AI Masters Optimization **Name:** *Денис Грачев*
Homework 4
3 ноября 2022 г.

Условия оптимальности

Task 1

$$\min_x c^T x$$
$$\text{s.t. } x^T A x \leq 1 \text{ \textit{где} } A \in S^n_{++}$$

Задача выпуклая, условие Слейтра выполняется (легко найти $x*$ для которого ограничение будет строгое).
Запишем условие ККТ.

$$L(x, \mu) = c^T x + \mu(x^T A x - 1)$$
$$L'_x(x, \mu) = c + \mu(A + A^T)x = c + 2\mu A x = 0$$
$$\mu A x = \frac{-c}{2}$$
$$x = A^{-1} \frac{-c}{2\mu}$$

Запишем условие дополняющей нежесткости

$$\mu(x^T A x - 1) = 0$$

Пусть $\mu = 0$

Тогда для $c \neq 0 : L'_x(x, \mu) \neq 0$, следовательно минимум не достигается.

Пусть $x^T A x = 1$

Тогда домжножим слева на x^T равенство

$$\mu x^T A x = x^T \frac{-c}{2}$$

$$\mu = x^T \frac{-c}{2}$$
$$c x^T = -2\mu$$
$$c^T x = -2\mu$$

Подставим x из Лангражиана

$$c^T A^{-1} \frac{-c}{2\mu} = -2\mu$$
$$4\mu^2 = c^T A^{-1} c$$

$$\mu = \frac{1}{2}\sqrt{c^T A^{-1}} c$$

Следовательно $x = \frac{-cA^{-1}}{\sqrt{c^T A^{-1}c}}$

Task 2

$$\min_{X \in S^n_{++}} \operatorname{trace}(X) - \log\det X$$

$$\text{s.t.} Xz = y \quad \textit{где} \quad y \in \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n, y^T z = 1$$

Задача выпуклая, условие Слейтера выполняется, потому что найдется X^* для которого равенство выполянется.
Запишем условие ККТ.

$$L(X, \lambda, \mu) = \operatorname{trace}(X) - \log\det X + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (X_i z - y_i) = \operatorname{trace}(X) - \log\det X + \lambda(Xz - y)$$

$$L(X, \lambda, \mu)'_X = I - X^{-1^T} + \left[X_{ij} z_j \lambda_i\right] = 0$$

Будем искать среди диагональных матриц. Тогда

$$\begin{cases} 1 - X_{ii}^{-1} + X_{ii} z_i \lambda_i = 0 \\ X_{ii} z_i = y_i \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} 1 - \frac{z_i}{y_i} + y_i \lambda_i = 0 \\ X_{ii} = \frac{y_i}{z_i} \end{cases} \tag{2}$$

Возьмем $\lambda_i = \frac{z_i}{y_i^2}$. Тогда равенство выполняется. Следовательно минимум

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{z_i} - \log \prod \frac{y_i}{z_i} = 0$$

Пусть $X \in S^n_{++}$ не диагональная. Представим ее в виде $X = S^{-1}DS$, где D диаогнальная
Тогда

$$\begin{aligned} f(X) &= \operatorname{trace}(X) - \log\det X \\ &= \operatorname{trace}(S^{-1}DS) - \log\det(S^{-1}DS) \\ &= \operatorname{trace}(D) - \log\det D \\ &= f(D) \end{aligned}$$

Следовательно можно рассматривать только диагональные матрицы.

Task 3

Найти вектор минимальной евклидовой нормы из выпуклой оболочки $a_1, \dots, a_k$.
Будем считать, что вектора $a_1, \dots a_k$ линейно независимы (всегда можно выбрать линейно независмый набор, порождающий такое же выпуклое множество).
Обоозначим $\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_k \end{bmatrix} = A^{-1}$.

$$\min_y \|y\|_2$$
$$\textit{s.t. } y = A^{-1}w \Rightarrow w = Ay$$
$$0 \le w_i \le 1 \Leftrightarrow 0 \le A_i y \le 1$$
$$\sum_{i=1}^n w_i = 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n A_i y = 1$$

Задача выпуклая, условие Слейтера выполнено.
Минимизировать норму, тоже самое что минимизровать квадрат нормы.
Запишем условие ККТ.

$$L(y, \mu, \lambda) = \|y\|_2^2 + \sum_{i=1}^n (-\mu_i A_i y) + \sum_{i=1}^n (\mu_{i+n} A_i y - 1) + \lambda \left(1 - \sum_{i=1}^n A_i y\right)$$

Условие ≤ 1 можно убрать, оно автоматически будет выполняться из неотрицательности и суммы 1.

$$L(y, \mu, \lambda) = \|y\|_2^2 + \sum_{i=1}^n (-\mu_i A_i y) + \lambda \left(1 - \sum_{i=1}^n A_i y\right)$$

$$\begin{aligned}
0 = L(y, \mu, \lambda)'_{y_j} &= 2y_j + \sum_{i=1}^n (-\mu_i A_{ij}) + \lambda \left(-\sum_{i=1}^n A_{ij}\right) \\
&= 2y_j - \sum_{i=1}^n (\mu_i A_{ij} + \lambda A_{ij}) \\
\Rightarrow y_j &= \frac{\sum_{i=1}^n (\mu_i A_{ij} + \lambda A_{ij})}{2} \\
&= \frac{\mu A_{:,j} + \overrightarrow{\lambda} A_{:,j}}{2} \\
\Rightarrow y &= \frac{\mu A + \overrightarrow{\lambda} A}{2} \\
&= \frac{(\mu + \overrightarrow{\lambda}) A}{2}
\end{aligned}$$

Далее необходимо учесть условие дополняющей нежесткости $\mu_i A_i y = 0$ и допустимость значений. Но что-то у меня не особо дошло до ответа.

Task 4

$$\min_x - \sum_{i=1}^{n} \log(\alpha_i + x_i)$$

$$\textit{s.t.} \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

$$x_i \geq 0$$

Задача выпуклая, условие Слейтера выполняется.
Запишем условие ККТ.

$$L(x, \mu, \lambda) = -\sum_{i=1}^{n} \log(\alpha_i + x_i) + \sum_{i=1}^{n} -\mu_i x_i + \lambda \left(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

$$L(x, \mu, \lambda)'_{x_j} = -\frac{1}{\alpha_j + x_j} - \mu_j - \lambda = 0$$

$$x_j = -\frac{1}{\mu_j + \lambda} - \alpha_j$$

Так как

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} -\frac{1}{\mu_i+\lambda} - \alpha_i = 1 \\ \mu_i x_i = -\frac{\mu_i}{\mu_i+\lambda} - \alpha_i = 0 \end{cases}$$

То из уравнений дополняющей нежесткости можно выразить μ_i через λ, α_i, но так как уравнение квадратное, то возможно два варианта. После чего будем подставлять все возможные варианты в 1 уравнение которое откуда можно найти λ и соответсвенно все остальное. Так как количество вариантов 2^n а каждая проверка занимет n операций, то итоговая сложность $O(n2^n)$.

Task 5

$$\min_x \|x - y\|_2^2$$

$$\textit{s.t.} \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

$$x_i \geq 0$$

Задача выпуклая, условие Слейтера выполняется.
Запишем условие ККТ.

$$L(x, \mu, \lambda) = \|x - y\|_2^2 + \sum_{i=1}^{n} -\mu_i x_i + \lambda \left(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

$$
\begin{aligned}
0 = L(x,\mu,\lambda)'_{x_j} &= 2(x_j - y_j) - \mu_j x_j - \lambda \\
&= x_j(2-\mu_j) - 2y_j - \lambda \\
\Rightarrow x_j &= \frac{2y_j + \lambda}{2-\mu_j}
\end{aligned}
$$

Запишем ограничение и условие дополняющей нежесткости

$$
\begin{cases}
\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{2y_j+\lambda}{2-\mu_j} = 1 \\
\mu_i x_i = \mu_i \frac{2y_i+\lambda}{2-\mu_i} = 0
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{2y_i+\lambda}{2-\mu_i} = 1 \\
\mu_i (2y_i + \lambda) = 0
\end{cases}
$$

Выберем один из 2^n вариантов где либо $\mu_i = 0$ либо $(2y_i + \lambda)$. Тогда мы учтем условие дополняющей нежесткости и при подстановке в первое уравнение у нас останется 1 неизвестная λ которую мы сможем найти. Таким образом снова сложность $O(n2^n)$. Что довольно странно, так как казалось бы геометрически нам необходимо просто спроецировать вектор на соответсвующую плоскость и если он не попал в ограничения, взять соответсвующую точку на границе.

Двойственные задачи

Task 1

$$
\min_x c^T x
$$

$$
\textit{s.t}\; x_i(1-x_i) = 0
$$

$$
Ax \le b
$$

Запишем Ланргражиан

$$
g(\mu,\lambda) = \inf_{x\in D} L(x,\mu,\lambda) = c^T x + \sum_{i=1}^{n} \mu_i (A_i x - b_i) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i (1 - x_i)
$$

$$
L(x,\mu,\lambda)'_{x_j} = c_j + \sum_{i=1}^{n} \mu_i A_{ij} + \lambda_j (1 - 2x_j) = 0
$$

$$
x_j = \frac{c_j + \sum_{i=1}^{n} \mu_i A_{ij} + \lambda_j}{2}
$$

Следовательно двойственная задача

$$
\max_{\mu,\lambda} L([\frac{c_j + \sum_{i=1}^{n} \mu_i A_{ij} + \lambda_j}{2} \textit{ for j in range(n)}], \mu, \lambda)
$$

$$
\textit{s.t.}\; \mu_i \ge 0
$$