现代控制理论

刘伟峰

杭州电子科技大学自动化学院

内容

- 总复习
- 重点内容
- 考试安排

总复习

- 总述
- 线性系统的状态空间描述与分析
  - 基本原理
  - 状态空间表达式的建立
- 线性系统响应
  - 线性定常系统的响应
  - 状态转移矩阵
  - 可控性、可观性与结构分解

总复习

- 线性反馈系统的时间域综合
  - 两类反馈：输出反馈与状态反馈
  - 状态重构
  - 最优控制问题
- 李亚普诺夫稳定性分析
  - 李亚普诺夫关于稳定性的定义
  - 线性定常系统的李亚普诺夫稳定性分析

第9章：线性系统的状态空间描述与分析

- 状态空间描述是对系统的一种**完全**描述

  状态空间描述是现代控制理论的基础，它不仅可以描述输入输出关系，而且可以描述系统的内部特性，特别适合于多输入多输出系统，也适用于时变系统、非线性系统和随机控制系统。

- **状态**

  指系统的运动状态。

  - **状态变量(向量)**

指足以完全表征系统运动状态的最小个数的一组变量。

第9章：线性系统的状态空间描述与分析

- 状态方程

  描述系统的状态变量与系统输入量之间关系的一阶微分方程组。

- **状态空间表达式**

  状态方程与输出方程组合起来，就构成对一个系统动态的完整描述，称之为状态空间表达式。

  - **系统(A,B,C,D)**

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

第9章：状态空间表达式的建立

- 机理推导法

  例如RLC电路，牛顿力学公式。

- 方块图建立状态空间表达式

  - 首先将系统的各个环节分解为积分、惯性和比例环节的基本形式，并选择积分环节的输出为系统状态；
  - 然后再根据系统各环节的实际连接关系，从输出端开始，写出各环节的状态关系；
  - 最后整理写出系统的状态空间表达式。状态方程与输出方程组合起来，就构成对一个系统动态的完整描述，称之为状态空间表达式

第9章：状态空间表达式的建立

- 传递函数建立状态空间表达式
  - 状态空间表达式与传递函数的关系

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

  - 状态空间表达式的建立

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = u$$

$$\Downarrow$$

$$x_1 = y \quad x_2 = \dot{y} \quad x_{n-1} = y^{(n-2)} \quad x_n = y^{(n-1)}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

第9章：系统响应

- 利用传递函数求解输出响应

$$Y(s)=\sum_{i=1}^{p}[\frac{k_{i1}}{s+\lambda_i}+\frac{k_{i2}}{(s+\lambda_i)^2}+\cdots+\frac{k_{in_i}}{(s+\lambda_i)^{n_i}}]$$

⇩

$$y(t)=\sum_{i=1}^{p}[k_{i1}e^{-\lambda_i t}+k_{i2}te^{-\lambda_i t}+\cdots+\frac{k_{in_i}}{(n_i-1)!}t^{n_i-1}e^{-\lambda_i t}]$$

- 从状态方程求解状态响应

$$\boldsymbol{x}(t)=e^{At}\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t e^{A(t-\tau)}B\boldsymbol{u}(\tau)d\tau$$

$$\boldsymbol{x}(t)=\Phi(t)\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t \Phi(t-\tau)B\boldsymbol{u}(\tau)d\tau$$

第9章：系统响应

- 从状态方程求解状态响应
  - 零输入响应
  - 零状态响应
- 矩阵指数计算
  - 拉氏变换法
  - 化矩阵**A** 为对角矩阵和约当矩阵法

第9章：可控性、可观性与系统分解

- 可控性
  - 可控性概念
  - 可控性矩阵

$$Q_k = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{rank}Q_k = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n$$

- 可观性
  - 可观性概念
  - 可观性矩阵

$$Q_{g1} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{rank}Q_{g1} = n$$

第9章 线性定常系统线性变换

- 线性系统的非奇异变换及不变性

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}$$
$$\boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x} + D\boldsymbol{u}$$

$$\xrightarrow{\tilde{\boldsymbol{x}} = P\boldsymbol{x} \text{ 或 } \boldsymbol{x} = P^{-1}\tilde{\boldsymbol{x}}}$$

$$\dot{\tilde{x}} = PAP^{-1}\tilde{x} + PBu$$
$$y = CP^{-1}\tilde{x} + Du$$

- 可控标准型转换及步骤

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

- 可观标准型转换及步骤

第9章 系统结构分解

- 结构分解的四个子系统
  - 可控可观
  - 可控不可观
  - 不可控可观
  - 不可控不可观
- 可控性分解：如何分解
- 可观性分解：如何分解

第10章：线性反馈系统的时间域综合

- **控制系统主要有两大类问题**
  - 分析

    已知控制系统，如何通过各种方法和手段如：时域、频域、根轨迹、状态空间等对系统的各种性能进行分析，这就是控制系统的分析问题。

  - 综合

    对未知的控制系统进行设计使其满足某种性能指标要求，这称为控制系统的综合问题。

- **反馈**

无论是经典控制理论还是现代控制理论，都是控制系统设计的主要方式，是系统的**核心**。

第10章：线性反馈系统的时间域综合

- 两类反馈
  - 输出反馈

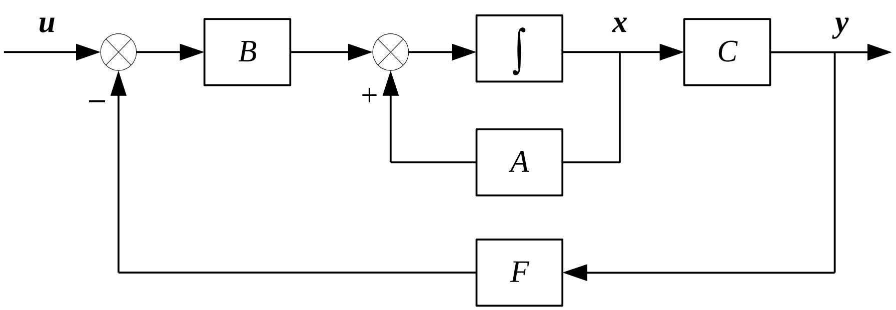

图10-1　输出反馈系统结构图

$$\dot{\boldsymbol{x}} = (A - BFC)\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B(u - Fy) \\ &= Ax + Bu - BFCx \\ &= (A - BFC)x + Bu\end{aligned}$$

第10章：线性反馈系统的时间域综合

- 两类反馈
  - 状态反馈

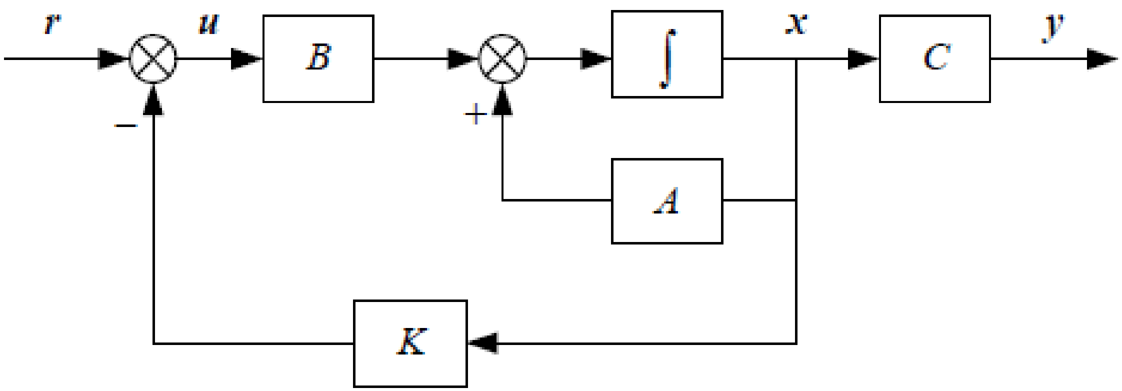

图10-2　状态反馈系统结构图

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r} - K\boldsymbol{x}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = (A - BK)\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{r} \qquad \boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x}$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ &= Ax + B(r - Kx) \\ &= Ax + Br - Kx \\ &= (A - BK)x + Br\end{aligned}$$

第10章 极点配置

- 极点配置概念

就是通过选取适当的状态反馈增益矩阵K，使闭环系统$(A-BK, B, C)$的极点，即$(A-BK)$的特征值恰好位于所希望的一组极点位置上

- **极点任意配置的条件**
  - 极点配置定理：充要条件是受控系统(A,B,C)状态是完全可控的

第10章 极点配置

- 极点配置的设计步骤
  - 第1步：判定系统(A,B,C)的可控性
  - 第2步：确定系数项 $a_i (i=1,2,\cdots,n)$
  - 第3步：可控标准型的线性非奇异变换矩阵P
  - 第4步：根据期望的极点，写出期望特征多项式
  - 第5步：求取状态反馈增益矩阵

第10章状态重构与状态观测器设计

- 状态重构（状态估计）
  - 利用已知信息(输入量u和输出量y),通过一个模型重构系统的状态变量
  - 状态重构可能性：$\boldsymbol{x}(t)=e^{At}\boldsymbol{x}_0+\int_0^t e^{A(t-\tau)}B\boldsymbol{u}(\tau)d\tau,\ t\geq 0$
  - 重构状态等价性 $\lim_{t\to\infty}[\boldsymbol{x}(t)-\tilde{\boldsymbol{x}}(t)]=0$

$\Downarrow$ 系统状态不可直接测量时

$$\boldsymbol{y}-\tilde{\boldsymbol{y}}=C\boldsymbol{x}-C\tilde{\boldsymbol{x}}=C(\boldsymbol{x}-\tilde{\boldsymbol{x}})$$

$\Downarrow$

$$\lim_{t\to\infty}(\boldsymbol{y}-\tilde{\boldsymbol{y}})=\lim_{t\to\infty}\big[\boldsymbol{y}(t)-\tilde{\boldsymbol{y}}(t)\big]=0$$

第10章状态重构与状态观测器设计

- **状态观测器设计问题**
  - 状态观测器极点任意配置的条件

充分必要条件是系统不可观部分是渐近稳定的

$$[\mathbf{x}(t)-\tilde{\mathbf{x}}(t)]=e^{(A-GC)(t-t_0)}[\mathbf{x}(t_0)-\tilde{\mathbf{x}}(t_0)]$$

$\Downarrow$

系统矩阵（***A*－*GC***）的特征值（或系统极点）决定的

特征值或状态观测器的**极点可以任意配置**

第10章：最优控制

- 最优控制问题解释

  选择一个容许的控制规律，使得被控对象按预定的要求运行，并使给定的某一性能指标达到最优值

- **最优状态调节器问题**
  - 状态方程： $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}$
  - 二次型性能指标： $J = \int_0^\infty [\boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^T R\boldsymbol{u}]dt$

$$\boldsymbol{u} = -K\boldsymbol{x} \quad \begin{cases} K = R^{-1}B^T P \\ PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \end{cases}$$

第11章：李亚普诺夫稳定性分析

- 稳定性概念
  - 系统稳定性
  - 渐进稳定性
  - 大范围稳定性
  - 不稳定

第11章：李亚普诺夫稳定性分析

- 李雅普洛夫第一方法
  - **线性定常系统渐近稳定**的充分必要条件是，系统矩阵A的所有特征值均具有负实部。
  - **若线性化系统**的系统矩阵A的**所有特征值**均具有负实部，则实际系统就是渐近稳定的。线性化过程中忽略的高阶导数项对系统的稳定性没有影响。
  - **如果系统矩阵A的特征值中**，只要有一个实部为**正的**特征值，则实际系统就是不稳定的，并且与被忽略的高阶导数项无关
  - 如果系统矩阵A的特征值中，即使只有一个实部为零，其余的都具有负实部，那么实际系统的稳定性就不能由线性化模型的稳定性判定

第11章：李亚普诺夫稳定性分析

- 李雅普洛夫第二方法
  - 核心是构造李雅普诺夫函数。
    - 正定性
    - 导函数小于0
  - 常用的李雅普诺夫函数
- 线性定常系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} \quad \begin{cases} V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T P \boldsymbol{x} \\ Q = -(A^T P + PA) \end{cases}$$

一、简单题（6’~7’×3，20’）

二、基础题（10’~15’×3，40’）

三、设计与分析题（15’×2，30’）

四、证明题（10’×1，10’）

考试时间：120分钟