

다워 개관

수학에서 다루는 도형은 주변에서 볼 수 있는 여러 가지 사물에서 그 사물의 구성 요소를 특성에 따 라 부류하여 추삿적으로 표현한 것이다. 즉 도형은 구체적인 사물들에서 공통된 개념을 추출하고 맥 락에 따라 분류하여 추상화하고 이상화한 수학적 대상이다. 다각형의 개념과 성질에 대한 이해는 실 생활 문제를 해결하는 데 기초가 되며, 수학의 다른 영역의 개념과 학습에 도움이 된다(위상기하학, 대수기하학), 또한 도형을 다루는 경험으로부터 형성되는 공간 감각은 수학적 소양을 기르는 데 도움 이 된다.

이번 단원에서는 1, 2학년군에서 학습한 변과 꼭짓점, 원, 삼각형, 사각형, 오각형, 육각형의 개념 과 3, 4학년군에서 학습한 선의 종류, 직각삼각형, 직사각형, 정사각형의 개념을 바탕으로 다각형의 개념과 다각형의 이름을 알아본다. 이와 함께 정다각형을 정의하고 다각형의 대각선에 대해 학습한 다. 이렇게 학습한 다양한 다각형으로 구성된 모양 조각으로 여러 가지 모양을 만들고 채워 보는 활동 을 통하여 공간 감각 형성에 대한 흥미와 관심을 갖도록 한다.

학생들은 이번 단원에서 배운 개념을 토대로 우리 주변에서 다각형을 찾아보고 다각형을 구성하는 다양한 활동을 통해 다각형 학습의 필요성을 느끼고 수학의 유용성과 심미성을 경험할 수 있도록 한 다. 이와 관련하여 다각형과 관련된 문제 해결 및 탐구 학습 과정을 통해 수학적으로 추론하고 의사소 통하며, 창의 용합적 사고와 정보 처리 능력을 바탕으로 생활 주변 현상을 수학적으로 이해하고 문제 를 합리적이고 창의적으로 해결할 수 있도록 한다.

수학 속으로

다각형의 개념과 성질에 대한 이해는 실생활 문제를 해결하는 데 기초가 되며, 수학의 다른 영역의 개념과 학습에 도움이 된다.

배움 속으로

다각형의 개념 및 이름을 알고 정다각형을 정 의하고 다각형의 대각선을 학습한다. 다양한 다각형으로 구성된 모양 조각으로 여러 가지 모양을 만들고 채워 보는 활동을 하게 된다.

다각형

가르침 속으로

수학적으로 추론하고 의사소통하며, 창의·융합 적 사고와 정보 처리 능력을 바탕으로 생활 주 변 현상을 수학적으로 이해하고 문제를 합리적 이고 창의적으로 해결할 수 있도록 한다.

생활 속으로

우리 주변에서 다각형을 찾아보고 다각형을 구 성하는 다양한 활동을 통해 다각형 학습의 필 요성과 수학의 유용성과 심미성을 경험할 수 있게 한다.

단원 학습

선수 학습

본학습

후속 학습

- 삼각형, 사각형, 오각형, 육각형 알아보기
 - (2-1, 2, 여러 가지 도형)
- 꼭짓점과 변 알아보기
 - (3-1, 2, 평면도형)
- 각도, 삼각형과 사각형의 내각의 합 알아보기 (4-1, 2, 각도)
- 삼각형 분류하기
 - (4-2, 2, 삼각형)
- 수직과 평행 및 사각형 분류
 - (4-2, 4. 사각형)

- 다각형 알아보기
- 다각형의 이름 알아보기
- 정다각형 알아보기
- 대각선 알아보기
- 모양 만들기
- 모양 채우기

- 직육면체와 정육면체 알아보기 (5-2, 5, 직육면체)
- 각기둥과 각뿔 알아보기 (6-1, 2, 각기둥과 각뿔)

교육과정

2015 개정 수학과 교육과정

성취 기준

[4수02-11] 다각형과 정다각형의 의미를 안다. [4수02-12] 주어진 도형을 이용하여 여러 가지 모양을 만들거나 채울 수 있다.

[교수·학습 방법 및 유의 사항]

• 도형 영역의 문제 상황에 적합한 문제 해결 전략을 지도하고, 문제 해결 과정을 설명하게 하여 문제 해결 능력을 기르게 한다.









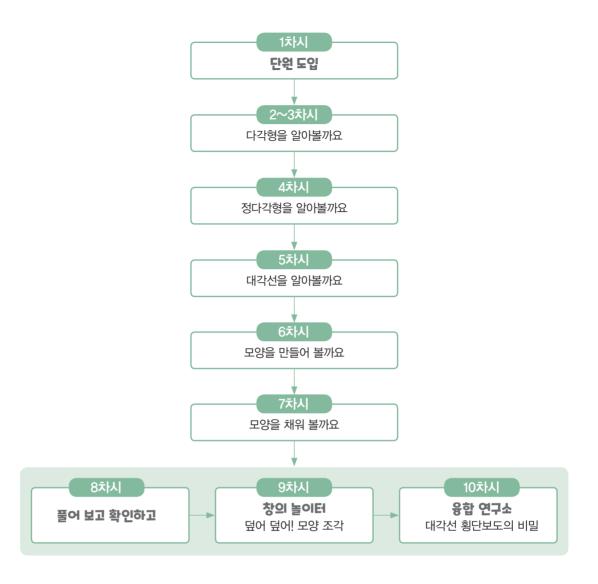




태 태도 및 실천

 영역	단원 학습 목표
내용	 다각형의 뜻을 말할 수 있다. 다각형의 이름을 말할 수 있다. 정다각형의 뜻을 말할 수 있다. 대각선의 뜻을 알고 여러 가지 다각형에 대각선을 그을 수 있다. 다각형으로 이루어진 모양 조각으로 여러 가지 모양을 만들 수 있다. 다각형으로 이루어진 모양 조각으로 여러 가지 모양을 채울 수 있다.
교과 역량	1. 다각형의 뜻을 알고 여러 가지 도형에서 다각형을 찾을 수 있다. (추) 일) 2. 다각형을 이루는 변과 꼭짓점의 수에 따라 다각형의 이름을 말할 수 있다. (추) 일) 3. 여러 가지 다각형에서 정다각형을 찾을 수 있다. (추) 일) 4. 여러 가지 다각형에 대각선을 그어 보며 개수와 성질을 말할 수 있다. (문) (추) 일) 5. 다각형으로 이루어진 모양 조각으로 여러 가지 모양을 만들고 어떻게 만들었는지 설명할 수 있다. (참) 일) 6. 다각형으로 이루어진 모양 조각으로 여러 가지 모양을 채우고 어떻게 채웠는지 설명할 수 있다. (참) 일) 7. 타인을 존중하고 배려하며 합리적인 태도로 탐구 활동에 참여할 수 있다. (태)

단원의 흐름



단원 지도 유의 사항

- ① 학생들이 실생활에서 볼 수 있는 다양한 다각형을 통해 다각형의 개념 이해를 돕는다.
- ② 다양한 조작 활동을 통하여 실제로 다양한 다각형을 구성해 보며 특징을 발견할 수 있도록 한다.
- ③ 정다각형을 지도하면서 정다각형인 것과 아닌 것을 구별하는 활동을 통해 정다각형의 공통점을 추론하도록 한다.
- ④ 대각선을 지도할 때 다양한 사각형에서 대각선의 성질에 대한 탐구가 함께 이루어지도록 지도한 다.
- ⑤ 모양 조각으로 여러 가지 모양을 만들거나 채우기를 할 때, 모양을 여러 번 사용할 수 있고 모양을 돌리거나 뒤집어서 사용해도 됨을 안내한다.
- ⑥ 평면을 빈틈없이 채우는 놀이에서는 놀이 규칙에 맞게 진행하면서 어떻게 놀이판을 채울 것인지에 대한 전략을 논리적으로 추론해 보도록 한다.
- ② 대각선 개수를 알아보는 활동에서는 대각선의 개수를 찾는 공식보다는 다양한 방법으로 문제를 해결할 수 있도록 지도한다.
- ⑧ 도형의 성질과 관련된 문제를 해결할 때 문제 상황에 적합한 문제 해결 전략을 지도하고, 문제 해결 과정을 설명하게 하여 문제 해결 능력을 기르게 한다.

단원의 전개 계획

차시 『수학』 쪽수 『수학 익힘』 쪽수	차시명	수업 내용 및 활동	교과 역량	성취 기준	준비물
1차시 [수] 118~119쪽 [익] 81쪽	단원 도입	• 그림 속의 상황과 동시를 살펴보게 한다. • 선수 학습 내용을 알아보게 한다.	\$ 9		
2~3차시 [수] 120~123쪽 [익] 82~85쪽	다각형을 알아볼까요	 여러 가지 도형을 선의 특징에 따라 분류해 보게 한다. 다각형의 뜻과 이름을 알아보게 한다. 다각형인 것과 아닌 것을 구별해 보게 한다. 다각형을 그려 보며 변과 꼭짓점의 수를 알아보게 한다. 고무줄을 이용하여 다각형을 구성해 보도록 한다. 	⊕ ♣ ◎ 8	[4수02-11]	자, 고무줄
4차시 [수] 124~125쪽 [익] 86~87쪽	정다각형을 알아볼까요	 변의 길이와 각의 크기가 모두 같은 다각형을 찾아보게 한다. 정다각형의 뜻과 이름을 알아보게 한다. 정다각형을 만들고 그려 보도록 한다. 정다각형을 찾아 그 이름을 알아보도록 한다. 	문 왕 의 정	[4수02-11]	자, 각도기, 원형 도형판, 고무줄
5차시 [수] 126~127쪽 [익] 88~89쪽	대각선을 알아볼까요	 대각선을 그은 방법을 통해 대각선의 뜻을 알아보게 한다. 여러 가지 다각형에 대각선을 그어 보며 개수와 성질을 알아보게 한다. 대각선을 바르게 그은 것을 찾아보도록 한다. 	문 추 창 의	[4수02-11]	자, 각도기
6차시 [수] 128~129쪽 [익] 90~91쪽	모양을 만들어 볼까요	 모양 조각으로 만들어진 모양에 대해 이야기해 보도록 한다. 모양 만들기의 규칙을 알아보게 한다. 모양 조각으로 여러 가지 다각형과 모양을 만들어 보게 한다. 	황 의	[4수02-12]	모양 조각
7차시 [수] 130~131쪽 [익] 92~93쪽	모양을 채워 볼까요	 모양을 어떤 모양 조각으로 채울 수 있는지 이야기 해보도록 한다. 모양 채우기의 규칙을 알아보게 한다. 모양 조각으로 여러 가지 다각형과 모양을 만들어 보게 한다. 	창 의	[4수02-12]	모양 조각
8차시 [수] 132~133쪽 [익] 94쪽	[풀어 보고 확인하고]	 다양한 문제를 해결하며 이 단원에서 배운 내용을 정리하게 한다. 	문 후 창 의 정 태	[4수02-11] [4수02-12]	
9차시 [수] 134~135쪽	[창의 놀이터] 덮어 덮어! 모양 조각	 주어진 모양 조각을 이용하여 놀이판을 채우는 놀이를 진행한다. 놀이 규칙에 맞게 진행하면서 놀이판을 채우는 전략을 논리적 추론을 통해 알아보도록 한다. 놀이 규칙을 다양하게 변경함으로써 다양한 문제 해결 전략을 탐색하도록 한다. 	<u>왕</u> 의 정	[4수02-11] [4수02-12]	모양 조각, 놀이판
10차시 [수] 136~137쪽	[융합 연구소] 대각선 횡단보도의 비밀	 일반 횡단보도와 대각선 횡단보도의 차이점을 알아보고 대각선 횡단보도의 장점에 대해 알아보도록 한다. 다각형에서 대각선 개수를 찾는 규칙을 다양한 문제 해결 전 략을 통해 알아보도록 한다. 규칙성을 이용하여 대각선의 개수를 찾아본다. 	(a) (b) (c) (c) (c) (c) (c) (c) (c) (c) (c) (c	[4수02-11] [4수02-12]	

교육과정에 따른 평가 기준

교육과정 성취 기준		평가 기준		
	상	다각형과 정다각형의 여러 가지 예를 제시할 수 있다.		
[4수02-11] 다각형과 정다각형의 의미를 안다.	중	도형의 분류 활동을 통하여 다각형과 정다각형을 구분하고, 그 의미를 말할 수 있다.		
	하	안내된 절차에 따라 주어진 도형에서 다각형과 정다각형을 찾을 수 있다.		
[4수02-12]		주어진 도형을 이용하여 여러 가지 방법으로 모양을 만들거나 채울 수 있다.		
주어진 도형을 이용하여 여러 가지 모양을	중	주어진 도형을 이용하여 모양을 만들거나 채울 수 있다.		
만들거나 채울 수 있다.	하	안내된 절차에 따라 주어진 도형을 이용하여 일부가 제시된 모양에서 전체를 완성할 수 있다.		

단원 학습 평가

영역	평가 내용	차시	평가 방법
	1. 다각형의 뜻을 말할 수 있는가?	2, 3	지필, 구술
	2. 다각형의 이름을 말할 수 있는가?	2, 3	지필, 구술
내용	3. 정다각형의 뜻을 말할 수 있는가?	4	지필, 구술
41 0	4. 대각선의 뜻을 알고 여러 가지 다각형에 대각선을 그을 수 있는가?	5	지필, 구술
	5. 다각형으로 이루어진 모양 조각으로 여러 가지 모양을 만들 수 있는가?	6	관찰, 질문
	6. 다각형으로 이루어진 모양 조각으로 여러 가지 모양을 채울 수 있는가?	7	관찰, 질문
	1. 다각형의 뜻을 알고 여러 가지 도형에서 다각형을 찾을 수 있는가? 🍣 🎱	2, 3	관찰, 질문, 면담
	2. 다각형을 이루는 변과 꼭짓점의 수에 따라 다각형의 이름을 말할 수 있는가? 👇 🎱	2, 3	관찰, 질문, 면담
	3. 여러 가지 다각형에서 정다각형을 찾을 수 있는가? 취 🎱	4	관찰, 질문, 면담
교과	4. 여러 가지 다각형에 대각선을 그어 보며 개수와 성질을 말할 수 있는가? 문 추 의	5	관찰, 질문, 면담
역량	5. 다각형으로 이루어진 모양 조각으로 여러 가지 모양을 만들고 어떻게 만들었는지 설명할 수 있는가? \delta 🍳	6	관찰, 질문
	6. 다각형으로 이루어진 모양 조각으로 여러 가지 모양을 채우고 어떻게 채웠는지 설명할 수 있는가? (참) (3)	7	관찰, 질문
	7. 타인을 존중하고 배려하며 합리적인 태도로 탐구 활동에 참여할 수 있는가? 태	10	자기 평가, 동료 평가

과정 중심 평가 계획 - 5차시를 중심으로

1. 평가 개요

평가 목표	대각선의 뜻을 알고 여러 가지 다각형에 대각선을 그을 수 있다. 여러 가지 다각형에 대각선을 그어 보며 개수와 성질을 말할 수 있다.
평가 방법	관찰, 구술, 지필, 동료 평가, 자기 평가
평가 도구	체크리스트(전자 저작물), 학습지
유의 사항	 대각선을 지도할 때 다양한 사각형에서 대각선의 성질에 대한 탐구가 함께 이루어지도록 지도한다. 대각선 개수를 알아보는 활동에서는 대각선의 개수를 찾는 공식보다는 다양한 방법으로 문제를 해결할 수 있도록 지도한다. 도형의 성질과 관련된 문제를 해결할 때 문제 상황에 적합한 문제 해결 전략을 지도하고, 문제 해결 과정을 설명하게 하여 문제 해결 능력을 기르게 한다.

2. 평가 계획

수업 설계	주요 교수 · 학습 활동 개요	평가 계획	평가 방법
도입	전 차시 상기 및 문제 상황 이해하기 • 지난 시간에 배운 내용 점검하기 • 기존의 횡단보도와 새로운 횡단보도의 차이점에 대해 이야기 나누기	[전 차시 학습 점검하기]	관찰, 지필, 구술
	이웃하지 않는 점을 선분으로 이어 보기 ・다각형에서 이웃하지 않는 점끼리 선분으로 이어 보기 ・어떻게 선분을 그렸는지 알아보기 ・새로 그린 선분의 개수 파악하기 ・대각선 약속하기	[과정 평가 1] • 이웃하지 않는 점끼리 선분으로 바르게 모두 이을 수 있는가? (문) (추) • 대각선의 약속하기를 이해할 수 있는가? (의)	관찰, 지필
전개	여러 가지 다각형에 대각선 그려 보기 • 여러 가지 다각형에 대각선을 그어 대각선의 수 세어 보기 • 대각선을 그을 수 없는 도형 찾아보기 • 대각선의 여러 가지 특징 찾아보기	[과정 평가 2] • 여러 가지 다각형에 대각선을 바르게 빠짐없이 그릴 수 있는가? (문) 추 • 대각선을 그을 수 없는 도형을 찾고, 그 까닭을 말할 수 있는가? (문) 추 • 대각선의 여러 가지 특징을 찾을 수 있는가?	관찰, 구술, 동료 평가
정리	정리 및 차시 예고	[학습 결과 확인하기] • 대각선을 바르게 빠짐없이 그린 것을 찾을 수 있는가? 추 의 • 대각선의 뜻을 알고 다각형에 대각선을 그릴 수 있는가? • 본 차시에서의 평가 결과 분석, 필요시 추가로 사후 평가활용	지필, 자기 평가

3. 과정 중심 평가에 따른 지도 방안 예시

평가	학생 반응	지도 방안 예시
선수 학습 확인	 다각형의 뜻을 파악하지 못하고, 다각형을 그리지 못하고 찾지도 못한다. 정다각형의 뜻을 파악하지 못하고, 정다각형을 그리지 못하고 찾지도 못한다. 	4차시 학습 결과 확인을 바탕으로 5차시를 계획 • 다각형이 아닌 것을 찾지 못하고 다각형이 아닌 도형이 다각형이 아닌 까닭을 설명하지 못하는 경우 다각형의 약속하기 중 '선분', '둘러싸인'의 용어에 대해 지도한다. • 제시된 다각형을 그리지 못하는 경우 오각형은 5개, 육각형은 6개, 팔각형은 8개의 점을 미리 선택하여 연결하도록 한다. • 정다각형의 꼭짓점 사이의 거리를 재어 보는 활동을 통해 정다각형의 성질을 파악하도록 지도한다.
	 새로운 횡단보도의 특징을 기존 횡단보도와의 차이를 통해 설명한다. 	• 대각선 횡단보도의 좋은 점을 찾아보도록 한다.
문제 상황 이해하기	• 기존의 횡단보도와 새로운 횡단보도의 차이점 을 알지 못한다.	• 일반 횡단보도에서 대각선의 위치로 이동할 때 불편했던 점이 무엇인지 발 표해 보도록 함으로써 두 횡단보도의 차이점을 지도한다.
	· 새로운 횡단보도를 통해 대각선을 파악하지 못한다.	• 일상생활에서 볼 수 있는 대각선에 대해 이야기하도록 한다. 예를 들어 트러스 구조의 다리 또는 색종이 접기에서 나타나는 대각선을 통해 지도한다.
	• 횡단보도를 선분으로 모두 그리고 대각선의 뜻을 바르게 설명한다.	• 다각형의 대각선의 개수 사이의 관계에 대하여 설명해 보도록 한다.
	• 횡단보도를 선분으로 바르게 모두 그리지는 못한다.	• 횡단보도 그림을 간단하게 그려 보도록 한 후에 횡단보도의 폭을 좁혀가면 어떤 도형이 될지에 대해 생각해 보도록 한다.
과정 평가 1	• 대각선의 뜻을 설명하지 못한다.	 대각선의 정의에서 '이웃하지 않는 두 꼭짓점'이라는 의미를 명확하게 설명하기 어려워하는 경우에는 다각형에서 하나의 변을 이루고 있는 두 꼭짓점이 아닌 즉, 서로 다른 변을 이루고 있는 두 꼭짓점을 의미함을 이해할 수 있도록 다각형 그림으로 설명하여 지도한다. '이웃'이라는 단어에 대해 어려움을 겪는 경우에는 사전적 의미(서로 가까이에 인접하여 사는 집, 가까이 위치해 있어 경계가 서로 접하여 있음)를 통해이해하도록 한다.
	 대각선의 수를 정확하게 알고, 삼각형에 대각 선을 그을 수 없는 까닭을 설명한다. 	 다각형에 대각선을 직접 긋지 않고 알 수 있는 방법을 찾아보도록 한다. 여러 가지 다각형에 대각선을 그어 보고 알게 된 성질을 설명한다.
과정 평가 2	·다각형에 대각선을 그어 그 수를 알아내지 못한다.	 오각형의 경우 하나의 꼭짓점을 정하여 대각선을 몇 개까지 그을 수 있는지 확인해 보게 하여 대각선을 빠짐없이 그을 수 있도록 지도한다. 다각형과 대각선의 개수 사이의 관계에 대하여 설명해 보게 한다(정확한 개수보다는 변과 꼭짓점의 개수가 많아지면 그을 수 있는 대각선의 개수도 많아지는 관계 정도를 파악할 수 있는 수준으로 지도한다.).
40 0/12	대각선을 그을 수 없는 다각형을 찾지 못한다.삼각형에 대각선을 그을 수 없는 까닭을 설명하지 못한다.	• 대각선의 정의에 따라 한 꼭짓점에서 이웃한 꼭짓점을 색칠해 보도록 하여, 색칠이 되어 있지 않는 꼭짓점이 없다는 것을 스스로 깨우치도록 지도한다.
	• 대각선의 성질을 발견하지 못한다.	 다각형에 그어져 있는 대각선을 자, 각도기 등을 사용하여 대각선 사이의 길이나 수치 관계 등을 파악하도록 지도한다. 다각형을 제시해 주고 대각선을 그어 보게 한 후 서로 겹쳐 보게 하는 조작활동을 통해 대각선 사이의 길이나 수직 관계 등을 파악하도록 지도한다.
학습 결과 확인	·대각선을 빠짐없이 모두 그은 것을 찾지 못 한다.	학습 결과 확인(지필 또는 자기 평가)을 바탕으로 보충 학습 계획 및 6차시 수 업을 계획 • '가'를 선택하는 경우 도형에서 변과 꼭짓점이 어디인지를 색으로 표시하여 대각선 정의에 따라 그려 보도록 지도한다. • '다'를 선택하는 경우 대각선은 꼭짓점끼리 이은 선분임을 확인하고 도형에 서 꼭짓점을 찾아보도록 지도한다.

단원 배경 지식

1. 도형의 정의와 성질

가. 도형의 정의

도형(figure)과 그의 성질을 연구하는 것은 초등학교 수학 교육과정의 필수적인 요소이다. 도형은 물체로부터 대부분의 성질은 버리고 모양과 크기만을 대상으로 하는 것을 말한다. 예로, 수학책을 통하여 모양과 넓이라는 크기만을 생각하는 직사각형을 생각할 수 있기 때문에 직사각형은 도형이다. 또, 수학책을 통하여 모양과 길이라는 크기만을 생각하는 선분을 생각할 수 있기 때문에 선분은 도형이다(배종수, 2010).

구체물에서 추상화된 도형의 개념들은 그 개념을 나타내는 용어와 기호들이 명확하게 정의되지 않으면 학습자의 지적 혼란을 유발하여 효율적인 의사소통이 불가능하다. 이에 따라 도형 학습에 사용되는 기본적인 용어와 기호에 대한 일의적인 약속인 정의가 필요하게 된다. 초등 수학에서 정의하는 방법은 예시적 정의, 공리적 정의, 명명적 정의로 분류할 수 있다.

예시적 정의는 개념을 처음 도입하거나 지적 수준이 낮은 아동을 대상으로 사용하는 방법으로 학습자가 익히 알고 있는 구체적 사물을 예로 들어 시각적으로 쉽게 이해하도록 설명하는 방법이다. 이를 테면, 저학년 아동에게 상자나 성냥갑과 같은 모양을 '직육면체'라고 한다든지, 삼각자를 들어 보이면서 '세모 모양'을 정의하거나 점을 찍어 보이면서 무정의 용어(직관적으로 알게 하고 정의 없이 그대로 사용하는 용어)인 '점'을 정의하는 것이 이에 해당한다.

공리적 정의는 새로운 용어를 어떤 속성으로 명명하지 않고, 수학의 공리와 같이 약속에 따라 정의하는 방법이다. 이를테면, 삼각형의 밑변은 삼각형의 위치와는 관계없는 개념이므로 세 변 중 어느 한변을 '밑변'이라 해도 무방하다. 따라서 넓이의 개념을 일반화하기 위해서는 삼각형의 임의의 한 변을 밑변으로 정의하고, 삼각형의 '높이'는 밑변에 대응되는 꼭짓점에서 그 밑변까지 내린 수선의 길이로정의해야 한다. 이에 따라 삼각형의 '밑변'과 '높이'는 서로 상대적인 개념이 된다.

명명적 정의는 상위 개념에 정의하려는 개념 특유의 성질(조건)을 첨가하여 새로운 하위 개념(정의하려는 개념)을 정의하는 방법이다. 이를테면, 이등변삼각형을 '삼각형 중에서 두 변의 길이가 같은 삼각형'이라고 정의하는 방법이다. 여기서 삼각형은 상위 개념이고 두 변의 길이가 같다는 것은 이등 변삼각형 특유의 성질(조건)이다(교육과학기술부, 2010).

나. 도형의 성질

개념을 정의하는 것은 대상의 의미를 일의적으로 설명하는 것이고, 성질은 대상이 가지는 모든 속성을 뜻하므로 정의와 성질은 같은 개념은 아니다. 그러나 도형 학습 초기에는 직관적으로 지도해야하므로 정의와 성질을 지나치게 구분하지 않는 것이 좋다. 즉, 학습 초기에는 도형의 성질을 직관적으로 지도하고 논리가 어느 정도 확립된 고학년의 단계에서는 정의가 성질에서 분리되어 초보적인 추론 단계로 발전하게 된다. 도형의 성질 지도는 다음과 같이 지도한다.

- ① 도형의 구성 요소에 착안한다.
 - 구성 요소의 수, 변과 각의 상등 관계, 변의 평행과 수직 관계
- ② 다각형은 대각선에 착안한다.
 - 대각선의 수, 대각선의 위치 관계, 대각선의 수직 관계
- ③ 도형의 상호 관계에 착안한다.
 - 포함 관계, 닮음 및 합동 관계, 대칭성(선대칭, 점대칭)

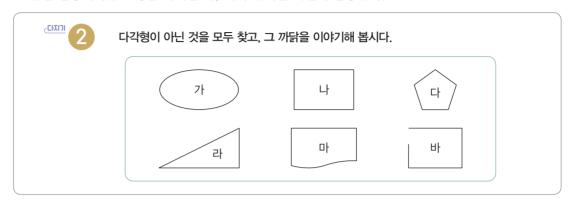
하지만 정의는 그 용어가 가지는 성질을 대표할 수 있으나 모든 성질이 정의가 되는 것은 아니므로 정의와 성질을 구별할 줄 알아야 한다. 즉 도형의 정의를 잘 알고 있으면 도형의 나머지 성질들도 알 아낼 수 있으므로 도형의 정의는 도형의 성질을 대표한다(교육과학기술부, 2010).

2. 도형의 지도 방법

가, 도형의 지도 과정

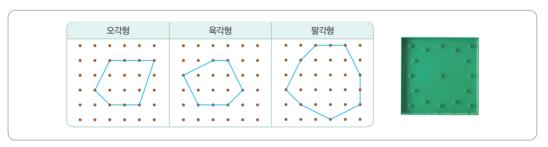
도형의 개념을 이해한다는 것은 어떤 대상을 식별하고 대상의 특징을 인식하는 것으로 초등학교에 서의 도형에 대한 개념은 직관적인 방법에 의존하기 때문에 관찰, 구성, 작도 등의 구체적인 조작 활 동이 중심이 되도록 한다.

① 관찰 활동에서는 모형을 제시할 때. 예와 반례를 적절히 활용한다.



▲ 예와 반례를 통한 도형 지도

② 도형의 구성 활동은 수수깡이나 철사. 성냥개비. 바둑돌 등을 이용하여 모양 만들기. 기하판에 고 무줄 같은 것을 이용하여 다각형 구성하기, 색종이로 접거나 오리기 등의 모양을 만드는 활동이 있 고. 한 도형을 여러 도형으로 부해하거나 여러 도형을 한 개의 도형으로 합성하는 활동이 있다. 이 런 경험은 적절한 통제가 이루어지면서 학생의 관심과 흥미를 자극하여 개념을 체험적으로 이해함 수 있게 하고 도형의 구조와 성질을 사실적으로 이해할 수 있게 한다는 장점이 있다.



▲ 다양한 활동을 통해 도형을 구성

③ 도형의 작도는 엄밀한 수학적 작도가 아니고 삼각자, 각도기, 컴퍼스 등 기구의 바른 사용법을 익 히고 도형의 성질을 발견, 검증하여 이해를 심화하기 위한 활동이다. 도형의 성질을 학습한 뒤에 이를 활용하여 그리도록 지도한다(교육과학기술부, 2010).

나. 도형의 지도 원리

도형의 개념을 제대로 이해시키려면 디에네시(Dienes, Z. P., 1916~2014)가 주장한 수학적 다양 성의 원리나 지각적 다양성의 원리를 적절히 이용해야 한다.

수학적 다양성의 원리에 따라서 개념의 일반화가 잘 이루어지도록 하려면 수학적 개념을 제시할 때 변화시킬 수 있는 것은 가능한 한 변화시켜서 다양하게 제시해야 한다. 예를 들면 초등학교에서 정다 각형을 지도할 때, 본질적인 특성(모든 변의 길이가 같고, 모든 각의 크기가 같음)은 깨뜨리지 않으면 서 변의 길이, 위치 등 변화시킬 수 있는 요소는 여러 가지로 변화시킨 것을 보여 주어야 한다. 이러한 다양성 가운데 변치 않는 본질을 추상하여 일반화하는 것이 매우 중요하다.

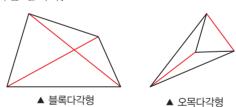
지각적 다양성의 원리란 수학적 개념 형성에 있어서 그 개념의 본질을 깨뜨리지 않는 범위에서 가 능한 한 다양한 지각적 형태로 제시하라는 것이다. 재질, 색상, 크기 등에 변화를 주는 것이 이에 해당 한다. 예를 들면 정다각형의 개념을 형성함에 있어서 정다각형을 종이에 그려 보도록 할 수도 있고, 기하판에 만들어 보도록 할 수도 있고, 이쑤시개나 성냥개비로 만들어 보도록 할 수도 있다. 이와 같이 수학적 개념 형성에 있어서는 그 개념을 가능한 한 다양한 구체물로 제시해 보도록 하여 학생들이 공통점을 발견해 볼 수 있는 기회를 극대화해야 한다(교육과학기술부, 2010).

다. 다각형 지도의 유의점

여러 가지 선행 연구로부터 다각형 지도에서 특히 유의할 점으로 세 가지를 들 수 있다.

첫째, 다각형의 개념은 그동안 선분으로 '둘러싸인' 도형으로 지도되어 왔으나 이에 대한 문제점을 지적하는 연구들이 있다는 것이다. 다각형을 선분으로 둘러싸인 도형으로 정의하는 경우 다각형은 단 힌 도형의 내부까지 포함하는 것으로 보이게 된다. 박교식, 임재훈(2004)은 "학교 수학에서 다루는 단 일페곡선(다각형, 원)은 그 내부를 포함하는가 아니면 포함하지 않는가? 학교 수학에서는 다각형이나 원과 같은 단일폐곡선을 때로는 경계만 의미하는 것으로. 때로는 내부까지 포함하는 것으로 보고 있 다. 이것은 논리적인 관점에서 보면 일종의 오류라고 할 수 있다."라고 지적하고 있으며, 그러나 "현 재 학교 수학에서는 용어를 엄밀하게 정의하지 않은 채 맥락에 따라 상이한 의미로 해석하는 것을 허 용하여 논리적 일관성이나 엄밀성의 기준에서 보면 결함으로 보이나, 학습자의 발달 단계나 교육적 타당성 등을 고려하는 과정에서 개발된 학교 수학이 지닌 고유한 교육적 논리라고 할 수 있다."라고 지적한다. 또한 홍성관, 하정임, 박철호(2007)는 중학생들의 다각형 개념에 대한 연구에서 "꼭짓점과 변에 대해 다소 모호한 개념이 형성되어 있으며, 이것은 수학책의 '둘러싸인'이라는 용어의 비형식적 인 서술이 학생들의 인식에 영향을 준 것이라 분석된다."라고 주장하고 있으며, 이는 '둘러싸인'이라는 용어의 개선을 요구하는 것으로 보인다. 그러나 선분으로 '이루어진' 도형이라고 다각형을 정의하게 되면, 닫힌 도형이라는 성질을 포괄할 수 없는 문제점이 있어 이번 단원에서는 기존의 정의에 따라 다 각형을 선분으로 '둘러싸인' 도형으로 정의하였다. 따라서 '둘러싸인'의 의미를 지도할 때 상황에 따라 경계선 안을 의미하거나 내부까지 포함하는 경우가 있음을 함께 지도하도록 한다.

둘째, 다각형을 볼록다각형과 오목다각형으로 나눌 때, 오목다각형을 수학책에서 명시적으로 다룰 것인지를 생각해 볼 수 있다. 오목다각형을 제시하는 경우 두 가지 어려움이 발생할 수 있다. 하나는 내각 중에서 크기가 둔각인 각이 존재한다는 것이며, 다른 하나는 대각선을 그릴 때 대각선이 오목다 각형의 외부에 존재할 수 있다는 점이다.



그래서 이번 단원에서는 오목다각형을 수학책 본문에서 명시적으로 다루지는 않기로 하였다. 그러나 도형판에 다각형을 만들어 보거나 하는 다양한 활동 상황에서 학생들이 오목다각형을 만들 수는 있으며, 이 경우는 타당한 것으로 인정하고 지도에서 유의할 사항을 해당 차시에 수록하였다.

셋째, 다각형에 대한 학생들이 가지고 있는 오개념을 알고 지도할 필요가 있다. 학생들은 다각형을 각이 여러 개인 도형, 각이 3개 이상인 도형, 여러 개의 각으로 이루어진 도형으로 정의하는 경우가 많으며 이렇게 다각형의 정의를 각으로 표현하는 경우, 다각형의 닫혀 있는 성질에 대해서는 표현하지 않는 경우가 많다고 지적하였다(홍성관 외 2명, 2007). 또한 선분이 하나라도 있는 도형, 선분으로만 이루어진 도형으로 다각형의 정의를 생각하는 경우가 있었다(노영아, 안병곤, 2007). 학생들은 이름에서 느껴지는 표현을 정의로 사용하거나 선분이나 각이라는 한 부분에만 초점을 두고 다각형을 이해하는 오개념을 가지고 있다. 따라서 선분으로 이루어져 있어야 하고, 닫혀 있어야 한다는 두 가지조건을 모두 인지할 수 있도록 지도해야 한다(교육부, 2018).

3. 반 힐레(van Hiele, P., 1909~2010) 기하 학습 수준 모델

반 힐레에 따르면 수학적 사고 활동이란 경험의 세계를 조직하는 활동이며 한 수준에서 경험을 정 리하는 수단이 새롭게 경험의 대상으로 인식되어 그것을 조직화하는 활동이 이루어지게 되면서 그다 음 수준으로의 비약을 하게 되는 과정을 반복하는바, 수학의 학습 지도는 그러한 불연속적인 사고 수 준을 거치면서 수학적 사고를 재발명해 가도록 되어야 한다. 반 힐레의 이론에 따르면 기하학적 사고 는 다음과 같은 5수준으로 구분된다. 이러한 수준 모델은 사고 수준을 고려하지 않는 수학의 학습과 지도가 극도의 부조화를 이룰 수 있음을 드러내는 것이다

제0수준: 주변 대상을 형이란 인식 수단에 의해 파악하는 단계로 기본적인 도형을 그 구성 요소에 대 한 명확한 고려 없이 전체로서의 시각적 외관에 의해 판별한다. 세모꼴, 네모꼴, 상자 모양 등으로 도 형의 이름을 말할 수 있으나 그 성질을 명확히 말하지 못한다.

제1수준: 주변 대상의 정리 수단이었던 형이 연구의 대상이 되어 도형의 구성 요소와 성질에 대한 비 형식적인 분석을 통해 도형을 파악한다. 직사각형의 대각선의 길이는 같다든가 마름모의 네 변은 길 이가 같다는 등의 성질을 말할 수 있지만 도형이나 그 성질을 명확히 상호 관련지을 수 없다.

제2수준: 도형의 성질과 도형 사이의 관계가 연구의 대상이 되고 명제가 정리 수단이 된다. 도형의 여 러 가지 성질 및 도형 사이의 관계를 파악하고 정의를 이해한다. 이를테면, 모든 정사각형은 직사각형 임을 이해한다. 그러나 도형의 성질을 논리적으로 증명하지는 못한다.

제3수준: 명제가 연구의 대상이 되며 명제 사이의 논리적 관계가 정리 수단으로 등장하여 공리, 정의, 정리, 증명의 의미와 역할을 이해하며 전체 기하의 연역 체계를 파악한다. 이를테면, 삼각형의 내각의 합은 180°라는 명제를 증명할 수 있다. 그러나 엄밀한 증명의 필요성을 깨닫지 못하며 다른 공리 체계 의 가능성을 이해하지 못한다.

제4수준: 기하학 체계 그 자체가 연구의 대상이 되어 여러 가지 공리 체계를 비교할 수 있고. 힐베르트 (Hilbert)류의 기하의 형식적 엄밀성을 파악한다. 공리의 무모순성, 독립성, 완전성과 같은 공리 체 계의 성질을 이해한다.

반 힐레가 제시한 이런 기하 학습 수준은 아래와 같이 나타낼 수 있다.

수준	제0 수준 시각적 수준	제1수준 도형 분석 수준	제2 수준 관계 수준	제3수준 연역적 추론 수준	제4 수준 공리적 엄밀화 수준
사고의 대상	주변의 사물	도형	성질	명제	논리
사고의 수단	도형	성질	명제	논리	

반 힐레의 수학 학습 수준은 다음과 같이 정리할 수 있다.

첫째, 학생들은 수학 학습에서 n-1 수준을 통과하지 않고 n 수준에 도달할 수 없으며 수학적 사고 는 모든 수준을 차례로 거쳐 발달한다.

둘째, 모든 학생들이 같은 속도로 각 수준을 통과하지는 않으며, 수준의 이행은 적절한 지도로 촉진 될 수도 있고 부적절한 지도 때문에 지연될 수도 있다.

셋째, 앞의 수준의 사고에서 내재적이었던 것이 그 다음 수준에서 의식화되어 명확히 인식되게 된다. 각 수준의 수학적 사고는 그 전 수준의 수학적 사고의 내적 질서를 대상으로 하여 연구하는 것이다.

넷째, 각 수준의 사고는 그 자신의 기호와 그를 연결하는 관계망을 갖고 있다. 수준의 이행은 언어 의 확장과 관계된다.

다섯째, 서로 다른 수준에서 추리하는 사람은 서로를 이해할 수 없다. 이것이 교사와 학생 사이에 자주 발생하여 학습·지도를 어렵게 만드는 요인이 되고 있다.

여섯째, 사고 수준의 비약은 지도 과정에서 다음과 같은 다섯 단계를 거쳐 이루어질 수 있다.

안내 단계	자료를 제시받고 필요한 논의를 통해 탐구할 분야에 친숙해지기 위한 활동을 한다.
제한된 탐구 단계	제시된 자료를 통해 탐구 분야를 연구하면서 그 진행 방향을 감지하고 탐구 분야의 구조가 점진적으로 파악된다.
명확화 단계	발견된 관계를 표현하는 활동을 통해 그를 명확히 하며 전문적인 용어를 학습한다.
자유로운 탐구 단계	여러 가지 해결 방법을 찾아봄으로써 탐구 분야의 구조에 정통하게 된다.
통합 단계	탐구 활동을 개관하여 전체를 조망하게 되면서 사고 수준의 비약의 일보 전에 이르게 된다.

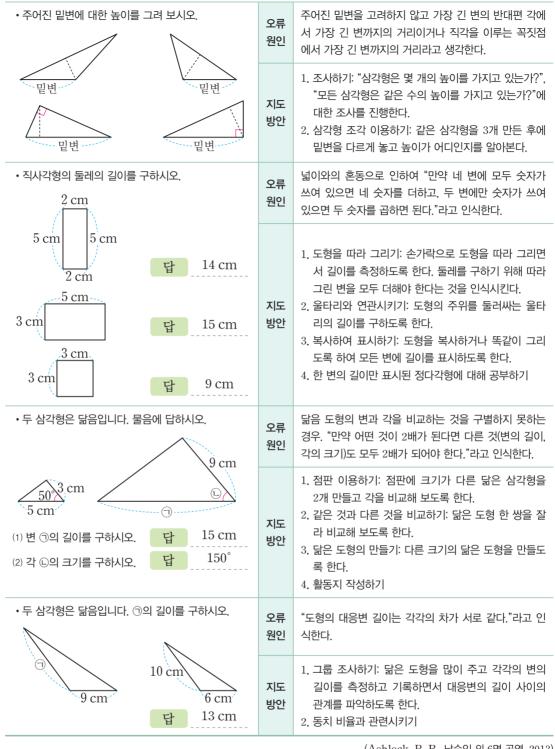
교사가 자기 자신은 이해하고 있지만 학생들은 이해하지 못하는 관계망에 의해서 추리를 하고 그를 근거로 수학적 관계를 학생들에게 제시할 때 그러한 관계는 참으로 이해되지 않은 상태에서 학생들의 추리의 근거를 이루게 된다. 그러한 관계는 학생들의 경험과 무관하게 부과된 것이기 때문에 가르쳐 진 것과 그로부터 유도된 것만을 기억하게 되며 그것을 특별히 고안해 낸 연습 문제에 적용하는 학습을 하는 데 그치게 된다. 반 힐레 이론은 현상의 정리 수단의 연구 대상화, 사고의 내적 질서의 의식화, 패턴화 형식화와 내용화의 거듭된 교대로 표현되는 수학화 과정의 특성을 반영한 수학 학습 수준 이론으로 기하 교육과정 개발과 학습 지도 개선에 시사하는 바가 큰 이론이다(우정호, 2007; 우정호, 2010).

4. 오개념과 오류 유형(기하와 측정 영역 중심으로)

잘못된 개념을 추론한 학생은 제한된 경험을 지나치게 일반화할지도 모른다. 또 다른 경우 이전에 알았던 다양한 정보들을 사용하여 자신만의 잘못된 문제 해결 방법을 만들어 낼지도 모른다. 이 방법은 학생들에게 답을 제공해 주기도 하지만 이것은 수학적인 이해가 아니며 언제나 정답을 제공해 주지는 않는다.

지금부터는 학생들의 오류 유형에 대한 지도 방안을 제시한다.

오류 유형	오류 원인과 지도 방안		
• 다음 중 사각형은 어느 것인가? 사각형 아래에 ○표하시오.		"만약 정사각형을 다이아몬드처럼 옆으로 회전시키면 그것은 더 이상 정사각형이 아니다."라고 인식한다.	
	지도 방안	1. 도형을 여러 방향으로 돌리기: 점판에 직사각형을 만들게 하고, 그것을 종이에 따라 그리게 한다. 그런 다음 점판을 돌려서 직사각형을 다시 따라 그리게 한다. 돌려도 모두 같은 직사각형임을 강조한다. 2. 개념 카드 만들기: 각각의 특정 다각형에 대한 개념 카드를 만들도록 한다.	
• 다음 도형에서 직각에 ○표 하시오.		직각은 항상 오른쪽으로 그려진다고 생각한다. 아마 처음 직각 개념을 배웠을 때 오른쪽으로 각이 그려져 있는 것만 관찰했을 것이다.	
		1. 정사각형의 모서리 사용하기: 직각의 개념을 발견시 키기 위해 정사각형의 모서리 부분을 사용한다. 정사 각형의 모서리는 모두 직각이라는 점을 강조한다. 2. 테셀레이션 만들기: 직각삼각형으로 테셀레이션을 만 든 다음 각각의 직각삼각형에서 직각을 표시하도록 한다. 3. 개념 카드 만들기: 삼각형의 개념 카드를 만든다. 4. 빗변과 직각을 연관시키기: 다양한 삼각형에서 빗변 과 직각을 구분하게 한다.	



(Ashlock, R. B., 남승인 외 6명 공역, 2013)

인용 자료 출처

- 교육과학기술부, 『수학 4-2 교사용 지도서』, 2010, 191-193쪽
- 교육부, 『수학 4-2 교사용 지도서』, 2018, 294-295쪽
- 노영아, 안병곤, 「도형 영역의 오류 유형과 원인 분석에 관한 연구-초등학교 4학년을 중심으로」, 한국초등수학 교육학회, 2007, 199-216쪽
- 박교식, 임재훈, 「다각형, 다면체, 면에 대한 교수학적 분석」, 대한수학교육학회, 2004, 19-37쪽
- 배종수, 『초등수학교육 내용지도법』, 경문사, 2010, 367쪽
- 우정호. 『수학 학습-지도 원리와 방법』. 서울대학교출판문화원. 2007. 434-437쪽
- 우정호, 『학교수학의 교육적 기초』, 서울대학교출판문화원, 2010, 310-312쪽
- 홍성관, 하정임, 박철호, 「격자점 과제지 활동에서 나타난 중학생의 다각형 개념에 대한 연구」, 한국수학교육학 회, 2007, 431-450쪽
- Ashlock, R. B., 『Error patterns in computation: using error patterns to help each student learn (10th ed)』, Pearson, 2010, 남승인 외 6명 공역, 『예비 교사와 현직 교사를 위한 초등수학 교수법: 수학 오개 념과 오류 바로잡기』, 경문사, 2013, 118-136쪽

단원 도입

○ 수업의 흐름

• 그림 속 상황 살펴 보기

• 동시 살펴 보기

• 선수 학습 내용 알아보기

건강한 삶

사회가 발전하면서 우리가 접하는 새로운 정보는 텍스트(text)로 제공되기보다는 이미지(image)로 제공되는 경우가 많다. 이미지는 다양하고 복잡한 정보를 한눈에 파악할 수 있고 멀리에서도 시각적으로 빠르게 알아볼 수 있기 때문이다. 특히 건강한 삶을 영위하기 위하여 사람의 안전과 밀접하게 관련되어 있는 도로의 다양한 상황에 대해서는 이런 이미지화가 무엇보다 중요하다.

이번 단원에서는 학생들이 실생활에서 자주 접했던 '도로에서 볼 수 있는 다양한 도형'을 소재로 내용을 구성하였다. 교통 표지판을 통해 다각형과 정다각형을 학습하고 대각선 횡단보도를 통해 대각선의 정의를 알아본다. 이와 함께 모양 조각으로 여러 가지 모양을 만들고 채워 보는 활동을 통하여 사물의 특징을 다각형으로 단순화하는 기회를 제공하고자 한다.

그림 속 상황 살펴보기

단원 도입 그림은 생활 주변에서 볼 수 있는 도로 상황을 나타내고 있다. 도로에서 쉽게 볼 수 있는 교통표지판은 학생들이 일상생활에서 많이 접하고 있어친근하게 다가설 수 있고, 다양한 모양으로 되어 있어 다각형을 학습하기에 좋은 소재이다.

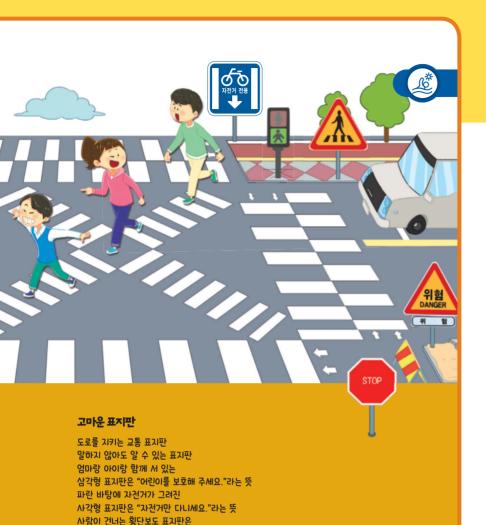
교통 표지판뿐만 아니라 도로에서 볼 수 있는 다양한 도형 각각의 특징을 알아보고 분류하는 활동을 통해 실생활에서 수학이 활용되는 분야를 확인하는 기회를 갖게 될 것이다.



핵심 발문

- 교통 표지판에서 볼 수 있는 도형은 무엇이 있을까요?
- 삼각형을 볼 수 있습니다.
- 사각형을 볼 수 있습니다.
- 원을 볼 수 있습니다.
- 처음 보는 도형도 있습니다.
- 교통 표지판의 모양에 따라서 어떻게 분류할 수 있을까요?
- 선분으로만 된 것과 곡선으로만 된 것으로 분류할 수 있습니다.
- 선분과 곡선이 같이 있는 것으로 분류할 수 있습니다.
- 우리 주변에서(도로, 교실, 집 등) 어떤 모양의 도형을 찾을 수 있을까요?
- 칠판, 책상, 책에서 사각형을 볼 수 있습니다.
- 시계, 어항, 그릇에서 원을 볼 수 있습니다.
- 부채, 피자 조각에서 선분과 곡선으로 이루어진 도형을 볼 수 있습니다.

수학 118~119



동시 살펴보기

- 동시를 읽어 보세요.
- (각자 동시를 읽어 본다.)

"횡단보도가 있으니 조심히 운전하세요."라는 뜻

어른 아이 누구나 안전하게 다니라고 만든 고마운 표지판

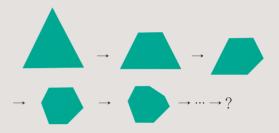
글자를 몰라도 알 수 있는 표지판

- (친구들과 문장을 나누어 동시를 읽어 본다.)
- 동시는 무엇을 보고 지었나요?
- 교통 표지판을 보고 지었습니다.
- 동시를 읽고 느낀 점을 이야기해 보세요.
- 교통 표지판의 뜻을 알 수 있어서 좋습니다.
- 동시에 있는 교통 표지판을 찾아보게 됩니다.
- 무엇을 배울 것 같은지 이야기해 보세요.
- 교통 표지판의 뜻을 배울 것 같습니다.
- 교통 표지판의 모양을 배울 것 같습니다.
- 주변에서 볼 수 있는 모양을 배울 것 같습니다.

즐겁게 시작해요

■ 색종이 오리기 (창)

- 준비물: 색종이, 가위
- ① 색종이의 양쪽을 잘라 삼각형을 만듭니다.
- ② 삼각형의 윗부분을 직선으로 잘라 사각형을 만듭니다.
- ③ 사각형의 한쪽 꼭짓점을 잘라 오각형을 만듭니다.
- ④ 오각형의 한쪽 꼭짓점을 자릅니다.
- ⑤ 같은 방법으로 꼭짓점을 계속 자르면 원에 가까 워집니다.



색종이를 직접 오려 보는 활동을 통해 변의 개수가 늘어남에 따라 점점 원이 되어가는 과정을 알아본다. 이런 수학 내적·외적 연결 활동을 통해 창의·융합 능력을 기를 수 있다.

선수 학습 내용 알아보기 (『수학 익힘』 81쪽)

• 성취 기준

119

[4수02-01] 직선, 선분, 반직선을 알고 구별할 수 있다. [2수02-03] 교실 및 생활 주변에서 여러 가지 물 건을 관찰하여 삼각형, 사각형, 원의 모양을 찾고, 그것들을 이용하여 여러 가지 모양을 꾸밀 수 있다. [2수02-05] 삼각형, 사각형에서 각각의 공통점을 찾아 말하고, 이를 일반화하여 오각형, 육각형을 알고 구별할 수 있다

학생들은 1~2학년군에서 삼각형, 사각형, 오각형, 육각형을 실생활에서 볼 수 있는 다양한 물체를 알아봤고, 3~4학년군에서 꼭짓점과 변의 뜻과함께 삼각형과 사각형을 분류해 봤다.

이를 바탕으로 본 단원에서는 다각형과 정다각형의 뜻과 대각선의 의미를 학습하고, 여러 가지 모양을 채우거나 만들면서 공간 감각을 기르게 된다. 이를 위해 선수 학습에 제시된 용어의 뜻과 기본적인 도형의 특징을 반드시 이해하고 본 단원을학습할 수 있어야 한다.