Objectifs d'Apprentissage

- Maîtriser les opérations de base sur les matrices (addition, multiplication, transposée).
- Calculer l'inverse d'une matrice 2×2.
- Résoudre des systèmes d'équations linéaires (jusqu'à 3×3) en utilisant les méthodes de **Gauss-Jordan** et de **Cramer**.
- Appliquer ces concepts à des problèmes concrets et à des contextes d'**Intelligence Artificielle**.
- Utiliser la bibliothèque **NumPy** de Python pour l'implémentation.

I. 💻 Mise en Place et Opérations de Base (20 points)

Dans cette section, les étudiants doivent implémenter des fonctions **sans utiliser directement les opérateurs de NumPy** (comme `+`, `@`, `T` pour la transposée) pour les opérations de base, favorisant ainsi la compréhension algorithmique.

Exercice 1.1 : Manipulation de Matrices (10 points)

Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1. Implémenter une fonction `addition_matrices(M1, M2)` qui renvoie $A + B$.
2. Implémenter une fonction `multiplication_matrices(M1, M2)` qui renvoie le produit de deux matrices. Calculer $A \times B$.
3. Calculer le produit $C \times D$. Expliquer pourquoi l'ordre de la multiplication $D \times C$ n'est pas possible.
4. Implémenter une fonction `transposer_matrice(M)` qui renvoie la transposée de A, soit A^T

Exercice 1.2 : Inverse 2×2 (10 points)

Implémenter une fonction `inverse_2x2(M)` qui calcule et renvoie l'inverse d'une matrice 2×2 donnée, en gérant le cas où le déterminant est nul.

Rappel : Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, si $\det(M) = ad - bc \neq 0$, alors

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Calculer l'inverse de $M_1 = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ et expliquer le résultat pour $M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

II. 🧩 Résolution de Systèmes d'Équations 3×3 (30 points)

Soit le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 7 \\ 2x + y + z = 4 \\ -3x + 2y - 2z = -10 \end{cases}$$

Exercice 2.1 : Méthode d'Élimination de Gauss-Jordan (15 points)

Implémenter une fonction `resoudre_gauss(A, b)` qui utilise la méthode d'élimination de **Gauss-Jordan** pour transformer la matrice augmentée $[A|b]$ en une forme échelonnée réduite, puis extrait et affiche la solution (x, y, z).

Exercice 2.2 : Méthode de Cramer (15 points)

Implémenter une fonction `resoudre_cramer(A, b)` qui utilise la **règle de Cramer** pour trouver la solution (x, y, z). La fonction devra d'abord calculer le déterminant de A, puis les déterminants D_x, D_y, D_z.

Rappel : La solution est donnée par $x = \frac{D_x}{\det(A)}$, $y = \frac{D_y}{\det(A)}$, $z = \frac{D_z}{\det(A)}$.

Vérifier que les solutions obtenues par les deux méthodes sont identiques.

III. 🌍 Application Réelle et Modélisation (30 points)

Exercice 3.1 : Optimisation de Production (15 points)

Une petite entreprise produit trois types de produits (P1, P2, P3). La production nécessite trois ressources : main-d'œuvre (H), matériaux (M) et capital (C).

Le tableau suivant indique les unités de ressources nécessaires pour produire une unité de chaque produit :

Produit	Main-d'œuvre (H)	Matériaux (M)	Capital (C)
P1	2	1	3
P2	1	3	2
P3	3	2	1

Exporter vers Feuilles de calcul

Les disponibilités totales de ressources pour la semaine sont : **100 heures de main-d'œuvre (H), 120 unités de matériaux (M) et 140 unités de capital (C)**.

1. **Modélisation :** Définir le système d'équations linéaires qui modélise la quantité de produits P1 (x), P2 (y) et P3 (z) à produire pour utiliser **exactement** toutes les ressources disponibles.

2. **Résolution :** Utiliser les fonctions implémentées précédemment (ou les fonctions directes de NumPy, à préciser) pour résoudre ce système.
3. **Analyse :** Interpréter le résultat. L'entreprise peut-elle utiliser toutes ses ressources pour produire une quantité entière de produits ?

Exercice 3.2 : Base de l'IA - Transformation Linéaire (15 points)

En Intelligence Artificielle et en infographie, les matrices sont utilisées pour les **transformations linéaires** (rotation, mise à l'échelle, etc.).

Considérons un point $P = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ dans un plan $2D$.

1. **Rotation (NumPy autorisé) :** La matrice de rotation R d'un angle θ (ici $\pi/2$ radians ou 90°) est :

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

   Calculer la nouvelle position P' du point après une rotation de 90° dans le sens anti-horaire en utilisant **NumPy**.

2. **Mise à l'échelle :** La matrice de mise à l'échelle (scaling) S par un facteur $s_x = 2$ sur l'axe des x et $s_y = 0.5$ sur l'axe des y est :

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

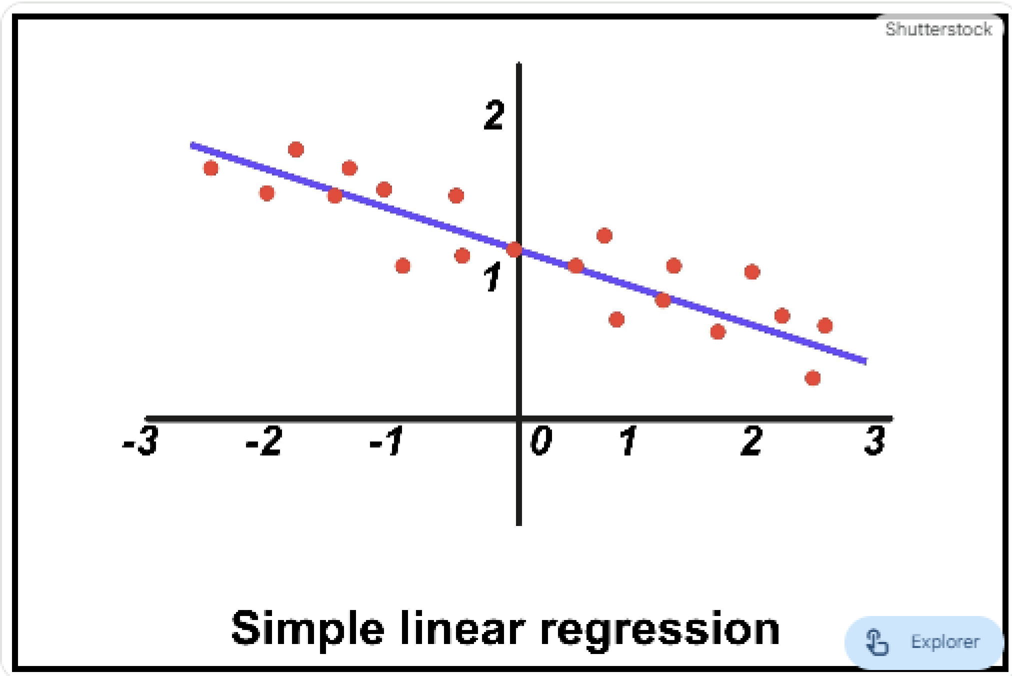
   Calculer la position finale P'' du point obtenu en appliquant d'abord la rotation **puis** la mise à l'échelle.

3. **Conclusion :** Expliquer brièvement pourquoi l'ordre des transformations matricielles est **crucial** dans ce type d'application (c'est-à-dire si $R(S \cdot P) \neq S(R \cdot P)$).

IV. 🏆 Question Bonus : Inférence de Modèle (20 points)

Exercice 4.1 : Régression Linéaire Simple

En apprentissage automatique, la **régression linéaire** simple cherche à trouver les coefficients w et b (pente et ordonnée à l'origine) qui minimisent l'erreur.



Pour un ensemble de données **petit**, on peut utiliser la solution analytique par la **méthode des moindres carrés**.

Soient les données :

x (Caractéristiques)	y (Cible)
1	2
2	3
3	4

Exporter vers Feuilles de calcul

En forme matricielle, le système $X\beta = Y$ est résolu par $\beta = (X^T X)^{-1} X^T Y$, où $\beta = \begin{pmatrix} b \\ w \end{pmatrix}$ (le terme d'ordonnée à l'origine b et la pente w), et X est la matrice des caractéristiques augmentée d'une colonne de 1 :

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la matrice $X^T X$.
2. Calculer l'inverse de $(X^T X)$.
3. Calculer $X^T Y$.
4. Déterminer le vecteur $\beta = \begin{pmatrix} b \\ w \end{pmatrix}$ en multipliant les résultats des étapes 2 et 3.
5. Quelle est l'équation de la droite de régression ($y = wx + b$) trouvée ?
6. *Optionnel :* Utiliser cette équation pour prédire la valeur de y lorsque $x = 4$.