AI Masters Optimization **Name:** *Денис Грачев*

Homework 2

15 октября 2022 г.

Task 1

Докажем что $(x+y)^{\frac{1}{n}} \le x^{\frac{1}{n}} + y^{\frac{1}{n}}$.

Это легко видеть если возвести обе части в степень n и раскрыть правую часть по Биному Ньютона.

Слева будет $x+y$, справа $x+y+$ *что-то положительное.*

$f(x) = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\frac{1}{n}}$

Для доказательства выпуклости достаточно доказать что $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \frac{f(x)+f(y)}{2}$. (Так как любую точку отрезка можно представить как предел последовательности середин).

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{x+y}{2}\right) &= \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}(x_i+y_i)\right)^{\frac{1}{n}} \\
&= \frac{1}{2}\prod_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{\frac{1}{n}} \\
&\ge \frac{1}{2}\prod_{i=1}^{n} x_i^{\frac{1}{n}} + y_i^{\frac{1}{n}} \\
&= \frac{1}{2}\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{\frac{1}{n}} + \prod_{i=1}^{n} y_i^{\frac{1}{n}} + \textit{что-то положительное}\right) \\
&\ge \frac{1}{2}(f(x)+f(y))
\end{aligned}
$$

Следовательно функция f - вогнутая.

Task 2

$f(x) = \|Ax - b\|_2 + \lambda\|x\|_1$

$\lambda\|x\|_1$ - линейная функция, следовательно никак не влияет на вторую производную. $\|Ax - b\|_2$ - непрерывно диффернцируемая выпуклая функция (так как норма выпуклая и композиция с линейным преобразованием сохраняет выпуклость), следовательно добавление $\lambda\|x\|_1$ не меняет f'' следовательно функция остается выпуклой.

Task 3

$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \frac{F(x)}{x}$ (Можем считать, что $f(0) = 0$)

$g'(x) = \frac{f(x)x - F(x)}{x^2}$

$g''(x) = \frac{(f(x)+xf'(x)-f(x))x^2-(f(x)x-F(x))2x}{x^4} = \frac{x^3f'(x)-2x^2f(x)+2xF(x)}{x^4}$.

$x^4 > 0$, рассмотрим верхнюю часть: $x^3f'(x) - 2x^2f(x) + 2xF(x)$. Докажем что она больше 0 для многочленов, так как многочлены всюдуплотны среди непрерывных функций, утверждение будет верно и для всех фукнций.

Пусть $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, тогда

$$f'(x)x^3 = \sum_{i=0}^n a_i i x^{i+2}$$

$$f(x)x^2 = \sum_{i=0}^n a_i x^{i+2}$$

$$F(x)x = \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{i+1} x^{i+2}$$

$$
\begin{aligned}
x^3 f'(x) - 2x^2 f(x) + 2xF(x) &= \sum_{i=0}^{n} (a_i i - 2a_i + \frac{2a_i}{i+1}) x^{i+2} \\
&= \sum_{i=0}^{n} (\frac{a_i i^2 + a_i - 2a_i i - 2a_i + 2a_i}{i+1}) x^{i+2} \\
&= \sum_{i=0}^{n} (\frac{a_i i^2 + a_i - 2a_i i}{i+1}) x^{i+2} \\
&= \sum_{i=0}^{n} (\frac{a_i (i-1)^2}{i+1}) x^{i+2}
\end{aligned}
$$

Так как f - выпуклая, то $f''(x) \geq 0$

$$
\begin{aligned}
0 \leq f''(x) &= \sum_{i=0}^{n} a_i i(i-1) x^{i-2} \Rightarrow \\
0 \leq f''(x) x^4 &= \sum_{i=0}^{n} a_i i(i-1) x^{i+2} \\
&= \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{i(i^2-1)}{i+1} x^{i+2}
\end{aligned}
$$

Дальше не сходится.

Task 4

$f(X) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(X) = \mathrm{trace}(X)$.

trace - линейная функция следовательно выпуклая.

Task 5

$f(w) = \sum_{i=1}^{m} \log(1 + e^{-y_i w^T x_i})$ Заметим, что $\log(1 + e^{-y_i w^T x_i}) > 0$.

Сравним

$$
\begin{aligned}
f(\frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2) \quad &? \quad \frac{1}{2}f(w_1) + \frac{1}{2}f(w_2) \\
\log(1 + e^{-y_i(\frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2)X_i}) \quad &? \quad \frac{1}{2}\log(1 + e^{-y_i w_1 X_i}) + \frac{1}{2}\log(1 + e^{-y_i w_2 X_i}) \\
\log(1 + e^{-y_i \frac{1}{2} w_1 X_i} e^{-y_i \frac{1}{2} w_2 X_i}) \quad &? \quad \log((1 + e^{-y_i w_1 X_i})^{\frac{1}{2}} (1 + e^{-y_i w_2 X_i})^{\frac{1}{2}}) \\
(1 + e^{-y_i \frac{1}{2} w_1 X_i} e^{-y_i \frac{1}{2} w_2 X_i})^2 \quad &? \quad (1 + e^{-y_i w_1 X_i})(1 + e^{-y_i w_2 X_i}) \\
1 + e^{-y_i w_1 X_i} e^{-y_i w_2 X_i} + 2e^{-y_i \frac{1}{2} w_1 X_i} e^{-y_i \frac{1}{2} w_2 X_i} \quad &? \quad (1 + e^{-y_i w_1 X_i} + e^{-y_i w_2 X_i} + e^{-y_i w_1 X_i} e^{-y_i w_2 X_i}) \\
2e^{-y_i \frac{1}{2} w_1 X_i} e^{-y_i \frac{1}{2} w_2 X_i} \quad &? \quad e^{-y_i w_1 X_i} + e^{-y_i w_2 X_i} \\
2e^{-y_i \frac{1}{2} w_1 X_i} e^{-y_i \frac{1}{2} w_2 X_i} \quad &\leq \quad e^{-y_i w_1 X_i} + e^{-y_i w_2 X_i}
\end{aligned}
$$

Последнее верно из неравенства о средних $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{ab} \leq a + b$.

Следовательно функция выпуклая.

Task 6

$$
\begin{aligned}
f(X) &= (\det(X))^{\frac{1}{n}} \\
&= (\det(U + Vt))^{\frac{1}{n}} \\
&= (\det(I + U^{\frac{-1}{2}} V U^{\frac{-1}{2}} t))^{\frac{1}{n}} (\det(U))^{\frac{1}{n}}
\end{aligned}
$$

Обозначим $U^{\frac{-1}{2}} V U^{\frac{-1}{2}} = Q \Lambda Q^T$.

$$
\begin{aligned}
g(t) \ &(\det(I + U^{\frac{-1}{2}} V U^{\frac{-1}{2}} t))^{\frac{1}{n}} \\
&= (\det(I + Q \Lambda Q^T))^{\frac{1}{n}} \\
&= (\det(I + \Lambda t))^{\frac{1}{n}} \\
&= (\prod 1 + \lambda_i t)^{\frac{1}{n}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g(\frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{2}t_2) \quad &? \quad \frac{1}{2}g(t_1) + \frac{1}{2}g(t_2) \\
\left(\prod 1 + \lambda_i(\frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{2}t_2)\right)^{\frac{1}{n}} \quad &? \quad \frac{1}{2}\left(\prod 1 + \lambda_i t_1\right)^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{2}\left(\prod 1 + \lambda_i t_2\right)^{\frac{1}{n}} \\
\prod 1 + \lambda_i(\frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{2}t_2) \quad &? \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\left(\prod 1 + \lambda_i t_1\right)^{\frac{1}{n}}\right)^k \left(\frac{1}{2}\left(\prod 1 + \lambda_i t_2\right)^{\frac{1}{n}}\right)^{n-k} \\
\prod 2 + \lambda_i(t_1 + t_2) \quad &? \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\prod 1 + \lambda_i t_1\right)^{\frac{k}{n}} \left(\prod 1 + \lambda_i t_2\right)^{\frac{n-k}{n}}
\end{aligned}
$$

Экспоненциальный конус

$K = \{(x, y, z) \in \mathrm{R}^3 \mid y > 0, ye^{\frac{x}{y}} \leq z\}$ Это надграфик функции $f(x, y) = ye^{\frac{x}{y}}$.
$\nabla f(x, y) = \left(e^{\frac{x}{y}},\ \frac{e^{\frac{x}{y}}(y-x)}{y}\right)$
$\mathrm{Hess} f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{e^{\frac{x}{y}}}{y} & \frac{-xe^{\frac{x}{y}}}{y^2} \\ \frac{-xe^{\frac{x}{y}}}{y^2} & \frac{x^2e^{\frac{x}{y}}}{y^3} \end{bmatrix}$ Докажем что Гессиан положительно определен

$$
\begin{aligned}
(a, b)\mathrm{Hess} f(x, y)(a, b)^T &= \left(a\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y} + b\frac{-xe^{\frac{x}{y}}}{y^2}, a\frac{-xe^{\frac{x}{y}}}{y^2} + b\frac{x^2e^{\frac{x}{y}}}{y^3}\right)(a, b)^T \\
&= a^2\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y} + 2ab\frac{-xe^{\frac{x}{y}}}{y^2} + b^2\frac{x^2e^{\frac{x}{y}}}{y^3} \\
&= \frac{e^{\frac{x}{y}}}{y}\left(a^2 + 2ab\frac{-x}{y} + b^2\frac{x^2}{y^2}\right) \\
&= \frac{e^{\frac{x}{y}}}{y}\left(a + b\frac{-x}{y}\right)^2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Следовательно экспоненциальный конус - выпуклый.

Кратчайший путь в графе

Пусть s_{ij} - какой-то фиксированный путь из i в j. Тогда функция $p_{s_{ij}}(c)$ - линейна по c следовательно вогнута.

$p_{ij} = \min_{s_{ij}} p_{s_{ij}}(c)$. Минимум по вогнутым функциям - вогнутая функция.

Следовательно p_{ij} - вогнутая.