AI Masters Optimisatrion **Name:** *Денис Грачев*

Homework 1

7 октября 2022 г.

Task 1

$\Rightarrow$

Пусть V - выпуклое множество. Прямая l так же выпклое множество. Пересечение выпкулых множеств выпукло, следовательно $V \cap l$ - выпуклое.

$\Leftarrow$

Пусть $V : \forall l : V \cap l -$ *выпуклое.*

Тогда $\forall x, y \in V$ рассмотрим $l : x, y \in l$. Тогда $x, y \in V \cap l$ следовательно, так как $V \cap l -$ *выпуклое*, то $[x, y] \in V \cap l \Rightarrow [x, y] \in V$, следовательно V - выпуклое.

Task 2

$\mathcal{C} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^\top \mathbf{x} + c \leq 0 \right\}$.

Для того чтобы доказать что $\mathcal{C}$ - выпуклое, достаточно доказать что $\forall x, y \in \mathcal{C} : \frac{x+y}{2} \in \mathcal{C}$ (для любой точки между x, y можно построить сходяющуюся последовательность из середин, так как $\mathcal{C}$ замкнутое, то и предел последовательности тоже будет лежать в $\mathcal{C}$).

Пусть $x, y \in \mathcal{C}$, тогда

$$\begin{cases} x^T A x + b^T x + c \leq 0 & \textit{т.к. } x \in \mathcal{C} \\ y^T A y + b^T y + c \leq 0 & \textit{т.к. } y \in \mathcal{C} \\ (x-y)^T A (x-y) \geq 0 & \textit{т.к. } \mathbf{A} \succ 0 \end{cases} \tag{1}$$

Домножим на 2 и сложим первые два неравенства, третье раскроем.

$$\begin{cases} 2x^T A x + 2y^T A y + 2b^T (x+y) + 4c \leq 0 \\ x^T A x - x^T A y - y^T A x + y^T A y \geq 0 \end{cases} \tag{2}$$

Вычтем из первого второе неравенство.

$$x^T A x + y^T A y + x^T A y + y^T A x + 2b^T (x+y) + 4c \leq 0$$

$$(x+y)^T A (x+y) + 2b^T (x+y) + 4c \leq 0$$

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^T A \left(\frac{x+y}{2}\right) + b^T \left(\frac{x+y}{2}\right) + c \leq 0$$

Отсюда следует что $\frac{x+y}{2} \in \mathcal{C}$ следовательно $\mathcal{C}$ выпуклое.

Task 3

$M := \left\{ \mathbf{X}\mathbf{X}^\top \mid \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times k}, \operatorname{rank}(\mathbf{X}) = k \right\}$.

$A \in M$ тогда $a \in \mathbb{R}^{n \times n},\ \operatorname{rank}(A) = k$.

$X^T X = U \Sigma V^T V \Sigma U^T = U \Sigma^2 U^T = U \Sigma^2 U^{-1}$ - ЖНФ, следовательно M - множество матриц $\mathbb{R}^{n \times n}$ с k ненулевыми положительными собственными значениями.

Докажем, что коническая оболочка таких матриц - матрицы с k и более ненулевыми положительными значениями.

$\Rightarrow$

Докажем по индукции, что если мы можем получить r произвольных положительных собственных значений то можем и $r+1$.

Пусть искомая матрица имеет вид $U\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots \lambda_{r+1}, 0, \ldots 0)U^{-1}$.

Возьмем $A = U\mathrm{diag}\left(\lambda_1, \frac{\lambda_2}{2}, \ldots, \frac{\lambda_r}{2}, 0, \ldots 0\right) U^{-1}$, $B = U\mathrm{diag}\left(0, \frac{\lambda_2}{2}, \ldots, \frac{\lambda_r}{2}, \lambda_{r+1}, 0, \ldots 0\right) U^{-1}$.

Тогда $A + B = U\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots \lambda_{r+1}, 0, \ldots 0)U^{-1}$. Следовательно любая матрица с положительными собственными значениями ранга k и выше лежит в конической оболочке M.

$\Leftarrow$

Рассмотрим произвольную сумму $A + B = U_1\Sigma_1^2U_1^{-1} + U_2\Sigma_2^2U_2^{-1}$.

- Так как A и B неотрицательно определенные очевидно что и сумма их неотрицательно определена, значит сумма этих матриц имеет неотрицательные собственные значения.
- Т.к. A и B положительно определены то $\mathrm{rank}(A + B) \geq k$.