Kutatómunka információs eszközei

Differenciálegyenletek numerikus integrálási módszerei

Írta: Rácz Gergely

graczgeri@gmail.com

Kivonat

A megírt programok a Föld-Hold rendszer mozgásegyenletét oldják meg, numerikus integrálási módszerekkel. Két módszert, az explicit Euler módszert és az adaptív lépéshossz-szabályozott negyedrendű Runge-Kutta-módszert hasonlítottam össze.

Tartalomjegyzék

Ábrák jegyzéke

1. Bevezetés

A Föld-Hold rendszerének mozgását vizsgáltam síkban. A feladat során geocentrikus koordinátákkal dolgoztam. A mozgást Newton általános mozgástörvénye írja le:

$$F = \gamma \frac{m \cdot M}{r^2} \tag{1}$$

Az Euler módszer során a Földet rögzítettem az origóban (0;0), a negyedrendű Runge-Kutta módszer során a Föld és a Hold is szabadon mozoghatott, a megadott kezdőfeltételeknek megfelelően. A feladat tulajdonképpen differenciálegyenletek numerikus integrálása, különböző pontosságú módszerekkel.

2. Program

A programokat C nyelven írtam, először CodeBlocks környezetben a [1] forrás alapján, majd Visual Studio Code-ban pontosítva, alakítva a jelenlegi feladathoz. A program írása közben Git-es verziókövetést használtam, a repositoryt a `https://github.com/graczgeri/foldhold` link alatt lehet elérni. A program írása közben több branchet is létrehoztam, az áttekinthetőség kedvéért, ezeket - miután nem volt rá szükség és illesztettem a master brachbe a megfelelő részeket - töröltem. Az összehasonlítás szemléltetésére gnuplot segítségével plotoltam a kapott adatsorokat. Az egészet CMake segítségével buildeltem. A használat során a [2, 3] forrásokra támaszkodtam. A CMake használata végett külön scriptet írtam az ábrák elkészítésére és egy előre gyártott tex mintát módosítottam a saját felhasználásnak megfelelően. Sajnos a pdf file elkészítése nem sikerült a CMake használatával, így azt külön csináltam meg.

2.1. Euler módszer

Az Euler módszer lényege, hogy δx (általában h-val jelölt) diszkrét lépéshosszal léptetjük a változók értékét. Az összes változót léptetjük egyszerre:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n) \tag{2}$$

Eközben a független változót is léptetjük:

$$x_{n+1} = x_n + h \tag{3}$$

A módszer hibája, hogy ha a derivált a lépés során túl gyorsan változik, akkor a lépésnek relatív nagy lesz a hibája. Sok lépés után nagy lesz az eltérés az analitikus megoldástól, mivel a hiba a lépések számával felösszegződik.

2.2. Runge-Kutta 4 módszer

Az Euler módszer javításának tekinthető a középponti módszer. Maga az Euler módszer aszimmetrikus, mivel a deriváltat mindig az x_n helyen vesszük. A középponti módszer lényege, hogy teszünk egy fél lépést, kiszámoljuk a deriváltat a középső pontban és ezt használjuk a teljes lépés során. A Runge-Kutta módszer ezt használja fel, több lépésben:

$$k_1 = h \cdot f(x_n, y_n) \tag{4}$$

$$k_2 = h \cdot f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1) \tag{5}$$

$$k_3 = h \cdot f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2) \tag{6}$$

$$k_4 = h \cdot f(x_n + h, y_n + k_3) \tag{7}$$

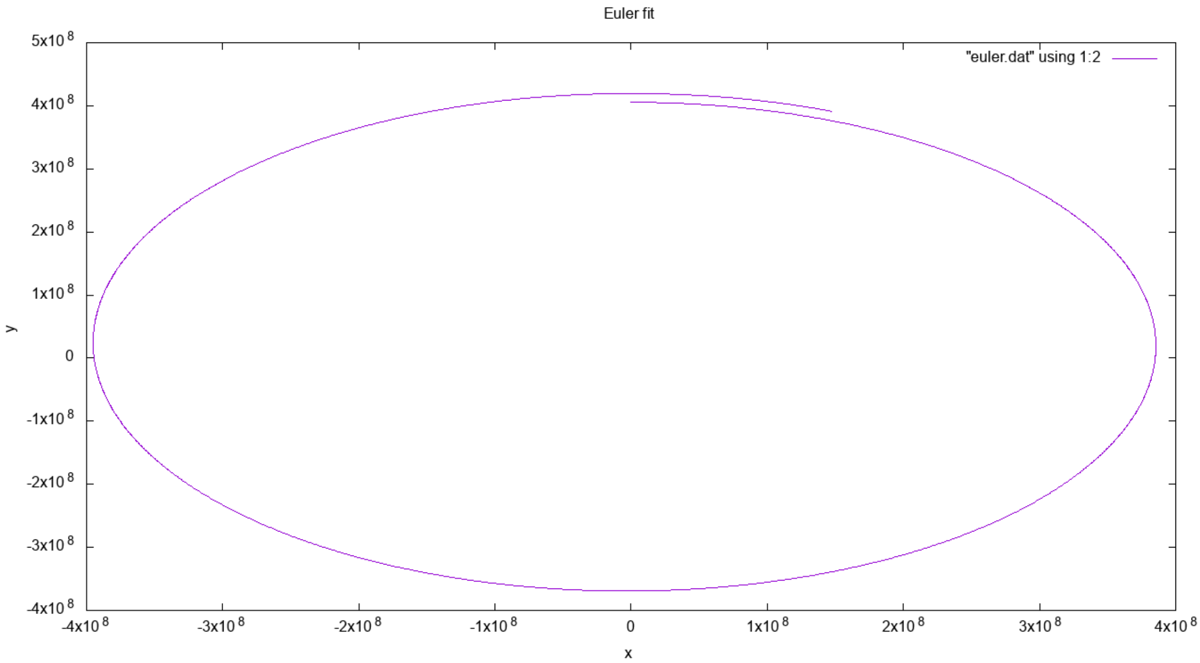
$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4 + O(h^5) \tag{8}$$

Amiben $k_{(1..4)}$ a lépések, $O(h^5)$ pedig a lecsökkent hiba az analitikus eredménytől. A lépések együtthatóit a Butcher-tábla adja.

3. Eredmény

3.1. Euler módszer

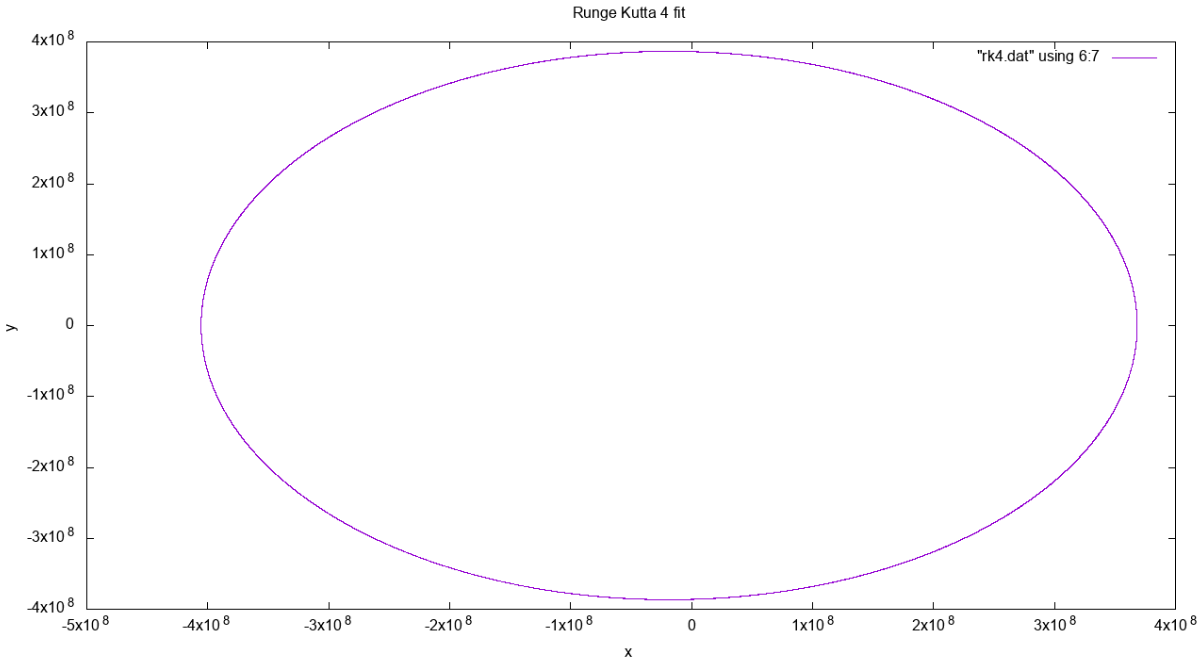
A kiértékelés során a program az euler.dat adattömbbe írta a Hold x és y koordinátáit. A kapott adatokat ábrázolva látható az 1. ábrán a Hold Föld körüli pályája, rögzített Föld és Euler közelítés esetén.



1. ábra. *Euler módszer*

3.2. Runge-Kutta 4 módszer

A kiértékelés során a program egy tömbbe írta a számított adatokat, majd azokat kiírta az rk4.dat adatfileba. A tömb egyszerre tartalmazta az időt, a Föld és Hold x és y koordinátáit, illetve az x és y irányú sebességkomponenseit. A Hold koordinátáit ábrázolva látható a 2. ábrán, hogy sokkal szebben záródik a pálya, mint az Euler módszernél.



2. ábra. *Runge-Kutta 4 módszer*

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni a segítséget a gyakorlatvezetőknek, Bíró Gábornak és Nagy-Egri Máténak!

Hivatkozások

[1] Dobos László. *Fizika numerikus módszerei ii. előadás anyag*. 2017. http://www.vo.elte.hu/~dobos/teaching/default.aspx

[2] Bíró Máté, Nagy-Egri Máté. *Kutatómunka információs eszközei gyakorlat honlap*. 2017. http://gpu.wigner.mta.hu/en/laboratory/teaching/research_work/

[3] Bíró Máté, Nagy-Egri Máté. *Kutatómunka információs eszközei gyakorlati anyag*. 2017. https://github.com/Wigner-GPU-Lab/Teaching/tree/master/KutInf/

Nyilatkozat

Név: Rácz Gergely
ELTE TTK Fizika BSc
Neptun azonosító: GOZ1NP

Beadandó címe:
Differenciálegyenletek numerikus integrálási módszerei

A beadandó feladat szerzőjeként büntetőjogi felelősségem tudatában kijelentem, hogy e dolgozat önálló munkám eredménye, többé-kevésbé saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2017. május 29.

....

a hallgató aláírása