Kutatómunka információs eszközei

Differenciálegyenletek numerikus integrálási módszerei

Írta: Rácz Gergely

graczgeri@gmail.com

Kivonat

A megírt programok a Föld-Hold rendszer mozgásegyenletét oldják meg, numerikus integrálási módszerekkel. Két módszert, az explicit Euler módszert és az adaptív lépéshossz-szabályozott negyedrendű Runge-Kutta-módszert hasonlítottam össze.

Tartalomjegyzék

Ábrák jegyzéke

1. Bevezetés

A Föld-Hold rendszerének mozgását vizsgáltam síkban. A feladat során geocentrikus koordinátákkal dolgoztam. A mozgást Newton általános mozgástörvénye írja le:

$$F = \gamma \frac{m \cdot M}{r^2} \tag{1}$$

Az Euler módszer során a Földet rögzítettem az origóban (0;0), a negyedrendű Runge-Kutta módszer során a Föld és a Hold is szabadon mozoghatott, a megadott kezdőfeltételeknek megfelelően. A feladat tulajdonképpen differenciálegyenletek numerikus integrálása, különböző pontosságú módszerekkel.

2. Programok

2.1. Programok írása

A programokat C nyelven írtam, először CodeBlocks környezetben a [1] forrás alapján, majd Visual Studio Code-ban pontosítva, alakítva a jelenlegi feladathoz. A Visual Studio Code-ban a Microsoft Visual Studio 2017 programjába épített fordító használatával teszteltem a programokat működés közben. A program írása és finomítása során Git-es verziókövetést használtam. Létrehoztam egy repositoryt GitHub-on, amit a `https://github.com/graczgeri/foldhold` link alatt lehet elérni.A Git használatával jól össze tudtam hasonlítani a programrészeket, verziókat, jobban követhető a munka folyamata. Több branch-et is létrehoztam az áttekinthetőség kedvéért, ezeket - miután nem volt rá szükség és illesztettem a master branchbe a megfelelő részeket - töröltem. A két módszer összehasonlításának szemléltetésére gnuplot segítségével plotoltam a kapott adatsorokat. Külön könyvtárszerkezetet hoztam létre a különböző fileoknak (illetve a jegyzőkönyv miatt is). A teljes projektet CMake-kel fogtam össze és buildeltem. A könyvtárszerkezettel együtt, külön CMakeLists file-okat készítettem, az adott könyvtárban végzett feladatokra. A főkönyvtárba így egy egyszerű, pár soros file került, ami az alkönyvtárakat és azokban végzett feladatokat fogta össze. Mivel az exe file nélkül nem tud elkészülni az adatsor, illetve anélkül nincs miből ábrát készíteni, így egymástól függővé tettem a különböző programelemeket. A CMake használata végett külön scriptet írtam az ábrák elkészítésére és egy előre gyártott tex mintát módosítottam a saját felhasználásnak megfelelően. Sajnos a pdf file elkészítése nem sikerült a CMake használatával, így azt külön csináltam meg. A programok fordítása során több library-t is el kell érnie a fordítónak, a gcc azonban nem ismeri fel magától a libm-et, külön -lm kapcsolóval kéne megoldani az elérést a fordításkor. A fordítást

tartalmazó CMakeLists-be írtam egy vizsgáló részt, ami megnézi, hogy felismeri-e a fordító az egyik problémás (pow) függvényt. Ha igen, akkor örül és csinálja tovább a dolgát. Ha nem, akkor megpróbálja linkelni, ha az sem sikerül, akkor pedig hibával kilép a program. A CMake használata során a [2, 3] forrásokra és a [4, 5] fórumokra támaszkodtam.

2.2. Euler módszer

Az Euler módszer lényege, hogy δx (általában h-val jelölt) diszkrét lépéshosszal léptetjük a változók értékét. Az összes változót léptetjük egyszerre:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n) \tag{2}$$

Eközben a független változót is léptetjük:

$$x_{n+1} = x_n + h \tag{3}$$

A módszer hibája, hogy ha a derivált a lépés során túl gyorsan változik, akkor a lépésnek relatív nagy lesz a hibája. Sok lépés után nagy lesz az eltérés az analitikus megoldástól, mivel a hiba a lépések számával felösszegződik.

2.3. Runge-Kutta 4 módszer

Az Euler módszer javításának tekinthető a középponti módszer. Maga az Euler módszer aszimmetrikus, mivel a deriváltat mindig az x_n helyen vesszük. A középponti módszer lényege, hogy teszünk egy fél lépést, kiszámoljuk a deriváltat a középső pontban és ezt használjuk a teljes lépés során. A Runge-Kutta módszer ezt használja fel, több lépésben:

$$k_1 = h \cdot f(x_n, y_n) \tag{4}$$

$$k_2 = h \cdot f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1) \tag{5}$$

$$k_3 = h \cdot f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2) \tag{6}$$

$$k_4 = h \cdot f(x_n + h, y_n + k_3) \tag{7}$$

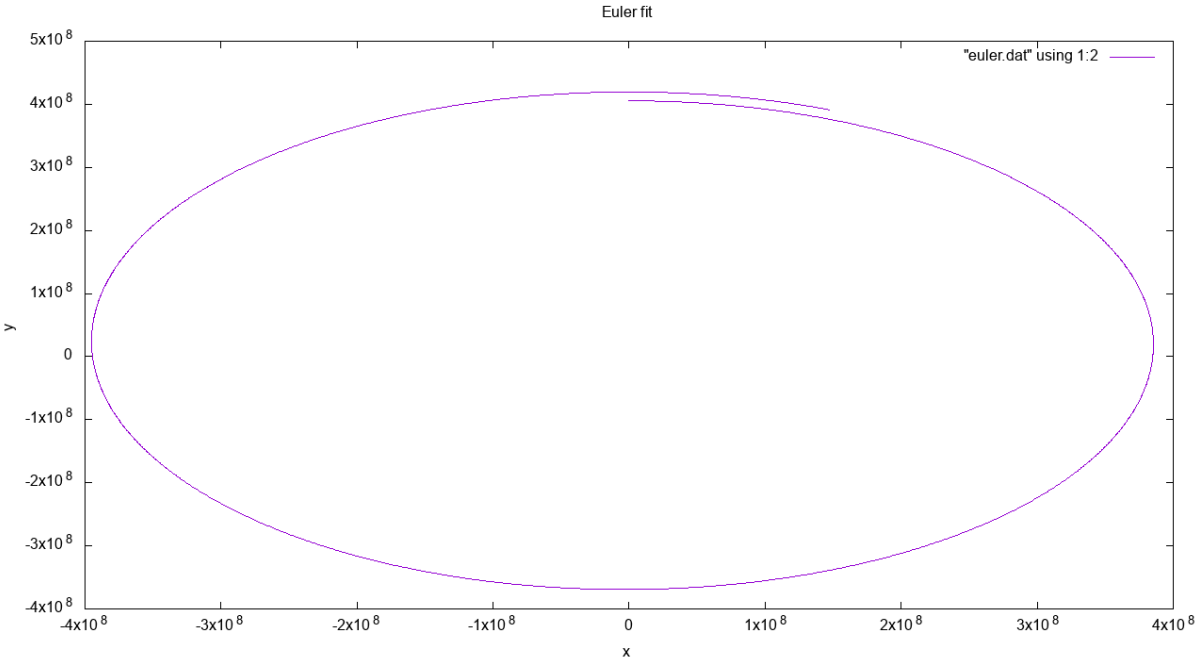
$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4 + O(h^5) \tag{8}$$

Amiben $k_{(1..4)}$ a lépések, $O(h^5)$ pedig a lecsökkent hiba az analitikus eredménytől. A lépések együtthatóit a Butcher-tábla adja.

3. Eredmény

3.1. Euler módszer

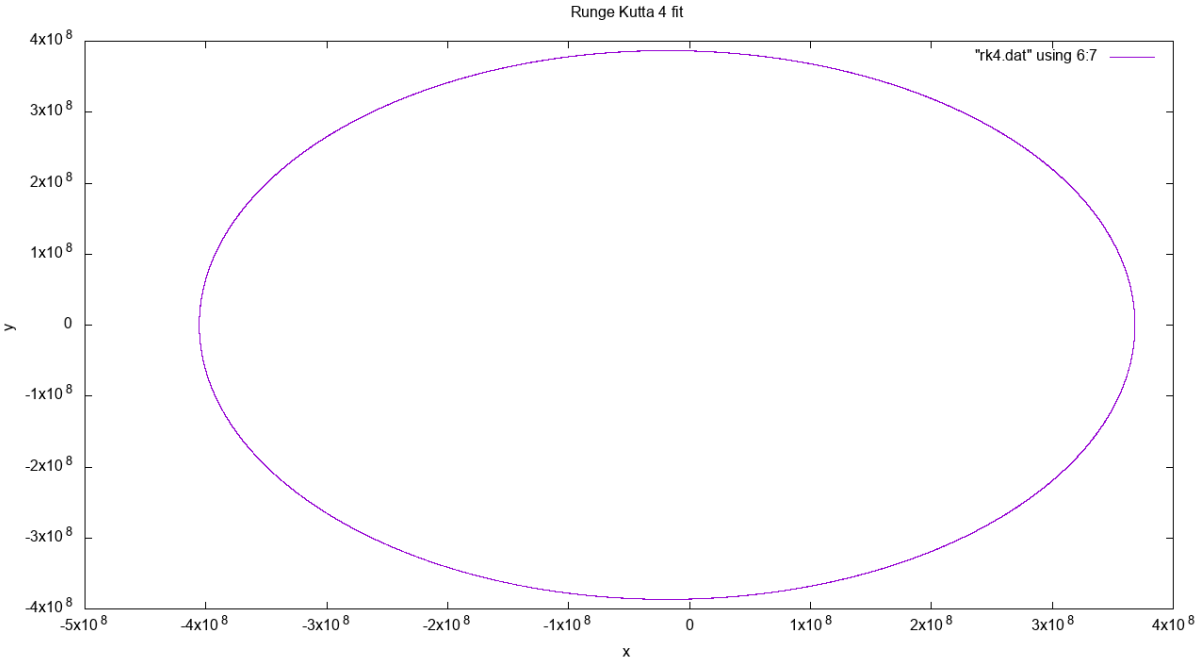
A kiértékelés során a program az euler.dat adattömbbe írta a Hold x és y koordinátáit. A kapott adatokat ábrázolva látható az 1. ábrán a Hold Föld körüli pályája, rögzített Föld és Euler közelítés esetén.



1. ábra. *Euler módszer*

3.2. Runge-Kutta 4 módszer

A kiértékelés során a program egy tömbbe írta a számított adatokat, majd azokat kiírta az rk4.dat adatfileba. A tömb egyszerre tartalmazta az időt, a Föld és Hold x és y koordinátáit, illetve az x és y irányú sebességkomponenseit. A Hold koordinátáit ábrázolva látható a 2. ábrán, hogy sokkal szebben záródik a pálya, mint az Euler módszernél.



2. ábra. *Runge-Kutta 4 módszer*

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni a segítséget a gyakorlatvezetőknek, Bíró Gábornak és Nagy-Egri Mátének!

Hivatkozások

[1] Dobos László. *Fizika numerikus módszerei ii. előadás anyag*. 2017. http://www.vo.elte.hu/~dobos/teaching/default.aspx

[2] Bíró Gábor, Nagy-Egri Máté. *Kutatómunka információs eszközei gyakorlat honlap*. 2017. http://gpu.wigner.mta.hu/en/laboratory/teaching/research_work/

[3] Bíró Gábor, Nagy-Egri Máté. *Kutatómunka információs eszközei gyakorlati anyag*. 2017. https://github.com/Wigner-GPU-Lab/Teaching/tree/master/KutInf/

[4] . https://cmake.org

[5] . https://stackoverflow.com

Nyilatkozat

Név: Rácz Gergely
ELTE TTK Fizika BSc
Neptun azonosító: GOZ1NP

Beadandó címe:
Differenciálegyenletek numerikus integrálási módszerei

A beadandó feladat szerzőjeként büntetőjogi felelősségem tudatában kijelentem, hogy e dolgozat önálló munkám eredménye, többé-kevésbé saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2017. június 2.

.....

a hallgató aláírása