AI Masters Algorithms **Name:** *Денис Грачев*

Homework 3

4 октября 2022 г.

Task 1

Запишем рекурентную формулу (для $n \leq 2022$ считаем $f(n)$ константой не превышающей 2022)

$$f(n) = 3f(n/4) + c$$

$$d = \log_4(3) < \frac{1}{2}$$

Первый случай

$$c = O(n^{d-\varepsilon}) \text{ где } \varepsilon = d - \frac{1}{2}$$

Тогда из теоремы о рекурсии $a = 3, b = 4, f(n) = c$ следует что $f(n) = \Theta(n^{\log_4(3)})$

Task 2

a

$$T(n) = 36T\left(\left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor\right) + n^2$$

Применим теорему о рекурсии, где $a = 36, b = 6, f(n) = n^2$,

тогда $d = \log_6(36) = 2,\ f(n) = \Theta(n^d)$.

Следовательно $T(n) = \Theta(n^2 \log(n))$

b

$$T(n) = 3T\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + n^2$$

Применим теорему о рекурсии, где $a = 3, b = 3, f(n) = n^2$,

тогда $d = \log_3(3) = 1,\ f(n) = n^2 = \Omega(n^{d+0.1=1.1}),\ af\left(\frac{n}{b}\right) = 3\frac{n^2}{9} = \frac{n^2}{3} \leq n^2 = f(n)$

По третьему случаю $T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n^2)$

c

$$T(n) = 4T\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right) + \left\lfloor\frac{n}{\log(n)}\right\rfloor$$

Применим теорему о рекурсии, где $a = 4, b = 2, f(n) = \frac{n}{\log(n)}$,

тогда $d = \log_2(4) = 2,\ f(n) = \frac{n}{\log(n)} \leq n = O(n^{d-1=1})$.

По 1 случаю $T(n) = \Theta(n^d) = \Theta(n^2)$.

Task 3

1

$$T(n) = nT\left(\frac{n}{2}\right) + cn$$

Высота дерева будет $h = \log_2(n)$.

Посчитаем сколько операций на каждом уровне рекурсии.

глубина дерева	аргумент листа	количество листьев	операций в листе	операций всего
1	n	1	cn	cn
2	$\frac{n}{2}$	n	$c\frac{n}{2}$	$nc\frac{n}{2} = c\frac{n^2}{2}$
3	$\frac{n}{4}$	$\frac{n}{2}n = \frac{n^2}{2}$	$c\frac{n}{4}$	$\frac{n^2}{2}c\frac{n}{4} = c\frac{n^3}{8}$
4	$\frac{n}{8}$	$\frac{n}{4}\frac{n^2}{2} = \frac{n^3}{8}$	$c\frac{n}{8}$	$\frac{n^3}{8}c\frac{n}{8} = c\frac{n^4}{64}$
5	$\frac{n}{16}$	$\frac{n}{8}\frac{n^3}{8} = \frac{n^4}{64}$	$c\frac{n}{16}$	$\frac{n^4}{64}c\frac{n}{16} = c\frac{n^5}{1024}$
...	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
k + 1	$\frac{n}{2^k} = 2^{h-k}$	$\frac{n^k}{2^{\frac{k(k-1)}{2}}} = 2^{hk-\frac{k(k-1)}{2}}$	$c\frac{n}{2^k} = c2^{h-k}$	$c2^{hk-\frac{k(k-1)}{2}+h-k}$
...	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
h	1	$2^{h(h-1)-\frac{(h-1)(h-2)}{2}}$	c	$c2^{h(h-1)-\frac{(h-1)(h-2)}{2}}$

В формулах в табличке выше могли потеряться +- 1, в формуле ниже все работает

$$\begin{aligned} T(n) &= \sum_{k=1}^{h} c2^{h(k-1)-\frac{(k-1)(k-2)}{2}+h-k+1} \\ &= c\sum_{k=1}^{h} 2^{hk-\frac{k^2+k}{2}} \end{aligned}$$

Получившаяся сумма не является геометрической прогрессией и явно оценить ее сложность не получилось.

Однако можно оценить сложность $\log(T(n))$.

$$
\begin{aligned}
\log(T(n)) &= \log(c\sum_{k=1}^{h} 2^{hk-\frac{k^2+k}{2}}) \qquad \textit{т.к. } k^2 \le kh \\
&= c' \log\left(\sum_{k=1}^{h} \Theta(2^{c_1hk})\right) \\
&= c' \log\left(\Theta\left(\frac{2^{c_1h^2+c_1h} - 2^{c_1h}}{2^{c_1h} - 1}\right)\right) \\
&= c' \log\left(\Theta\left(2^{c_1h^2}\right)\right) \\
&= \Theta\left(\log(2^{c1h^2})\right) \\
&= \Theta(h^2)
\end{aligned}
$$

Task 4