第一章　信号分析基础　P16

1-1 简述工程信号的分类及各信号的特点。

解：

参见教材P6~8

1-3 周期信号的频谱有哪些特点？

解：

参见教材**P15**

1-4 画出信号 $f(t)=2\sin 2\omega t+5\cos 5\omega t$ 和 $f(t)=2\cos 2\omega t+5\sin 5\omega t$ 的幅频图和相频图。

解: (1) 由 $f(t)=2\sin 2\omega t+5\cos 5\omega t$ 和公式

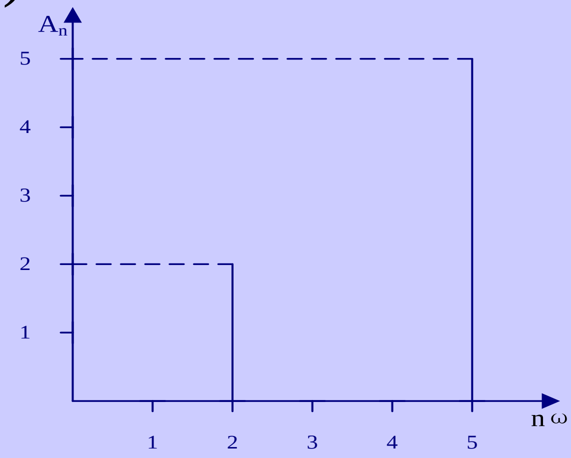
$$f(t)=a_0/2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t\right)\qquad n=1,2,\cdots$$

$$A_n=\sqrt{a_n^{\ 2}+b_n^{\ 2}}\qquad \varphi_n=-arctg\frac{b_n}{a_n}$$

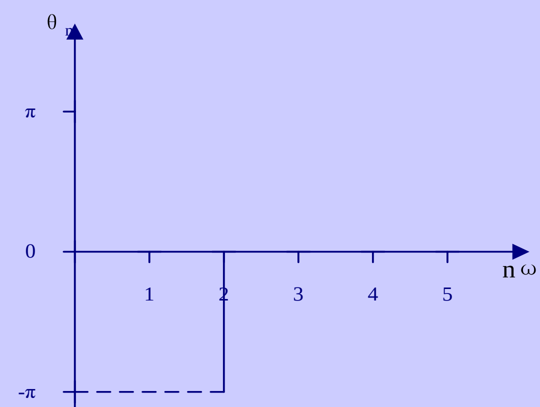
可得:

$$a_2=0, b_2=2, A_2=|b_2|=2, \varphi_2=-\arctan\frac{b_2}{a_2}=-90^0$$

$$a_5=5, b_5=0, A_5=|a_5|=5, \varphi_5=-\arctan\frac{b_5}{a_5}=0^0$$



幅频图



相频图

(2) 由 $f(t)=2\cos 2\omega t+5\sin 5\omega t$

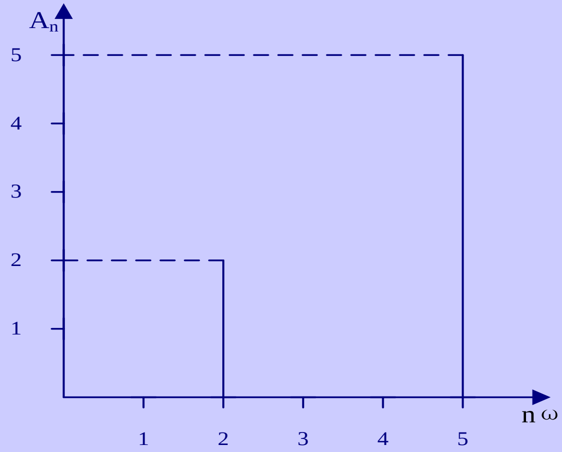
和公式 $f(t)=a_0/2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t\right)$　　$n=1,2,\cdots\cdots$

$$A_n=\sqrt{a_n{}^2+b_n{}^2}\qquad \varphi_n=-arctg\frac{b_n}{a_n}$$

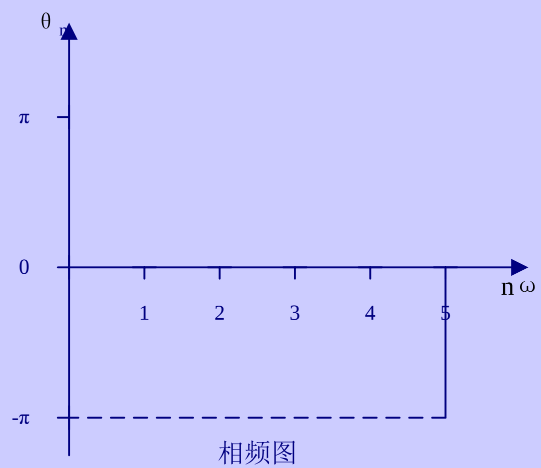
可得：

$$a_2=0\quad b_2=2\quad A_2=|b_2|=2\quad \varphi_2=-\arctan\frac{b_2}{a_2}=0^0$$

$$a_5=5\quad b_5=0\quad A_5=|a_5|=5\quad \varphi_5=-\arctan\frac{b_5}{a_5}=-90^0$$

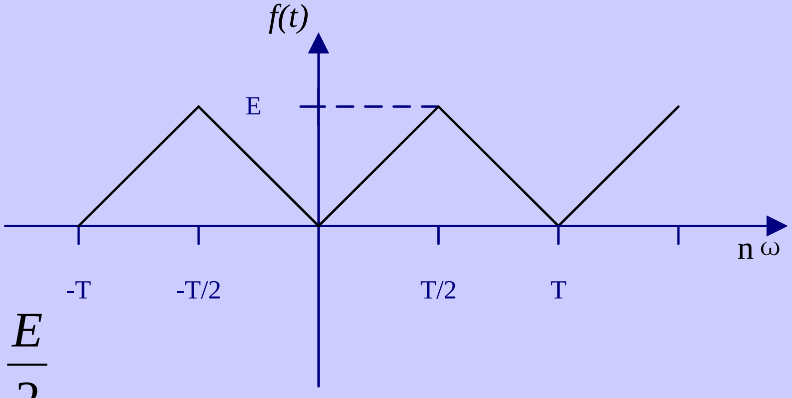


幅频图



相频图

1-5 求题1-5图所示的周期三角波的傅立叶级数，并绘制频谱图。



题1-5图

解： （1）波形全在横轴上方，所以在一个周期内的平均值 $a_0 \neq 0$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \frac{2E}{T}tdt = \frac{4E}{T^2}\frac{1}{2}t^2\Big|_0^{\frac{T}{2}} = \frac{E}{2}$$

（2）此函数是偶函数，所以正弦项的系数：

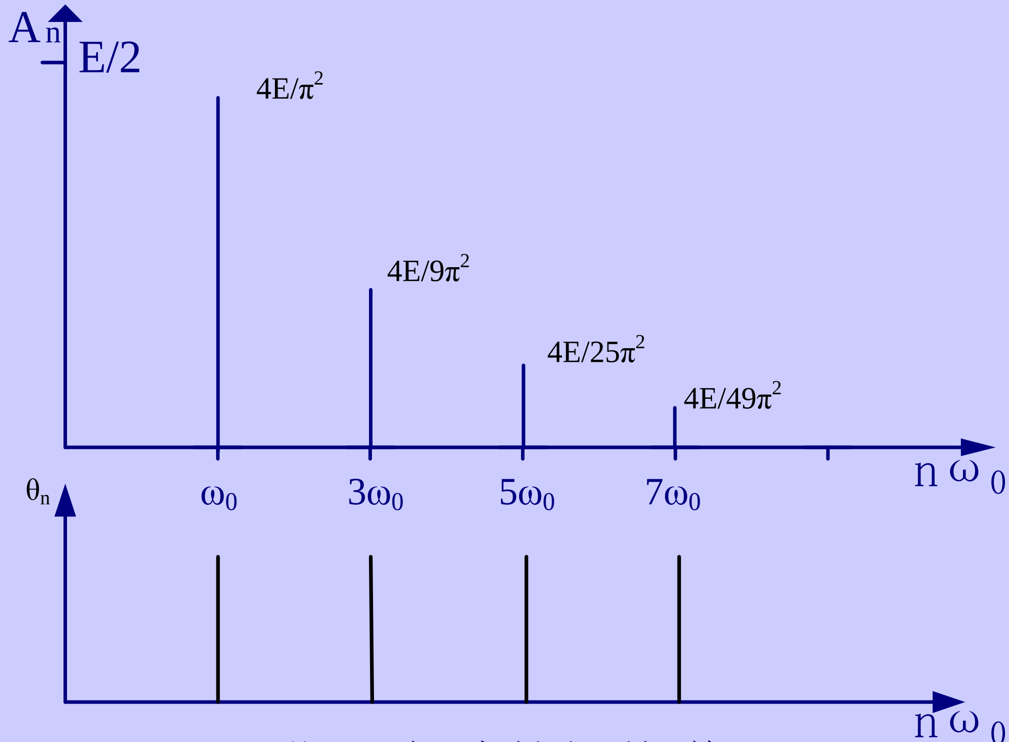
$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\omega_0 t dt = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt = \frac{8E}{T^2}\left(\frac{1}{n\omega_0}\right)^2\int_0^{\frac{T}{2}} n\omega_0 t\cos(n\omega_0 t)d(n\omega_0)t$$

$$= \frac{2E}{n^2\pi^2}[(-1)^n - 1] = \begin{cases} 0 & \text{n为偶数} \\ -\dfrac{4E}{n^2\pi^2} & \text{n为奇数} \end{cases}$$

该三角波的傅里叶级数展开式如下：

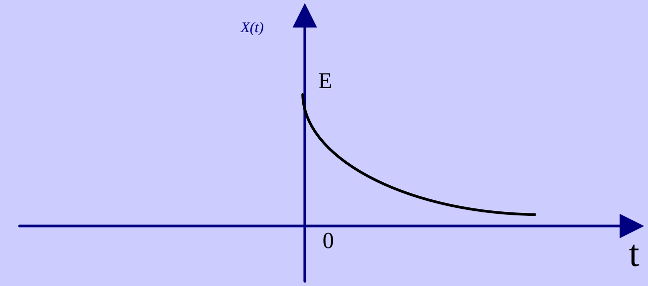
$$f(t)=\frac{E}{2}-\frac{4E}{\pi^2}(\cos\omega_0 t+\frac{1}{9}\cos 3\omega_0 t+\frac{1}{25}\cos 5\omega_0 t+\cdots)$$



周期三角波的幅值谱

1-6 求单边指数脉冲 $x(t)=\begin{cases} Ee^{-at}(a>0), t\ge 0 \\ 0, t<0 \end{cases}$ 的频谱。

解： 其时域波形图如图a所示



题1-5图a

该非周期信号的频谱函数为

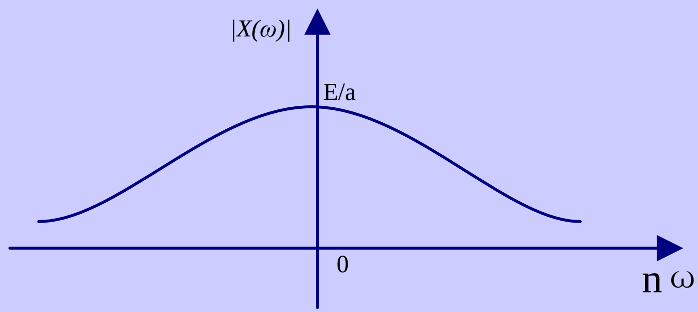
$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{\infty}Ee^{-j\omega t}e^{-at}dt$$

$$=\frac{E}{a+j\omega}=\frac{E}{a^2+\omega^2}(a-j\omega)$$

其幅值频谱函数为

$$|X(\omega)|=\frac{E}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$$

如图(b)所示.

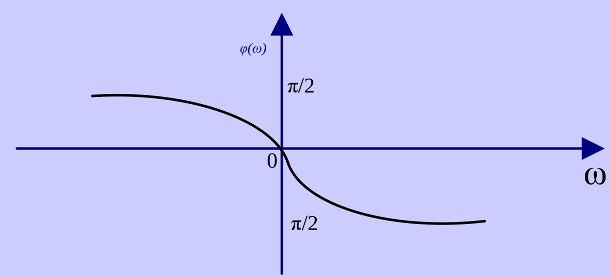


题1-5图b

其相位频谱函数为

$$\varphi(\omega)=\arctan(-\frac{\omega}{a})$$

如图(c)所示.



题1-5图c

第二章　检测技术理论基础　P42

2-1 什么是实际相对误差、标称相对误差和引用误差？

解：

参见教材P22

2-2 什么是随机误差？服从正态分布的随机误差具有什么特征？如何减小和消除系统误差？

解：

参见教材P23~30

2-4 什么是误差的等准确度分配？什么是误差的等作用分配？

解：

参见教材P35~36

2-3 什么是系统误差？求系统误差主要有哪些经验方法？如何减小和消除系统误差？

解：

参见教材P23~30

2-5 对某轴径进行了15次测量，测量数据如下：

26.20	26.20	26.21	26.23	26.19	26.22	26.21	26.19
26.09	26.22	26.20	26.21	26.23	26.21	26.18	

试用格拉布斯准则判断上述数据是否含有粗大误差，并写出其测量结果。

解: (1)求算数平均值及标准差估计值

15次算数平均值:

$$\overline{U}=\frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15}U_i=26.199$$

标准差的估计值:

$$\sigma_{s1}=\sqrt{\frac{\sum v_i^2}{(15-1)}}=\sqrt{\frac{\sum(x_i-\overline{x})^2}{(15-1)}}=\sqrt{\frac{0.015695}{14}}=0.0335mV$$

(2)判断有无粗大误差：采用格拉布斯准则

取置信概率 $P_\alpha = 0.95$

查表2-4，可得系数G=2.41，则有：

$$G \times \sigma_s = 2.41 \times 0.0335 = 0.0807 < \left| \nu_9 \right|$$

故剔除U_9

(3)剔除粗大误差后的算术平均值及标准差估计值如下：

算数平均值为：

$$\overline{U} = \frac{1}{14}\sum_{i=1}^{14} U_i = 26.207$$

标准差的估计值为：

$$\sigma_{s2} = \sqrt{\frac{\sum v_i^2}{(14-1)}} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{(14-1)}} = \sqrt{\frac{0.00817}{13}} = 0.02507mV$$

重新判断粗大误差：

取置信概率 $P_\alpha = 0.95$

查表2-4，可得系数G=2.41，则有：

$$G\times\sigma_s = 2.37\times 0.02507 = 0.0594 > \left|\nu_{i2}\right|$$

故无粗大误差。

(4) 测量结果表示：

算术平均值的标准差：

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma_{s2}}{\sqrt{\mathrm{n}}} = \frac{0.02507}{\sqrt{14}} \approx 0.0067mV$$

所以测量结果为：

$$x = \overline{x} \pm 3\sigma_{\overline{x}} = (26.207 \pm 0.02)mV \qquad \left(P_a = 99.73\%\right)$$

2-6 对光速进行测量，的到如下四组测量结果：

$$c_1 = (2.98000 \pm 0.01000) \times 10^8 m/s$$

$$c_2 = (2.98500 \pm 0.01000) \times 10^8 m/s$$

$$c_3 = (2.99990 \pm 0.00200) \times 10^8 m/s$$

$$c_4 = (2.99930 \pm 0.00100) \times 10^8 m/s$$

求光速的加权平均值及其标准差。

解： 权重计算：用各组测量列的标准差平方的倒数的比值表示。

$$P_1 : P_2 : P_3 : P_4 = \frac{1}{\sigma_1^2} : \frac{1}{\sigma_2^2} : \frac{1}{\sigma_3^2} : \frac{1}{\sigma_4^2} = 1:1:25:100$$

加权算术平均值为：

$$\overline{x_p} = \sum_{i=1}^{4} \overline{x_i} P_i / \sum_{i=1}^{4} P_i = 2.99915 \times 10^8 m/s$$

加权算术平均值的标准差为：

$$v_1 = 0.01915 \times 10^8 \qquad v_2 = 0.01415 \times 10^8$$

$$v_3 = -0.00075 \times 10^8 \qquad v_4 = -0.00015 \times 10^8$$

$$\sigma_{\overline{x_p}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{4} P_i v_i^2}{(4-1)\sum_{i=1}^{4} P_i}} = 0.00124 \times 10^8 m/s$$

2-7 某中变压器油的粘度随温度的升高而降低，经测量得到不同温度下的粘度值数据，如表2-7所示，求粘度与温度之间的经验公式。

表2-7 不同温度下的粘度值数据

温度x_i	10	15	20	25	30	35	40	45
粘度y_i	4.24	3.51	2.92	2.52	2.20	2.00	1.81	1.7
温度x_i	50	55	60	65	70	75	80	
粘度y_i	1.6	1.5	1.43	1.37	1.32	1.29	1.25	

解：绘制数据曲线图，观察数据变化趋势，原始数据接近指数曲线（蓝色），因此计算Ln(yi)，如表2-7-1所示，并观察Ln(yi) ～xi间的关系（红色），接近线性，因此应用最小二乘法原理，用一元线性回归方程ln(yi)=b_0+bxi拟合。

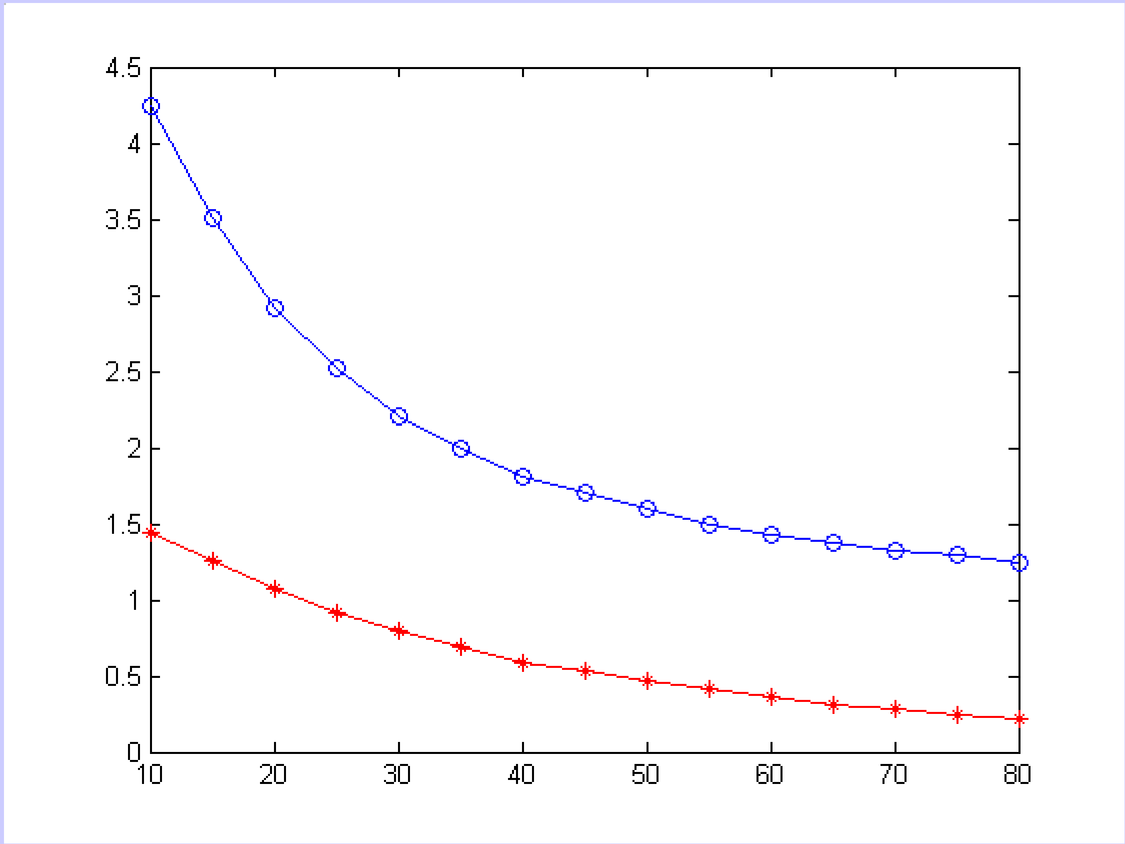


表2-7-1　不同温度下的粘度值的对数数据

x_i	10	15	20	25	30	35	40	45
$\ln y_i$	1.44	1.26	1.07	0.92	0.79	0.69	0.59	0.53
x_i	50	55	60	65	70	75	80	
$\ln y_i$	0.47	0.41	0.36	0.31	0.28	0.25	0.22	

解法一：列出误差方程如下:

$$y_i-(b_0+bx_i)=v_i \qquad (i=1,2\ldots\ldots 15)$$

式中y_i为测量值，（b_0+bx_i）为估计值

运用最小二乘法原理，$\sum_{i=1}^{n} v_i^2$ 为最小

即：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\sum V_i^2}{\partial b_0}=0\\ \dfrac{\partial\sum V_i^2}{\partial b}=0\end{cases}$$

拟合结果为：

$$b=\frac{15\sum_{i=1}^{15}x_iy_i-\sum_{i=1}^{15}x_i\sum_{i=1}^{15}y_i}{15\sum_{i=1}^{15}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{15}x_i\right)^2}=-0.0164\ ,\ b_0=\frac{\sum_{i=1}^{15}x_i^2\sum_{i=1}^{15}y_i-\sum_{i=1}^{15}x_i\sum_{i=1}^{15}x_iy_i}{15\sum_{i=1}^{15}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{15}x_i\right)^2}=1.377$$

所以可求得回归方程: ln(y)=1.377-0.0164x，即：$y=3.9628e^{-0.0164x}$

解法二： 用矩阵求解

由最小二乘法估计的矩阵解 $\hat{X}=(A'A)^{-1}A'L$ 得：

$$A'A=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\10&15&20&25&30&35&40&45&50&55&60&65&70&75&80\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&10\\1&15\\1&20\\1&25\\1&30\\1&35\\1&40\\1&45\\1&50\\1&55\\1&60\\1&65\\1&70\\1&75\\1&80\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15&675\\675&37375\end{bmatrix}$$

由于

则：$|A'A| = 105000 \neq 0$(有解)

$$(A'A)^{-1} = \frac{1}{|A'A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{105000}\begin{bmatrix} 37375 & -675 \\ -675 & 15 \end{bmatrix}$$

$$A'L = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & 15 & 20 & 25 & 30 & 35 & 40 & 45 & 50 & 55 & 60 & 65 & 70 & 75 & 80 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4.24 \\ 3.51 \\ 2.92 \\ 2.52 \\ 2.20 \\ 2.00 \\ 1.81 \\ 1.7 \\ 1.6 \\ 1.5 \\ 1.43 \\ 1.37 \\ 1.32 \\ 1.29 \\ 1.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30.66 \\ 1127.85 \end{bmatrix}$$

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} b \\ b_0 \end{bmatrix} = (A'A)^{-1}A'L = \frac{1}{105000}\begin{bmatrix} 37375 & -675 \\ -675 & 15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 30.66 \\ 1127.85 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.036 \\ 3.72 \end{bmatrix}$$

所以：

$b = -0.036$

$b_0 = 3.72$

拟合方程为：$y = 3.72 - 0.036x$