AI Masters Algorithms **Name:** *Денис Грачев*

Homework 3

3 октября 2022 г.

Task 1

Запишем рекурентную формулу (для $n \leq 2022$ считаем $f(n)$ константой не превышающей 2022)

$$f(n) = 3f(n/4) + c$$

$$d = \log_4(3) < \frac{1}{2}$$

Первый случай

$$c = O(n^{d-\varepsilon}) \text{ где } \varepsilon = d - \frac{1}{2}$$

Тогда из теоремы о рекурсии $a = 3, b = 4, f(n) = c$ следует что $f(n) = \Theta(n^{\log_4(3)})$

Task 2

a

$$T(n) = 36T\left(\left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor\right) + n^2$$

Применим теорему о рекурсии, где $a = 36, b = 6, f(n) = n^2$,

тогда $d = \log_6(36) = 2,\ f(n) = \Theta(n^d)$.

Следовательно $T(n) = \Theta(n^2 \log(n))$

b

$$T(n) = 3T\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + n^2$$

Применим теорему о рекурсии, где $a = 3, b = 3, f(n) = n^2$,

тогда $d = \log_3(3) = 1,\ f(n) = n^2 = \Omega(n^{d+0.1=1.1}),\ af\left(\frac{n}{b}\right) = 3\frac{n^2}{9} = \frac{n^2}{3} \leq n^2 = f(n)$

По третьему случаю $T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n^2)$

c

$$T(n) = 4T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + \left\lfloor \frac{n}{\log(n)} \right\rfloor$$

Применим теорему о рекурсии, где $a = 4, b = 2, f(n) = \frac{n}{\log(n)}$,

тогда $d = \log_2(4) = 2,\ f(n) = \frac{n}{\log(n)} \leq n = O(n^{d-1=1})$.

По 1 случаю $T(n) = \Theta(n^d) = \Theta(n^2)$.

Task 3

1

$$T(n) = nT\left(\frac{n}{2}\right) + cn$$

Высота дерева будет $h = \log_2(n)$.

Посчитаем сколько операций на каждом уровне рекурсии.

глубина дерева	аргумент листа	количество листьев	операций в листе	операций всего
1	n	1	cn	cn
2	$\frac{n}{2}$	n	$\frac{cn}{2}$	$\frac{cn^2}{2}$
3	$\frac{n}{4}$	$\frac{n^2}{2}$	$\frac{cn}{4}$	$\frac{cn^3}{8}$
4	$\frac{n}{8}$	$\frac{n^3}{8}$	$\frac{cn}{8}$	$\frac{cn^4}{64}$
5	$\frac{n}{16}$	$\frac{n^4}{64}$	$\frac{cn}{16}$	$\frac{cn^5}{1024}$
...	...	...	...	...
k + 1	$\frac{n}{2^k} = 2^{h-k}$	$\frac{n^{k+1}}{2^{\frac{k(k-1)}{2}}} = 2^{h(k+1)-\frac{k(k-1)}{2}}$	$\frac{cn}{2^k} = c2^{h-k}$	$\frac{cn^{k+1}}{2^{\frac{k(k+1)}{2}}} = c2^{h(k+1)-\frac{k(k+1)}{2}}$
...	...	...	...	...
h	1	$2^{\frac{h^2+3h}{2}}$	c	