差：指仪表在规定的标准条件下所具有的误差。
• 附加误差：指当仪表的使用条件偏离额定条件下出现的误差
• 容许误差：指测量仪器在规定的使用条件下可能产生的最大误差范围

按误差的原因分类

• 系统误差
• 环境误差
• 人员误差

按误差的特性分类

• 静态误差
• 动态误差

系统误差：误差分析的核心；
其规律性决定误差处理与补偿的有效性。

2.1.3 测量误差的分类（续）

按误差本身因次分类

• 绝对误差：示值与被测量真值之间的差值
• 相对误差：绝对误差与被测量的约定值之比
实际相对误差—绝对误差与被测量真值的百分比
示值(标称)相对误差—绝对误差与器具的示值(测量值)的百分比
引用误差—绝对误差与器具的满度值（量程）的百分比
分贝误差—用对数形式表示的一种误差

按误差出现的规律分类

• 系统误差：不具抵偿性，难发现，固定或按规律变化，可判断、消除。
• 随机误差：多次等精度测量值服从统计学规律
• 粗大误差：人为疏忽或环境突变造成，可通过训练和判据发现并剔除

2.2 测量数据估计和处理

2.2.1随机误差

• 测量时，先剔除粗大误差，再设法将系统误差消除或减小到可忽略程度
• 若此时测量数据仍不稳定， 则存在随机误差；
• 多次等精度测量时产生的随机误差及测量值服从统计学规律。

(1) 随机误差处理目的

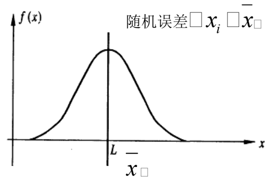
• 求出最接近真值的值（即：真值的最佳估计）；
• 评定数据精密度高低（即：可信赖程度），并给出测量结果。

2.2 测量数据估计和处理（续）

2.2.1 随机误差

(2) 随机误差特征

•单峰性：小绝对值概率大于大绝对值概率；
•有界性：绝对值不会超出一定界限；
•对称性或抵偿性：测量次数n很大时, 绝对值相等、符号相反的概率相等；
•测量值在期望值上出现的概率最大，随着对期望值偏离的增大，出现的概率急剧减小。



2.2 测量数据估计和处理（续）

2.2.1随机误差

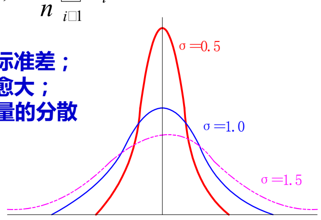
(3) 算术平均值

- 实际测量时, 真值 L 不可能得到；
- 随机误差服从正态分布，且算术平均值处随机误差的概率密度最大；
- 与被测量的真值最接近，测量次数越多就越接近。

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

(4) 标准偏差σ

- 即：均方根误差、均方根偏差，简称标准差；
- 均方根偏差愈大，测量数据分散范围愈大；
- σ愈小, 分布曲线愈陡峭，说明随机变量的分散性小， 测量精度高。



$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - L)^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2}{n}}$$

2.2 测量数据估计和处理（续）

2.2.2 系统误差

- 系统误差不具抵偿性，难以发现，但系统误差往往固定不变或按一定规律变化，可判断并消除。
- 找出系统误差的根源是减小或消除系统误差的关键。
- 为明确产生系统误差的因素，有必要对测量系统各环节作全面分析
- 由于具体条件不同，在分析查找误差根源时，没有一成不变的方法，但不外乎系统误差的判断与消除。

2.2.2 系统误差

- 测量结果的准确度不仅与随机误差有关，更与系差有关
- 系差不易被发现
- 系差不具备抵偿性
- 取平均值对系差无效
- 当系差与随机误差同时存在时，若测量次数足够多，则各次测量绝对误差的算术平均值等于系差 ε

- 例子：雷莱发现了空气中的惰性气体

200多年前，人们知道空气里有H_2O、CO_2外，还有O_2和N_2。
1785年，英国科学家卡文迪许，去除空气中的H_2O、CO_2外，还有O_2和N_2后，仍有少量残余气体，但并未引起化学家重视。
100年后，英国物理学家雷利(Rayleigh)多次测定N_2密度，发现从空气中分离的N_2是1.2572克/升，从氮物质制得的N_2是1.2505克/升，相差几毫克。雷利未忽视微小差异，怀疑空气分离的氮气中含有新气体。他查阅了卡文迪许的资料。
1894年，他去除空气中O_2和N_2，得到少量极不活泼气体。英国化学家拉姆塞用其它方法从空气中也得到了该气体，命名为氩（拉丁文 “懒惰”）。
拉姆塞等人又陆续从空气里发现了氦气、氖气、氪气和氙气。

误差可能是科学新发现的前导

2.2.2 系统误差（续）

系统误差的特性

- 当系差与随机误差同时存在时，若测量次数足够多，则各次测量绝对误差的算术平均值等于系差 ε
- 首先：排除粗差后，测量误差等于随机误差 δ_i 和系统误差 ε_i 代数和：

$$\Delta x_i = \delta_i + \varepsilon_i = x_i - A$$

- 其次：假设进行 n 次等精度测量，并设系差为恒值系差或变化非常缓慢，即 $\varepsilon_i = \varepsilon$，则 Δx_i 的算术平均值为：

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = \bar{x} - A = \varepsilon + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_i$$

- 最后：当 n 足够大，由于随机误差的抵偿性，δ_i 的算术平均值趋于零，由上式得到：

$$\varepsilon = \bar{x} - A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i$$

2.2.2 系统误差（续）

系统误差的判断

1.实验比较法

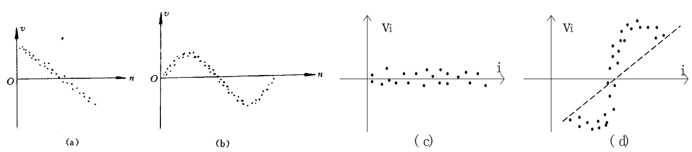
- 改变测量方法—理论分析法
  针对测量方法或测量原理引入的系差只适用于发现恒值系差
- 改变测量仪器—校准和比对法
  用准确度更高的测量仪器进行重复测量以发现系差
- 改变测量条件
  比如更换测量人员、测量环境、测量方法等

2.2.2 系统误差（续）

系统误差的判断（续）

2. 残余误差观察法

根据测量数据数列各个剩余误差的大小、符号的变化规律，从误差数据、曲线判断系统误差的有无、类型、大小等。



- (a)残差呈线性递减规律，存在“累进性系统误差”；
- (b)残差大小、符号呈周期性变化，存在“周期性系统误差”；
- (c)残差基本上正负相同，无明显变化规律，“无系统误差”；
- (d)残差呈周期性递增规律，同时存在“累进性系差”和“周期性系差”。

2.2.2 系统误差

系统误差的判断（续）

3.马利科夫判据—判别累进性系差

是常用的判别有无累进性系差的方法。具体步骤是：

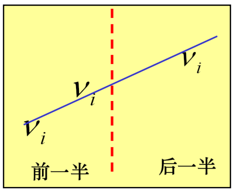
将 n 项剩余误差 v_i 按顺序排列

分成前后两半求和，再求其差值D

当 n 为偶数时: $D = \sum_{i=1}^{n/2} v_i - \sum_{i=n/2+1}^{n} v_i$

当 n 为奇数时: $D = \sum_{i=1}^{(n+1)/2} v_i - \sum_{i=(n+1)/2}^{n} v_i$

若$D\neq0$则说明测量数据存在累进性系差。

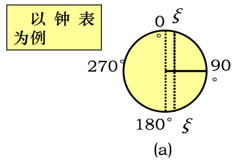


2.2.2 系统误差

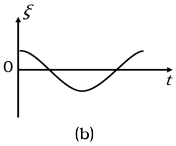
系统误差的判断（续）

4.阿卑•赫梅特判据—周期性系差的判别

如图(a)所示：钟表的轴心在水平方向有一点偏移，设它的指针在垂直向上的位置时造成的误差为ξ，当指针在水平位置运动时ξ逐渐减小至零，当指针运动到垂直向下位置时，误差为-ξ，如此周而复始，造成的误差如图(b)所示，这类呈规律性交替变换称为周期性系统误差。



(a)



(b)

当进行 n 次测量时，若有：

$$\left|\sum_{i=1}^{n-1} v_i v_{i+1}\right| > \sqrt{n-1}\,\sigma^2(x)$$

则可认为测量中存在变值系差

2.2.2 系统误差

消除系统误差产生的根源

(1) 从根源入手减小系统误差

- 要从测量原理和测量方法尽力做到正确、严格。
- 测量仪器定期检定和校准，正确使用仪器
- 注意周围环境对测量的影响，特别是温度对电子测量的影响较大
- 尽量减少或消除测量者主观原因造成的系统误差。提高测量人员业务
- 技术水平和工作责任心，改进设备

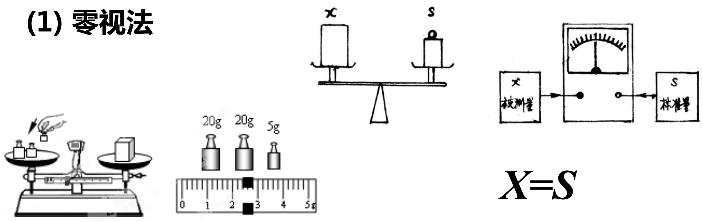
(2) 用修正方法减少系统误差

- 修正值 = -误差= -（测量值 - 真值）
- 实际值 = 测量值 + 修正值

2.2.2 系统误差

削弱系统误差的典型测量技术

(1) 零视法



X=S

- 种类： 光电检流计、电流表、电压表、示波器、调谐指示器、耳机等。标准量的准确度高，被测量的测量准确度就很高。
- 用途： 阻抗(电桥)、电压(电位差计及数字电压表)、频率(拍频法、差频法)等参数测量。

2.2.2 系统误差

削弱系统误差的典型测量技术（续）

(2) 替代法(置换法)

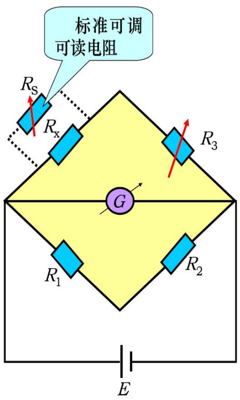
直流电桥平衡条件

当 $R_xR_2 = R_1R_3$ G=0

将 $R_SR_2 = R_1R_3$ G=0

则 $R_X = R_S$

R_S为标准电阻箱可调可读



步骤：

- 调R_3，使G = 0，R_3不动；
- 调R_S，使G = 0，R_X = R_S；
- 测量误差△Rx，仅决定于标准电阻误差△Rs，而与R_1、R_2、R_3的误差无关。

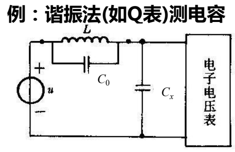
2.2.2 系统误差

削弱系统误差的典型测量技术（续）

(3) 补偿法

部分替代法或不完全替代法。常用在高频阻抗、电压、衰减量等测量中

例：谐振法(如Q表)测电容



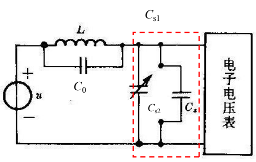
$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L(C_x+C_0)}} \quad 或 \quad C_x = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 L} - C_0$$

问题：C_x与频率f_0、电感L、分布电容C_0有关，其准确度影响C_x的准确度

新方法：补偿法测电容

容易得到仅接入C_{s1}时有：$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L(C_{s1}+C_0)}}$

接入C_x后有：$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L(C_{s2}+C_x+C_0)}}$



比较两式得到：C_x= C_{s1}-C_{s2}

2.2.2 系统误差

削弱系统误差的典型测量技术（续）

(4) 对照法(交换法)

- 通过交换被测量和标准量位置，从前后两次换位测量结果的处理中，削弱或消除系统误差
- 特别适用于平衡对称结构的测量装置中，并通过交换法可检查其对称性是否良好

2.2.2 系统误差

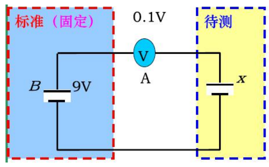
削弱系统误差的典型测量技术（续）

(5) 微差法

- 又称：虚零法或差值比较法，是一种不彻底的零示法
- 条件：当待测量与标准量接近时

$$x = s + \Delta$$

$$\frac{\Delta x}{x} \approx \frac{\Delta s}{s}$$



2.2.2 系统误差

削弱系统误差的典型测量技术（续）

(6) 交叉读数法

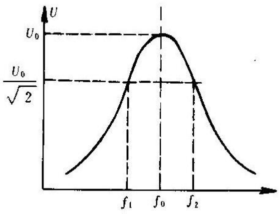
实质：是对照法的一种特殊形式

例如：由于在 $f_x=f_0$ 附近曲线平坦，

电压变化很小，很难判断真值。

交叉读数法 $f_x = \frac{f_1+f_2}{2}$

由此产生的理论误差为 $\frac{\Delta f}{f_x} = \frac{1}{8Q^2}$



33

2.2.2 系统误差

削弱系统误差的典型测量技术（续）

(7) 利用修正值或修正因数加以修正

- 根据测量仪器检定书中给出的校正曲线、校正数据或利用说明书中的校正公式对测得值进行修正

(8) 随机化处理

- 利用同类型测量仪器的系统误差具有随机特性的特点，对同一被测量用多台仪器测量，取各台仪器测量值的平均值做为测量结果
- 这种方法并不多用，费时和需要多台同类型仪器，往往做不到

2.2.2 系统误差

系统误差的合成

误差的综合 ＋ 常用函数合成误差 ⇒ 系统不确定度

误差的综合

- 设最终测量结果为y，各分项测量值为 $x_1, x_2, \ldots, x_n$；它们满足函数关系

$$y = f(x_1、x_2, \cdots x_n)$$

- 并设各x_i间彼此独立，x_i绝对误差为Δx_i，y 的绝对误差为Δy，则

将上式按泰勒级数展开

$$y + \Delta y = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_n + \Delta x_n)$$

2.2.2 系统误差

系统误差的合成（续）

$$y + \Delta y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\Delta x_1)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\Delta x_2)^2 + \ldots + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\Delta x_n)^2 + \cdots$$

略去上式右边高阶项，得：

$$y + \Delta y = y + \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n$$

$$\Delta y = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n$$

因此：$\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}\Delta x_i$

2.2.2 系统误差

系统误差的合成（续）

在实际应用中，由于分项误差符号不定而可同时取正负，有时就采用保守的办法来估算误差，即将式中各分项取绝对值后再相加

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta x_i \right|$$

该公式常用于在设计阶段中对传感器、仪器及系统等的误差进行分析和估算，以采取减少误差的相应措施

用相对误差形式表示总的合成误差

$$\delta_y = \frac{\Delta y}{y} = \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\Delta x_1}{y} + \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{\Delta x_2}{y} + \cdots + \frac{\partial y}{\partial x_n}\frac{\Delta x_n}{y} \Rightarrow \delta_y = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\Delta x_i}{y}$$

同样，当各分项符号不明确时，为可靠起见，取绝对值相加

$$\delta_y = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\Delta x_i}{y} \right|$$

2.2 测量数据估计和处理

2.2.3 粗大误差

- 数据处理之前, 依照一定的准则，应首先剔除粗大误差
- 常用准则： 3σ准则；肖维勒准则；格拉布斯准则

(1) 3σ准则

又称莱以达准则：当某个测量值的残差的绝对值 $|v_i|>3\sigma$（极限误差）时，则剔除（σ：正态分布）。

(2) 肖维勒准则

某测量值的残差绝对值 $|v_i|>Z_c\sigma$, 则剔除。实用中 $Z_c<3$，Z_c取值如表所示。

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Z_c	1.38	1.54	1.65	1.73	1.80	1.86	1.92	1.96	2.00	2.03
n	13	14	15	16	18	20	25	30	40	50
Z_c	2.07	2.10	2.13	2.15	2.20	2.24	2.33	2.39	2.49	2.58

2.2 测量数据估计和处理

2.2.3 粗大误差（续）

(3) 格拉布斯准则

某测量值的残差的绝对值$|v_i|>G\sigma$，则剔除。G值与测量次数n和置信概率P_a有关，如表所示

测量次数 n	置信概率 P_a 0.99	置信概率 P_a 0.95	测量次数 n	置信概率 P_a 0.99	置信概率 P_a 0.95
3	1.16	1.15	11	2.48	2.23
4	1.49	1.46	12	2.55	2.28
5	1.75	1.67	13	2.61	2.33
6	1.94	1.82	14	2.66	2.37
7	2.10	1.94	15	2.70	2.41
8	2.22	2.03	16	2.74	2.44
9	2.32	2.11	18	2.82	2.50
10	2.41	2.18	20	2.88	2.56

注意：

- 以上准则以数据按**正态分布**为前提，当偏离正态分布、测量次数很少时，判断的可靠性就差。
- 提高测量者**技术水平**与**责任心**，保证测量条件稳定，防止环境条件剧变

2.3 不等精度测量数据估计和处理

2.3.1不等精度测量的权与误差

- 绝对的等精度测量难以保证，但条件差别不大时，可按等精度测量处理，条件的变化作为误差考虑。
- 在科学实验或高精度测量中，为提高测量的可靠性和精度，必须考虑条件变化，进行不等精度测量。

2.3 不等精度测量数据估计和处理

2.3.1不等精度测量的权与误差（续）

(1) “权”的概念

- 被测量的 m 组测量结果及其误差不能同等看待，各组具有不同的可靠性，即可信赖程度，其大小称为“权”。
- 测量时，次数多、方法完善、仪表精度高、环境条件好和人员水平高，则结果可靠，其权也大。
- 权用符号 p 表示，有两种计算方法。

①用各组测量列的测量次数 n 的比值表示，并取测量次数较小的测量列的权为1，则：

$$p_1 : p_2 : \ldots p_m = n_1 : n_2 : \ldots n_m$$

②用各组测量列的误差平方的倒数的比值表示，并取误差较大的测量列的权为1，则：

$$p_1 : p_2 : \ldots p_m = \frac{1}{\sigma_1^2} : \frac{1}{\sigma_2^2} : \ldots : \frac{1}{\sigma_m^2}$$

2.3 不等精度测量数据估计和处理

2.3.1不等精度测量的权与误差（续）

(2) 加权算术平均值

对同一被测量进行 m 组不等精度测量，得到：m 个测量列的算术平均值：

$$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_m$$

相应各组的权分别为：

$$p_1, p_2, \cdots, p_m$$

则加权平均值可用下式表示：

$$\bar{x}_p = \frac{\bar{x}_1 p_1 + \bar{x}_2 p_2 + \cdots + \bar{x}_m p_m}{p_1 + p_2 + \cdots + p_m} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i p_i}{\sum_{i=1}^{m} p_i}$$

2.3 不等精度测量数据估计和处理

2.3.1 不等精度测量的权与误差（续）

(3) 加权算术平均值的标准误差

加权算术平均值可作为不等精度测量结果的最佳估计，其精度用加权算术平均值的标准差表示：

$$\sigma_{\bar{x}_p} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m} p_i v_i^2}{(m-1)\sum_{i=1}^{m} p_i}}$$

式中： $v_i = x_i - \bar{x}_p$

2.3 不等精度测量数据估计和处理

2.3.2 误差的合成与分配

(1) 测量误差的合成

已知各环节的误差而求总误差，称误差合成。

1) 系统误差的合成

设：系统总输出与各环节之间的函数关系为：$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

各环节定值系统误差分别为：$\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$

系差一般很小，其误差可用微分表示，故其合成表达式为：

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$$

上式中的微分项以各环节的定值系统误差 $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ 代替

$$\Delta y = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i$$

2.3.2 误差的合成与分配

(1) 测量误差的合成（续）

2) 随机误差的合成

设：测量系统或传感器的 n 个环节的均方根偏差为： $\sigma_{x_1}, \sigma_{x_2}, \ldots, \sigma_{x_n}$

则随机误差的合成为：

$$\sigma_y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2\sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2\sigma_{x_2}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2\sigma_{x_n}^2}$$

若有：线性函数 $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$，即：$y = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$）则

$$\sigma_y = \sqrt{a_1^2\sigma_{x_1}^2 + a_2^2\sigma_{x_2}^2 + \cdots + a_n^2\sigma_{x_n}^2}$$

若：$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$，则 $\sigma_y = \sqrt{\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2 + \cdots + \sigma_{x_n}^2}$

3) 总合成误差

设测量或传感器系统误差和随机误差均相互独立，则总合成误差 ε 表示为

$$\varepsilon = \Delta y \pm \sigma_y$$

2.3.2 误差的合成与分配

(2) 测量误差的分配

总误差确定后，求各环节的误差，以使总误差值不超过规定值，称误差分配

1) 等准确度分配

认为各环节的误差彼此相同，即：

系统误差：$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \ldots = \Delta x_n$

随机误差：$\sigma_{x_1} = \sigma_{x_2} = \cdots = \sigma_{x_n}$

则分配后各环节的误差：

$$\Delta x_i = \frac{\Delta y}{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\sigma_{x_i} = \frac{\sigma_y}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

2.3.2 误差的合成与分配

(2) 测量误差的分配（续）

总误差确定后，求各环节的误差，以使总误差值不超过规定值，称误差分配

2) 等作用分配

指分配给各环节的误差对总误差的影响相同，即：

系统误差：$\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 = \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n$

随机误差：$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2\sigma_{x_1}^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2\sigma_{x_2}^2 = \cdots = \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2\sigma_{x_n}^2$

则分配后各环节的误差：$\Delta x_i = \dfrac{\Delta y}{n\dfrac{\partial f}{\partial x_i}}$ ⇨ $\sigma_{x_i} = \dfrac{\sigma_y}{\sqrt{n}\left|\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right|}$

误差分配时应抓住主要误差项，对影响较小的误差项可忽略或酌情考虑。

2.4 最小二乘法与线性回归分析

2.4.1 最小二乘法

- 最小二乘法是一种数据处理方法；
- 原理：为获得最可信赖的测量结果，使各测量值的残余误差平方和最小。
- 广泛应用于组合测量的数据处理、实验曲线拟合等方面。

(1)最小二乘法的线性函数通式

设：被测量为 $X_1, X_2, \ldots, X_m$，直接测量值为 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$。相应函数关系为：

$$\left.\begin{array}{l} Y_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1m}X_m \\ Y_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2m}X_m \\ \ldots \\ Y_n = a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \cdots + a_{nm}X_m \end{array}\right\}$$

2.4 最小二乘法与线性回归分析

2.4.1 最小二乘法

(1)最小二乘法的线性函数通式（续）

若 $x_1, x_2, \dots, x_m$ 是待求量，最佳估计值为 $y_1, y_2, \dots, y_n$，

则相应估计值有下列函数关系：

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m \\ \dots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m \end{cases}$$

2.4 最小二乘法与线性回归分析

2.4.1 最小二乘法

(1)最小二乘法的线性函数通式（续）

设：有误差的实际直接测量值为 $l_1, l_2, \dots, l_n$

则：相应误差方程为：

$$\begin{cases} v_1 = l_1 - y_1 = l_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m) \\ v_2 = l_2 - y_2 = l_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m) \\ \dots \\ v_n = l_n - y_n = l_n - (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m) \end{cases}$$

2.4 最小二乘法与线性回归分析

2.4.1 最小二乘法

(1)最小二乘法的线性函数通式（续）

按最小二乘法原理，要获取最可信赖的结果 $x_1, x_2, \dots, x_m$，则上述方程组的残差平方和最小，即：

$$v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2 = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 = [v^2] = \min$$

根据求极值条件，有：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial [v^2]}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial [v^2]}{\partial x_2} = 0 \\ \dots \\ \dfrac{\partial [v^2]}{\partial x_m} = 0 \end{cases}$$

整理后可写成：

$$\begin{cases} [a_1a_1]x_1 + [a_1a_2]x_2 + \dots + [a_1a_m]x_m = [a_1l] \\ [a_2a_1]x_1 + [a_2a_2]x_2 + \cdots + [a_2a_m]x_m = [a_2l] \\ \dots \\ [a_ma_1]x_1 + [a_ma_2]x_2 + \dots + [a_ma_m]x_m = [a_ml] \end{cases}$$

上式为等精度测量线性函数最小二乘估计的正规方程。

由此可求出被测量 $x_1, x_2, \dots, x_m$ 的估计值。

2.4 最小二乘法与线性回归分析

2.4.1 最小二乘法

(1)最小二乘法的线性函数通式（续）

$$\begin{cases} [a_1a_1]x_1 + [a_1a_2]x_2 + \dots + [a_1a_m]x_m = [a_1l] \\ [a_2a_1]x_1 + [a_2a_2]x_2 + \cdots + [a_2a_m]x_m = [a_2l] \\ \dots \\ [a_ma_1]x_1 + [a_ma_2]x_2 + \dots + [a_ma_m]x_m = [a_ml] \end{cases}$$

式中

$$[a_1a_1] = a_{11}a_{11} + a_{21}a_{21} + \dots + a_{n1}a_{n1}$$

$$[a_1a_2] = a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + \dots + a_{n1}a_{n2}$$

$$\dots$$

$$[a_1a_m] = a_{11}a_{1m} + a_{21}a_{2m} + \dots + a_{n1}a_{nm}$$

$$[a_1l] = a_{11}l_1 + a_{21}l_2 + \dots + a_{n1}l_n$$

(2)最小二乘法的矩阵表示（略）

2.2.4 常用函数的合成误差

(1) 和差函数的合成误差

设：$y = x_1 \pm x_2$

$$y \pm \Delta y = (x_1 \pm \Delta x_1) \pm (x_2 \pm \Delta x_2)$$

两式相减得绝对误差：

$$\Delta y = \Delta x_1 \pm \Delta x_2$$

当 Δx_1, Δx_2 符号不能确定时，有：

$$\Delta y = \pm(|\Delta x_1| + |\Delta x_2|)$$

相对误差

$$\delta_y = \frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta x_1 \pm \Delta x_2}{x_1 \pm x_2}$$

或者写成

$$\delta_y = \frac{x_1 \Delta x_1}{(x_1 \pm x_2)x_1} \pm \frac{x_2 \Delta x_2}{(x_2 \pm x_2)x_2} = \frac{x_1}{x_1 \pm x_2}\delta_{x1} \pm \frac{x_2}{x_1 \pm x_2}\delta_{x2}$$

对于和函数

$$\delta_y = \pm\left(\frac{x_1}{x_1 + x_2}|\delta_{x1}| + \frac{x_2}{x_1 + x_2}|\delta_{x2}|\right)$$

对于差函数

$$\delta_y = \pm\left(\frac{x_1}{x_1 - x_2}|\delta_{x1}| + \frac{x_2}{x_1 - x_2}|\delta_{x2}|\right)$$

2.2.4 常用函数的合成误差

(2) 积函数的合成误差

设： $y = x_1 \cdot x_2$

得绝对误差：

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}\Delta x_i = \frac{\partial(x_1 \cdot x_2)}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial(x_1 \cdot x_2)}{\partial x_2}\Delta x_2$$

$$= x_2 \Delta x_1 + x_1 \Delta x_2$$

相对误差

$$\delta_y = \frac{\Delta y}{y} = \frac{x_2 \cdot \Delta x_1 + x_1 \cdot \Delta x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2} = \delta_{x1} + \delta_{x2}$$

若 δ_{x1}、δ_{x2} 都有正负号

则 $\delta_y = \pm(|\delta_{x1}| + |\delta_{x2}|)$

2.2.4 常用函数的合成误差

(3) 商函数的合成误差

设： $y = \dfrac{x_1}{x_2}$

得绝对误差： $\Delta y = \dfrac{\partial\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)}{\partial x_1}\Delta x_1 + \dfrac{\partial\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)}{\partial x_2}\Delta x_2$

$$= \frac{1}{x_2}\Delta x_1 - \left(\frac{x_1}{x_2^2}\right)\Delta x_2$$

相对误差 $\delta_y = \dfrac{\Delta y}{y} = \dfrac{\Delta x_1}{x_1} - \dfrac{\Delta x_2}{x_2} = \delta_{x1} - \delta_{x2}$

若 δ_{x1}、δ_{x2} **都有正负号**

则 $\delta_y = \pm\left(|\delta_{x1}| + |\delta_{x2}|\right)$

2.2.4 常用函数的合成误差

(4) 幂函数的合成误差

设： $y = kx_1^m \cdot x_2^m$

***k*为常数，将积函数的合成误差公式略加推广得：**

$$\delta_y = m\delta_{x1} + n\delta_{x2}$$

若 δ_{x1}、δ_{x2} **都有正负号**

则 $\delta_y = \pm\left(|m\delta_{x1}| + |n\delta_{x2}|\right)$

2.2.4 常用函数的合成误差

(5) 积商函数的合成误差

设： $y = k\dfrac{x_1^m \cdot x_2^n}{x_3^p}$

式中*k*、*m*、*n*、*p*均为常数，综合上述各函数合成误差公式，直接得：

$$\delta_y = m\delta_{x1} + n\delta_{x2} - p\delta_{x3}$$

若 δ_{x1}、δ_{x2} **都有正负号**

则 $\delta_y = \pm\left(|m\delta_{x1}| + |n\delta_{x2}| + |p\delta_{x3}|\right)$

2.2.5 系统不确定度

系统误差可能变化的最大幅度称为系统不确定度，用 ε_{ym} 表示;

相对系统不确定度用 γ_{ym} 表示:

1. 系统不确定度的绝对值合成法

$$\varepsilon_{ym} = \pm\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial y}{\partial x_i}\varepsilon_{im}\right|$$

$$\gamma_{ym} = \pm\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial y}{\partial x_i}\cdot\frac{\varepsilon_{im}}{y}\right|$$

2.系统不确定度的均方根合成法

$$\varepsilon_{ym} = \pm\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\varepsilon_{im}\right)^2}$$

$$\gamma_{ym} = \pm\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\cdot\frac{\varepsilon_{im}}{y}\right)^2}$$

2.2.6 等精度测量结果的处理

等精度测量定义：同一测量者，用相同仪表与测量方法，在同样环境条件下，对同一被测量多次重复测量。应用中，只有近似等精度测量。

- 对测量值进行系统误差修正，将数据依次列成表格；
- 求出算术平均值；
- 列出残差，并验证；
- 按贝塞尔公式计算标准偏差的估计值；
- 按3σ准则、肖维勒准则、格拉布斯准则检查和剔除粗大误差；
- 判断有无系统误差；
- 若有系统误差，应查明原因，修正或消除系统误差后重新测量；
- 计算算术平均值的标准偏差 ；
- 写出最后结果的表达式。

The End