

Домашнее задание № 1

Оптимизация 1

AI Masters

1. Выпуклые множества

1. Докажите, что выпуклость множества равносильна тому, что пересечение этого множества с любой прямой есть выпуклое множество.
2. Покажите что множество $\mathcal{C} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^\top \mathbf{x} + c \leq 0\}$ выпукло, если $\mathbf{A} \succ 0$.
3. Опишите в максимально простом виде, что представляет из себя коническая оболочка множества $\{\mathbf{X} \mathbf{X}^\top \mid \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times k}, \text{rank}(\mathbf{X}) = k\}$.
Коническая оболочка множества \mathcal{X} — это множество $\{\sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{x}_i \mid \alpha_i \geq 0, \mathbf{x}_i \in \mathcal{X}\}$.
4. Функция $s_{\mathcal{X}}(\mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \mathbf{y}^\top \mathbf{x}$ называется опорной функцией множества \mathcal{X} . Покажите, что два выпуклых замкнутых множества \mathcal{C}_1 и \mathcal{C}_2 совпадают iff их опорные функции совпадают.
5. Докажите, что множество $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} \leq (\mathbf{c}^\top \mathbf{x})^2, \mathbf{c}^\top \mathbf{x} > 0\}$, где $\mathbf{A} \succ 0$, выпукло.

2. Двойственные конусы

1. Покажите, что экспоненциальный конус \mathcal{K} является конусом (для простой проверки на выпуклость необходимо освоить свойства выпуклых функций, что будет немного позже), найдите его замыкание и двойственный к нему конус

$$\mathcal{K} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y > 0, ye^{x/y} \leq z\}.$$

2. Покажите, что множество $\{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \mathbf{X} = \mathbf{X}^\top, \mathbf{y}^\top \mathbf{X} \mathbf{y} \geq 0, \forall \mathbf{y} \geq 0\}$ является выпуклым замкнутым конусом и найдите его двойственный. Этот конус называется конусом ко-положительных матриц.
3. Покажите, что множество $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq 0\}$ выпуклый замкнутый конус и найдите его двойственный.
4. Пусть \mathcal{K}_1 и \mathcal{K}_2 выпуклые конусы с непустой внутренностью и непересекающиеся. Покажите, что существует вектор \mathbf{y} такой что $\mathbf{y} \in \mathcal{K}_1^*$ и $-\mathbf{y} \in \mathcal{K}_2^*$.