AI Masters Optimization **Name:** *Грачев Денис*

Homework 3

23 октября 2022 г.

Сопряженные функции

Task 1

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \log\left(\frac{x_i}{1^T x}\right)$$

$$f^*(y) = \sup_x \left((y, x) - f(x)\right) = \sup_x \sum_{i=1}^{n} x_i \left(y_i - \log\left(\frac{x_i}{1^T x}\right)\right)$$

Рассмотрим $x = (t, t, \dots t)$, тогда

$$f^*(y) \geq \sup_t \sum_{i=1}^{n} t \left(y_i - \log\left(\frac{t}{nt}\right)\right) = t \sum_{i=1}^{n} (y_i + \log(n)) = \begin{cases} +\infty \mid \sum_{i=1}^{n}(y_i + \log(n)) > 0, t \to +\infty \\ +\infty \mid \sum_{i=1}^{n}(y_i + \log(n)) < 0, t \to -\infty \\ 0 \mid \sum_{i=1}^{n}(y_i + \log(n)) = 0 \end{cases}$$

Пусть $\sum_{i=1}^{n}(y_i + \log(n)) = 0$, тогда рассмотрим $x = (2t, t, \dots, t)$.

Аналогично, в зависимости от суммы, $f^*(y) \geq \begin{cases} +\infty \\ 0 \end{cases}$, но так как обе суммы не могут одновременно равняться 0, то $f^*(y) \geq +\infty \Rightarrow f^*(y) = +\infty$.

Task 2

Рассмотрим интуитивную геометрическую интерпритацию.

$f(x) = \max_{k=1,\dots,p}(a_i x + b_i)$ - максимум из нескольких прямых то есть выпуклая функция.

yx - прямая проходящая через 0 с коэфициентом y.

Следовательно функция $f_y(x) = xy - f(x)$ - вогнутая.

Пусть $a_m = \max_i a_i < y > 0$, тогда легко видеть что $(xy - f(x)) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$, следовательно $f^*(y) = +\infty$.

Пусть $a_m = \max_i a_i = y > 0$, тогда $f^*(y) = -b_m$.

Рассмотрим крайнюю точку x_m преломления функции $f(x)$.

Тогда $\forall x \geq x_m : xy - f(x) = -b_m$.

$\forall x < x_m : f(x) > a_m x_m + b_m \;\;,\;\; yx - f(x) < yx - a_m x_m - b_m = -b_m$.

Следовательно $f^*(y) = -b_m$.

Пусть $a_m = \max_i a_i > y > 0$. Аналогично предыдущему случаю, но с поправкой что $\forall x \geq x_m : xy - f(x) \leq -b_m$

Следовательно $f^*(y) = -b_m$. Аналогичен случай с $y < 0$, но $a_m = \min_i a_i$

Итого $f^*(y) = \begin{cases} +\infty \mid y > \max_i a_i, y > 0 \\ \\ -b_m \mid y \leq a_m = \max_i a_i, y > 0 \\ \\ +\infty \mid y > \min_i a_i, y < 0 \\ \\ -b_m \mid y \leq a_m = \min_i a_i, y < 0 \end{cases}$

Task 3

$g(x) = \inf_{x_1+\dots x_2=x}(f_1(x_1) + \dots f_k(x_k))$, где f_i - выпуклые функции.

$$\begin{aligned}
g^*(y) &= \sup_x (y,x) - g(x) \\
&= \sup_x (y,x) - \inf_{x_1+\dots+x_2=x}(f_1(x_1) + \dots f_k(x_k)) \\
&= \sup_x - \inf_{x_1+\dots+x_2=x}(-y,x) f_1(x_1) + \dots f_k(x_k) \\
&= \sup_x - \inf_{x_1+\dots+x_2=x} f_1(x_1) - (y, x_1) + \dots f_k(x_k) - (y, x_k) \\
&= -\inf_x \inf_{x_1+\dots+x_2=x} \hat{f}_1(x_1) + \dots \hat{f}_k(x_k) \quad \textit{где} \quad \hat{f}_i(x) = f_i(x) - yx \\
&= -\inf_{x_1,\dots,x_2} \hat{f}_1(x_1) + \dots \hat{f}_k(x_k) \quad \textit{где} \quad \hat{f}_i(x) = f_i(x) - yx \\
&= -\left(\inf_x \hat{f}_1(x) + \dots \inf_x \hat{f}_k(x)\right)
\end{aligned}$$

Task 4

$$f(x) = \begin{cases} |x| - \frac{1}{2} \quad | \quad |x| > 1 \\ \frac{1}{2}x^2 \quad | \quad |x| \leq 1 \end{cases}$$

Прибегнем к геометрической интерпритации снова.

Так как картинка симметриная, будем рассматривать $y > 0$

Тогда для $|y| > 1 : f * (y) = +\infty$.

Для $|y| \leq 1$ супремум достигается на отрезке $[-1, 1]$, поэтому рассмотрим функцию $r_y(x) = xy - \frac{1}{2}x^2$. Ее максимум достигается в точке y, следовательно $f * (y) = y$.

$$f * (y) = \begin{cases} +\infty \quad | \quad |y| > 1 \\ y \quad | \quad |y| \leq 1 \end{cases}$$

Субдифференциал

Task 1

$$y^T x = f(x) + f^*(y) \quad \text{iff} \quad y \in \partial f(x)$$

По определению субдифференциала

$$\begin{aligned}
y \in \partial f(x) &\Rightarrow \forall x' \in \mathrm{dom} f : f(x') \geq f(x) + (y, x' - x) \\
&\Rightarrow \forall x' \in \mathrm{dom} f : f(x') - (y, x') \geq f(x) - (y, x) \\
&\Rightarrow \forall x' \in \mathrm{dom} f : (y, x') - f(x') \leq (y, x) - f(x) \\
&\Rightarrow (y, x) - f(x) = \sup_t ((y, t) - f(t)) = f * (y) \\
&\Rightarrow (y, x) = f(x) + f^*(y)
\end{aligned}$$

Task 3

$$a \in \partial f(x) \Leftrightarrow \forall y \in \mathrm{dom} f : f(y) \geq f(x) + (a, y - x)$$

$$\begin{aligned}
f(y) = \|y\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} |y_i| \\
&\geq f(x) + (a, y - x) \\
&= \sum_{i=1}^{n} |x_i| + a_i y_i - a_i x_i
\end{aligned}$$

Отсюда легко видеть, что $a_i = \begin{cases} -1 \quad | \quad x_i < 0 \\ [-1, 1] \quad | \quad x_i = 0 \\ 1 \quad | \quad x_i > 0 \end{cases}$

Task 2

$$a \in \partial f(x) \Leftrightarrow \forall y \in \mathrm{dom} f : f(y) \geq f(x) + (a, y - x)$$

$$\begin{aligned}
f(y) &= \sup_{0 \leq t \leq 1} (y_1 + y_2 t + \ldots + y_n t^{n-1}) \\
&\geq f(x) + (a, y - x) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i (y_i - x_i) + \sup_{0 \leq t \leq 1} (x_1 + x_2 t + \ldots + x_n t^{n-1}) \\
&= \sup_{0 \leq t \leq 1} (a_1 y_1 - a_1 x_1 + x_1 + a_2 y_2 - a_2 x_2 + x_2 t + \ldots + a_n y_n - a_n x_n + x_n t^{n-1})
\end{aligned}$$