



考试安排

- ❑ 考试时间：2021年1月
- ❑ 考试地点：待定
- ❑ 考试形式：闭卷，7道大题，100分



Ch.9 线性系统的状态空间 描述与分析



9.1 状态空间描述的基本概念



□ 状态空间模型的形式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases}$$

其中 \mathbf{x} 为 n 维的状态向量;

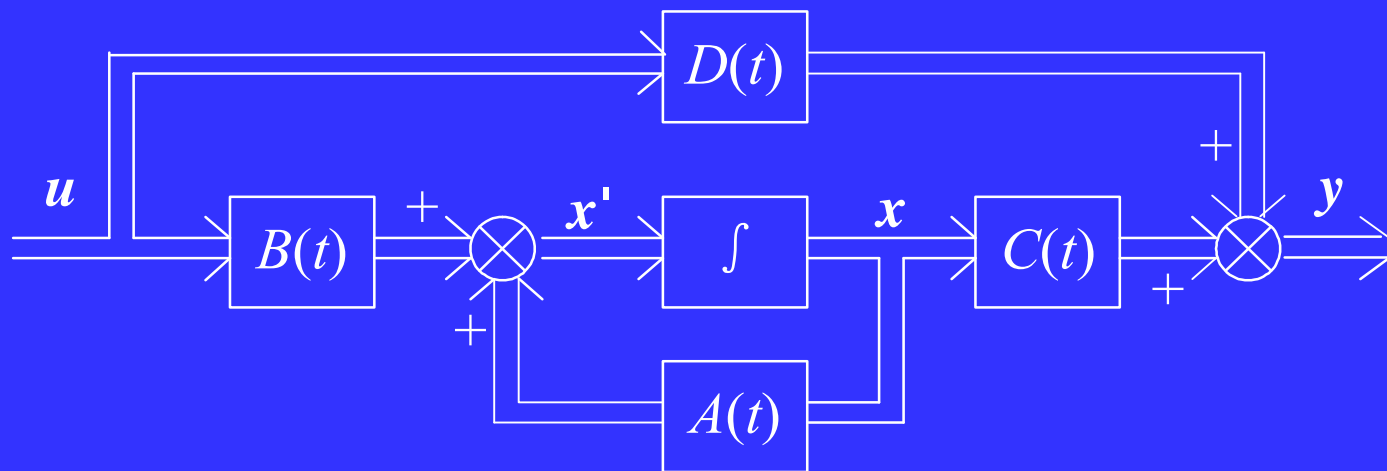
- \mathbf{u} 为 r 维的输入向量;
- \mathbf{y} 为 m 维的输出向量;
- \mathbf{A} 为 $n \times n$ 维的系统矩阵;
- \mathbf{B} 为 $n \times r$ 维的输入矩阵;
- \mathbf{C} 为 $m \times n$ 维的输出矩阵;
- \mathbf{D} 为 $m \times r$ 维的直联矩阵(前馈矩阵, 直接转移矩阵)。



□ 例 线性时变系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u} \end{cases}$$

的结构图如下图所示。



多输入多输出线性时变系统的结构图



9.2 状态空间表达式的建立

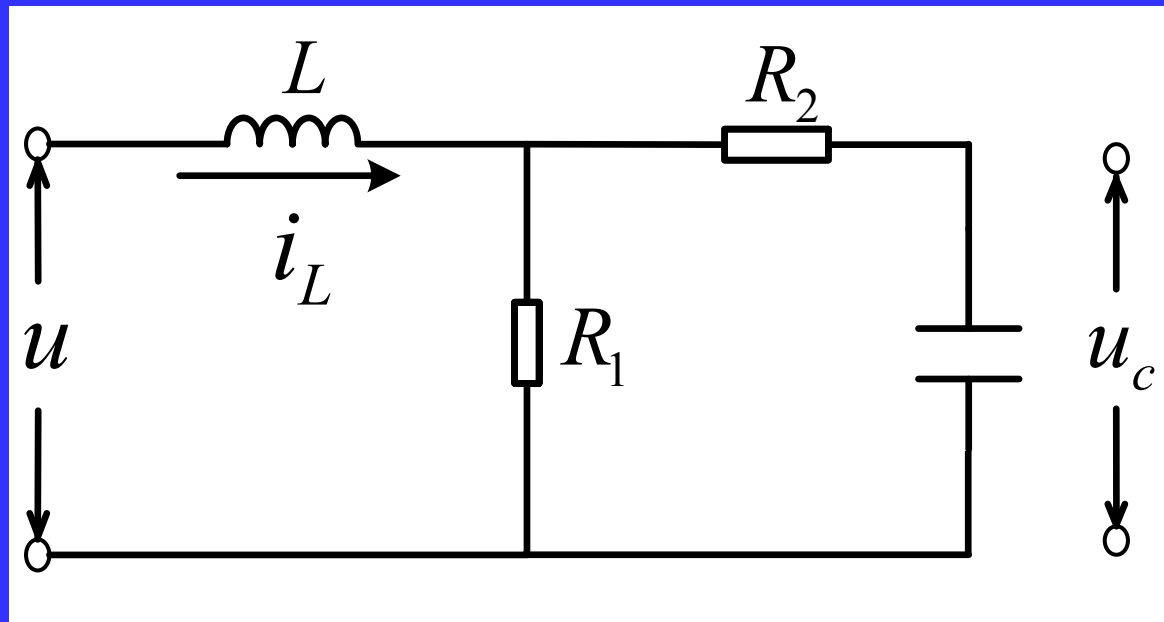


9.2.1 基于机理推导法建立状态空间表达式

- 建立被控对象的数学模型是进行系统分析和综合的第一步，是控制理论和工程的基础。
 - 上一节讨论了由电容和电感两类储能元件以及电阻所构成的电网络系统的状态空间模型的建立，其依据为各电气元件的物理机理及电网络分析方法。
 - 这种根据系统的物理机理建立对象的数学模型的方法称为**机理建模**。
 - 机理建模主要根据系统的物料和能量(电压、电流、力和热量等)在储存和传递中的动态平衡关系，以及各环节、元件的各物理量之间的关系，如电感的电压和电流满足的动态关系。



例：系统如图所示，试建立其状态空间模型。





选择状态变量: $x_1 = i_L$, $x_2 = u_C$,

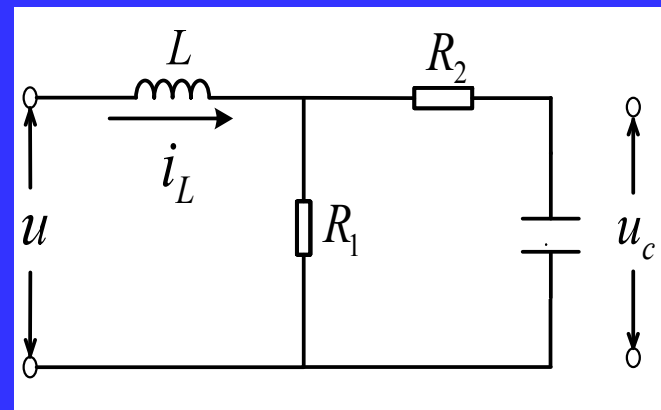
$$i_L = (u - L \frac{di_L}{dt}) \frac{1}{R_1} + C \frac{du_C}{dt}$$

$$L \frac{di_L}{dt} + u_C + C \frac{du_C}{dt} R_2 = u$$

整理得:

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{u}{L} - \frac{i_L}{L} \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right) - \frac{u_C}{L} \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{R_1}{C(R_1 + R_2)} i_L - \frac{1}{C(R_1 + R_2)} u_C$$





状态方程为:

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{L} \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right) x_1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \frac{x_2}{L} - \frac{u_C}{L}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{R_1}{C(R_1 + R_2)} x_1 - \frac{1}{C(R_1 + R_2)} x_2$$

输出方程为:

$$y = u_C = x_2$$



写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} & -\frac{R_1}{L(R_1 + R_2)} \\ \frac{R}{C(R_1 + R_2)} & -\frac{1}{C(R_1 + R_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



9.2.2 基于系统方块图建立状态空间表达式

Block Diagram \rightarrow State-Space Representation

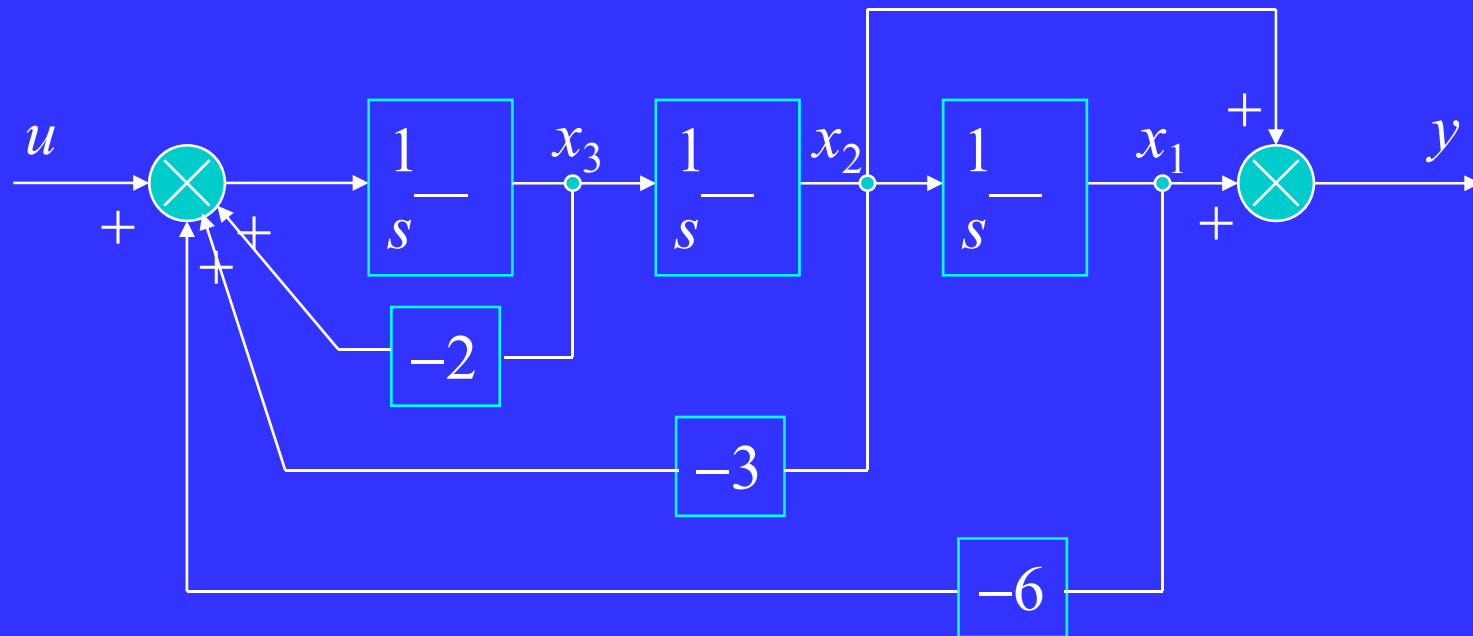
□ 下面讨论由系统方框图建立系统的状态空间模型

➤ 基本思想:

1. 将系统的各个环节分解为积分、惯性和比例环节
2. 选取积分环节和惯性环节的输出为系统状态



□ 例 建立下图所示系统的状态空间模型



□ 解: 已经是积分和比例环节。选择状态变量 x_1, x_2, x_3 。
列出状态关系和输出关系:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = -6x_1 - 3x_2 - 2x_3 + u$$

$$y = x_1 + x_2$$



整理成状态空间模型形式得:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$



9.2.3 基于传递函数建立 状态空间表达式



1. 传递函数阵的定义

- 在引入传递函数阵概念之前，需将标量函数**拉氏变换** (Laplace transform)的定义扩展到向量函数和矩阵函数。
 - 为此，定义对向量函数和矩阵函数的拉氏变换为分别对该向量函数和矩阵函数的**各个元素**求相应的拉氏变换
 - 那么，我们可对矩阵函数和向量函数进行拉氏变换及其拉氏反变换。



2. 由状态空间表达式求传递函数阵

- 下面怎样从状态空间表达式求系统的传递函数阵。
- 已知MIMO线性定常系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases}$$

其中 \mathbf{x} 为 n 维状态向量;
 \mathbf{u} 为 r 维输入向量;
 \mathbf{y} 为 m 维输出向量。



□ 对上式取拉氏变换, 有

$$\begin{cases} sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}$$

其中 $X(s)$ 、 $U(s)$ 和 $Y(s)$ 分别为 $x(t)$ 、 $u(t)$ 和 $y(t)$ 的拉氏变换;
 $x(0)$ 为 $x(t)$ 的在初始时刻 $t=0$ 的值。

□ 由于传递函数阵描述的是系统输入输出间动态传递关系, 不考虑系统初始条件的影响

➤ 因此, 可令 $x(0)=0$, 于是由状态方程的拉氏变换式有

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$$



- 将上述 $X(s)$ 代入输出方程，有

$$Y(s)=[C(sI-A)^{-1}B+D]U(s)$$

- 因此，可得线性定常连续系统的传递函数阵为

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$$

- 若对于输入与输出间无直接关联项(即 $D=0$)的系统，则有

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B$$



例 求如下系统的传递函数

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} u$$
$$y = [1 \quad 2] x$$

解 (1) 先计算逆矩阵 $(sI - A)^{-1}$

代数余子式

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s+5 & 1 \\ -3 & s+1 \end{vmatrix} = (s+2)(s+4)$$

代数余子式

伴随矩阵
adjoint
matrix

$$\text{adj}(sI - A) = \text{adj} \begin{bmatrix} s+5 & 1 \\ -3 & s+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 3 & s+5 \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{|sI - A|} = \frac{1}{(s+2)(s+4)} \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 3 & s+5 \end{bmatrix}$$



□ (2) 由传递函数计算公式可得

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1} B \\ &= \frac{[1 \quad 2]}{(s+2)(s+4)} \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 3 & s+5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \\ &= \frac{12s+59}{(s+2)(s+4)} \end{aligned}$$

□ 由于状态变换仅对状态变量进行，保持系统的输入和输出变量及它们间的动静态关系不变。因此，有如下性质：





9.2.3.2 状态空间表达式的建立

□ 本小节主要讨论由描述系统输入输出关系的常微分方程建立系统的状态空间模型，分别讨论由

- 不含输入量导数项
- 包含输入量导数项

的微分方程建立状态空间模型。

□ **关键问题：**

- 如何选择状态变量
- 保持系统的输入输出间的动态和静态关系不变



1. 线性微分方程不含输入的导数，传递函数无零点

linear differential equation

- 描述单输入单输出线性系统的输入输出间动态行为，不包含输入量的导数项时的线性定系数常微分方程为

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = bu \quad (1)$$

其中 y 和 u 分别为系统的输出和输入， n 为系统的阶次。

- 本小节要研究的是建立上述常微分方程描述的动态系统基于如下状态空间模型的表述

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

- 问题的关键是**如何选择状态变量**



□ 由微分方程理论知, 若初始时刻 t_0 的初值 $y(t_0), y'(t_0), \dots, y^{(n-1)}(t_0)$ 已知, 则对给定的输入 $u(t)$, 微分方程 (1) 有唯一解, 也即系统在 $t \geq t_0$ 的任何瞬时的动态都被唯一地确定。

➤ 因此, 选择状态变量如下 **相变量** (phase variable)

$$x_1(t) = y(t), x_2(t) = y'(t), \dots, x_n(t) = y^{(n-1)}(t)$$

可完全刻画系统的动态特性

➤ 取输出 y 及其各阶导数为状态变量, 物理意义明确, 易于接受



- 将上述选择的状态变量代入输入输出的常微分方程，有如下状态方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = -a_1 x_n - \dots - a_n x_1 + bu \end{cases}$$

和输出方程

$$y = x_1$$



$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = bu$$

□ 将上述状态方程和输出方程写成矩阵形式有

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{bmatrix} u$$
$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

其中 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, $u = [u]$, $y = [y]$ 。



$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = bu$$

□ 该状态空间模型可简记为:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = C\mathbf{x} \end{cases}$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{1} \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

$$C = [\mathbf{1} \quad 0 \quad \cdots \quad 0]$$

可控标准型

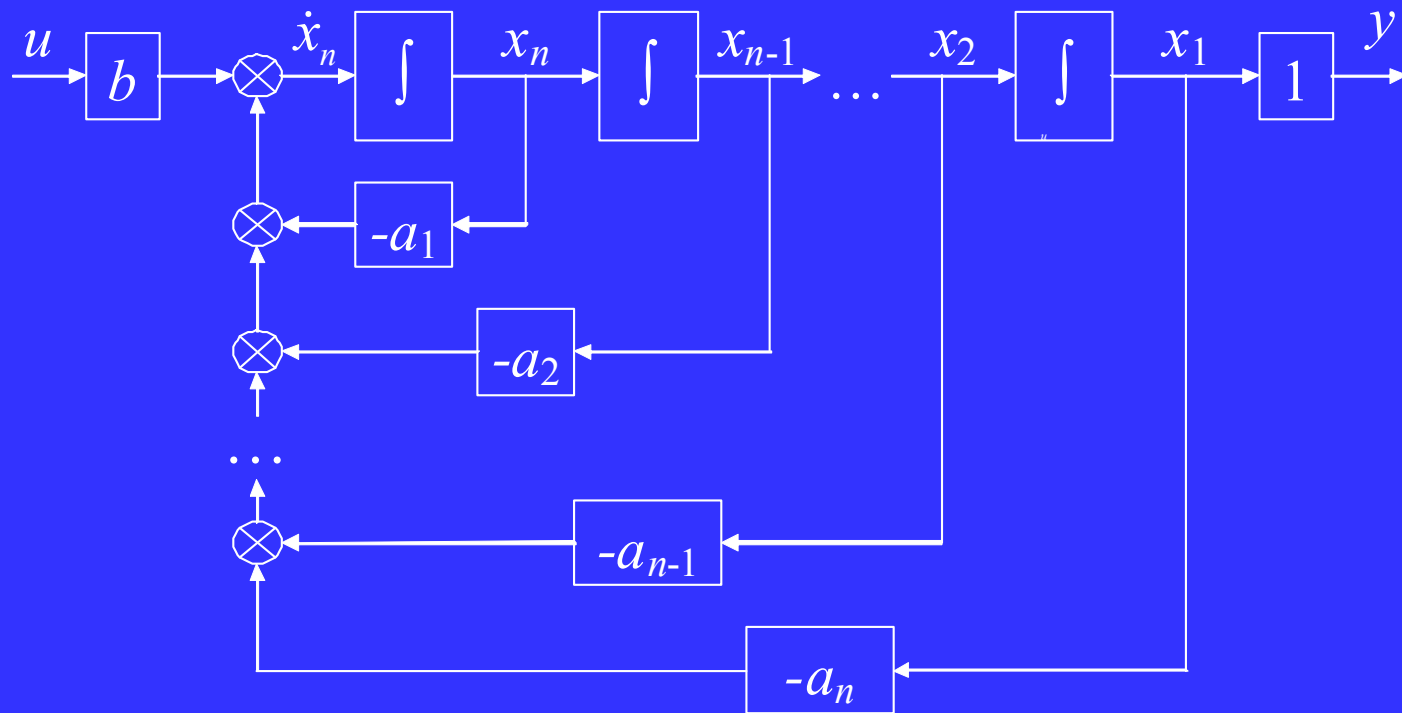


- 上述式子清楚说明了状态空间模型中系统矩阵 A 与微分方程(1)中的系数 a_1, a_2, \dots, a_n 之间，输入矩阵 B 与方程(1)中系数 b 之间的对应关系。
 - 通常，将上述取输出 y 及其各阶导数为状态变量称为 **相变量**。
- 上述状态空间模型中的系统矩阵 A 具有特殊的形式，该矩阵的最后一行与其矩阵特征多项式的系数有对应关系，前 $n-1$ 行为1个 $n-1$ 维的零向量与 $(n-1) \times (n-1)$ 维的单位矩阵。
- 该类矩阵称为**友矩阵** (Companion Matrix)。友矩阵在线性定常系统的状态空间分析方法中是一类重要的矩阵，这在后面的章节中可看到。



$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = bu$$

□ 上述实现状态空间模型的模拟结构图如下所示





□ 例 将以下系统输入输出方程变换为状态空间模型

$$y'''' + 6y'' + 11y' + 6y = 2u$$

□ 解 本例中

$$a_1 = 6 \quad a_2 = 11 \quad a_3 = 6 \quad b = 2$$

因此, 当选择输出 y 及其 1 阶与 2 阶导数等相变量为状态变量时, 可得状态空间模型如下

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} u$$
$$y = [1 \ 0 \ 0] \mathbf{x}$$





2. 线性微分方程含有输入的导数，传递函数有零点

□ 描述单输入单输出线性系统的输入输出间动态行为的微分方程的一般表达式为

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = b_0 u^{(n)} + \dots + b_n u$$

➤ 本小节所要研究的是建立上述常微分方程描述的动态系统基于如下状态空间的数学模型——状态空间模型

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u \end{cases}$$

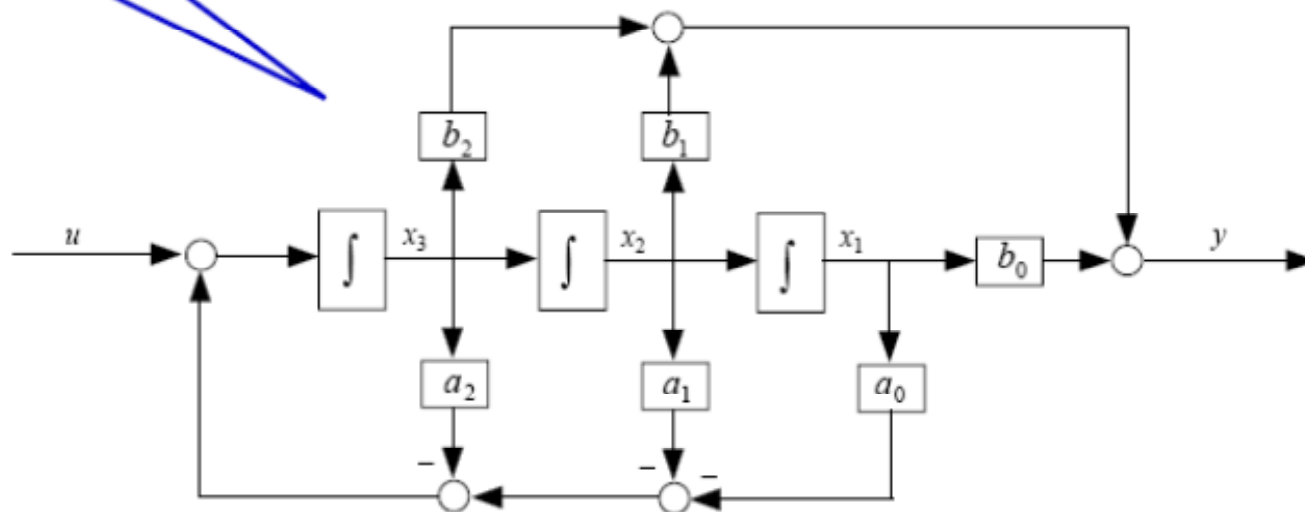
➤ 建立该状态空间模型的关键是如何选择状态变量

状态空间模型:

$$G(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

状态变量图



对一般的传递函数

请记住该结论！

$$G(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} \cdots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0} + d$$

状态空间实现

能控标准型

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_{n-2} \quad b_{n-1}] \mathbf{x} + du \end{cases}$$

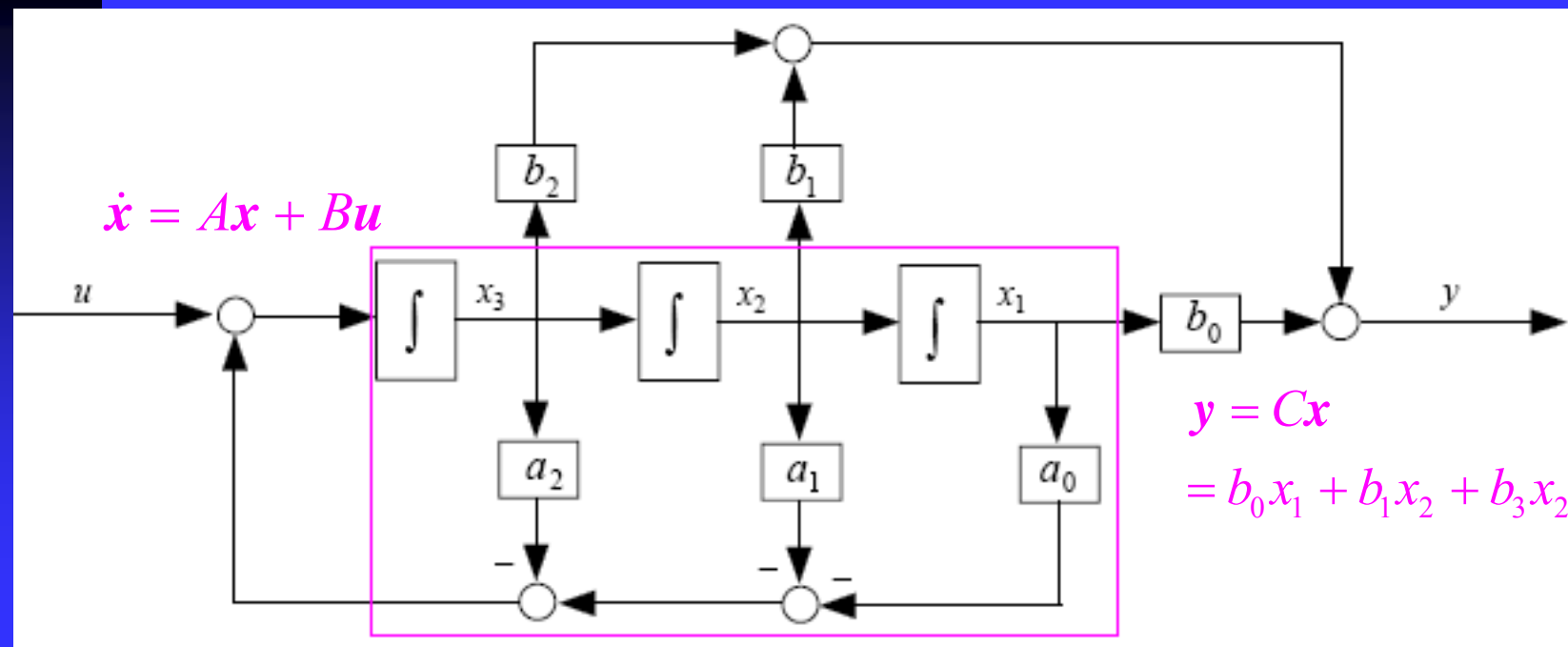
特点：分子多项式的系数体现在输出矩阵中。



$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = b_0 u^{(n)} + \dots + b_n u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = b_0 x_1 + b_1 x_2 + b_2 x_3 = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$





3. 由传递函数建立状态空间模型

□ 下面讨论由描述系统输入输出关系的传递函数建立系统的状态空间模型

➤ 关键问题:

1. 如何选择状态变量
2. 保持系统的输入输出间的动态和静态关系不变



□ 实际物理系统传递函数中分子多项式阶次小于或等于其分母多项式阶次，此时称该传递函数为真（正则, **regular**）有理传递函数。

➤ 而分子多项式阶次小于分母多项式阶次时，则称为严格真（严格正则, **strictly regular**）有理传递函数。

□ 本小节讨论描述单输入单输出(SISO)线性系统的输入输出间动态行为的如下传递函数

$$\bar{G}(s) = \frac{\bar{b}_0 s^n + \bar{b}_1 s^{n-1} + \dots + \bar{b}_n}{\bar{a}_0 s^n + \bar{a}_1 s^{n-1} + \dots + \bar{a}_n} \quad (\bar{a}_0 \neq 0)$$



➤ 对上述传递函数，由长除法，有

$$\begin{aligned}\bar{G}(s) &= \frac{\bar{b}_0 s^n + \bar{b}_1 s^{n-1} + \dots + \bar{b}_n}{\bar{a}_0 s^n + \bar{a}_1 s^{n-1} + \dots + \bar{a}_n} \\ &= \frac{(\bar{b}_1 - \bar{a}_1 \bar{b}_0 / \bar{a}_0) s^{n-1} + \dots + (\bar{b}_n - \bar{a}_n \bar{b}_0 / \bar{a}_0)}{\bar{a}_0 s^n + \bar{a}_1 s^{n-1} + \dots + \bar{a}_n} + \frac{\bar{b}_0}{\bar{a}_0} \\ &= G(s) + d\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}G(s) &= \frac{b_1 s^{n-1} + \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} \\ d &= \frac{\bar{b}_0}{\bar{a}_0} \quad a_i = \frac{\bar{a}_i}{\bar{a}_0} \quad b_i = \frac{\bar{b}_i - \bar{b}_0 \bar{a}_i}{\bar{a}_0}\end{aligned}$$



例 给出 $G(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$ 的状态空间实现。

能控标准型:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [3 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

能观标准型:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

与能控标准型对偶

对角型实现:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [2 \quad -1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

状态空间实现
的不唯一性

$$k_1 = [G(s)(s+1)]|_{s=-1} = 2$$

$$k_2 = [G(s)(s+2)]|_{s=-2} = -1$$



□ 习题9-2 (习题9-1)描述系统的微分方程为

$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 4y(t) = u(t)$$

其中 $y(t)$ 为输出量, $u(t)$ 为输入量.

(1) 选状态变量 $x_1 = y(t)$, $x_2 = \dot{y}(t)$, 写出系统的状态空间模型.

□ 习题9-3 (习题9-3-3)求以下传递函数模型对应的状态空间模型

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2s^2 + 6s + 5}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2}$$



9.3 线性定常系统的响应



➤ 对于矩阵函数，有

$$(sI - A)^{-1} = \frac{I}{s} + \frac{A}{s^2} + \frac{A^2}{s^3} + \dots + \frac{A^{k-1}}{s^k} + \dots$$

$$\mathbf{e}^{At} \triangleq I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{A^k t^k}{k!} + \dots$$

其中 \mathbf{e}^{At} 称为时间 t 的**矩阵指数函数**，并有

$$\begin{aligned} L^{-1}[(sI - A)^{-1}] &= L^{-1} \left[\frac{I}{s} + \frac{A}{s^2} + \frac{A^2}{s^3} + \dots + \frac{A^{k-1}}{s^k} + \dots \right] \\ &= I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{A^k t^k}{k!} + \dots \\ &= \mathbf{e}^{At} \end{aligned}$$



- 为讨论方便, 引入能够描述系统状态转移特性的**线性定常连续系统的状态转移矩阵**如下:

$$\Phi(t) = e^{At}$$

- 因此, 有如下关系式

$$\Phi(t - t_0) = e^{A(t-t_0)}$$

$$x(t) = \Phi(t)x_0 = \Phi(t-t_0)x(t_0)$$

- 由上述状态转移矩阵定义和齐次状态方程的解, 系统状态转移矩阵有如下关系

$$\Phi(t) = L^{-1}[(sI-A)^{-1}]$$



□ 例3-1 试求如下状态方程在初始状态 x_0 下的解

$$x' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

□ 解 (1) 首先计算 $(sI - A)^{-1}$:

$$|sI - A| = s^2 + 3s + 2 = (s + 1)(s + 2)$$

$$\begin{aligned} (sI - A)^{-1} &= \frac{\text{adj}(sI - A)}{|sI - A|} = \frac{1}{(s + 1)(s + 2)} \begin{bmatrix} s + 3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2}{s + 1} - \frac{1}{s + 2} & \frac{1}{s + 1} - \frac{1}{s + 2} \\ -\frac{2}{s + 1} + \frac{2}{s + 2} & -\frac{1}{s + 1} + \frac{2}{s + 2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$



(2) 计算矩阵指数函数 e^{At}

$$\begin{aligned} e^{At} &= L^{-1}[(sI - A)^{-1}] \\ &= L^{-1} \begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \\ -\frac{2}{s+1} + \frac{2}{s+2} & -\frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(3) 状态方程的解为

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 4e^{-t} - 3e^{-2t} \\ -4e^{-t} + 6e^{-2t} \end{bmatrix}$$





9.3.1.2 非齐次状态方程的解

non-homogeneous state equation

- 当线性定常连续系统具有输入作用时, 其状态方程为如下非齐次状态方程:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

该状态方程在初始状态

$$\mathbf{x}(t)\big|_{t=t_0} = \mathbf{x}(t_0)$$

下的解

- 就是由初始状态 $\mathbf{x}(t_0)$ 和输入作用 $u(t)$ 所引起的系统状态的运动轨迹



$$e^{-At} \mathbf{x}(t) - e^{-At_0} \mathbf{x}(t_0) = \int_{t_0}^t e^{-A\tau} B \mathbf{u}(\tau) d\tau$$

因此: $\mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B \mathbf{u}(\tau) d\tau$

上式便是非齐次状态方程的解

□ 当 $t_0 = 0$ 时, 解 $\mathbf{x}(t)$ 又可记为

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \mathbf{u}(\tau) d\tau$$

□ 若用状态转移矩阵来表示, 上述非齐次状态方程的解又可分别记为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \Phi(t-t_0) \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau) B \mathbf{u}(\tau) d\tau \\ &= \Phi(t) \mathbf{x}_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau) B \mathbf{u}(\tau) d\tau \end{aligned}$$



□ 例3-2 已知线性定常系统为

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

试求系统在单位阶跃输入作用下，状态方程的解。

□ 解 在例3-1中已求出状态转移矩阵 $\Phi(t)$ 为

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

于是，系统状态方程在阶跃输入 $u(t) = 1(t)$ 下的解为





$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \Phi(t)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau)B\mathbf{u}(\tau)d\tau \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \\ &\quad + \int_0^t \begin{bmatrix} 2e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \\ -2e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} & -e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau \\ &= \begin{bmatrix} 4e^{-t} - 3e^{-2t} \\ -4e^{-t} + 6e^{-2t} \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \\ -e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} d\tau \\ &= \begin{bmatrix} 1/2 + 3e^{-t} - 5/2e^{-2t} \\ -3e^{-t} + 5e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$



习题

□ 3-1 已知系统状态方程为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

当 $x(0) = 0, u(t) = 1(t)$ 时, 求状态方程的解。



9.4 状态转移矩阵



矩阵指数和状态转移矩阵的性质

□ 由矩阵指数函数 e^{At} 的展开式和状态转移矩阵 $\Phi(t)$ 的定义, 可证明矩阵指数函数和状态转移矩阵具有如下性质

1) $\Phi(0) = e^{A0} = I$

2) $e^{A(t+s)} = e^{At}e^{As}$, $\Phi(t+s) = \Phi(t)\Phi(s)$, 式中 t 和 s 为两个独立的标量自变量

证明: 由指数矩阵函数的展开式, 有

$$\begin{aligned} e^{At}e^{As} &= \left(I + At + \frac{A^2}{2!}t^2 + \dots + \frac{A^k}{k!}t^k + \dots \right) \left(I + As + \frac{A^2}{2!}s^2 + \dots + \frac{A^k}{k!}s^k + \dots \right) \\ &= I + A(t+s) + \frac{A^2}{2!}(t^2 + 2ts + s^2) + \dots + \frac{A^k}{k!}(t+s)^k + \dots \\ &= e^{A(t+s)} \end{aligned}$$



3) $[\Phi(t_2-t_1)]^{-1} = \Phi(t_1-t_2)$

$$\left[e^{A(t_2-t_1)} \right]^{-1} = e^{-A(t_2-t_1)} = e^{A(t_1-t_2)}$$

4) 对于 $n \times n$ 阶的方阵 A 和 B ，下式仅当 $AB = BA$ 时才成立

$$e^{(A+B)t} = e^{At} e^{Bt}$$

5) $\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} = e^{At} A, \quad \frac{d}{dt} \Phi(t) = A \Phi(t) = \Phi(t) A$

6) $[\Phi(t)]^n = \Phi(nt)$

7) $\Phi(t_2-t_1)\Phi(t_1-t_0) = \Phi(t_2-t_0)$



9.4.2 矩阵指数和状态转移矩阵的计算

- 在状态方程求解中, 关键是状态转移矩阵 $\Phi(t)$ 的计算
 - 对于**线性定常连续系统**, 该问题又归结为**矩阵指数函数** e^{At} 的计算
 - 计算矩阵指数函数的常用方法
 - ✓ 拉氏变换法 (上一节已介绍)
 - ✓ 级数求和法*
 - ✓ 凯莱—哈密尔顿方法*
 - ✓ 约旦标准型法



1. 拉氏变换法

- 对齐次状态方程 $\dot{x} = Ax$, 设初始时刻 $t_0 = 0$ 且初始状态为 $x(0) = x_0$, 对方程两边取拉氏变换, 可得

$$sX(s) - x_0 = AX(s)$$

于是可求得该齐次状态方程的解 $x(t)$ 的拉氏变换为

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x_0$$

- 因此, 基于上述 $(sI - A)^{-1}$ 的拉氏反变换, 该齐次方程的解为

$$x(t) = L^{-1}[(sI - A)^{-1}]x_0 = e^{At} x_0$$

- 由状态转移矩阵定义和齐次状态方程的解, 系统状态转移矩阵有如下关系

$$\Phi(t) = e^{At} = L^{-1}[(sI - A)^{-1}]$$



4. 化矩阵 A 为对角线矩阵和约旦 (Jordan) 矩阵法

□ 上节给出了对角线矩阵、块对角矩阵和约旦块三种特殊形式矩阵的矩阵指数函数

➤ 由于任何矩阵都可经线性变换成为对角线矩阵或约旦矩阵，因此

- ✓ 可通过线性变换将一般形式的矩阵变换成对角线矩阵或约旦矩阵
- ✓ 再利用上述特殊形式矩阵的矩阵指数函数来快速计算矩阵指数函数



□ 下面首先讨论矩阵指数函数的一条性质:

➤ 对矩阵 A , 经变换矩阵 P 作线性变换后, 有

$$\tilde{A} = P^{-1}AP$$

则相应地有如下矩阵指数函数的变换关系

$$\mathbf{e}^{At} = P\mathbf{e}^{\tilde{A}t}P^{-1} \quad \mathbf{e}^{\tilde{A}t} = P^{-1}\mathbf{e}^{At}P$$



9.4.3 状态空间模型的线性变换和约旦标准型

□ 从上一节的讨论可知：同一个系统的状态空间模型，即使其维数相同，但其具体结构和系数矩阵也是多种多样的，

- ✓ 例如，系统矩阵 A 可以是对角线矩阵的或者是约旦矩阵的
- ✓ 也可以有其他形式的。

➤ 即，

- ✓ 状态空间模型不具有唯一性。



9.4.3.1 状态空间的线性变换

- 对于一个 n 阶动态系统，可通过选择适当的 n 个状态变量以建立状态空间模型来描述它。
 - 但是, 这 n 个状态变量的选择却不是唯一的。
 - ✓ 这一点可利用线性代数中的**基底不唯一**来理解。
 - 一个 n 维线性无关的状态变量向量，在 n 维状态空间中构成一个坐标系，即相当于空间中的一个基底。
 - ✓ 根据线性代数知识，在这个空间中还存在另外的坐标系，且与原坐标系存在一个线性变换关系。



1. 状态空间的线性变换

□ 设描述同一个线性状态空间的两个 n 维状态变量向量分别为

$$\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T \quad \tilde{\mathbf{x}} = [\tilde{x}_1 \ \tilde{x}_2 \ \dots \ \tilde{x}_n]^T$$

由线性代数知识可知, 它们之间必有如下变换关系

$$\mathbf{x} = P\tilde{\mathbf{x}} \quad \tilde{\mathbf{x}} = P^{-1}\mathbf{x}$$

其中 P 为 $n \times n$ 维的非奇异变换矩阵。

- 上述状态向量 \mathbf{x} 与 $\tilde{\mathbf{x}}$ 间的变换, 称为**状态的线性变换**。
- 值得指出的是:
 - ✓ 变换矩阵 P 只能是**非奇异**的, 才能使 \mathbf{x} 和 $\tilde{\mathbf{x}}$ 间的变换关系是**等价的、唯一的和可逆的**。



2. 状态空间模型的线性变换

□ 设在状态变量 x 和 \tilde{x} 下，系统状态空间模型分别为

$$\Sigma(A, B, C, D): \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$$\tilde{\Sigma}(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}): \begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \\ y = \tilde{C}\tilde{x} + \tilde{D}u \end{cases}$$

□ 两种表达式式之间存在什么关系？

➤ 将变换关系 $x = P\tilde{x}$ 代入 $\Sigma(A, B, C, D)$ 的状态方程中有

$$(P\tilde{x})' = P\dot{\tilde{x}} = AP\tilde{x} + Bu$$



由于变换矩阵 P 非奇异, 因此有

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = P^{-1}AP\tilde{\mathbf{x}} + P^{-1}Bu \\ \mathbf{y} = CP\tilde{\mathbf{x}} + Du \end{cases}$$

- 将上式与状态空间模型 $\tilde{\Sigma}(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ 比较, 则线性系统 $\Sigma(A, B, C, D)$ 在线性变换矩阵 P 下的各矩阵具有如下对应关系

$$\tilde{A} = P^{-1}AP \quad \tilde{B} = P^{-1}B \quad \tilde{C} = CP \quad \tilde{D} = D$$

- 应该注意的是, 系统的初始条件也必须作相应的变换, 即

$$\tilde{\mathbf{x}}(t_0) = P^{-1}\mathbf{x}(t_0)$$

其中 t_0 为系统运动的初始时刻。



9.4.3.2 系统特征值的不变性与系统的不变量

- 由前面的讨论可知，若选择不同的状态变量，则获得不同的状态空间模型描述。
 - 实际上，状态空间模型只是系统在不同的状态变量选择下对系统的一种描述，它随状态变量选择的不同而不同，并不具有唯一性和不变性。
 - 那么，到底系统在状态空间中有哪些描述，哪些性质是不变的，是不随状态变量的选取不同而变化的？
- 线性定常系统的特征结构由**特征值和特征向量**所表征。
 - 系统的特征结构对系统运动的特性和行为具有重要的影响，决定了系统的基本特性。



1. 系统的特征值和特征向量

□ **定义** 设 v 是 n 维非零向量, A 是 $n \times n$ 矩阵。若方程组

$$Av = \lambda v$$

成立, 则称 λ 为矩阵 A 的**特征值**(eigenvalue), 非零向量 v 为 λ 所对应的矩阵 A 的**特征向量**(eigenvector)。

□ 将上述特征值的定义式写为

$$(\lambda I - A)v = 0$$

其中 I 为 $n \times n$ 的单位矩阵。

➤ 因此, 由代数方程论可知, 上式有非零特征向量 v 的解的充要条件为

$$|\lambda I - A| = 0$$

上式称为矩阵 A 的**特征方程** (Characteristic equation), 而 $|\lambda I - A|$ 为 A 的**特征多项式** (Characteristic polynomial)



□ 将 $|\lambda I - A|$ 展开, 可得

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

其中 $a_i (i=1, 2, \dots, n)$ 称为特征多项式的系数。

- 因此, $n \times n$ 维的矩阵 A 的特征多项式为 n 阶多项式。
 - ✓ 若矩阵 A 为实矩阵, 则对应的特征方程为一实系数代数方程, 共有 n 个根。
 - ✓ 这 n 个根或为实数, 或为成对出现的共轭复数。
- 求解矩阵特征值的方法即为求解矩阵 A 的特征方程。
 - ✓ n 阶的特征方程的 n 个根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 即为矩阵 A 的 n 个特征值。
- 在得到特征值 λ_i 后, 由定义式可求得矩阵对应于 λ_i 的特征向量 v_i 。



2. 特征向量的计算

□ 如何求解特征值 λ_i 对应的特征向量?

- 求解特征向量，即求如下齐次矩阵代数方程的非零解

$$(\lambda_i I - A) v_i = 0$$

□ 由于 λ_i 为 A 的特征值,故 $(\lambda_i I - A)$ 不可逆。

- 因此，由代数方程理论可知，该方程组的解并不唯一。
- 由特征向量的定义可知，我们需要求解的是**线性无关**的特征向量。
- 实际上，具体求特征向量时，可假定其特征向量的某个或几个元素的值，然后再求得该特征向量其它元素的值。



3. 系统特征值的不变性

□ 系统的特征值表征了系统本质的特征。

- 而线性变换只是相当于对系统从另外一个角度来描述而已，并未改变系统的本质。
- 刻画了系统本质特征的系统特征值应不随线性变换而改变，即有如下**结论**：

✓ **线性定常系统特征值对线性变换具有不变性。**



□ 对于这个结论,可证明如下:

- 设系统原状态空间模型中的系统矩阵为A, 经线性变换

$$\mathbf{x} = P\tilde{\mathbf{x}}$$

系统矩阵为

$$\tilde{A} = P^{-1}AP$$

- 矩阵 \tilde{A} 的特征多项式为

$$|\lambda I - \tilde{A}| = |\lambda I - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda I - A)P| = |P^{-1}| \cdot |\lambda I - A| \cdot |P| = |\lambda I - A|$$

即证明了A的特征多项式等于的 \tilde{A} 特征多项式。

- 可见, **系统经线性变换后, 其特征值不变。**



□ 习题 1. 试求如下系统矩阵的矩阵指数函数

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -6 & -11 & 6 \\ -6 & -11 & 5 \end{bmatrix}$$

□ 解 1. 先求A的特征值 由特征方程可求得特征值为

$$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = -2 \quad \lambda_3 = -3$$



2. 求特征值所对应的特征向量 求得特征值 λ_1, λ_2 和 λ_3 所对应的特征向量分别为

$$p_1 = [1 \ 0 \ 1]^T \quad p_2 = [1 \ 2 \ 4]^T \quad p_3 = [1 \ 6 \ 9]^T$$

故将A变换成对角线矩阵的变换矩阵 P 及其逆矩阵 P^{-1} 为

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 5/2 & -2 \\ -3 & -4 & 3 \\ 1 & 3/2 & -1 \end{bmatrix}$$



3. 对角线标准型及对应的转移矩阵:

$$\tilde{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad e^{\tilde{A}t} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$$

4. 由系统矩阵和矩阵指数函数的变换关系, 得

$$e^{At} = Pe^{\tilde{A}t}P^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} 3e^{-t} - 3e^{-2t} + e^{-3t} & 5e^{-t}/2 - 4e^{-2t} + 3e^{-3t}/2 & -2e^{-t} + 3e^{-2t} - e^{-3t} \\ -6e^{-2t} + 6e^{-3t} & -8e^{-2t} + 9e^{-3t} & 6e^{-2t} - 6e^{-3t} \\ 3e^{-t} - 12e^{-2t} + 9e^{-3t} & 5e^{-t}/2 - 16e^{-2t} + 27e^{-3t}/2 & -2e^{-t} + 12e^{-2t} - 9e^{-3t} \end{bmatrix}$$



9.5 线性离散系统的响应



2. 离散时间系统的数学描述

□ 在经典控制理论中，离散系统通常用差分方程或**脉冲传递函数**(pulse transfer function)来描述。脉冲传递函数只能描述外部特性，即输入-输出关系。

➤ SISO线性定常离散系统差分方程的一般形式为

$$y(k+n)+a_1y(k+n-1)+\dots+a_ny(k)=b_0u(k+n)+\dots+b_nu(k)$$

式中 k 表示第 k 次采样的时刻 kT ;

T 为采样周期;

$y(k)$ 、 $u(k)$ 分别为 kT 时刻的输出量和输入量;

a_i 和 b_i 为表征系统特性的常系数。



□ 考虑初始条件为零时的变换关系

$$Z[y(k)] = Y(z), \quad Z[y(k+i)] = z^i Y(z)$$

对上述差分方程模型两端取 z 变换并加以整理可得脉冲传递函数 (z 域传递函数)

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}$$

□ 上述描述离散系统输入输出差分方程、传递函数分别与连续系统的输入输出微分方程、传递函数在**形式上相同**。



- 与线性定常离散系统类似，对于线性时变离散系统，其状态空间模型可记为

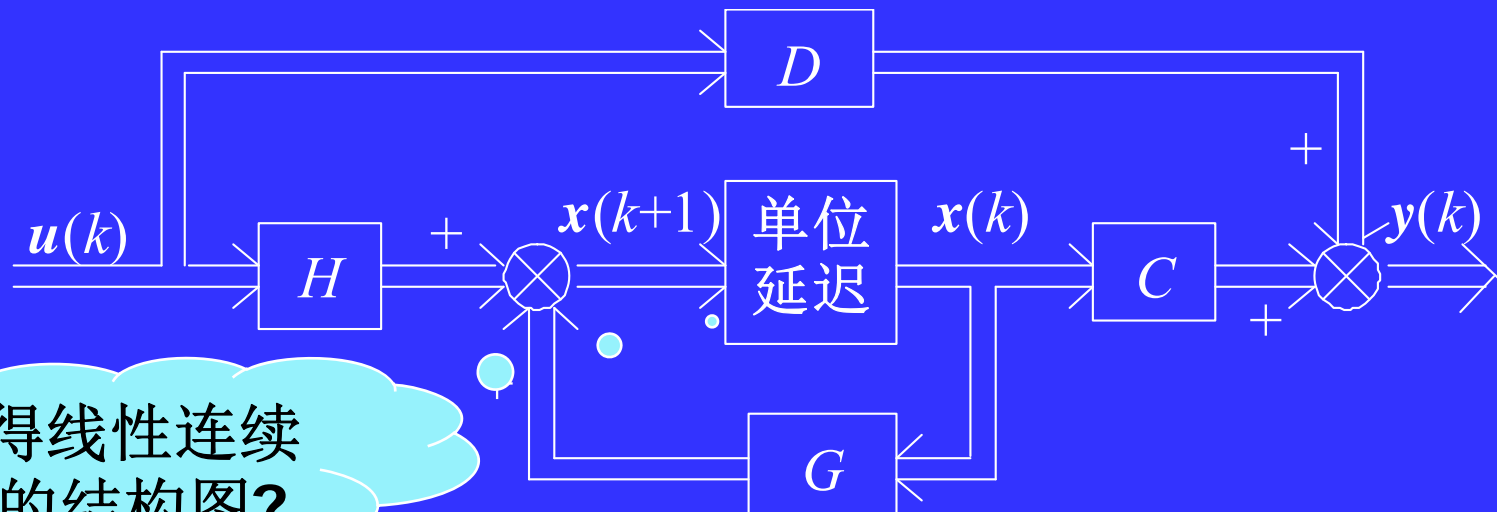
$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = G(k)\mathbf{x}(k) + H(k)\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = C(k)\mathbf{x}(k) + D(k)\mathbf{u}(k) \end{cases}$$

- 为书写简便，可将离散系统状态空间模型中的 T 省去，于是

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = G\mathbf{x}(k) + H\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = C\mathbf{x}(k) + D\mathbf{u}(k) \end{cases}$$



□ 与连续系统相类似，线性定常离散系统状态空间模型的结构如下图所示。



还记得线性连续系统的结构图？

图5-3 线性定常离散系统状态空间模型的结构图



9.5.1 线性定常连续系统的离散化

□ 离散系统的工作状态可以分为下述两种情况：

- 整个系统工作于单一的离散状态
 - ✓ 对于这种系统，其状态变量、输入变量和输出变量全部是离散量，如现在的全数字化设备、计算机集成制造系统等
- 系统工作在连续和离散两种状态的混合状态
 - ✓ 对于这种系统，其状态变量、输入变量和输出变量既有连续时间型的模拟量，又有离散时间型的离散量，例如连续被控对象的采样控制系统就属于这种情况



9.5.1.2 线性离散系统的状态空间描述

□ 线性定常连续系统状态空间模型的离散化, 实际上是指在采样周期 T 下, 将状态空间模型

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

变换成离散系统的如下状态空间模型:

$$\begin{cases} x((k+1)T) = G(T)x(kT) + H(T)u(kT) \\ y(kT) = C(T)x(kT) + D(T)u(kT) \end{cases}$$

➤ 由于离散化主要是对描述系统动态特性的状态方程而言, 输出方程为静态的代数方程, 其离散化后应保持不变, 即

$$C(T) = C \quad D(T) = D$$



- 对上式作变量代换, 令 $t = (k+1)T - \tau$, 则上式可记为

$$\mathbf{x}((k+1)T) = \Phi(T)\mathbf{x}(kT) + \int_0^T \Phi(t)dt B\mathbf{u}(kT)$$

- 于是有

$$G(T) = \Phi(T) = e^{AT}$$

$$H(T) = \left[\int_0^T \Phi(t)dt \right] B = \left[\int_0^T e^{At}dt \right] B$$

上两式即为连续系统离散化法的计算式



□ **例5-1** 试用离散化方法写出下列连续系统对应的离散化系统的状态方程:

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

□ **解** 首先求出连续系统的状态转移矩阵:

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= L^{-1}[(sI - A)^{-1}] = L^{-1} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s+2)} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} \right\} \\ &= L^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{0.5}{s} - \frac{0.5}{s+2} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5(1 - e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$



□ 根据计算式有

$$G(T) = \Phi(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0.5(1 - e^{-2T}) \\ 0 & e^{-2T} \end{bmatrix}$$

$$H(T) = \int_0^T \Phi(t) dt \quad B = \int_0^T \begin{bmatrix} 1 & 0.5(1 - e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} dt \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2T - (1 - e^{-2T}) \\ 2(1 - e^{-2T}) \end{bmatrix}$$

□ 于是该连续系统的离散化状态方程为

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & (1 - e^{-2T})/2 \\ 0 & e^{-2T} \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} T/2 - (1 - e^{-2T})/4 \\ (1 - e^{-2T})/2 \end{bmatrix} \mathbf{u}(k)$$



2. 由离散系统的状态空间模型求传递函数阵

□ 与线性定常连续系统相类似, 对MIMO线性定常离散系统, 也可引入描述输入--输出动态关系的 z 域中的传递函数阵如下:

$$G(z) = \begin{bmatrix} G_{11}(z) & G_{12}(z) & \dots & G_{1r}(z) \\ G_{21}(z) & G_{22}(z) & \dots & G_{2r}(z) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{m1}(z) & G_{m2}(z) & \dots & G_{mr}(z) \end{bmatrix}$$

其中 $G(z)$ 中每个元素为标量传递函数。



□ 有

$$Y(z)=[C(zI-G)^{-1}H+D]U(z)$$

其中 $Y(z)$ 为 $y(k)$ 的 z 变换。

□ 故，传递函数阵为

$$G(z)=C(zI-G)^{-1}H+D$$

□ 可以看出，离散系统状态空间模型对应的传递函数阵与连续系统状态空间模型的传递函数阵形式与结构完全一致。



9.6 可控性与可观性



这是因为经典控制理论所讨论的是**SISO系统**输入—输出的分析和综合问题，它的输入输出间的动态关系可以唯一地由传递函数所确定。

- 因此，给定输入，则一定会存在唯一的输出与之对应。
 - ✓ 反之，对期望输出信号，总可找到相应的输入信号（即控制量）使系统输出按要求进行控制，不存在能否控制的问题。
- 此外，输出一般是可直接测量，或者应能间接测量。
 - ✓ 否则，就无从对进行反馈控制和考核系统所达到的性能指标。
 - ✓ 因此，在这里不存在输出能否测量(观测)的问题。
- 所以，无论是从理论还是实践，经典控制理论和技术一般不涉及到能否控制和能否观测的问题。



- ❑ 现代控制理论着眼于对表征MIMO系统内部特性和动态变化的状态进行分析、优化和控制。
 - 状态变量向量的维数一般比输入向量的维数高，这里存在**多维状态能否由少维输入控制的问题**。
 - 此外，状态变量是表征系统动态变化的一组内部变量，有时并不能直接或间接测量，故存在**能否利用可测量或观测的输出信息来构造系统状态的问题**。



9.6.1 线性定常系统的可控性



9.6.1.1 线性定常连续系统的可控性

□ 本小节主要讨论线性定常连续系统的状态可控性和输出可控性问题。

➤ 关键问题:

重点!

1. 基本概念: 状态可控性和输出可控性
2. 基本方法: 状态可控性和输出可控性的判别方法
3. 状态可控性的物理意义和在状态空间中的几何意义



2. 状态可控性的定义

□ 由状态方程

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

及第9.3节的状态方程求解公式可知：

- 状态的变化主要取决于系统的初始状态和初始时刻之后的输入，与输出 $y(t)$ 无关。
- 因此，研究讨论状态可控性问题，即输入 $u(t)$ 对状态 $x(t)$ 能否控制的问题，只需考虑系统在输入 $u(t)$ 的作用下状态方程的性质，与输出 $y(t)$ 和输出方程无关。

□ 对线性连续系统，有如下状态可控性定义。

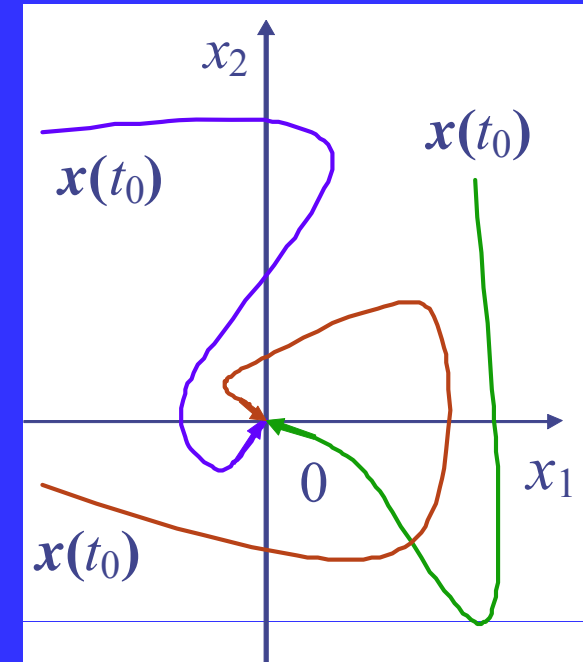
□ 定义6-1 若线性连续系统

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t)$$

➤ 对初始时刻 t_0 ($t_0 \in T$, T 为时间定义域) 和初始状态 $x(t_0)$

- ✓ 存在另一有限时刻 t_1 ($t_1 > t_0$, $t_1 \in T$)
- ✓ 可以找到一个控制量 $u(t)$
- ✓ 能在有限的时间 $[t_0, t_1]$ 内把系统状态从初始状态 $x(t_0)$ 控制到原点, 即 $x(t_1)=0$

则称 t_0 时刻的状态 $x(t_0)$ 可控。





3. 线性定常连续系统的状态可控性判别

- 线性定常连续系统状态可控性判据有许多不同形式，下面分别讨论常用的
 - 代数判据 algebraic criterion
 - 模态判据 modal criterion



1) 代数判据 (秩判据 rank criterion)

□ **定理6-1** (线性定常连续系统可控性的代数判据) 线性定常连续系统 $\Sigma(A, B)$ 状态完全可控的充要条件为下述条件成立:

如下定义的**可控性矩阵** (controllable matrix)

$$Q_c = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$$

行满秩(row full rank), 即

$$\begin{aligned} \text{rank } Q_c &= \text{rank}[B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B] \\ &= n \end{aligned}$$





□ 例6-3 试判断如下系统的状态可控性

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

□ 解 由状态可控性的代数判据有

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad A\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -a_1 \end{bmatrix} \quad A^2\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -a_1 \\ -a_2 + a_1^2 \end{bmatrix}$$



➤ 故

$$\text{rank} Q_c = \text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{b} & A\mathbf{b} & A^2\mathbf{b} \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a_1 \\ 1 & -a_1 & -a_2 + a_1^2 \end{bmatrix} = 3 = n$$

➤ 因此，该系统状态完全可控。



□ 例6-4 试判断如下系统的状态可控性

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$



□ 解 由状态可控性的代数判据有

$$[B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -2 & -2 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

➤ 将上述矩阵的第3行加到第2行中去，则可得矩阵

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & -2 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

显然其秩为 2。而系统的状态变量维数 $n=3$ ，所以状态不完全可控。



2) 模态判据

□ 在给出线性定常连续系统状态可控性模态判据之前, 先讨论状态可控性的如下性质:

✓ 线性定常系统经线性变换后状态可控性保持不变

。

➤ 下面对该结论作简单证明。

✓ 设线性变换阵为 P , 则系统 $\Sigma(A, B)$ 经线性变换 $x = P\tilde{x}$ 后为 $\tilde{\Sigma}(\tilde{A}, \tilde{B})$, 并有

$$\tilde{A} = P^{-1}AP \quad \tilde{B} = P^{-1}B$$



✓ 由于

$$\begin{aligned}\text{rank}[\tilde{B} \quad \tilde{A}\tilde{B} \quad \dots \quad \tilde{A}^{n-1}\tilde{B}] &= \text{rank}[P^{-1}B \quad P^{-1}A\cancel{P}P^{-1}B \quad \dots \quad (P^{-1}AP)^{n-1}P^{-1}B] \\ &= \text{rank}[P^{-1}B \quad P^{-1}AB \quad \dots \quad P^{-1}A^{n-1}B] \\ &= \text{rank}(P^{-1}[B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B]) \\ &= \text{rank}[B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B]\end{aligned}$$

- 因此系统 $\tilde{\Sigma}(\tilde{A}, \tilde{B})$ 的状态可控性等价于 $\Sigma(A, B)$ 的状态可控性，即线性变换不改变状态可控性。



- 基于上述结论，可利用线性变换将一般状态空间模型变换成约旦标准型，再通过分析约旦标准型（对角线标准型为其特例）的可控性来分析原状态空间模型的可控性。
 - 下面讨论线性定常连续系统约旦标准型的状态可控性模态判据（约旦规范型判据，特征值规范型判据）。



□ **定理6-2**（**约旦规范型判据，特征值规范型判据**）对于约旦标准型的线性定常连续系统 $\Sigma(A, B)$ ，有：

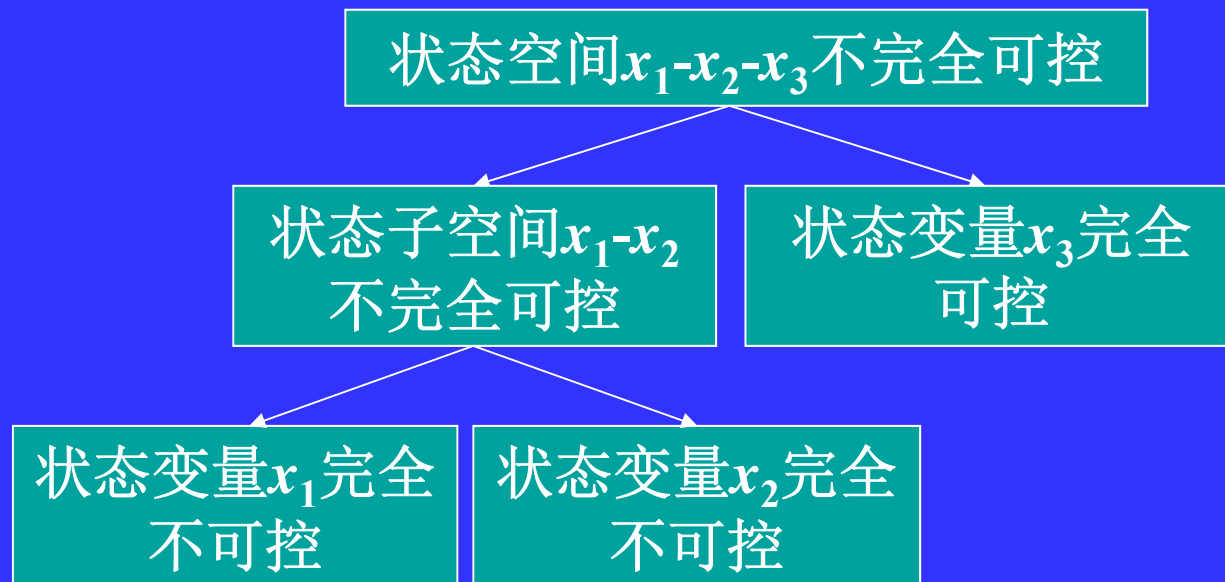
- 1) 若 A 为每个特征值都只有一个约旦块的约旦矩阵，则系统可控的充要条件为
 - ✓ 对应 A 的每个约旦块的 B 的分块的最后一行不全为零
- 2) 若 A 为某个特征值有多于一个约旦块的约旦矩阵，则系统可控的充要条件为
 - ✓ 对应 A 的每个特征值的所有约旦块的 B 的分块的最后一行线性无关。





$$(2) \quad \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -4 & 1 & | & 0 \\ 0 & -4 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

□ 解 A 的每个特征值都只有一个约旦块，但对应于特征值 -4 的约旦块的 B 的分块的最后一行全为零，故状态 x_1 和 x_2 不可控，则系统状态不完全可控。





$$(3) \quad x' = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} u$$

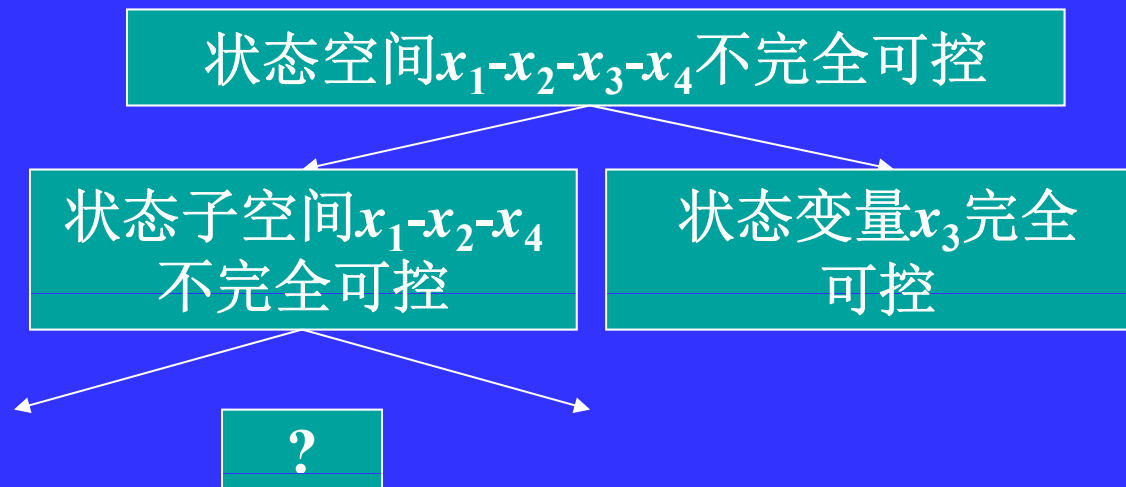
□ 解 由于A中特征值 -4 的两个约旦块所对应的B的分块的最后一行线性无关,

➤ 且A中特征值 -3 的约旦块所对应的B的分块的最后一行不全为零, 故系统状态完全可控。



$$(4) \quad \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} u$$

□ 解 由于A中特征值-4的两个约旦块所对应的B的分块的最后一行线性相关，故该系统的状态 x_1, x_2 和 x_4 不完全可控，则系统状态不完全可控。





□ **定理6-3 (PBH 秩判据)** 线性定常连续系统 $\Sigma(A, B)$ 状态完全可控的充分必要条件为：对于 A 的所有特征值 λ ，下式成立（**行满秩**）：

$$\text{rank}[\lambda I - A \quad B] = n$$





□ 例6-6 试判断如下系统的状态可控性。

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

□ 解 由方程 $|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$, 可解得矩阵 \mathbf{A} 的特征值分别为 1, 2 和 3。

✓ 对特征值 $\lambda_1 = 1$, 有

$$\text{rank}[\lambda_1 \mathbf{I} - \mathbf{A} \quad \mathbf{B}] = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & -3 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -1 \end{bmatrix} = 3 = n$$



✓ 对特征值 $\lambda_2=2$, 有

$$\text{rank}[\lambda_2 I - A \quad B] = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = 3 = n$$

✓ 对特征值 $\lambda_3=3$, 有

$$\text{rank}[\lambda_3 I - A \quad B] = \text{rank} \begin{bmatrix} 2 & -3 & -2 & 2 & 1 \\ \textcolor{red}{0} & \textcolor{red}{-1} & \textcolor{red}{-0} & \textcolor{red}{-1} & \textcolor{red}{-1} \\ \textcolor{red}{0} & \textcolor{red}{-1} & \textcolor{red}{-0} & \textcolor{red}{-1} & \textcolor{red}{-1} \end{bmatrix} = 2 < n$$

✓ 由定理 6-3 可知, 因为对应于特征值 3, 定理 6-3 的条件不成立, 故该系统状态不完全可控。



□ 可控性判据小结

判据	判定方法	特点
代数判据	下述可控性矩阵满秩 $Q_c = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$	1. 计算简便可行 2. 缺点为不知道状态空间中哪些变量(特征值/极点)可控
模态判据1	约旦标准形中同一特征值对应的 B 矩阵分块的最后一行线性无关	1. 易于分析状态空间中哪些变量(特征值/极点)可控 2. 缺点为需变换成约旦标准形
模态判据2 PBH秩判据	对于所有特征值 λ , $\text{rank}[\lambda I - A \ B] = n$	1. 易分析哪些特征值(极点)可控 2. 缺点为需求系统的特征值





9.6.2 线性定常系统的可观性



□ 定义6-3 若线性连续系统

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = A(t)\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{y}(t) = C(t)\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

- 对初始时刻 t_0 ($t_0 \in T$, T 为时间定义域) 和初始状态 $\mathbf{x}(t_0)$,
- ✓ 存在另一有限时刻 t_1 ($t_1 > t_0$, $t_1 \in T$),
 - ✓ 根据在有限时间 $[t_0, t_1]$ 内量测到的输出 $\mathbf{y}(t)$,
 - ✓ 能够唯一地确定系统在 t_0 时刻的初始状态 $\mathbf{x}(t_0)$,
- 则称在 t_0 时刻的状态 $\mathbf{x}(t_0)$ 可观。



2. 上述定义中的输出观测时间为 $[t_0, t_1]$ ，并要求 $t_1 > t_0$ 。这是因为，输出变量 $y(t)$ 的维数 m 一般总是小于状态变量 $x(t)$ 的维数 n 。否则，若 $m=n$ 且输出矩阵 $C(t)$ 可逆，则

$$x(t) = C^{-1}(t) y(t)$$

即状态变量 $x(t)$ 可直接由输出 $y(t)$ 确定。由于 $m < n$ ，为了能唯一地求出状态变量的值，不得不依靠在一定区间内测量得的连续 (或有限几组) 输出值以确定系统状态。

3. 在定义中把可观性定义为对初始状态的确定，这是因为，一旦确定初始状态，便可根据状态方程的解表达式，由初始状态和输入，计算出系统各时刻的状态值。



1) 代数判据 (秩判据)

□ 定理6-6 (线性定常系统可观性代数判据) 线性定常连续系统 $\Sigma(A, C)$ 状态完全可观的充要条件为下述条件成立:

如下定义的可观性矩阵 (observable matrix)

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

比较一下
可控性矩阵

列满秩 (column full rank), 即

$$\text{Rank } Q_o = n$$





□ 例6-9 试判断如下系统的状态可观性

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$$\mathbf{y} = [1 \quad -1] \mathbf{x}$$

□ 解 由状态可观性的代数判据有

$$\text{rank } Q_o = \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} = 1$$

而系统的状态变量的维数 $n=2$ ，所以系统状态不完全可观。



2) 模态判据

□ 在给出线性定常连续系统的状态可观性模态判据之前，先讨论状态可观性的如下性质：

➤ 线性定常系统经过线性变换后状态可观性保持不变。

□ 下面对该结论作简单证明。设线性变换阵为 P ，则系统 $\Sigma(A, C)$ 经线性变换 $x = P\tilde{x}$ 后为 $\tilde{\Sigma}(\tilde{A}, \tilde{C})$ ，并有

$$\text{r} \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}\tilde{A} \\ \dots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{n-1} \end{bmatrix} = \text{r} \begin{bmatrix} CP \\ \cancel{CP} \cancel{P^{-1}} AP \\ \dots \\ CP(P^{-1}AP)^{n-1} \end{bmatrix} = \text{r} \begin{bmatrix} CP \\ CAP \\ \dots \\ CA^{n-1}P \end{bmatrix} = \text{r} \left\{ \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} P \right\} = \text{r} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$



□ **定理6-7（模态判据）** 对为约旦标准型的线性定常连续系统 $\Sigma(A, C)$ ，有：

1. 若A为每个特征值都只有一个约旦块的约旦矩阵，则系统可观的充要条件为

✓ 对应A的每个约旦块的C的分块的第一列不全为零

2. 若A为某个特征值有多于一个约旦块的约旦矩阵，则系统可观的充要条件为

✓ 对应A的每个特征值的所有约旦块的C的分块的第一列线性无关。





- 由定理6-7的结论(2)，对于单输出系统的状态可观性，有如下推论。
- **推论6-2** 若单输出线性定常连续系统 $\Sigma(A, C)$ 的约旦标准型的系统矩阵为某个特征值有多于一个约旦块的约旦矩阵，则该系统状态不完全可观。
- 定理6-7所给出的状态可观性的模态判据在应用时需将一般的状态空间模型变换成约旦标准型，属于一种间接方法。
 - 下面我们给出另一种形式的状态可观性模态判据，称为**PBH秩判据**。
 - ✓ 该判据属于一种**直接法**。



□ **定理6-8**（**PBH秩判据**）线性定常连续系统 $\Sigma(A, C)$ 状态完全可观的充要条件为：对于 A 的所有特征值 λ ，下式成立（**列满秩**）：

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix} = n$$





□ 可观性判据小结

判据	判定方法	特点
代数判据	可观性矩阵 Q_o 满秩	1. 计算简便可行 2. 缺点为不知道状态空间中哪些变量(特征值/极点)可观
模态判据 1	约旦标准形中同一特征值对应的 C 矩阵分块的第一列线性无关	1. 易于分析状态空间中哪些变量(特征值/极点)可观 2. 缺点为需变换成约旦标准形
模态判据 2 PBH秩判据	对于所有特征值 λ , $\text{rank}[\lambda I - A^T \quad C^T]^T = n$	1. 易于分析哪些特征值(极点)可观 2. 缺点为需求系统的特征值





9.6.3 线性定常离散系统的 可控性和可观性



2. 线性定常离散系统的状态可控性判据

□ **定理6-10** (线性定常离散系统可控性**秩判据**) 对线性定常离散系统 $\Sigma(G, H)$, 有如下状态可控性结论:

若系统矩阵 G 为非奇异矩阵, 则状态完全可控的充要条件为如下定义的**可控性矩阵**:

$$Q_c = [H \quad GH \quad \dots \quad G^{n-1}H]$$

行满秩, 即

$$\text{rank} Q_c = n$$



□ **定理6-11 (PBH 秩判据)** 线性定常离散系统 $\Sigma(G, H)$ 状态完全可控的充要条件为: 对于所有的 λ , 下式成立 (行满秩) :

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \lambda I - G & H \end{bmatrix} = n$$



□ 定义6-5 若线性定常离散系统

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = G\mathbf{x}(k) \\ \mathbf{y}(k) = C\mathbf{x}(k) \end{cases}$$

- 对初始状态 $\mathbf{x}(0)$ ，根据在 n 个采样周期内采样到的输出向量 $\mathbf{y}(k)$ 的序列 $\{\mathbf{y}(0), \mathbf{y}(1), \dots, \mathbf{y}(n-1)\}$ 能唯一地确定系统的初始状态 $\mathbf{x}(0)$ ，则称状态 $\mathbf{x}(0)$ 可观。
- 若对状态空间中的所有状态都可观，则称系统状态完全可观，简称为系统可观。
- 若存在某个状态 $\mathbf{x}(0)$ 不满足上述条件，称此系统是状态不完全可观的，简称系统为状态不可观。



□ **定理6-13（代数判据）** 线性定常离散系统 $\Sigma(G,C)$ 状态完全可观的充分必要条件为如下定义的可观性矩阵:

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CG \\ \dots \\ CG^{n-1} \end{bmatrix}$$

列满秩，即

$$\text{rank} Q_o = n$$



□ **定理6-14 (PBH 秩判据)** 线性定常离散系统 $\Sigma(G,C)$ 状态完全可观的充要条件为: 对于所有的 λ , 下式成立 (列满秩) :

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \lambda I - G \\ C \end{bmatrix} = n$$



□ 9.7 线性定常系统的 线性变换



1. 线性系统的非奇异变换及不变性

□ 同一系统的状态空间模型，即使其维数相同，但其具体结构和系数矩阵也是多种多样的，即**状态空间模型不具有唯一性**

□ 为何同一个系统具有不同的状态空间模型？

原因：状态变量（基底）的不同选择

□ 此外，在控制系统的分析和设计中，某些特殊的系统数学模型对讨论问题相对简单得多，如对角线标准型和约旦标准型。

□ 不同选取状态变量之间存在一个**坐标变换**，其相应的状态空间模型之间也存在一个相应的**相似变换**；在一定条件下可以将一般形式的状态空间模型变换成某种特殊的状态空间模型。



1) 状态空间的非奇异线性变换 linear transformation

□ 设在状态变量 x 和 $\tilde{x} = P^{-1}x$ 下, 系统状态空间模型分别为

$$\Sigma(A, B, C, D): \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$$\tilde{\Sigma}(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}): \begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \\ y = \tilde{C}\tilde{x} + \tilde{D}u \end{cases}$$

其中 $\tilde{A} = P^{-1}AP$ $\tilde{B} = P^{-1}B$ $\tilde{C} = CP$ $\tilde{D} = D$

➤ 应该注意的是, 系统的初始条件也必须作相应的变换

$$\tilde{x}(t_0) = P^{-1}x(t_0)$$



2) 状态空间变换的不变性

a) 传递函数的不变性

□ 由于状态变换仅对状态变量进行，保持系统的输入和输出变量及它们间的动静态关系不变。因此：

➤ 同一个动态系统的状态空间表达式是不唯一的，但它们的传递函数是唯一的（P210, 性质9.2）

$$\begin{aligned}\tilde{G}(s) &= \tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} + \tilde{D} \\ &= CP(sI - P^{-1}AP)^{-1}P^{-1}B + D \\ &= CP[P^{-1}(sI - A)^{-1}P]P^{-1}B + D \\ &= C(sI - A)^{-1}B + D \\ &= G(s)\end{aligned}$$



b) 系统特征值的不变性

□ 系统的特征值表征了系统本质的特征。

- 而线性变换只是相当于对系统从另外一个角度来描述而已，并未改变系统的本质。
- 刻画了系统本质特征的系统特征值应不随线性变换而改变，即有如下**结论**：

✓ **线性定常系统特征值对线性变换具有不变性。**

$$|\lambda I - \tilde{A}| = |\lambda I - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda I - A)P| = |P^{-1}| \cdot |\lambda I - A| \cdot |P| = |\lambda I - A|$$



c) 可控性和可观性的不变性

$$\because \tilde{A}^i B = P^{-1} A P \cdot P^{-1} A P \cdots P^{-1} A P \cdot P^{-1} B = P^{-1} A^i B$$

$$\begin{aligned}\therefore \text{rank} \tilde{Q}_c &= \text{rank} [\tilde{B} \quad \tilde{A}\tilde{B} \quad \tilde{A}^2\tilde{B} \quad \cdots \quad \tilde{A}^{n-1}\tilde{B}] \\ &= \text{rank} [P^{-1}B \quad P^{-1}AB \quad P^{-1}A^2B \quad \cdots \quad P^{-1}A^{n-1}B] \\ &= \text{rank} P^{-1} [B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B] \\ &= \text{rank} P^{-1} Q_c \text{ (初等变换不改变矩阵的秩)} \\ &= \text{rank} Q_c \text{ (可控性不变性)}\end{aligned}$$

类似地, 有 $\text{rank} \tilde{Q}_o = \text{rank} Q_o$ (可观性不变性)



□ 2. 可控标准型和可观标准型

- 由于状态变量选择的非唯一性，系统的状态空间模型也具有非唯一性。
 - 如果在状态空间的一组特定基底下，系统的状态空间模型具有某种特定形式，则称这种形式的状态空间模型为**标准型或规范型**（canonical form）。
 - **约旦标准型（对角线标准型）**就是以系统的特征向量为其状态空间基底所导出的标准型。
 - 从前面讨论中可以看出，一旦把状态空间模型通过线性变换转化成约旦标准型，对于状态转移矩阵 $\Phi(t)$ 求解以及状态可控性和可观性分析都是十分方便的。



□ 1) 可控标准型 controllable canonical form

□ 定义 若 SISO 系统的状态空间模型为

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = C\mathbf{x} \end{cases}$$

且系统矩阵 A 和输入矩阵 B 分别为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

则称该状态空间模型为**可控标准型**。



- ❑ 上述可控标准型的系统矩阵 A 分别为前面讨论过的友矩阵。
- ❑ 下面讨论两个问题：
 - 可控标准型一定是状态完全可控的
 - 一定存在线性变换将状态可控的状态空间模型变换成可控标准型



□ **定理7-1** 对状态完全可控的线性定常连续系统 $\Sigma(A, B)$ 引入变换矩阵 P 如下

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_1 A \\ \vdots \\ p_1 A^{n-1} \end{bmatrix}$$

行向量 p_1 为系统可控性矩阵 Q_c 的逆矩阵的最后一行

式中,

$$p_1 = [0 \ \dots \ 0 \ 1][B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]^{-1}$$

➤ 那么必存在一个线性变换 $\mathbf{x} = P\tilde{\mathbf{x}}$, 能将上述状态方程变换成如下可控标准型:

$$\tilde{\mathbf{x}}' = \tilde{A}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{B}\mathbf{u}$$



□ 由上述计算过程，可很便利地将可控的状态空间模型转换为可控标准型。

□ **例7-1** 试求如下系统的可控标准型：

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

□ **解** 系统的可控性矩阵

$$Q_c = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

□ 是非奇异矩阵，即该系统为状态完全可控，因此可以将其变换成可控标准型。



求可控标准型。

$$Q_c^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

➤ **先求变换矩阵**。根据定理7-1, 有

$$p_1 = [0 \quad 1][B \quad AB]^{-1} = [1/2 \quad 1/2]$$

则变换矩阵 P 可取为

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_1 A \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

➤ 因此, 经变换 $x = P\tilde{x}$ 后所得的可控标准型的状态方程为

$$\dot{\tilde{x}} = P^{-1}AP\tilde{x} + P^{-1}Bu = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = CP\tilde{x} = [0 \quad 1] \tilde{x}$$



2) 可观标准型 observable canonical form

□ 对应于可控标准型，若 SISO 线性定常连续系统 $\Sigma(A, B, C)$ 的系统矩阵 A 和输出矩阵 C 分别为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix}$$
$$C = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]$$

则称该状态空间模型为**可观标准型**。



定理7-2 对状态完全可观的线性定常连续系统 $\Sigma(A, B, C)$ 引入变换矩阵 T 如下

$$T = [t_1 \quad At_1 \quad \dots \quad A^{n-1}t_1]$$

式中,

$$t_1 = Q_o^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

列向量 t_1 为系统可观性矩阵 Q_o 的逆矩阵的最后一列

- 那么必定存在一线性变换 $x = T\tilde{x}$, 能将状态空间模型 $\Sigma(A, B, C)$ 变换成如下可观标准型:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \\ y = \tilde{C}\tilde{x} \end{cases}$$



例7-2 试求如下系统状态方程的可观标准型

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$
$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -1 & -1/2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

解 由于系统的可观性矩阵

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1/2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

是非奇异矩阵

➤ 即，该系统为状态完全可观，因此可以将其变换成可观标准型。



求可观标准型

$$Q_o^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

- 根据定理7-2, 先求变换矩阵, 有

$$t_1 = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1/2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

则变换矩阵 T 可取为

$$T = [t_1 \quad At_1] = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

- 因此, 经变换后所得的可观标准型的状态方程为

$$\dot{\tilde{x}} = T^{-1}AT\tilde{x} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \tilde{x}$$

$$y = CT\tilde{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{x}$$



9.9 线性定常系统的 结构分解



9.9.1 可控性分解 Controllable decomposition

- 对状态不完全可控的线性定常连续系统，存在如下可控性结构分解定理
- **定理9-1** 若线性定常连续系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases}$$

状态不完全可控，其可控性矩阵的秩为

$$\text{rank} Q_c = \text{rank}[B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] = n_c < n$$



则存在非奇异线性变换 $x = P \tilde{x}$, 使状态空间模型变换成

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}'_1 \\ \tilde{\mathbf{x}}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1 \\ \tilde{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = [\tilde{C}_1 \quad \tilde{C}_2] \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1 \\ \tilde{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix}$$

其中 n_c 维子系统

$$\tilde{\mathbf{x}}'_1 = \tilde{A}_{11}\tilde{\mathbf{x}}_1 + \tilde{A}_{12}\tilde{\mathbf{x}}_2 + \tilde{B}_1\mathbf{u}$$

是状态完全可控的

➤ 而 $n-n_c$ 维子系统

$$\tilde{\mathbf{x}}'_2 = \tilde{A}_{22}\tilde{\mathbf{x}}_2$$

是状态完全不可控的



由于系统状态不完全可控，其可控性矩阵

$$Q_c = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$$

的秩为 n_c

- 于是从 Q_c 中总可以找到 n_c 个线性无关列向量 p_1, p_2, \dots, p_{n_c} ，这 n_c 个列向量构成可控性矩阵 Q_c 的一组基底，
 - ✓ 即 Q_c 中任何的列都可以由这 n_c 个线性无关列向量 p_1, p_2, \dots, p_{n_c} 线性表示



- 同样，还可以找到 $n-n_c$ 个线性无关向量 p_{n_c+1}, \dots, p_n 使如下线性变换矩阵：

$$P_c = [\textcolor{red}{p}_1 \ \cdots \ \textcolor{red}{p}_{n_c} \mid \textcolor{yellow}{p}_{n_c+1} \ \cdots \ \textcolor{yellow}{p}_n]$$

为非奇异的

- ✓ 将变换矩阵 P_c 选作可控性分解的变换矩阵，则可以作变换 $\boldsymbol{x} = P_c \tilde{\boldsymbol{x}}$



- 对系统的可控性分解得到一个重要结论，即
 - 对任何一个状态不完全可控的线性定常连续系统
 - ✓ 总可通过线性变换的方法，将系统分解成完全可控子系统（controllable subsystem）和完全不可控子系统（uncontrollable subsystem）两部分
 - ✓ 且变换矩阵 P_c 的前 n_c 列必须为可控性矩阵 Q_c 的 n_c 个线性无关的列或它的一组基底



□ 对于这种状态的可控性结构分解情况如下图所示

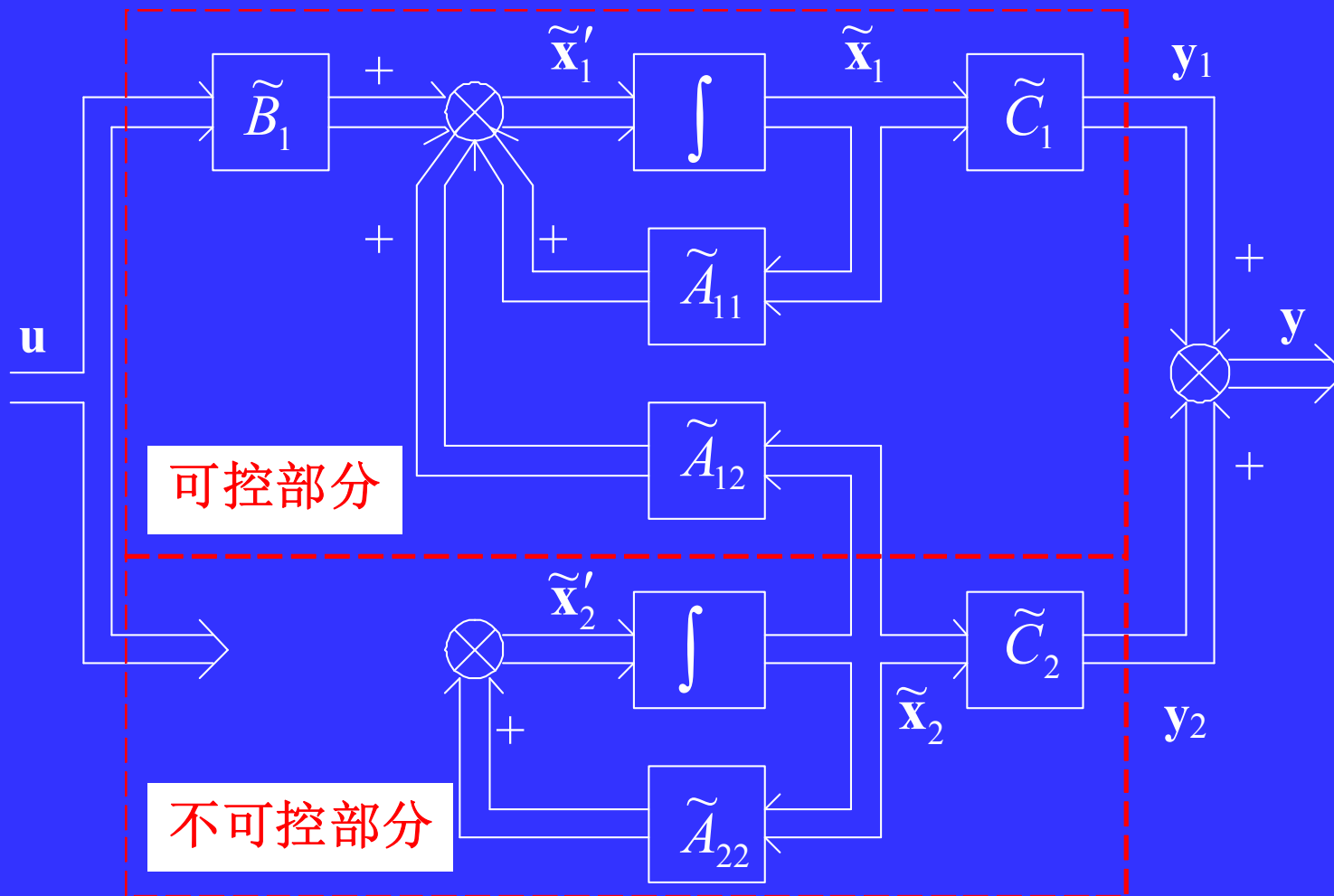


图9-1 可控性结构分解



□ 由于线性变换不改变系统传递函数阵，所以有

$$G(s) = \tilde{G}(s) = \tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1} \tilde{B}$$

$$= [\tilde{C}_1 \quad \tilde{C}_2] \left(sI - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= [\tilde{C}_1 \quad \tilde{C}_2] \begin{bmatrix} (sI - \tilde{A}_{11})^{-1} & * \\ 0 & (sI - \tilde{A}_{22})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \tilde{C}_1 (sI - \tilde{A}_{11})^{-1} \tilde{B}_1$$



➤ 因此, 由上式可归纳出一结论:

- ✓ 状态不完全可控系统的传递函数矩阵等于其可控性分解后可控子系统的传递函数矩阵
- ✓ 由于状态不完全可控系统的传递函数阵等于其可控子系统的传递函数阵, 则其极点数为 n_c 必少于 n 个
 - ❖ 即系统存在零极点相消现象



□ 例9-1 试求如下系统的可控子系统（进行可控性分解）：

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = [1 \quad -1 \quad 1] \mathbf{x}$$

□ 解 由于

$$\text{rank } Q_c = \text{rank}[B \quad AB \quad A^2B] = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = 2 < 3$$

□ 故该系统为状态不完全可控, 且可控部分的维数为 2



➤ 为分解系统，选择变换矩阵

$$P_c = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

其中前两列取自可控性矩阵 Q_c ，后一列是任意选择的但必须保证变换矩阵为非奇异的

✓ 该变换矩阵的逆矩阵为

$$P_c^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



➤ 经变换所得的状态空间模型的各矩阵为

$$\tilde{A} = P_c^{-1} A P_c = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = P_c^{-1} B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = C P_c = [1 \quad 2 \quad -1]$$

则可控子系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}'_1 \\ \tilde{x}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \tilde{x}_3 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$



9.9.2 可观性分解 Observable decomposition

- 类似于可控性分解，对状态不完全可观的线性定常连续系统，有如下可观性结构分解定理。
- **定理9-2** 若线性定常连续系统

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = C\mathbf{x} \end{cases}$$

状态不完全可观，其可观性矩阵的秩为

$$\text{rank } Q_o = \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n_o < n$$



□ 则存在非奇异线性变换 $\mathbf{x} = P_o \tilde{\mathbf{x}}$, 使状态空间模型可变换为

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}'_1 \\ \tilde{\mathbf{x}}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \boxed{0} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1 \\ \tilde{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = [\tilde{C}_1 \quad \boxed{0}] \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1 \\ \tilde{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix}$$

其中 n_o 维子系统

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{x}}'_1 = \tilde{A}_{11} \tilde{\mathbf{x}}_1 + \tilde{B}_1 \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \tilde{C}_1 \tilde{\mathbf{x}}_1 \end{cases}$$

是状态完全可观的

➤ 而 $n-n_o$ 维子系统 $\tilde{\mathbf{x}}'_2 = \tilde{A}_{21} \tilde{\mathbf{x}}_1 + \tilde{A}_{22} \tilde{\mathbf{x}}_2 + \tilde{B}_2 \mathbf{u}$

是状态完全不可观的



□ 对可观性分解，能将状态不完全可观的线性定常连续系统进行可观性分解的变换矩阵 P_o 的逆阵可选为

$$P_o^{-1} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_{n_o} \\ q_{n_o+1} \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$$

其中前 n_o 个行向量 q_1, \dots, q_{n_o} 为可观性矩阵 Q_o 的 n_o 个线性无关的行向量， q_{n_o+1}, \dots, q_n 为任意选择的 $n-n_o$ 个线性无关的行向量，但必须使变换矩阵 P_o^{-1} 可逆



□ 定理 9-2 表明:

- 任何状态不完全可观的线性定常连续系统
 - ✓ 总可通过线性变换将系统分解成完全可观子系统 (observable subsystem) 和完全不可观子系统 (unobservable subsystem) 两部分
 - ✓ 且变换矩阵 P_o 的逆阵 P_o^{-1} 的前 n_o 行必须为可观性矩阵 Q_o 的 n_o 个线性无关的行或它的一组基底

□ 对于这种状态的可观性结构分解情况如下图所示

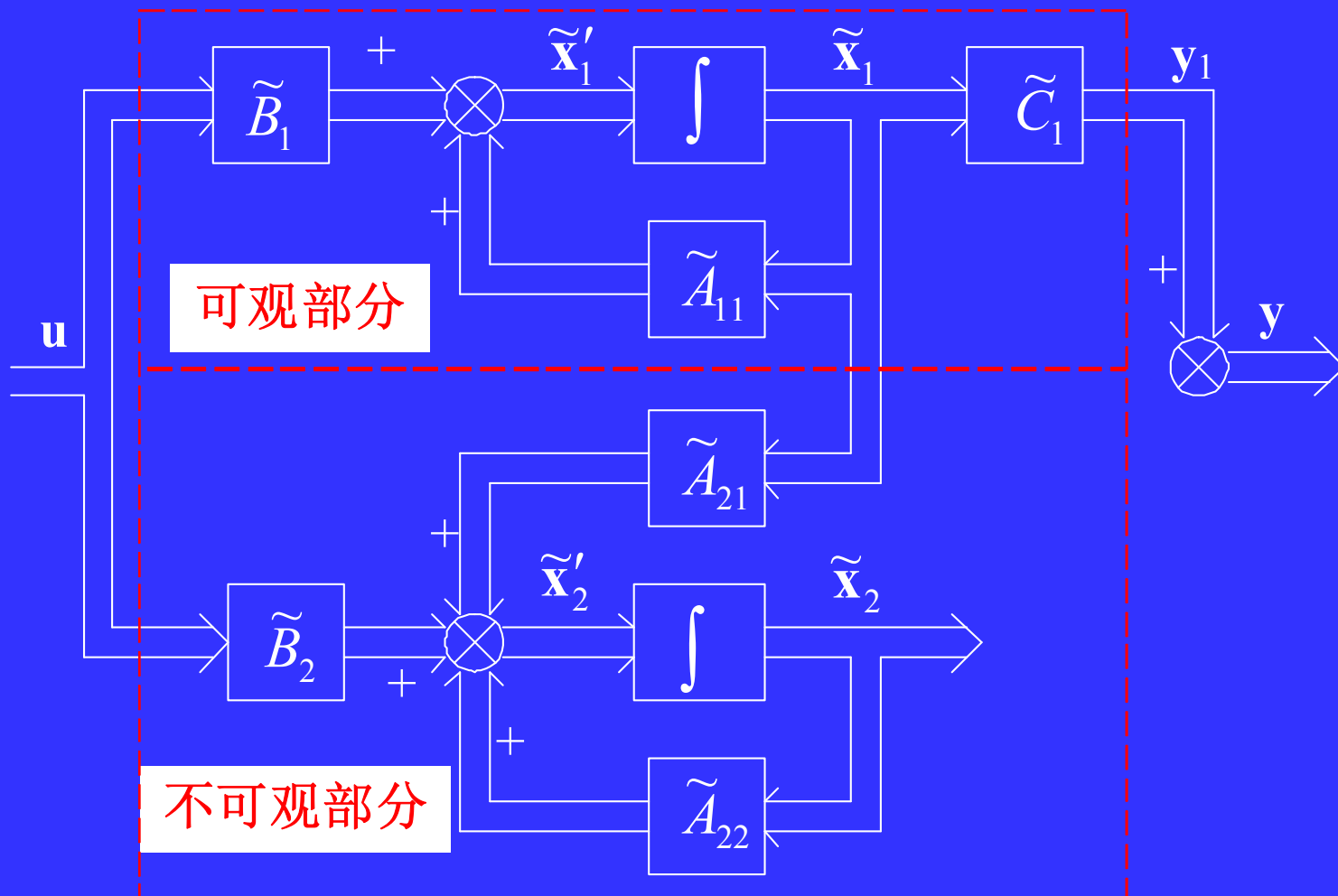


图9-2 可观性结构分解



□ 由于线性变换不改变系统传递函数阵，所以

$$G(s) = \tilde{G}(s) = \tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1} \tilde{B}$$

$$\begin{aligned} &= [\tilde{C}_1 \quad 0] \left(sI - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix} \\ &= [\tilde{C}_1 \quad 0] \begin{bmatrix} (sI - \tilde{A}_{11})^{-1} & 0 \\ * & (sI - \tilde{A}_{22})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix} \\ &= \tilde{C}_1 (sI - \tilde{A}_{11})^{-1} \tilde{B}_1 \end{aligned}$$



□ 因此, 由上式可归纳出一结论:

- 状态不完全可观系统的传递函数矩阵等于其可观性分解后可观子系统的传递函数矩阵
- 由于状态不完全可观系统的传递函数阵等于其可观子系统的传递函数阵, 则其极点数 n_o 必少于 n 个
 - ✓ 即系统存在零极点相消现象



□ 例9-2 试求如下系统的可观子系统:

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = [0 \quad 1 \quad -2] \mathbf{x}$$

列3 = -列1 - 2 × 列2

□ 解 由于

$$\text{rank } Q_o = \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \end{bmatrix} = 2 < 3$$

故该系统为状态不完全可观且可观部分的维数为 2



- 为分解系统，选择变换矩阵

$$P_o^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中**前两行**取自可观性矩阵 Q_o ，最后一行是任意选择的
但保证变换矩阵为非奇异的

- 于是变换矩阵的逆矩阵为

$$P_o = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



➤ 经变换，所得的状态空间模型的各矩阵为

$$\tilde{A} = P_o^{-1} A P_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = P_o^{-1} B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\tilde{C} = C P_o = [1 \quad 0 \quad 0]$$

则可观子系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}'_1 \\ \tilde{x}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix}$$





9.9.3 可控可观分解 Controllable and Observable decomposition

□ 对状态不完全可控又不完全可观的线性定常连续系统，类似于可控性分解和可观性分解过程构造变换矩阵的方法，可构造系统的

- 可控又可观子空间
- 可控但不可观子空间
- 不可控但可观子空间
- 不可控又不可观子空间

等 4 个子空间的基底，组成变换矩阵对系统作线性变换，将系统分解为 4 个子系统。



也可先作可观分解，再作可控分解。
分解结果与先可控分解后可观分解
的结果完全等价

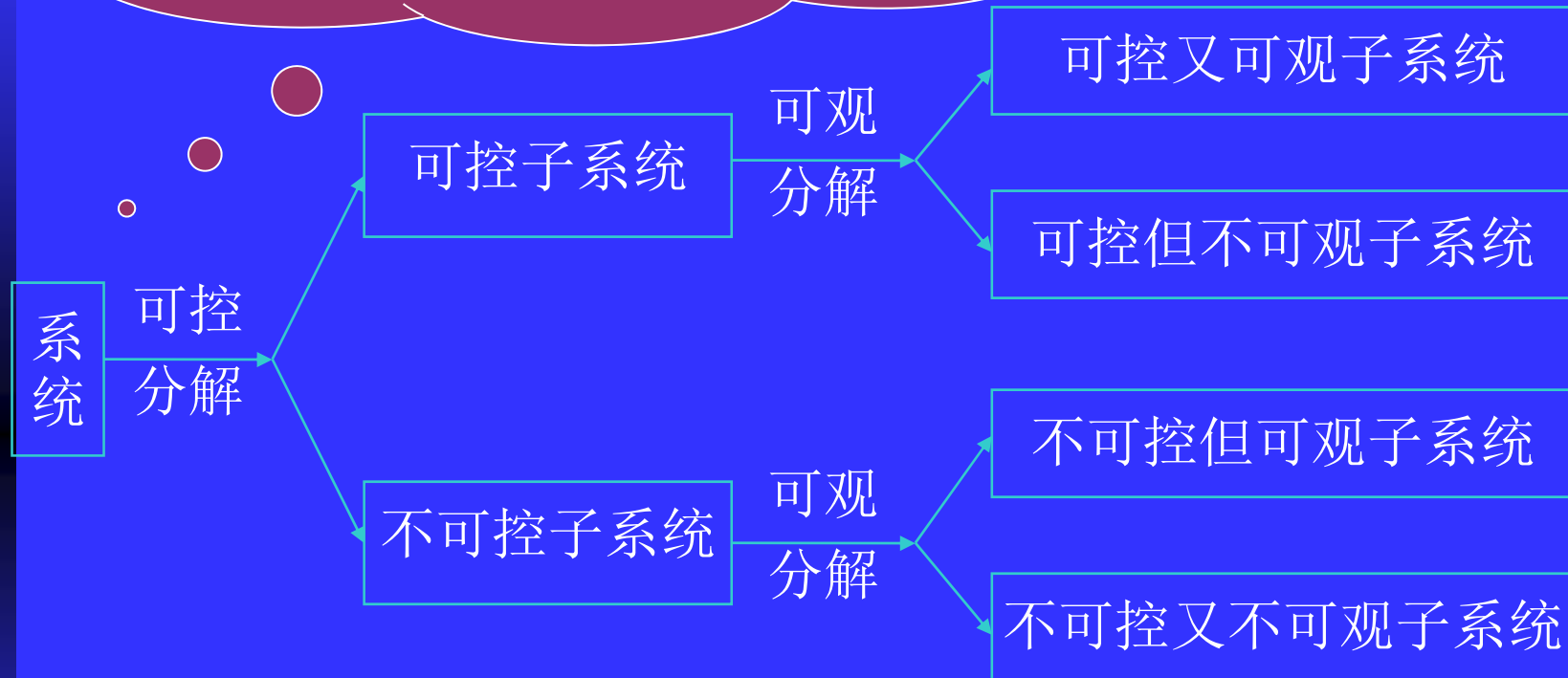


图9-3 可控可观分解过程

□ 因此，关于系统可控可观结构分解有如下定理



□ 定理9-3（标准分解定理）若线性定常连续系统

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = C\mathbf{x} \end{cases}$$

状态不完全可控又不完全可观，则一定存在一个线性变换，使得变换后的状态空间模型为：

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}'_1 \\ \tilde{\mathbf{x}}'_2 \\ \tilde{\mathbf{x}}'_3 \\ \tilde{\mathbf{x}}'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{14} \\ 0 & \tilde{A}_{22} & 0 & \tilde{A}_{24} \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{33} & \tilde{A}_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{A}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1 \\ \tilde{\mathbf{x}}_2 \\ \tilde{\mathbf{x}}_3 \\ \tilde{\mathbf{x}}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{C}_2 & 0 & \tilde{C}_4 \end{bmatrix} [\tilde{\mathbf{x}}_1^T \quad \tilde{\mathbf{x}}_2^T \quad \tilde{\mathbf{x}}_3^T \quad \tilde{\mathbf{x}}_4^T]^T$$



即系统可分解成如下四个子系统:

1. 可控但不可观子系统

$$\tilde{\Sigma}_{c,no} : \tilde{\mathbf{x}}_1' = \tilde{A}_{11}\tilde{\mathbf{x}}_1 + \tilde{A}_{12}\tilde{\mathbf{x}}_2 + \tilde{A}_{13}\tilde{\mathbf{x}}_3 + \tilde{A}_{14}\tilde{\mathbf{x}}_4 + \tilde{B}_1\mathbf{u}$$

2. 可控又可观子系统

$$\tilde{\Sigma}_{c,o} : \begin{cases} \tilde{\mathbf{x}}_2' = \tilde{A}_{22}\tilde{\mathbf{x}}_2 + \tilde{A}_{24}\tilde{\mathbf{x}}_4 + \tilde{B}_2\mathbf{u} \\ \mathbf{y}_2 = \tilde{C}_2\tilde{\mathbf{x}}_2 \end{cases}$$

3. 不可控又不可观子系统

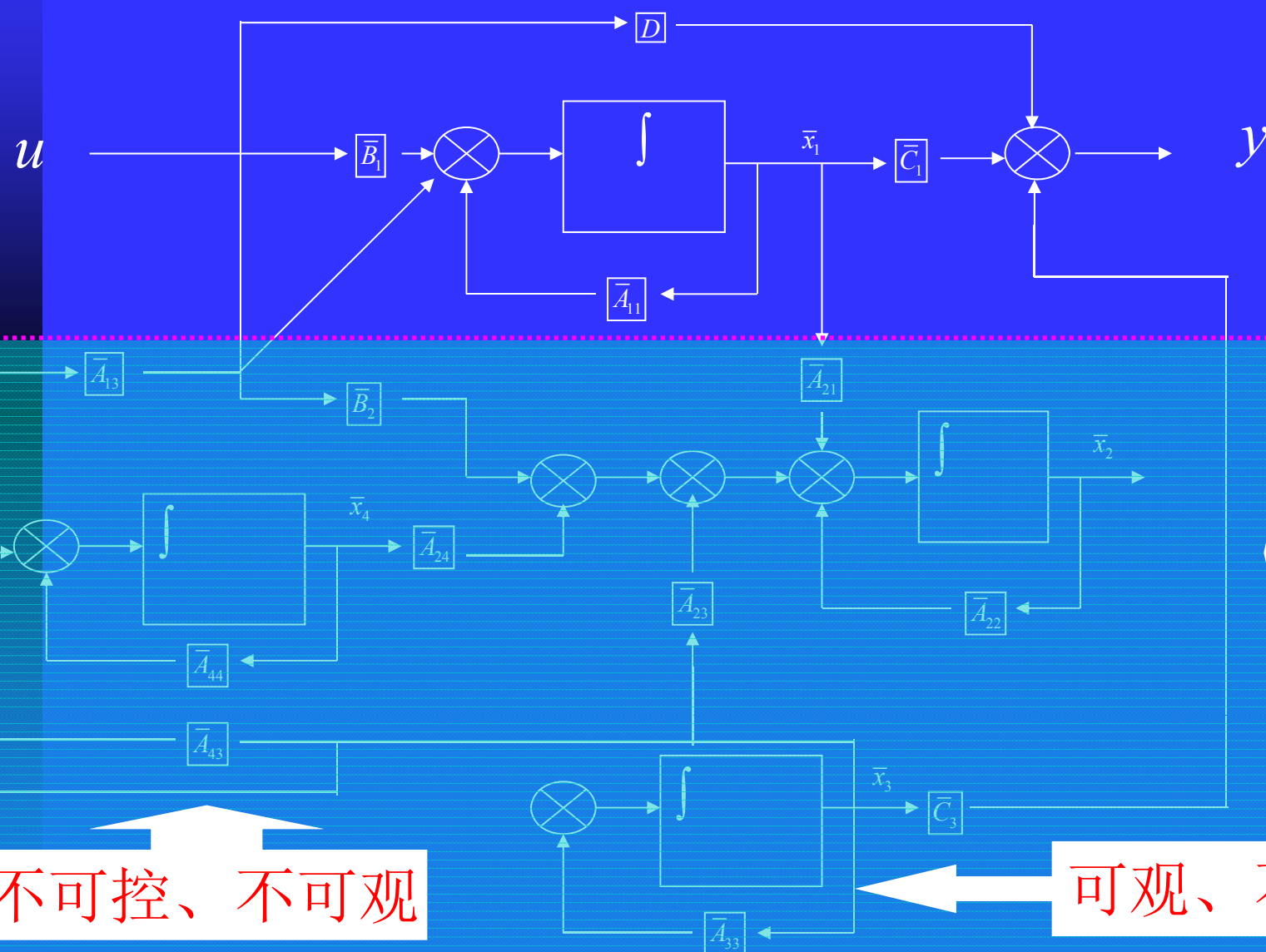
$$\tilde{\Sigma}_{nc,no} : \tilde{\mathbf{x}}_3' = \tilde{A}_{33}\tilde{\mathbf{x}}_3 + \tilde{A}_{34}\tilde{\mathbf{x}}_4$$

4. 不可控但可观子系统

$$\tilde{\Sigma}_{nc,o} : \begin{cases} \tilde{\mathbf{x}}_4' = \tilde{A}_{44}\tilde{\mathbf{x}}_4 \\ \mathbf{y}_4 = \tilde{C}_4\tilde{\mathbf{x}}_4 \end{cases}$$



经过等价变换后得到的动态方程可用下图表示。





因此，由上式可归纳出一结论：

- 状态不完全可控又不完全可观系统的传递函数阵，等于其可控可观分解后可控又可观子系统的传递函数阵
- 由于状态不完全可观系统的传递函数阵等于其可观子系统的传递函数阵，则其极点必少于 n 个
 - ✓ 即系统存在零极点相消现象
- 由于系统不可控和不可观测部分不会出现在传递函数中，所以，传递函数仅是系统的部分描述
 - ✓ 而状态空间描述则既包含可控、可观测部分，也包含不可控、不可观测部分，所以是系统的完全描述



Ch.10 线性反馈系统的时间域综合



10.1 输出反馈与状态反馈



状态反馈与输出反馈 State feedback and output feedback

- 控制理论最基本的任务是，对给定的被控系统设计能满足所期望的性能指标的闭环控制系统，即**寻找反馈控制律**。
 - 状态反馈和输出反馈是控制系统设计中两种主要的反馈策略，其意义分别为将观测到的状态和输出取作反馈量以构成反馈律，实现对系统的闭环控制，以达到期望的对系统的性能指标要求。
 - 在经典控制理论中用传递函数描述系统，只能**由系统的输出变量来构成反馈律**，即**输出反馈**。
 - 在现代控制理论的状态空间分析方法中，多考虑**采用状态变量来构成反馈律**，即**状态反馈**。



10.1.1 状态反馈的描述式

- 对线性定常连续系统 $\Sigma(A, B, C)$ ，若取系统的状态变量来构成反馈，则所得到的闭环控制系统称为状态反馈系统。
- 状态反馈闭环系统的系统结构可如图10-1所示

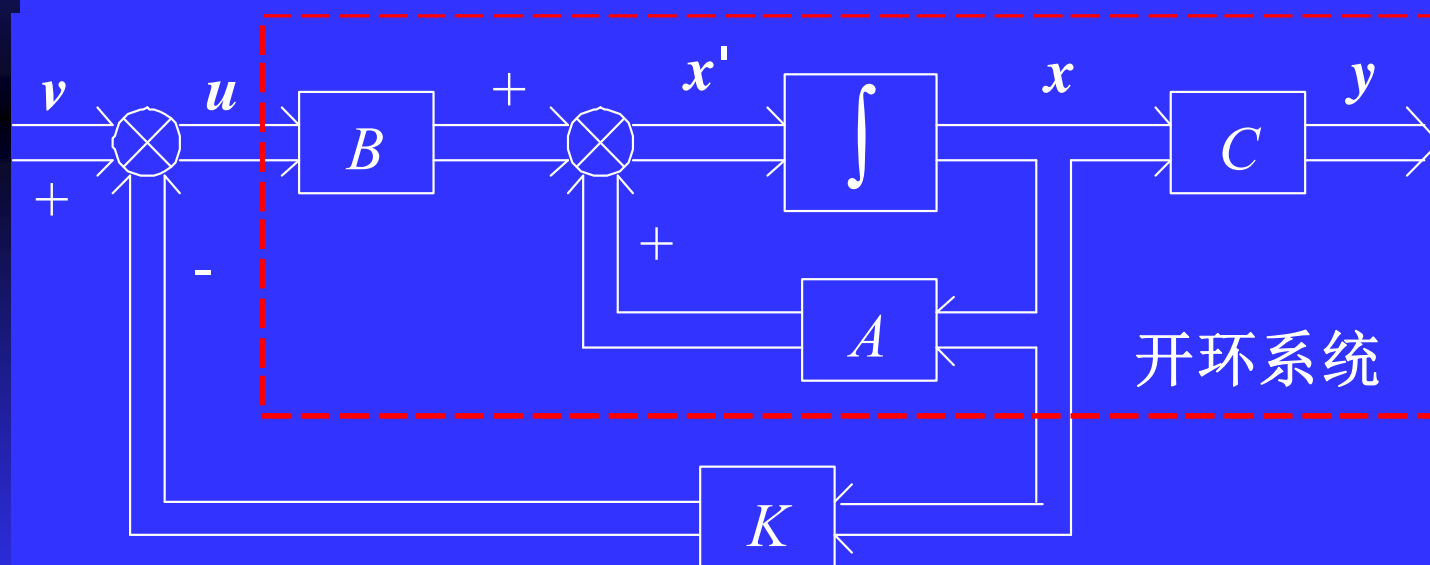


图10-1 状态反馈系统的结构图



□ 状态反馈闭环系统的状态空间模型可描述如下:

➤ 设开环系统状态空间模型和状态反馈律分别记为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases}$$

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{v}$$

其中 \mathbf{K} 为 $r \times n$ 维的实矩阵, 称为状态反馈矩阵; \mathbf{v} 为 r 维输入向量, 也称为**伺服输入**。



- 将状态反馈律代入开环系统方程, 可得如下状态反馈闭环控制系统的状态空间模型:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{v} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases}$$

- 状态反馈闭环系统可以简记为 $\Sigma_K(\mathbf{A} - \mathbf{BK}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$, 其传递函数阵为:

$$\mathbf{G}_K(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B}$$



与状态反馈
有何不同?

10.1.2 输出反馈的描述式

□ 对线性定常连续系统 $\Sigma(A, B, C)$, 若取系统的输出变量来构成反馈, 则所得到的闭环控制系统称为输出反馈控制系统。

➤ 输出反馈控制系统的结构图如图10-2所示。

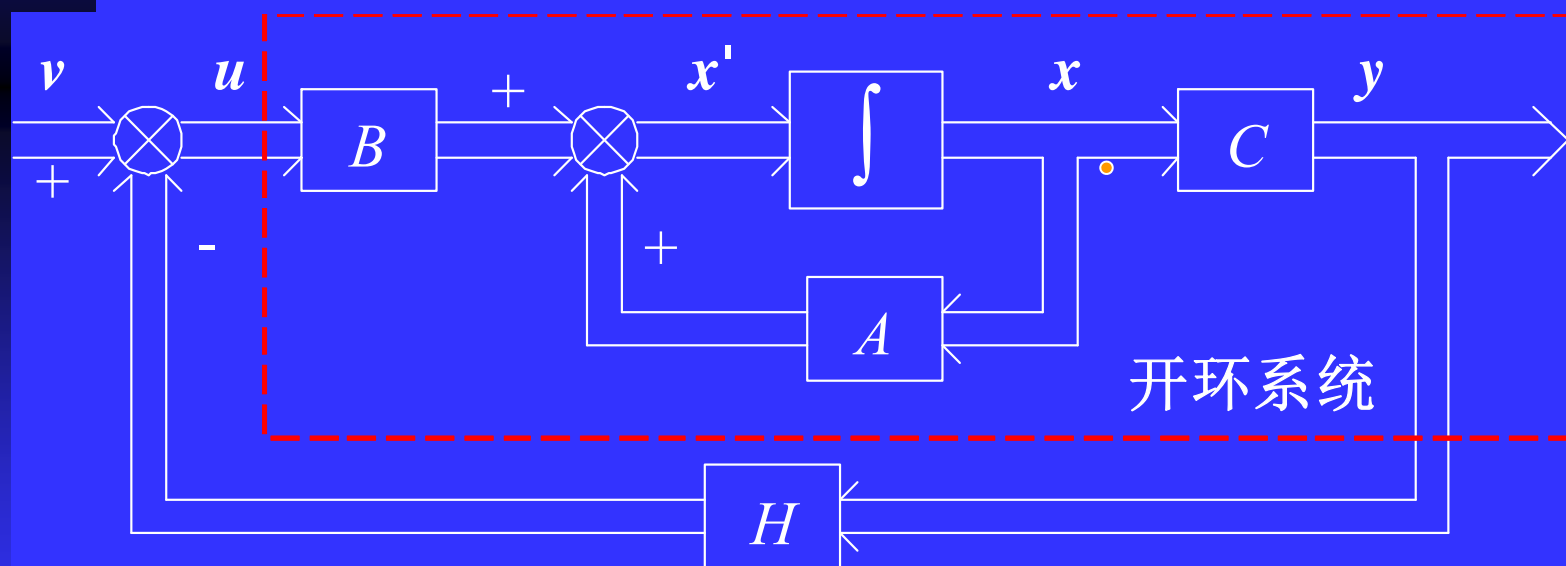


图10-2 输出反馈系统的结构图



- 输出反馈闭环系统的状态空间模型可描述如下：
 - 开环系统状态空间模型和输出反馈律分别为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases}$$
$$\mathbf{u} = -\mathbf{H}\mathbf{y} + \mathbf{v}$$

其中 \mathbf{H} 为 $r \times m$ 维的实矩阵，称为**输出反馈矩阵**。

- 将输出反馈律代入开环系统方程，则可得如下输出反馈闭环控制系统的状态空间模型：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{H}\mathbf{C})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{v} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases}$$



- 输出反馈闭环系统可简记为 $\Sigma_H(A-BHC, B, C)$ ，其传递函数阵为：

$$G_H(s) = C(sI - A + BHC)^{-1}B$$

- 由状态反馈和输出反馈的闭环控制系统状态空间模型可知，**输出反馈其实可以视为当 $K = HC$ 时的状态反馈。**

- 因此，在进行系统分析时，**输出反馈可以看作状态反馈的一种特例。**
- 反之，则不然。
 - ✓ 由此也可知，状态反馈可以达到比输出反馈更好的控制品质，更佳的性能。



10.1.3 闭环系统的状态可控性和可观性

□ 对于由状态反馈和输出反馈构成的闭环系统，其状态可控/可观性是进行反馈律设计和闭环系统分析时所关注的问题。

➤ 下面分别讨论两种闭环系统的

✓ 状态可控性 **state controllability**

✓ 状态可观性 **state observability**



1. 闭环系统的状态可控性

- 由状态可控性模态判据(定理6-2)，被控系统 $\Sigma(A, B, C)$ 采用状态反馈后的闭环系统 $\Sigma_K(A-BK, B, C)$ 的可控性可由条件

$$\text{rank}[\lambda I - A + BK \quad B] = n \quad \forall \lambda$$

来判定，而

$$\text{rank}[\lambda I - A + BK \quad B] = \text{rank} \left\{ [\lambda I - A \quad B] \begin{bmatrix} I & 0 \\ K & I \end{bmatrix} \right\} = \text{rank}[\lambda I - A \quad B]$$

上式即表明状态反馈不改变系统的状态可控性。

- 由于输出反馈可视为状态反馈在 $K=HC$ 时的特例，故输出反馈也不改变系统的状态可控性。



2. 闭环系统的状态可观性

□ 对被控系统 $\Sigma(A, B, C)$ 有如下结论:

➤ 采用输出反馈构成的闭环系统 $\Sigma_H(A-BHC, B, C)$ 后状态可观性不变, 即

- ✓ 输出反馈不改变状态可观性。
- ✓ 状态反馈有可能改变系统的客观性。



10.1.4 系统镇定 system stabilization

□ 受控系统通过状态反馈(或者输出反馈), 使得闭环系统渐近稳定, 这样的问题称为镇定问题。

- 能通过反馈控制而达到渐近稳定的系统是**可镇定的**。
- 镇定只要求闭环极点位于复平面的左半开平面之内。
- 镇定问题的重要性主要体现在 3 个方面:
 - ✓ 首先, 稳定性往往是控制系统能够正常工作的必要条件, 是对控制系统最基本的要求;
 - ✓ 其次, 许多实际的控制系统是以渐近稳定作为最终设计目标;



10.1.4.1 状态反馈镇定 State feedback stabilization

□ 线性定常连续系统状态反馈镇定问题可以描述为：

- 对于给定的线性定常连续系统 $\Sigma(A, B, C)$, 找到一个状态反馈控制律：

$$u = -Kx + v$$

- 使得闭环系统状态方程

$$\dot{\mathbf{x}} = (A - BK)\mathbf{x} + Bv$$

是稳定的, 其中 K 为状态反馈矩阵, v 为参考输入。



- 对是否可经状态反馈进行系统镇定问题，有如下2个定理。
- **定理1-1** 状态完全可控系统 $\Sigma(A, B, C)$ 可经状态反馈镇定。
- **证明** 根据状态反馈极点配置**定理2-1**（见第2节），对状态完全可控的系统，可以进行任意极点配置。
 - 因此，也就肯定可以通过状态反馈矩阵 K 将系统的闭环极点配置在 s 平面的左半开平面之内，即闭环系统是可镇定的。
 - 故证明了，**完全可控的系统，必定是可镇定的。**
- **定理1-2** 若系统 $\Sigma(A, B, C)$ 不完全可控，则线性状态反馈使系统镇定的**充要条件**是系统的**完全不可控部分是渐近稳定的**，即系统 $\Sigma(A, B, C)$ 不稳定的极点只分布在系统的可控部分。



10.2 极点配置问题



□ 基于指定的期望闭环极点，线性定常连续系统的状态反馈极点配置问题可描述为：

➤ 给定线性定常连续系统

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$$

确定反馈控制律

$$\mathbf{u} = -K\mathbf{x} + \mathbf{v}$$

使得状态反馈闭环系统的闭环极点配置在指定的 n 个期望的闭环极点也就是成立

$$\lambda_i(A - BK) = s_i^*, \quad i = 1, 2, \dots, n$$



10.2.1 状态反馈极点配置定理

□ **定理2-1** 对线性定常系统 $\Sigma(A, B, C)$ 利用线性状态反馈阵 K ，能使闭环系统 $\Sigma_K(A-BK, B, C)$ 的极点任意配置的充分必要条件为被控系统 $\Sigma(A, B, C)$ 是状态完全可控的。



10.2.2 SISO系统状态反馈极点配置方法

□ 上述定理及其证明不仅说明了被控系统能进行任意极点配置的充分必要条件，而且给出了求反馈矩阵 K 的一种方法。对此，有如下讨论：

1. 由上述定理的充分性证明中可知，对于SISO线性定常连续系统的极点配置问题，若其状态空间模型为**可控标准型**，则相应的**反馈矩阵**为

$$K=[k_n \dots k_1]=[a_n^*-a_n \dots a_1^*-a_1]$$

其中 a_i 和 a_i^* ($i=1, 2, \dots, n$) 分别为开环系统特征多项式和所期望的闭环系统特征多项式的系数。



2. 若SISO被控系统的状态空间模型不为可控标准型，则由9.9节讨论的求可控标准型的方法，利用线性变换 $x=P\tilde{x}$ ，将系统 $\Sigma(A,B)$ 变换成可控标准型 $\tilde{\Sigma}(\tilde{A},\tilde{B})$ ，即有

$$\tilde{A}=P^{-1}AP \quad \tilde{B}=P^{-1}B$$

对可控标准型 $\tilde{\Sigma}$ 进行极点配置，求得相应的状态反馈阵

$$\tilde{K}=\begin{bmatrix} a_n^*-a_n & a_{n-1}^*-a_{n-1} & \cdots & a_1^*-a_1 \end{bmatrix}$$

因此，原系统 Σ 的相应状态反馈阵 K 为

$$K=\tilde{K}P^{-1}$$



□ 下面通过两个例子来说明计算状态反馈阵 K 的方法。

□ **例2-1** 设线性定常系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

求状态反馈阵 K 使闭环系统的极点为 $-1 \pm j2$ 。



□ 解： 1. 判断系统的可控性

➤ 开环系统的可控性矩阵为

$$[B \quad AB] = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

则开环系统为状态可控，可以进行任意极点配置。

2. 求可控标准型

$$p_1 = [0 \quad 1][B \quad AB]^{-1} = [-1/6 \quad 1/3]$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_1 A \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = P^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



3. 求反馈律

➤ 因此开环特征多项式

$$f(s)=s^2-2s-5$$

而由期望的闭环极点 $-1 \pm j2$ 所确定的期望闭环特征多项式

$$f^*(s)=s^2+2s+5$$

则得状态反馈阵 K 为

$$K = \tilde{K}P^{-1} = [a_2^* - a_2 \quad a_1^* - a_1]P^{-1}$$

$$= [5 - (-5) \quad 2 - (-2)] \times \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -7 & 26 \end{bmatrix}$$



则在反馈律 $u=-Kx+v$ 作用下的闭环系统的状态方程为

$$\dot{\tilde{x}} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 11 & -58 \\ 4 & -17 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

通过验算可知，该闭环系统的极点为 $-1 \pm j2$ ，达到设计要求。



□ 例2-2（P258 例10-1，掌握） 已知系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+2)}$$

试选择一种状态空间实现并求状态反馈阵 K ，使闭环系统的极点配置在 -2 和 $-1 \pm j$ 上。

□ 解： 1. 要实现极点任意配置，则系统实现需状态完全可控。

➤ 因此，可以通过选择可控标准型来建立被控系统的状态空间模型。



► 系统的可控标准型实现为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [10 \quad 0 \quad 0] \mathbf{x} \end{aligned}$$

2. 系统的开环特征多项式 $f(s)$ 和由期望的闭环极点所确定的闭环特征多项式 $f^*(s)$ 分别为

$$f(s) = s^3 + 3s^2 + 2s$$

$$f^*(s) = s^3 + 4s^2 + 6s + 4$$

则相应的反馈矩阵 K 为

$$\begin{aligned} K &= [a_3^* - a_3 \quad a_2^* - a_2 \quad a_1^* - a_1] \\ &= [4 \quad 4 \quad 1] \end{aligned}$$



□ 因此，在反馈律 $u=-Kx+v$ 下，闭环系统状态方程为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -6 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [10 \quad 0 \quad 0] \mathbf{x} \end{aligned}$$

□ 在例2-2中，由给定的传递函数通过状态反馈进行极点配置时
需先求系统实现，即需选择状态变量和建立状态空间模型。

➤ 这里就存在一个所选择的的状态变量是否可以直接测量、可以直接作反馈量的问题。



10.3 状态重构与状态 观测器设计



1. 开环状态观测器

Open-loop state observer

□ 设线性定常连续系统的状态空间模型为 $\Sigma(A,B,C)$, 即

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases}$$

其中系统矩阵 A 、输入矩阵 B 和输出矩阵 C 都已知。

这里的**问题**是:

- ✓ 若状态变量 $x(t)$ 不能完全直接测量到, 如何构造一个系统**随时**估计该状态变量 $x(t)$?



对此问题一个直观想法是：

- ✓ 构造一个和被控系统有同样动力学性质（即有同样的系数矩阵 A , B 和 C ）的如下系统，用模型系统的状态变量作为系统状态变量的估计值（即重构被控系统的状态变量）：

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases}$$

其中 \hat{x} 为被控系统状态变量 $x(t)$ 的估计值。



□ 该状态估计系统称为开环状态观测器，简记为 $\hat{\Sigma}(A, B, C)$

其结构如下图所示。

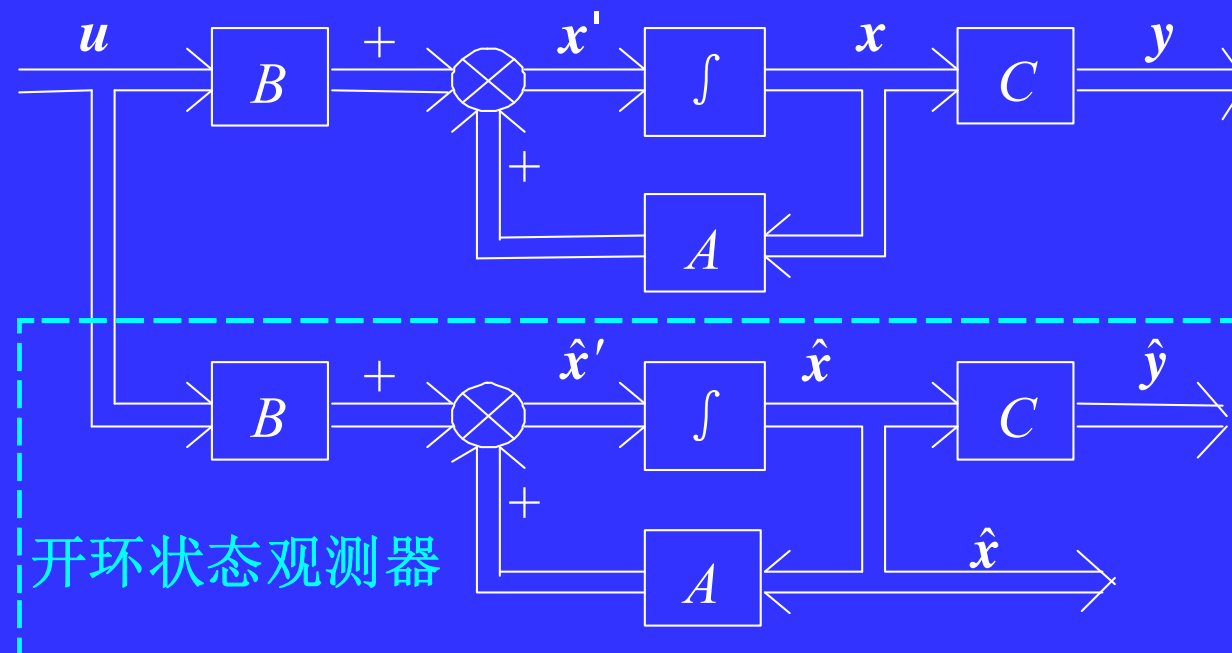


图3-1 开环状态观测器的结构图



2. 渐近状态观测器

Asymptotic state observer

□ 前面讨论的开环状态观测器没有利用被控系统的可直接测量得到的输出变量来对状态估计值进行修正，估计效果不佳

✓ 其估计误差 $\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$ 将会因为矩阵 A 具有在 s 平面右半闭平面的特征值，导致不趋于零而趋于无穷或产生等幅振荡。

可以预见，如果利用输出变量对状态估计值进行修正，即进行**反馈校正**，则状态估计效果将有本质性的改善。

下面将讨论该类状态观测器系统的特性及设计方法。



- 如果对任意矩阵 A 的情况都能设计出相应的状态观测器, 对于任意的被控系统的初始状态都能满足下列条件:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\hat{x}(t) - x(t)] = 0$$

即状态估计值可以渐近逼近被估计系统的状态,
则称该状态估计器为**渐近状态观测器**。



- 根据上述利用输出变量对状态估计值进行修正的思想，和状态估计误差须渐近趋于零的状态观测器的条件，可得如下的状态观测器：

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + G(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases} \quad (3-1)$$

其中 G 称为状态观测器的反馈矩阵。于是重构状态方程为

$$\dot{\hat{x}} = (A - GC)\hat{x} + Bu + Gy$$

该状态估计器称为全维状态观测器，简称为状态观测器，其结构如下图所示。



取原系统的输出 y 和复制系统输出 \hat{y} 之差作为校正变量，并将其经增益矩阵 G 反馈到复制系统中积分器的输入端，构成一个闭环系统。

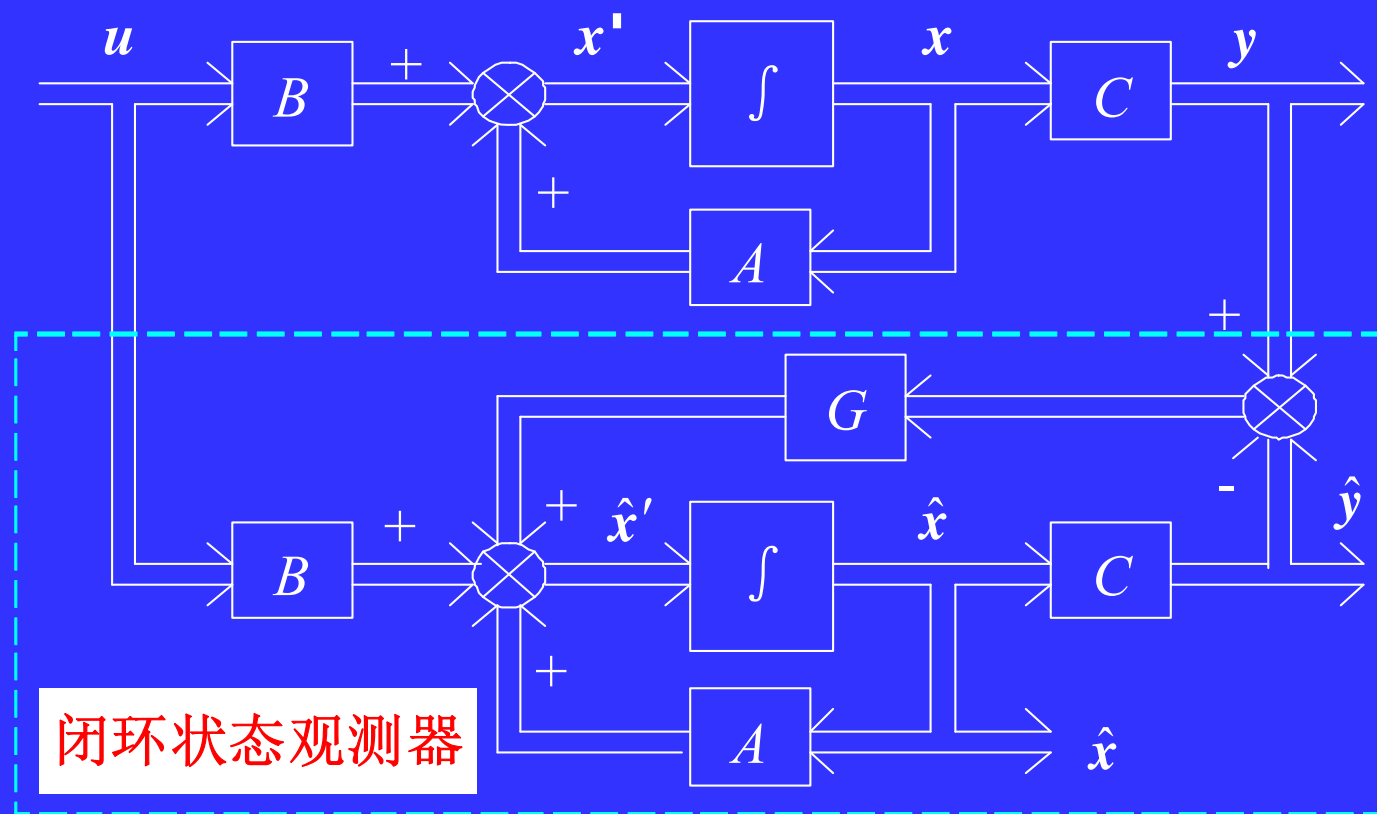


图3-2 渐近状态观测器的结构图



定理10-2 (P261)

□ 定理3-1 (观测器的存在条件) 线性定常系统 $\Sigma(A, B, C)$ 具有形如 (3-1) 的状态观测器的充分必要条件是系统的不可观部分 (或不可观模态) 是渐近稳定的。

定理10-3 (P261)

□ 定理 渐近状态观测器的极点可以任意配置, 即通过矩阵 G 任意配置 $A-GC$ 的特征值的充要条件为矩阵对 (A, C) 可观。

□ 证明



□ 方法二

方法二的思想:

- ✓ 先通过非奇异线性变换 $\mathbf{x} = T\tilde{\mathbf{x}}$, 将状态完全可观的被控系统 $\Sigma(A, C)$ 变换成**可观标准型** $\tilde{\Sigma}(\tilde{A}, \tilde{C})$, 即有

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix}$$
$$\tilde{C} = CT = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]$$



- ✓ 对可观标准型 $\tilde{\Sigma}(\tilde{A}, \tilde{C})$ 进行极点配置, 求得相应的可观标准型的观测器的反馈阵 \tilde{G} 如下

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} a_n^* - a_n \\ a_{n-1}^* - a_{n-1} \\ \vdots \\ a_1^* - a_1 \end{bmatrix}$$

其中 a_i^* 和 $a_i (i=1, 2, \dots, n)$ 分别为期望的状态观测器的极点所决定的特征多项式的系数和原被控系统的特征多项式的系数。

- ✓ 因此, 原系统 $\Sigma(A, B, C)$ 的相应状态观测器的反馈阵 G 为

$$G = T\tilde{G}$$



□ 例3-1 设线性定常系统的状态空间模型为（P265 习题10-5-5）

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = [0 \quad 0 \quad 1] \mathbf{x}$$

试设计一状态观测器，使其极点配置为-3, -4, -5。



(2) 方法二。

1. 先将原系统化成**可观标准型**，相应的变换矩阵 T 为

$$T = \begin{bmatrix} t_1 & At_1 & A^2t_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \theta$$

其中

$$t_1 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



2. 因此可观标准型的状态观测器的反馈矩阵为

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} a_3^* - a_3 \\ a_2^* - a_2 \\ a_1^* - a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58 \\ 50 \\ 12 \end{bmatrix}$$

则原被控系统的状态观测器的反馈矩阵 G 为

$$G = T\tilde{G} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 58 \\ 50 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 25 \\ 12 \end{bmatrix}$$

可见，用方法二求得的 G 矩阵与方法一完全相同。



例：设被控对象传递函数为

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

试设计全维状态观测器，将极点配置在 -10, -10.

解：被控对象的传递函数为

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{(s+1)(s+2)} = \frac{2}{s^2 + 3s + 2}$$

可直接写出系统的可控标准形

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = [2 \quad 0]$$



显然，系统可控且可观。

$$\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2h_0 & 1 \\ -2-2h_1 & -3 \end{bmatrix}$$

观测器特征多项式为

$$|\lambda \mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{c})| = \lambda^2 + (2h_0 + 3)\lambda + (6h_0 + 2h_1 + 2)$$

期望的特征多项式为

$$(\lambda + 10)^2 = \lambda^2 + 20\lambda + 100$$

令上述两特征方程同次项系数相等，可得

$$2h_0 + 3 = 20 \quad 6h_0 + 2h_1 + 2 = 100$$

即

$$h_0 = 8.5 \quad h_1 = 23.5$$



10.3.2 带状态观测器的闭环控制系统

Close-loop control systems with state observer

□ 状态观测器解决了状态变量不能直接测量的系统的状态估计问题，它为**利用状态反馈实现系统闭环控制**奠定了基础。

但状态观测器对状态反馈闭环系统的稳定性和其它性能品质指标的影响如何，则是一个需要细致分析的问题。

本节主要研究利用状态观测器实现的状态反馈闭环系统的特性，以及它和直接采用状态变量为反馈量时的异同。

下面首先导出带状态观测器的状态反馈闭环控制系统的状态空间模型，并以此来进行该闭环系统的特性分析。



设系统 $\Sigma(A,B,C)$ 可控可观，则该系统可通过状态反馈进行极点配置，以及能建立全维状态观测器并对其进行极点配置。

若系统 $\Sigma(A,B,C)$ 的状态变量不能直接测量，则可由状态观测器提供的状态变量的估计值来构成状态反馈律。

即对线性定常连续系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = C\mathbf{x} \end{cases}$$

其全维状态观测器为

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}} = A\hat{\mathbf{x}} + B\mathbf{u} + G(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) \\ \hat{\mathbf{y}} = C\hat{\mathbf{x}} \end{cases}$$

➤ 设基于状态观测值 $\hat{\mathbf{x}}$ 的状态反馈律为

$$\mathbf{u} = -K\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{v}$$



带全维状态观测器的状态反馈闭环系统的结构图。

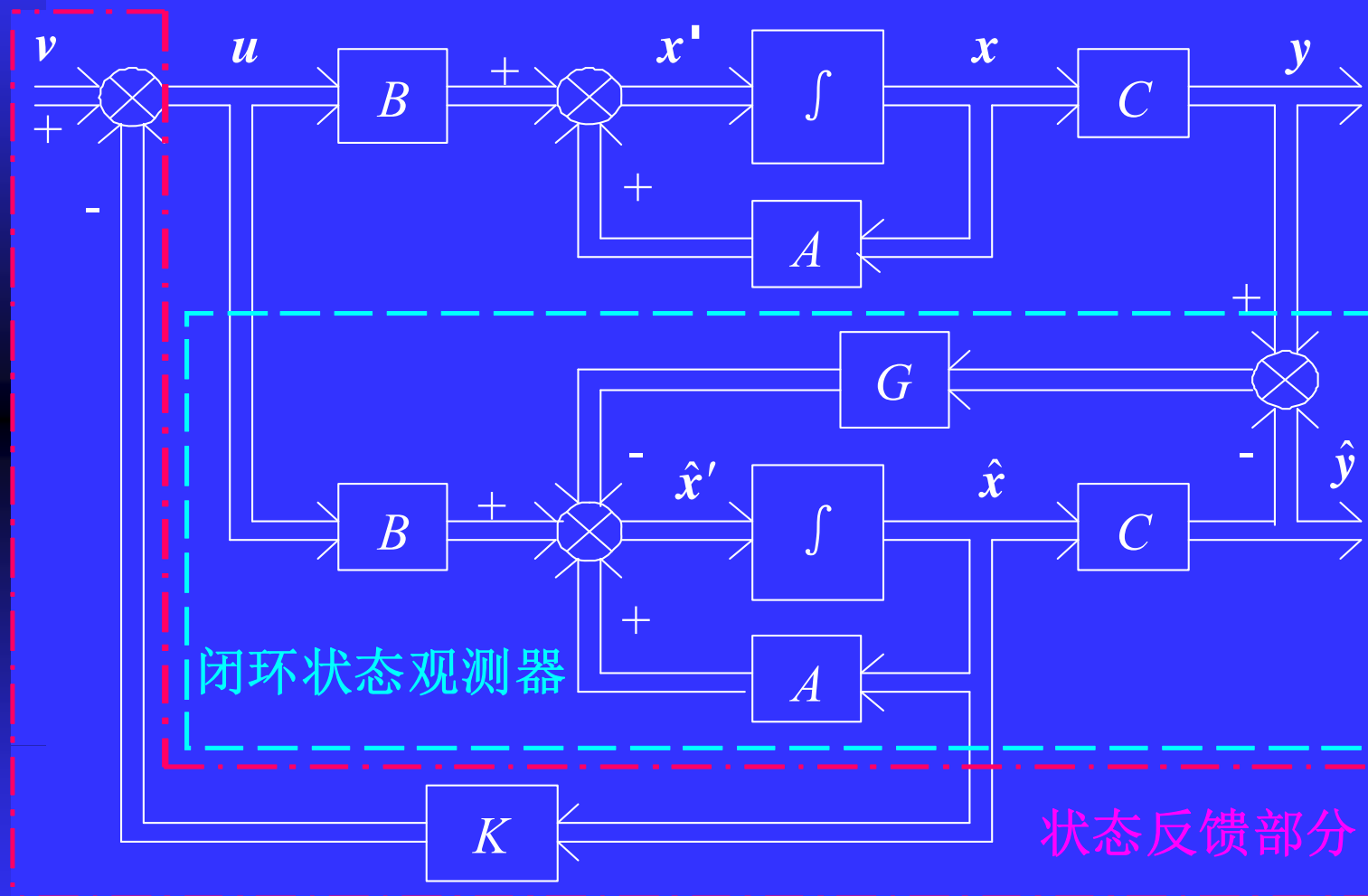


图3-3 带状状态观测器的状态反馈闭环控制系统结构图



- 下面分析上述带状态观测器的状态反馈闭环系统的观测误差：
首先，定义状态观测误差为

则有

$$\begin{aligned}\bar{x}' &= (\dot{x} - \dot{\hat{x}})' = A(\dot{x} - \dot{\hat{x}}) - G(\dot{y} - \dot{\hat{y}}) \\ &= A(\dot{x} - \dot{\hat{x}}) - GC(\dot{x} - \dot{\hat{x}}) \\ &= (A - GC)\bar{x}\end{aligned}$$

代入被控系统和状态观测器的输出方程

- 另外，闭环控制系统的状态方程又可记为

$$\begin{aligned}\dot{x}' &= Ax + B(-K\hat{x} + v) \\ &= (A - BK)x + BK(\dot{x} - \dot{\hat{x}}) + Bv \\ &= (A - BK)x + BK\bar{x} + Bv\end{aligned}$$

增加/减去
 $-BKx$ 项



因此，带全维状态观测器的状态反馈闭环控制系统的状态空间模型为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{x}' \\ \bar{\mathbf{x}}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{BK} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{GC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \bar{\mathbf{x}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{y} = [\mathbf{C} \quad \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \bar{\mathbf{x}} \end{bmatrix} \end{cases}$$



上述带全维状态观测器的闭环控制系统的特性:

1. 分离特性 Separation Property (Principle)

- 由闭环系统状态空间模型的状态方程可知，整个闭环系统的特征值由矩阵块 $A-BK$ 的特征值和矩阵块 $A-GC$ 的特征值所组成，
 - ✓ 即由状态反馈部分的特征值和状态观测器部分的特征值所组成。
- 这两部分的特征值可单独设计(配置)，互不影响，这种特性称为状态反馈控制与状态观测器的**分离特性(原理)**。
- 一般在工程上，为了保证有较好的控制精度、快速性和超调量等动态指标，状态观测器部分 $A-GC$ 的特征值的实部应远小于状态反馈部分 $A-BK$ 的特征值的实部，即更远离虚轴。



2. 传递函数的不变性

- 由闭环系统状态空间模型，可得带观测器的闭环系统的传递函数阵如下：

$$\begin{aligned} G_{K,G}(s) &= [C \quad 0] \left(sI - \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - GC \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= C(sI - A + BK)^{-1} B \end{aligned}$$

因此，带观测器的闭环系统的传递函数阵完全等于直接采用状态变量作反馈量的闭环系统的传递函数阵

- ✓ 即状态观测器不改变闭环系统的传递函数阵，也就是不改变闭环系统的外部输入-输出特性。



习题-1（掌握）：给定线性定常系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x\end{aligned}$$

其状态不能直接测得，指定期望的闭环极点为 $-1+j$ ， $-1-j$ ，观测器的特征值为 -2 ， -4 ，试设计一个观测器—状态反馈系统，并画出系统的模拟结构图，计算整个闭环系统的传递函数。



解：1. 检查控制系统的能控性和能观性

$$\text{rank}[B, AB] = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2, \quad \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

所以系统是状态完全能控能观的。从而存在矩阵 K, G 使得系统及观测器极点任意配置。

2. 设计状态反馈矩阵 K

设 $K = [k_1, k_2]$, 则引入状态反馈后系统的特征多项式为

$$|sI - (A - BK)| = \left| sI - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ k_1 & s + k_2 \end{vmatrix} = s^2 + k_2s + k_1$$

由希望极点确定的特征多项式为:

$$(s+1-j)(s+1+j) = s^2 + 2s + 2$$

从而得到: $k_1 = 2, k_2 = 2$, 即 $K = [2, 2]$ 。



3. 设计状态观测器的输出反馈矩阵 G

状态观测器的特征多项式为

$$(s+2)(s+4) = s^2 + 6s + 8$$

设 $G = [g_1, g_2]^T$, 则状态观测器子系统的特征多项式为

$$|sI - (A - GC)| = \left| sI - \begin{bmatrix} -g_1 & 1 \\ -g_2 & 0 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} s + g_1 & -1 \\ g_2 & s \end{bmatrix} \right| = s^2 + g_1s + g_2$$

比较可得: $g_1 = 6, g_2 = 8$, 即 $G = [6, 8]^T$ 。

4. 闭环系统的传递函数如何?

由传递函数的不变性可得

$$G_{K,G}(s) = 1/(s^2 + 2s + 2)$$



习题-2（ P265， 例10-3， 掌握）：给定线性定常系统

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}\end{aligned}$$

试设计带状态观测器的状态反馈系统，是反馈系统的极点配置在 $-1+j$ ， $-1-j$ ，观测器的特征值为 -5 ， -5 。



① 检查控制对象的可控性和可观性

由于系统可控矩阵和可观矩阵的秩分别为

$$\text{rank} \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} = 2 = n$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2 = n$$

所以系统是状态完全可控、可观的，从而存在矩阵 K 、 G 使得系统及观测器的极点可以任意配置。



② 设计状态反馈矩阵 K

设 $K = [k_2 \quad k_1]$ ，引入状态反馈后系统的特征多项式为

$$|sI - (A - BK)| = s^2 + (5 + k_1)s + k_2$$

由系统希望配置的极点确定的特征多项式为

$$(s + 1 - j)(s + 1 + j) = s^2 + 2s + 2$$

令上述两个特征多项式对应系数相等，可得

$$k_1 = -3, k_2 = 2$$

即状态反馈矩阵为

$$K = [k_2 \quad k_1] = [2 \quad -3]$$



③ 设计状态观测器的反馈矩阵 G

取状态观测器的极点为 $s_1 = s_2 = -5$ ，则希望的状态观测器具有的特征多项式为

$$(s + 5)^2 = s^2 + 10s + 25$$

设反馈矩阵 G 为

$$G = [g_2 \quad g_1]^T$$

则状态观测器子系统的特征多项式为

$$|sI - (A - GC)| = s^2 + (5 + g_2)s + 5g_2 + g_1$$

令两个多项式相等，解得

$$g_1 = 0, g_2 = 5$$

即

$$G = [g_2 \quad g_1]^T = [5 \quad 0]^T$$



Ch.11 Lyapunov 稳定性 分析



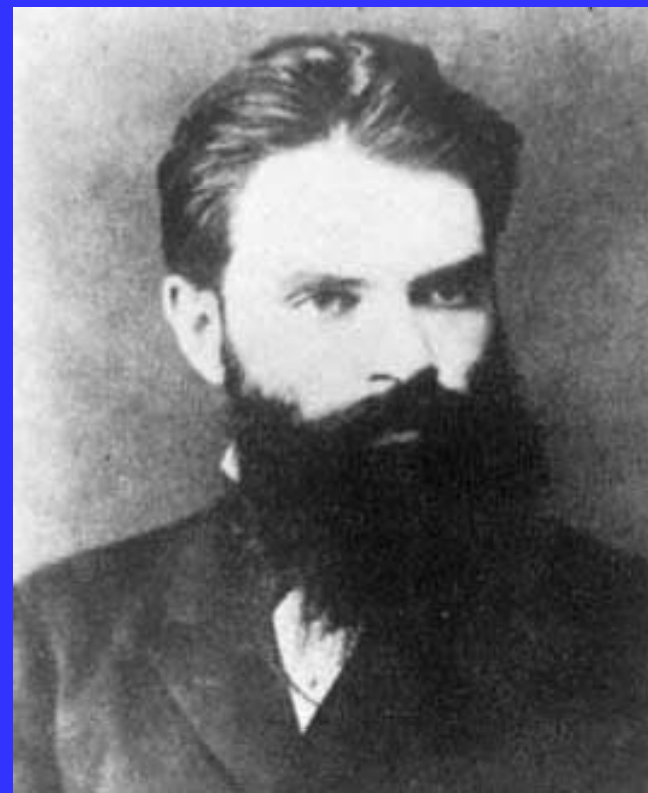
实际上，控制系统的稳定性，通常有两种定义方式：

- **外部稳定性**：是指系统在零初始条件下通过其外部状态，即由系统的输入和输出两者关系所定义的外部稳定性。
 - ✓ 经典控制理论讨论的有界输入有界输出（**BIBO**）稳定即为外部稳定性。**Outer stability**
- **内部稳定性**：是关于动力学系统的内部状态变化所呈现稳定性，即系统的内部状态稳定性。
 - ✓ 本节讨论的Lyapunov稳定性即为内部稳定性。**Inner stability**
- **外部稳定性只适用于线性系统**，内部稳定性不但适用于线性系统，而且也适用于非线性系统。
 - ✓ 对于同一个线性系统，只有在满足一定的条件下两种定义才具有等价性。



在Routh和Poincare等工作的影响下，1892年，俄国数学力学学家A.M. Lyapunov（**李亚普诺夫**，1857–1918）发表了博士论文“*The General Problem of the Stability of Motion* 论运动稳定性的一般问题”，建立了关于运动稳定性研究的一般性理论，总结和发展了系统的经典时域分析法。

- 该方法不仅可用于线性系统而且可用于非线性时变系统的分析与设计，已成为当今控制理论课程的主要内容之一。
- 百余年来Lyapunov理论得到极大发展，在数学、力学、自动控制、机械工程等领域得到广泛应用。





Lyapunov把分析一阶常微分方程组稳定性的方法归纳为**两类**

- 第一类方法是将非线性系统在**平衡态附近线性化**，然后通过讨论线性化系统的**特征值(或极点)分布**及稳定性来讨论原非线性系统的稳定性问题。
 - ✓ 这是一种较简捷的方法，与经典控制理论中判别稳定性方法的思路是一致的。
 - ✓ 该方法称为**间接法**，也称为Lyapunov**第一法**。
- 第二类方法不是通过解方程或求系统特征值来判别稳定性，而是通过定义一个叫**Lyapunov函数**(Lyapunov function)的**标量函数**来分析判别稳定性。
- 由于不用解方程就能直接判别系统稳定性，所以第二种方法称为**直接法**，也称为Lyapunov**第二法**。



11.1 Lyapunov 关于稳定性的定义

□ 系统稳定性是动态系统一个重要的、可以用定量方法研究和表示的定性指标。

✓ 它反映的是系统的一种本质特征。这种特征不随系统变换而改变，但可通过系统反馈和综合加以控制。

✓ 这也是控制理论和控制工程的精髓。

➤ 在经典控制理论中，讨论的是在有界输入下，是否产生有界输出的输入输出稳定性问题。

✓ 从经典控制理论知道，线性系统的输入输出稳定性取决于其**特征方程的根**，与初始条件和扰动都无关，而非线性系统则不然。



11.1.1 平衡态 equilibrium state

□ 设我们所研究的系统的状态方程为

$$\dot{x} = f(x, t)$$

其中 x 为 n 维状态变量;

$f(x, t)$ 为 n 维的关于状态变量向量 x 和时间 t 的非线性向量函数

。

➤ 对该非线性系统，其平衡态的定义如下。



定义11-1 动态系统

$$x' = f(x, t)$$

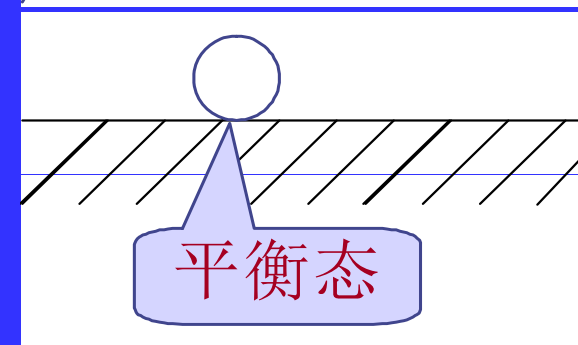
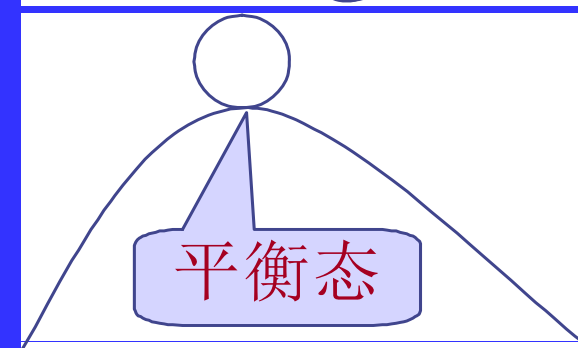
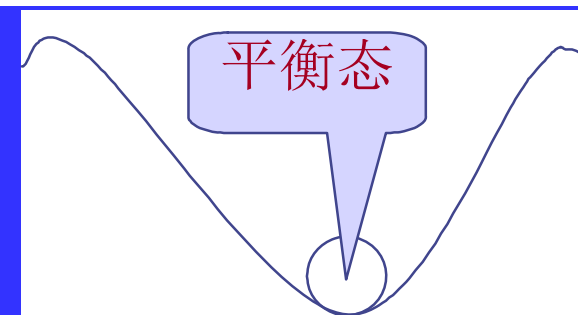
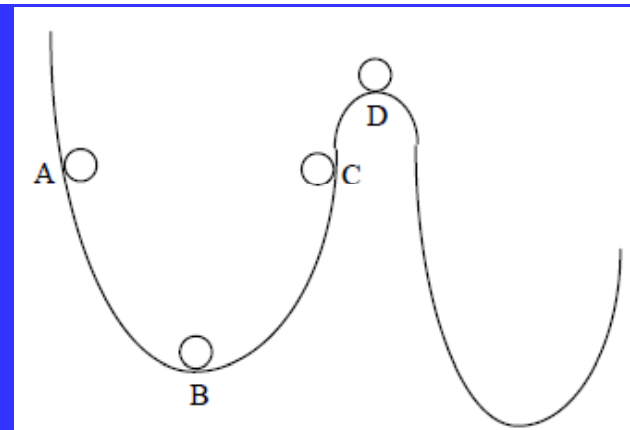
的**平衡态** (平衡点 **equivalence**) 是使

$$f(x, t) \equiv 0$$

的状态 (点), 并用 x_e 来表示。

从定义11-1可知, 平衡态即指状态空间中状态变量的导数向量为零向量的点(状态)。

- 由于导数表示的状态的运动变化方向, 因此**平衡态**即指能够保持平衡、维持现状不运动的状态, 如上图所示。





11.1.2 Lyapunov意义下的稳定性

3) Lyapunov稳定性定义

Definition of Lyapunov stability

- 基于上述数学定义和符号，有如下Lyapunov意义下稳定性的定义。

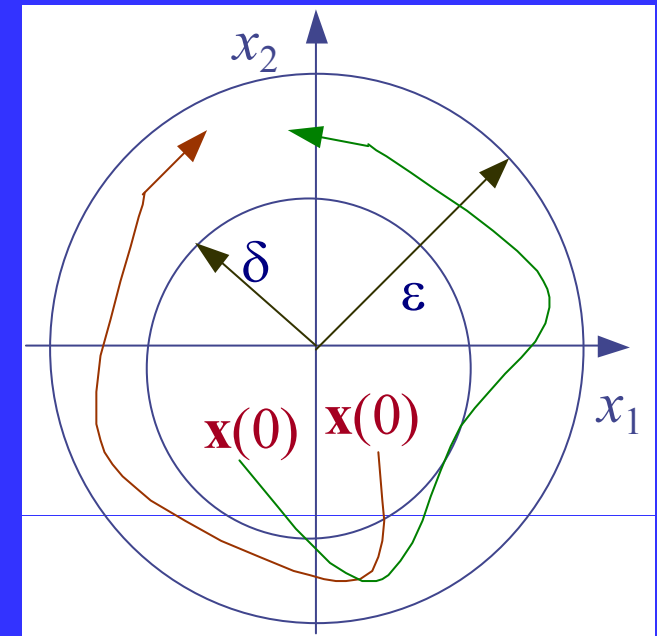


图11-1



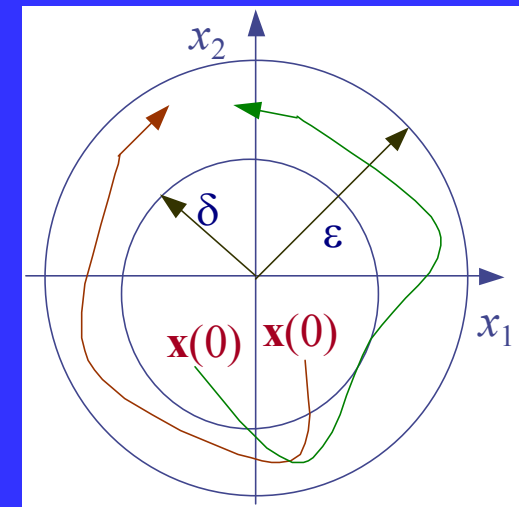
□ 定义11-2(Lyapunov稳定性) 若状态方程

$$\dot{x}=f(x,t)$$

所描述的系统,

- 对于任意的 $\varepsilon>0$ 和任意初始时刻 t_0 ,
- 都对应存在一个实数 $\delta(\varepsilon,t_0)>0$,
- 使得对于任意位于平衡态 x_e 的球域 $S(x_e,\delta)$ 的初始状态 x_0 ,
- 当从此初始状态 x_0 出发的状态方程的解 x 都位于球域 $S(x_e,\varepsilon)$ 内,

则称系统的平衡态 x_e 是Lyapunov意义下稳定的 stable in the sense of Lyapunov





✓ 即逻辑关系式

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall t_0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x_0 \in S(x_e, \delta) \quad \forall t \geq t_0$$

$$x(t) \in S(x_e, \varepsilon)$$

为真，则 x_e 是Lyapunov意义下**稳定的**。

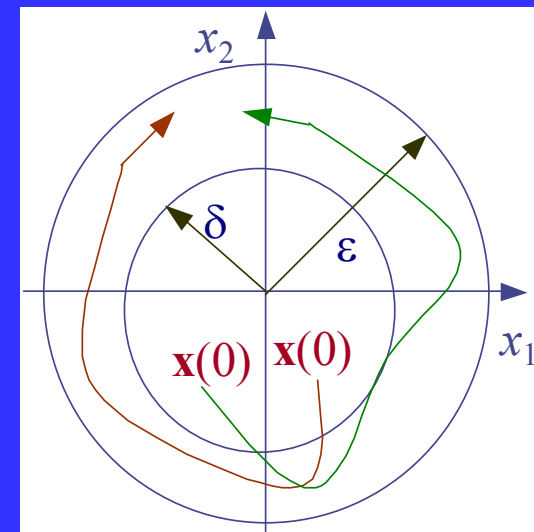
➤ 若实数 $\delta(\varepsilon, t_0)$ 与初始时刻 t_0 无关，
即下述逻辑关系式成立

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall t_0 \quad \forall x_0 \in S(x_e, \delta) \quad \forall t \geq t_0 \quad x(t) \in S(x_e, \varepsilon)$$

则称稳定的平衡态 x_e 是Lyapunov意义下**一致稳定**的。

□ 对于**定常系统**来说，上述定义中的实数 $\delta(\varepsilon, t_0)$ 与初始时刻 t_0 必定无关，故其稳定性与一致稳定性两者等价。

➤ 但对于**时变系统**来说，则这两者的意义很可能不同。





11.1.3 渐近稳定性 asymptotic stability

□ 定义11-3（Lyapunov渐近稳定性）若状态方程

$$\dot{x} = f(x, t)$$

所描述的系统在初始时刻 t_0 的平衡态 x_e 是Lyapunov意义下稳定的，且系统状态最终趋于系统的平衡态 x_e ，即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_e$$

则称平衡态 x_e 是Lyapunov意义下渐近稳定的。

- 若 $\delta(\epsilon, t_0)$ 与初始时刻 t_0 无关，则称平衡态 x_e 是Lyapunov意义下一致渐近稳定的。 Uniformly asymptotically stable in the sense of Lyapunov

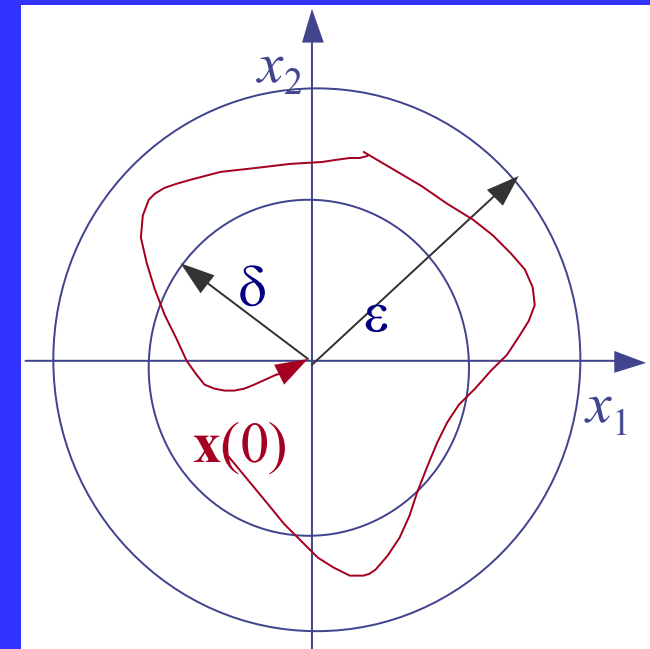


图11-2



□ 对于线性定常系统来说，上述定义中的实数 $\delta(\varepsilon, t_0)$ 可与初始时刻 t_0 无关，故其渐近稳定性与一致渐近稳定性等价。

- 但对于时变系统来说，则这两者的意义很可能不同。

□ 渐近稳定性在二维空间中的几何解释如图11-2所示。

- 该图表示状态 $\mathbf{x}(t)$ 的轨迹随时间变化的收敛过程。
- 图11-1与图11-2相比较，能清楚地说明渐近稳定和稳定的意义。

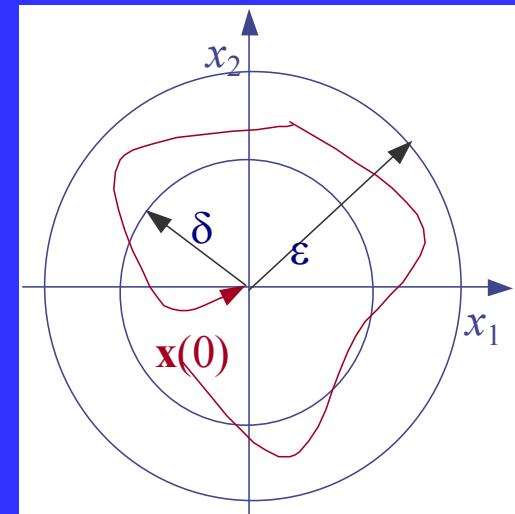


图11-2

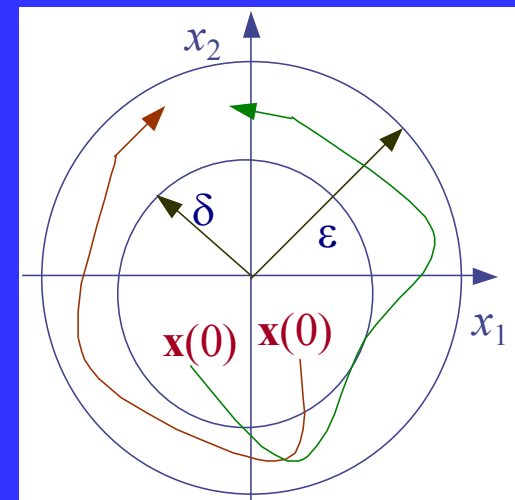


图11-1



□ 线性系统稳定性概念与Lyapunov意义下稳定性概念的比较

经典控制理论 (线性系统)	不稳定 ($\text{Re } s > 0$)	临界情况 ($\text{Re } s = 0$)	稳定 ($\text{Re } s < 0$)
Lyapunov意义	不稳定	稳定	渐近稳定



11.1.4 大范围渐近稳定性 global asymptotic stability

□ 对于 n 维状态空间中的所有状态, 如果由这些状态出发的状态轨线都具有渐近稳定性, 那么平衡态 x_e 称为Lyapunov意义下**大范围渐近稳定**的。

- 换句话说, 若状态方程在任意初始状态下的解, 当 t 无限增长时都趋于平衡态, 则该平衡态为大范围渐近稳定的。
- 显然, 大范围渐近稳定性的**必要条件**是系统在整个状态空间中**只有一个平衡态**。
 - ✓ 对于线性定常系统, 如果其平衡态是渐近稳定的, 则一定是大范围渐近稳定的。
 - ✓ 但对于**非线性系统**则不然, 渐近稳定性是一个**局部性**的概念, 而非全局性的概念。



11.1.5 不稳定性 instability

□ 定义11-4 若状态方程

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$$

描述的系统在初始时刻 t_0 ,

- 对于某个给定实数 $\varepsilon > 0$ 和任意一个实数 $\delta > 0$,
- 总存在一个位于平衡态 \mathbf{x}_e 的邻域 $S(\mathbf{x}_e, \delta)$ 的初始状态 \mathbf{x}_0 ,
- 使得从 \mathbf{x}_0 出发的状态方程的解 $\mathbf{x}(t)$ 将脱离球域 $S(\mathbf{x}_e, \varepsilon)$, 则称系统的平衡态 \mathbf{x}_e 是Lyapunov意义下**不稳定的**, 即关系

$$\exists \varepsilon > 0 \exists t_0 \forall \delta > 0 \exists \mathbf{x}_0 \in S(\mathbf{x}_e, \delta) \exists t \geq t_0 \mathbf{x}(t) \notin S(\mathbf{x}_e, \varepsilon)$$

成立, 则系统的平衡态 \mathbf{x}_e 是Lyapunov意义下不稳定的。

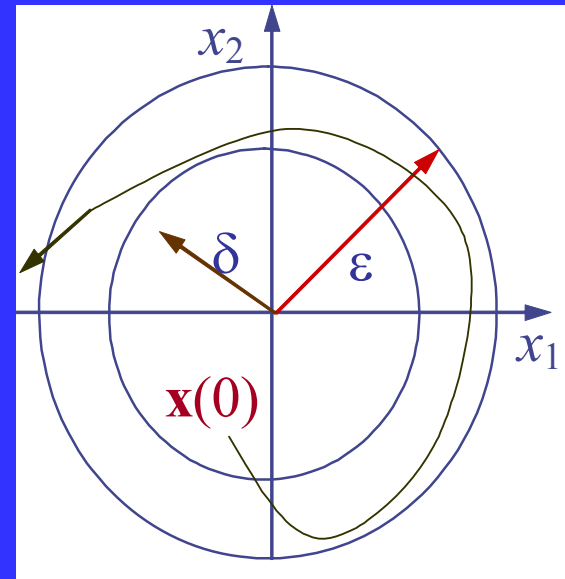


图11-3



11.2 Lyapunov第一方法



□ Lyapunov第一法又称**间接法** (indirect method), 它是研究动态系统的一次近似数学模型(线性化模型)稳定性的方法。

它的基本思路是:

- 首先, 对于非线性系统, 可先将非线性状态方程**在平衡态附近进行线性化**,
 - ✓ 即在平衡态求其一次Taylor展开式 (Taylor expansion)
 - ✓ 然后, 利用这一次展开式表示的线性化方程去分析系统稳定性。
- 其次, 解出线性化状态方程组或线性状态方程组的特征值, 然后根据全部特征值在复平面上的分布情况来判定系统在零输入情况下的稳定性。



欲讨论系统在平衡态 \mathbf{x}_e 的稳定性，先必须将非线性向量函数 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 在平衡态附近展开成Taylor级数，即有

$$\begin{aligned}\mathbf{x}' &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_e) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^\tau} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_e} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_e) + R(\mathbf{x} - \mathbf{x}_e) \\ &= A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_e) + R(\mathbf{x} - \mathbf{x}_e)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_e}\end{aligned}$$

其中 A 为 $n \times n$ 维的向量函数 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 与 \mathbf{x} 间的雅可比矩阵；

$R(\mathbf{x} - \mathbf{x}_e)$ 为Taylor展开式中包含 $\mathbf{x} - \mathbf{x}_e$ 的二次及二次以上的余项。

雅可比矩阵(Jacobian matrix) A 定义为

$$A = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^\tau} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_e} = \begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial x_1 & \dots & \partial f_1 / \partial x_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial f_n / \partial x_1 & \dots & \partial f_n / \partial x_n \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_e}$$



- 上述线性化方程的右边第一项 $A(x-x_e)$ 代表原非线性状态方程的一次近似式，如果用该一次近似式来表达原非线性方程的近似动态方程，即可得如下线性化的状态方程：

$$\dot{x}' = A(x-x_e)$$

- 由于对如上式所示的状态方程总可以通过 n 维状态空间中的坐标平移，将平衡态 x_e 移到原点。
- 因此，上式又可转换成如下原点平衡态的线性状态方程：

$$\dot{x}' = Ax$$

- 判别非线性系统平衡态 x_e 稳定性的Lyapunov第一法的**思想**为：
- 通过**线性化**，将讨论非线性系统平衡态稳定性问题转换到讨论线性系统 $\dot{x}' = Ax$ 的稳定性问题。



- 由上述Lyapunov第一法的结论可知, 该方法与经典控制理论中稳定性判据的思路一致, 需求解线性化状态方程或线性状态方程的特征值, 根据**特征值在复平面的分布**来分析稳定性。
 - 值得指出的区别是:
 - ✓ 经典控制理论讨论在有界输入下的**输出稳定性**问题, 而Lyapunov方法讨论**状态稳定性**问题。
 - 由于Lyapunov第一法需要求解线性化后系统的特征值, 因此该方法也仅能适用于非线性定常系统或线性定常系统, 但是**不能推广用于时变系统**。



11.3 Lyapunov第二方法



□ Lyapunov第二法又称为**直接法**(direct method)。

➤ 它是在用**能量观点**分析稳定性的基础上建立起来的。

✓ 若系统平衡态渐近稳定，则系统经激励后，其储存的能量将随着时间推移而**衰减**。当趋于平衡态时，其能量达到最小值。

✓ 反之，若平衡态不稳定，则系统将不断地从外界吸收能量，其储存的能量将越来越大。

➤ 基于这样的观点，只要能找出一个能合理描述动态系统的 n 维状态的某种形式的**能量正性函数**，通过考察该函数随时间推移是否**衰减**，就可判断系统平衡态的稳定性。



(2) 二次型函数和对称矩阵的正定性

□ 二次型函数 (quadratic function) 是一类特殊形式函数。

➤ 设 $V(\mathbf{x})$ 为关于 n 维变量向量 \mathbf{x} 的实二次型函数, 则其可以表示为

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) = & a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{2n}x_2x_n \\ & + \dots \\ & + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j \geq i}^n a_{ij} x_i x_j$$

其中 $a_{ij} (i=1,2,\dots,n, j=i,\dots,n)$ 为实常数。



□ 由线性代数知识知, 实二次型函数 $V(\mathbf{x})$ 又可表示为

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$$

其中 \mathbf{P} 称为二次型函数 $V(\mathbf{x})$ 权矩阵, 它为如下 $n \times n$ 维实对称矩阵:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}/2 & \dots & a_{1n}/2 \\ a_{12}/2 & a_{22} & \dots & a_{2n}/2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n}/2 & a_{2n}/2 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$



□ **定理11-1(Sylvester定理)** (1) 实对称矩阵 P 为**正定**的**充要条件**是 P 的各阶**顺序主子式** (order principal minor determinant) 均大于零, 即

$$\Delta_1 = p_{11} > 0 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} > 0 \quad \dots \quad \Delta_n = |P| > 0$$

其中 p_{ij} 为实对称矩阵 P 的第 i 行第 j 列元素。

(2) 实对称矩阵 P 为**负定**的充要条件是 P 的各阶顺序主子式满足

$$\Delta_i \begin{cases} > 0 & i \text{ 为偶数} \\ < 0 & i \text{ 为奇数} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n$$



2. Lyapunov稳定性定理的直观意义

- 从平衡态的定义可知, 平衡态是使得系统静止不动 (导数为零, 即运动变化的趋势为零) 的状态。
 - 从**能量观点**来说, 静止不动即不存在运动变化所需要的能量, 即变化所需的能量为零。
 - 通过分析状态变化所反映的能量变化关系可以分析出状态的变迁或演变, 也可分析出平衡态是否稳定或不稳定。
 - 下面通过一刚体运动的能量变化来简介Lyapunov稳定性定理的直观意义。



右图所示动力学系统的平衡态在一定范围内为渐近稳定的平衡态。

- 对该平衡态的邻域, 可定义其**能量**(动能+势能)函数如下:

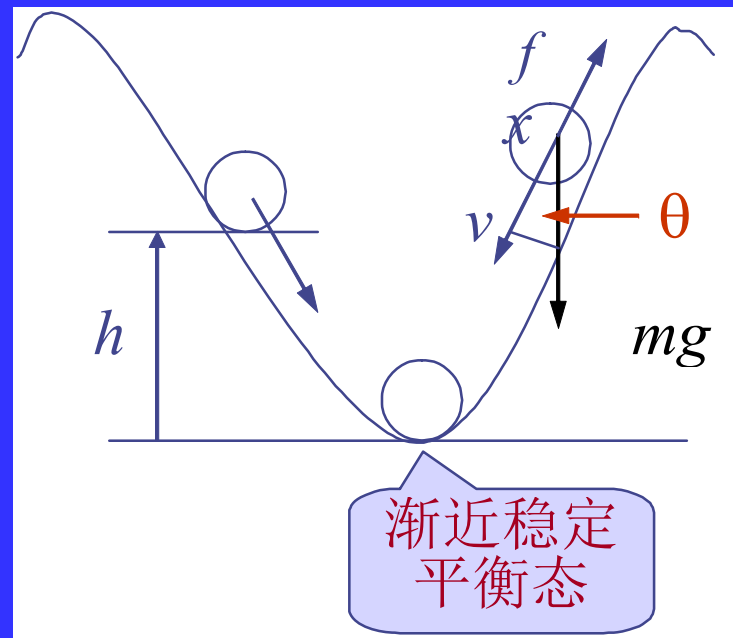
$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}mv^2 + mgh \\ &= \frac{1}{2}mx'^2 + mg(x \cos \theta) > 0 \end{aligned}$$

其中 x 为位移, x' 为速度, 两者且选为状态变量。

- 在图中所示状态, $v = -x'$, 由牛顿第二定律可知, 其运动满足如下方程:

$$m(-x'') = mg \cos \theta - fmg \sin \theta$$

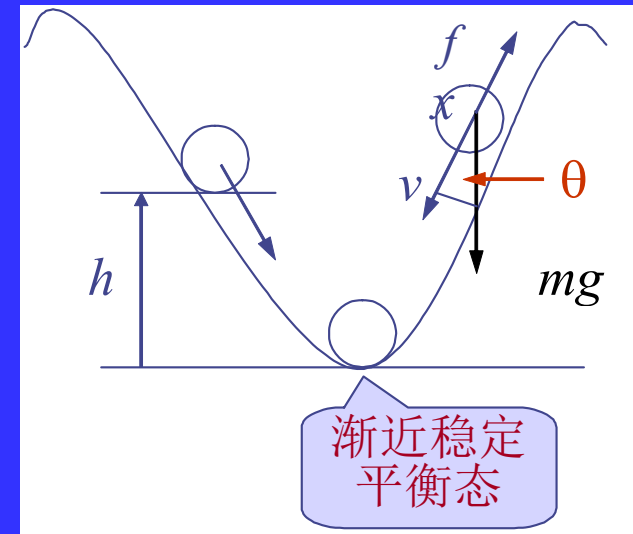
其中 f 为摩擦阻尼系数。





- 因此, 有 $mx'' = -mg(\cos\theta - f\sin\theta)$
- 能量的变化趋势(导数)为

$$\begin{aligned} V' &= mx'x'' + mgx'\cos\theta \\ &= -mgx'(\cos\theta - f\sin\theta) + mgx'\cos\theta \\ &= mgx'f\sin\theta \end{aligned}$$



当 θ 取值为 $[0, 90^\circ]$, 由于 v 的方向与 x 相反, x' 为负, 因此上式恒小于零。

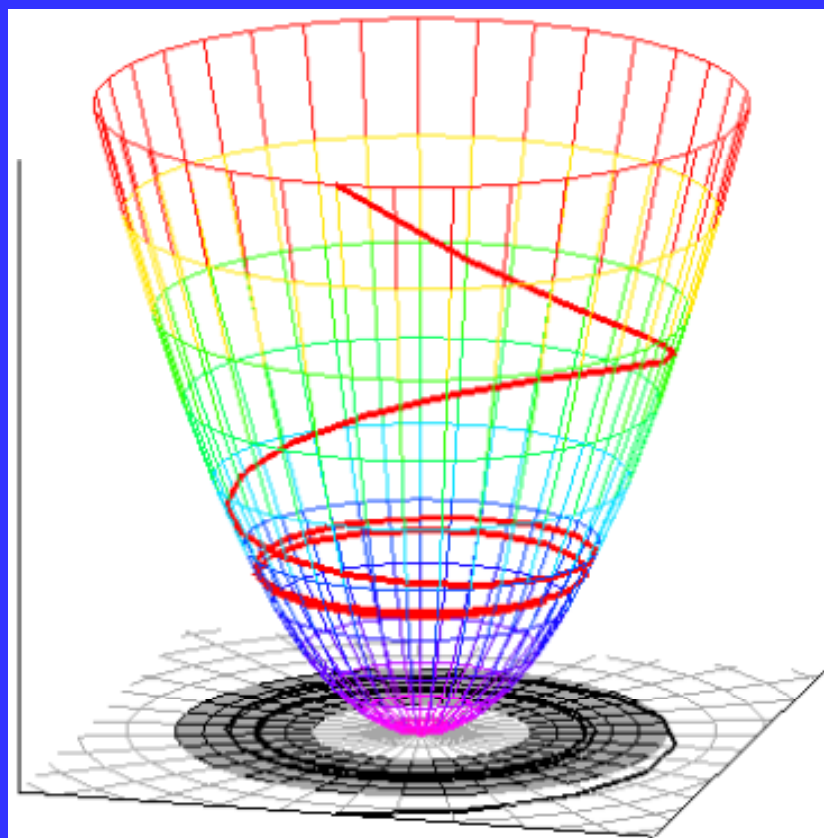
✓ 即渐近稳定的平衡态, 其正定的能量函数的导数(变化趋势)为负。

□ 对小球向上运动时亦可作同样分析。



从直观物理意义的角度，也非常易于理解。

- 由于物体运动所受到的摩擦力作负功，由能量守恒定律可知，**物体的能量将随物体运动而减少**，
- 即，其**导数(变化趋势)为负**。





□ Lyapunov第二法的**基本思想**就是通过定义和分析一个在平衡态邻域的关于运动状态的**广义能量函数**来分析平衡态的稳定性。 **Generalized energy function**

- 通过考察该能量函数随时间变化是否衰减来判定平衡态是渐近稳定，还是不稳定。
- 基于上述关于函数的定号性的定义和上述物理意义解释，下面阐述Lyapunov第二法关于
 - ✓ 平衡态稳定 **equilibrium state stability**
 - ✓ 渐近稳定 **asymptotic stability**
 - ✓ 大范围渐近稳定 **global asymptotic stability**
 - ✓ 不稳定 **instability**

的几个定理。



3. Lyapunov第二法的几个定理

□ 下面分别介绍Lyapunov稳定性分析的如下3个定理:

- 渐近稳定性定理(定理11-4) **asymptotic stability theorem**
- 稳定性定理(定理11-5) **stability theorem**
- 不稳定性定理(定理11-6) **instability theorem**



(1) 渐近稳定性定理

□ 定理11-4 设系统的状态方程为

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{f}(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0}$$

其中 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 为其平衡态。

➤ 若存在一个具有连续一阶偏导数的正定函数 $V(\mathbf{x}, t)$, 满足 $\mathbf{x} = \mathbf{0}, V(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, V(\mathbf{x}) > 0$, 和下述条件:

- 1) 如果 $V'(\mathbf{x}, t)$ 为负定的, 则该系统在原点处的平衡态是一致渐近稳定的;
- 2) 更进一步, 若随着 $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$, 有 $V(\mathbf{x}, t) \rightarrow \infty$ (V is radially unbounded), 那么该系统在原点处的平衡态是大范围一致渐近稳定的。



□ **Lyapunov**定理是判别系统稳定性的一个重要方法和结论。

- 它不仅适用于线性系统，也适用于非线性系统；既适用于定常系统，也适用于时变系统。
 - ✓ 因此，**Lyapunov**第二法是判别系统稳定性的**具有普遍性**的方法。
- **Lyapunov**稳定性理论对控制理论中其他分支理论的发展也起着重要的作用，是现代系统分析和设计的基础工具。



□ 对上述Lyapunov稳定性定理的使用有如下说明:

1) 此定理只为判别系统一致渐近稳定的**充分条件**, 而非**必要条件**。

✓ 也就是说, 若找到满足上述条件的一个Lyapunov函数, 则系统一致渐近稳定或大范围一致渐近稳定。

✓ 但是, 如果我们一时找不到这样的Lyapunov函数, 也并不意味着平衡态就不是渐近稳定的。

❖ 此时, 或者

- 继续寻找满足条件的Lyapunov函数
- 或者, 可利用后续定理的结论来判别平衡态的渐近稳定性。



□ **例11-3** 试确定用如下状态方程描述的系统的平衡态稳定性

。

$$\begin{cases} x_1' = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ x_2' = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$$

□ **解** 显然, 原点(0,0)是给定系统的唯一平衡态, 如果我们选择正定函数

$$V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$$

为Lyapunov函数, 那么沿任意轨迹 $\mathbf{x}(t)$, $V(\mathbf{x})$ 对时间的全导数

$$V'(\mathbf{x}) = 2x_1x_1' + 2x_2x_2' = -2(x_1^2 + x_2^2)^2 < 0$$

是负定函数。此外, 当 $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ 时, 必有 $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ 。

➤ 因此, 由**定理11-4**知, 在 origin 处的平衡态是大范围一致渐近稳定的。



□ **例11-4** 试确定用如下状态方程描述的系统的平衡态稳定性

。

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -x_1 - x_2 \end{cases}$$

□ **解** 显然, 原点(0,0)是给定系统的唯一平衡态, 如果我们选择下述 Lyapunov函数

$$V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$$

那么沿任意轨迹 $\mathbf{x}(t)$, $V(\mathbf{x})$ 对时间的全导数

$$V'(\mathbf{x}) = 2x_1x_1' + 2x_2x_2' = -2x_2^2 \leq 0$$

是半负定函数, 故由**定理11-4**知, 根据所选的Lyapunov函数分析不出该平衡态是否渐近稳定或稳定。

➤ 但这也并不意味着该平衡态就并不渐近稳定。



(2) 稳定性定理

□ **定理11-5** 设系统状态方程为 $\mathbf{x}'=\mathbf{f}(\mathbf{x},t)$, $\mathbf{f}(\mathbf{0},t)=\mathbf{0}$, 其中 $\mathbf{x}_e=\mathbf{0}$ 为其平衡态。若存在具有连续一阶偏导数的正定函数 $V(\mathbf{x},t)$, 满足 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$, $V(\mathbf{x})=0$, $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$, $V(\mathbf{x})>0$, 以及下述条件:

- 1) $V'(\mathbf{x},t)$ 是**半负定**的, 那么该系统在 origin 处的平衡态是**一致稳定**的;
- 2) 更进一步, 若 $V(\mathbf{x},t)$ 的定义域 Ω 为 R^n , 对任意的 t_0 和任意的 $\mathbf{x}(t_0)\neq\mathbf{0}$, $V'(\mathbf{x},t)$ 在 $t>t_0$ 时**不恒为零**, 那么
 - ✓ 该系统在 origin 处的平衡态是**一致渐近稳定**的, 否则将仅是一致稳定而非一致渐近稳定。
 - ✓ 此时, 随着 $\|\mathbf{x}\|\rightarrow\infty$, 有 $V(\mathbf{x},t)\rightarrow\infty$, 则该系统在 origin 处的一致渐近稳定平衡态是大范围一致渐近稳定的。



$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -x_1 - x_2 \end{cases}$$

- 由此定理的结论可知,定理11-5不仅可用于判别平衡态的稳定性,且可作为定理11-4的补充,用于判别平衡态的渐近稳定性。
- 例11-5 试确定例11-4的系统的平衡态稳定性。
- 解 前面已经定义例11-4的系统的Lyapunov函数。

➤ 该函数及其导数分别为

$$V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$$

$$V'(\mathbf{x}) = 2x_1x_1' + 2x_2x_2' = -2x_2^2 \leq 0$$

- 由于 $V'(\mathbf{x})$ 是非正定函数, 且 $V'(\mathbf{x},t)$ 在 $t > t_0$ 时不恒为零, 由定理11-5的 1) 可知, 系统一致稳定。Uniformly stable



$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -x_1 - x_2 \end{cases}$$

□ 对例11-5, 选取Lyapunov函数为

$$V(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \left[(x_1 + x_2)^2 + 2x_1^2 + x_2^2 \right]$$

则

$$\dot{V}(\mathbf{x}, t) = -(x_1^2 + x_2^2)$$

是负定的, 因此可以判定系统在原点处的平衡状态是渐近稳定的。



(3) 不稳定性定理

□ **定理11-6** 设系统的状态方程为 $\mathbf{x}'=\mathbf{f}(\mathbf{x},t)$, 其中 $\mathbf{x}_e=0$ 为其平衡态。如果存在一个有连续一阶偏导数的正定函数 $V(\mathbf{x},t)$, 满足下述条件:

- 1) $V'(\mathbf{x},t)$ 正定, 则该系统在 origin 处的平衡态是不稳定的;
- 2) 若 $V'(\mathbf{x},t)$ 非负定, 且对任意的 t_0 和任意的 $\mathbf{x}(t_0) \neq 0$, $V'(\mathbf{x},t)$ 在 $t > t_0$ 时不恒为零, 那么该平衡态 \mathbf{x}_e 也是不稳定的。



□ **例11-7** 试确定用如下状态方程描述的系统的平衡态稳定性。

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -x_1 + x_2 \end{cases}$$

□ **解** 原点(0,0)是给定系统的唯一平衡态，选择Lyapunov函数

$$V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$$

则

$$V'(\mathbf{x}) = 2x_1x_1' + 2x_2x_2' = 2x_2^2 \geq 0$$

由于 $V'(\mathbf{x})$ 非负定，但其只在 $x_1=0, x_2=0$ 时才恒为零，而在其他状态不恒为零，因此由定理11-6的2)可知，系统的该平衡态是不稳定的。



□ 下面将前面讨论的Lyapunov稳定性的判定方法进行小结

$V(\mathbf{x})$	$V'(\mathbf{x})$	结论
正定(>0)	负定(<0)	该平衡态渐近稳定
正定(>0)	半负定(≤ 0)且不恒为0 (对任意非零的初始状态的解)	该平衡态渐近稳定
正定(>0)	半负定(≤ 0)且恒为0 (对某一非零的初始状态的解)	该平衡态稳定 但非渐近稳定
正定(>0)	正定(>0)	该平衡态不稳定
正定(>0)	半正定(≥ 0)且不恒为0 (对任意非零的初始状态的解)	该平衡态不稳定



□ 习题11-5: 给定系统

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + ax_1(x_1^2 + x_2^2)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + ax_2(x_1^2 + x_2^2)$$

其中 $a > 0$ 。试选择Lyapunov函数 $V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ 来分析系统原点的稳定性。



11.4 线性定常系统的 Lyapunov稳定性分析



11.4.1 线性定常连续系统的稳定性分析

□ 设线性定常连续系统的状态方程为

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

这样的线性系统具有如下特点：

- 1) 当系统矩阵 \mathbf{A} 为非奇异时, 系统有且仅有一个平衡态 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$, 即为状态空间原点;
- 2) 若该系统在平衡态 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 的某个邻域上是渐近稳定的, 则一定是大范围渐近稳定的;
- 3) 对于该线性系统, 其Lyapunov函数一定可以选取为二次型函数的形式。



□ 上述第 3) 点可由如下定理中得到说明。

□ **定理11-7** 线性定常连续系统

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

的平衡态 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 为渐近稳定的充要条件为:

- 对任意给定的一个正定矩阵 \mathbf{Q} ，都存在一个正定矩阵 \mathbf{P} 为下述**Lyapunov方程**(Lyapunov equation) 的解

$$\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} = -\mathbf{Q}$$

并且正定函数 $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}$ 即为系统的一个**Lyapunov函数**。



□ 在应用上述基本定理和推论时, 还应注意下面几点:

- 若 $V'(x,t) = -x^T Q x$ 沿任一条状态轨线不恒为零, 则 Q 可取为**非负定矩阵**, 而系统在原点渐近稳定的**充要条件**为:
 - ✓ 存在正定矩阵 P 满足Lyapunov代数方程。
- Q 矩阵只要选成正定的或根据上述情况选为非负定的, 那么最终的判定结果将与 Q 的不同选择无关。
- 由**定理11-7**及其**推论11-1**可知, 运用此方法判定系统的渐近稳定性时, 最方便的是**选取 Q 为单位矩阵, 即 $Q=I$** 。
 - ✓ 于是, 矩阵 P 的元素可按如下Lyapunov代数方程:

$$PA + A^T P = -I$$

求解, 然后根据 P 的正定性来判定系统的渐近稳定性。



- 下面通过一个例题来说明如何通过求解矩阵Lyapunov方程来判定线性定常系统的稳定性。
- **例11-8** 试确定用如下状态方程描述的系统的平衡态稳定性。

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- **解** 设选取的Lyapunov函数为

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$$

- 由定理11-7, 上式中的正定矩阵 \mathbf{P} 满足Lyapunov方程

$$\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} = -\mathbf{I}.$$



➤ 于是，令对称矩阵 P 为

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$$

➤ 将 P 代入Lyapunov方程，可得

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

展开后得

$$\begin{bmatrix} -2p_{12} & p_{11} - p_{12} - p_{22} \\ p_{11} - p_{12} - p_{22} & 2p_{12} - 2p_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



➤ 因此，得如下联立方程组：

$$\begin{cases} -2p_{12} = -1 \\ p_{11} - p_{12} - p_{22} = 0 \\ 2p_{12} - 2p_{22} = -1 \end{cases}$$

➤ 解出 p_{11} , p_{12} 和 p_{22} , 得

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$



- 为了验证对称矩阵 P 的正定性, 用合同变换法检验如下:

$$P = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{列}(2)-(1)/3 \rightarrow (2)]{\text{行}(2)-(1)/3 \rightarrow (2)} \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

- 由于变换后的对角线矩阵的对角线上的元素都大于零, 故矩阵 P 为正定的。因此, 系统为大范围渐近稳定的。
- 此时, 系统的Lyapunov函数和它沿状态轨线对时间 t 的全导数分别为

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x} = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} > 0$$

$$V'(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} < 0$$



10.4.2 线性离散系统的稳定性分析

- 前两节讨论的为连续系统的Lyapunov稳定性的定义和稳定性判据定理，其稳定性定义可延伸至离散系统，但其稳定性判据则有较大差别。
 - 下面先给出一般离散系统的渐近稳定性的判据。



定理11-8 设系统的状态方程为

$$x(k+1)=f(x(k),k)$$

其中 $x_e=0$ 为其平衡态。

➤ 如果存在一个连续的标量函数 $V[x(k),k]$ 且正定, 则有:

1) 若 $V[x(k),k]$ 的差分 $\Delta V[x(k),k]=V[x(k+1),k+1]-V[x(k),k]$ 为负定的, 则系统在原点处的平衡态是一致渐近稳定的;

2) 若 $\Delta V[x(k),k]$ 为非正定的, 则该系统在原点处的平衡态是一致稳定的;

✓ 更进一步, 若 $\Delta V[x(k),k]$ 对任意初始状态的解序列 $x(k)$, $\Delta V[x(k),k]$ 不恒为零, 那么该系统在原点处的平衡态是一致渐近稳定的;

3) 更进一步, 若 $\|x(k)\| \rightarrow \infty$, 有 $V[x(k),k] \rightarrow \infty$, 那么该系统在原点处的一致渐近稳定平衡态是大范围一致渐近稳定的。



类似于连续系统，可得关于离散系统不稳定性定理。

➤ 离散系统Lyapunov稳定性的判据也可总结如下：

$V[\mathbf{x}(k),k]$	$\Delta V[\mathbf{x}(k),k]$	结论
正定(>0)	负定(<0)	该平衡态渐近稳定
正定(>0)	半负定(≤ 0)且不恒为0 (对任意非零的初始状态的解)	该平衡态渐近稳定
正定(>0)	半负定(≤ 0)且恒为0 (对某一非零的初始状态的解)	该平衡态稳定 但非渐近稳定
正定(>0)	正定(>0)	该平衡态不稳定
正定(>0)	半正定(≥ 0)且不恒为0 (对任意非零的初始状态的解)	该平衡态不稳定



□ 上述定理讨论的是一般离散系统的渐近稳定性的充分判据

- 类似于线性定常连续系统，对于线性定常离散系统，有如下简单实用的**渐近稳定判据**。

□ **定理11-9** 设系统的状态方程为

$$\mathbf{x}(k+1)=G\mathbf{x}(k)$$

其中 $\mathbf{x}_e=0$ 为其平衡态。则其平衡态为渐近稳定的**充要条件**为：

- 对任意给定的一个正定矩阵 Q ，都存在一个正定矩阵 P 为Lyapunov矩阵代数方程

$$G^T P G - P = -Q \quad (4-b)$$

的解，并且正定函数 $V[\mathbf{x}(k)]=\mathbf{x}^T(k)P\mathbf{x}(k)$ 即为系统的一个Lyapunov函数。



$$G^T P G - P = -I \quad (4-c)$$

□ **例11-10** 设离散时间系统的状态方程为

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k)$$

试确定系统在平衡点处是大范围内渐近稳定的条件。

□ **解** 由式(4-c)得如下Lyapunov代数方程

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

➤ 展开后得如下联立方程组：

$$\begin{cases} p_{11}(\lambda_1^2 - 1) = -1 \\ p_{12}(\lambda_1 \lambda_2 - 1) = 0 \\ p_{22}(\lambda_2^2 - 1) = -1 \end{cases}$$



- 根据Sylvester(西尔维斯特)准则, 要使 P 为正定, 须满足

$$p_{11} > 0 \quad p_{22} > 0 \quad p_{11}p_{22} - p_{12}^2 > 0$$

- 因此, 有

$$|\lambda_1| < 1, \quad |\lambda_2| < 1$$

即只有当传递函数的极点位于单位圆内时, 系统在平衡点处才是大范围内渐近稳定的。