spm29th　微分形式の幾何学

第 3 章　de Rham の定理

3.1 多様体のホモロジー

(a) 単体複体のホモロジー

definition 3.1

$\mathbb{R}^N$ の $l+1$ 個の頂点 $v_0, v_1 \cdots v_l$ に対して、l 本のベクトル $v_i - v_0 \quad (1 \leq i \leq l)$ が一次独立のとき、**一般の位置**にあるという。

一般の位置にある $l+1$ 子の点の集合 σ に対して、それらの点を含む最小の凸集合

$$|\sigma| = \{\sum_{i=0}^{l} a_i v_i \ ; \ a_i \geq 0, \ \sum_{i=0}^{l} a_i = 1\} = |v_0 v_1 \cdots v_l|$$

を l **単体**という。$\tau \subset \sigma$ に対して $|\tau|$ は単体となり、このような単体 $|\tau|$ を $|\sigma|$ **の辺**という.

definition 3.2

$\mathbb{R}^N$ 単体の集合 K は (i)(ii)(iii) を満たすとき、**単体複体**という

(i)$|\sigma| \in K$ ならば $|\sigma|$ の任意の辺 $|\tau|$ は $|\tau| \in K$ を満たす.

(ii)K の単体 $|\sigma|, |\tau|$ の共通部分 $|\sigma| \cap |\tau| \neq \varnothing$ は $|\sigma|, |\tau|$ の共通の辺である.

(iii) 任意の単体 $|\sigma| \in K$ 上の任意の点 x に対して,x のある開近傍 U を適当にとれば U と交わる K の単体は有限個しかない.

definition 3.3

単体複体 K に属するすべての単体の和集合 $|K| \subset \mathbb{R}^N 1$ を**多面体**という.

位相空間 X に対して適当な単体複体 K を選び, 同相写像 $t : |K| \to X$ が与えられたとき, 対 (K, t) を X の**三角形分割**という.

definition 3.4

頂点の集合 V のべき集合 2^V の部分集合 K が (i)(ii) を満たすとき、K を**抽象的単体複体**という.

(i) すべての $v \in V$ に対し $\{v\} \in K$ であり,$\varnothing \notin K$

(ii)$\sigma \in K$ ならば, すべての $\tau \subset \sigma, \ \tau \neq \varnothing$ に対して $\tau \in K$

proposition 3.4

Euclid 単体複体は抽象的単体複体である.

また, V が有限集合ならば, 任意の抽象的単体複体は Euclid 単体複体として実現できる.

definition 3.5

各 l 単体 $|\sigma| = |v_0 v_1 \cdots v_l|$ の頂点 $\{v_0, v_1 \cdots, v_l\}$ に順序を付ける。2 つの順序付けが偶置換で移りあうという同値関係を考えたときに、頂点の順序付けの同値類をその単体の**向き**という.

単体には向きが 2 つ入り, 向きの指定された単体を**向き付けられた単体**といい,$\langle \sigma \rangle$ で表す.

definition 3.6

単体複体の各 l 単体 $|\sigma_i|_{i \in I_l}$ に向きを 1 つ指定し,$\langle \sigma_i \rangle$ を構成する.

$\langle \sigma_i \rangle$ **が生成する自由アーベル群**を $C_l(K)$ として、その群の元 $c = \sum c_i \langle \sigma \rangle_i \in C_l(K)$ を

K の l 次元チェインという. $|\sigma_i|$ に逆の向きを入れたものは $- \langle \sigma_i \rangle$ とする。

definition 3.7

$$\partial : C_l(K) \to C_{l-1}(K) \qquad \partial \langle v_0 v_1 \cdots v_l \rangle = \sum_{i=0}^{l} (-1)^i \langle v_0 \cdots \hat{v_i} \cdots v_l \rangle$$

という準同型写像を**境界作用素**という.

準同型の性質を用いてこれを線形に拡張することで、$c \in C_l(K)$ の演算を定義する.

proposition 3.7

境界作用素は 2 回繰り返すと常に 0 になる

$$\partial \circ \partial = 0$$

これは境界には境界がないことを意味する.

definition 3.8

$$Z_l(K) = \{c \in C_l(K) \ ; \ \partial c = 0\} \qquad B_l(K) = \{\partial c \ ; \ c \in C_{l+1}(K)\}$$

$Z_l(K), B_l(K)$ の元を K の l 次元**サイクル, バウンダリー**という.

また,$B_l(K) \subset Z_l(K)$ より, 商群 $H_l(K) = Z_l(K)/B_l(K)$ を K の l 次元 **(単体的) ホモロジー群**という.

$z \in Z_l(K)$ の代表するホモロジー類は $[z] \in H_l(K)$ と表され, 2 つのサイクル $z, z' \in Z_l(K)$ が同じホモロジー類を表すとき, すなわち $z' - z = \partial c$ となるようなチェイン $c \in C_{l+1}(K)$ が存在するとき, 互いに**ホモローグ**であるという.

proposition 3.8

K のホモロジー群 $H_*(K)$ とは, **チェイン複体** $C_*(K) = \{C_l(K), \partial\}$ のホモロジー群である.
つまり、$H_*(C_*(K)) = H_*(C_*) = H_*(K)$ で簡潔に表せる.

definition 3.9

$\sum c_i \langle\sigma\rangle_i \in C_l(K) \ \ c_i \in \mathbf{Z}$ のとき, $H_*(K)$ は整数係数のホモロジー群 $H_*(K; \mathbf{Z})$ であるという.
一般に, **アーベル群 A を係数とするホモロジー群**はチェイン複体 $C_l(K) \otimes A$ のホモロジーとして定義され, $H_*(K; A)$ と表される.
L を K の部分複体とすると, **相対ホモロジー群** $H_*(K, L; A)$ が $C_*(K) \otimes A / C_*(L) \otimes A$ のホモロジーとして定義される.

definition 3.10

チェイン複体 $C_* = \{C_l, \partial\}$ の双対を**コチェイン複体** $C^* = \{C^l, \delta\} = Hom(C_l, \mathbb{Z})$ で定義する.
双対の境界作用素 $\delta : C^l \to C^{l+1}$ は

$$f \in C^l = Hom(C_l.\mathbb{Z}) \quad , \quad c \in C_{l+1} \quad , \quad \delta f(c) = f(\delta c)$$

という演算となる.

proposition 3.10

双対の境界作用素は 2 回繰り返すと常に 0 となる

$$\delta \circ \delta = 0$$

definition 3.11

$$Z^l(C^*) = \{f \in C^l \ ; \ \delta f = 0\} \qquad B^l(C^*) = \{\delta f \ ; \ f \in C^{l-1}\}$$

$Z^l(C^*), B^l(C^*)$ の元を C^* の l 次元**コサイクル, コバウンダリー**という.
$B^l(C^*) \subset Z^l(C^*)$ より, 商群 $H^l(C^*) = Z^l(C^*)/B^l(C^*)$ を C^* の l 次元 **(単体的) コホモロジー群**という.
$f \in Z^l(C^*)$ の代表するコホモロジー類は $[f] \in H^l(C^*)$ と表され, 2 つのコサイクル $f, f' \in Z^l(C^*)$ が同じコホモロジー類を表すとき, すなわち $f' - f = \delta g$ となるようなコチェイン $g \in C^{l-1}$ が存在するとき, 互いに**コホモローグ**であるという.

proposition 3.11
K のコホモロジー群 $H^*(K)$ とは, **コチェイン複体** $C^*(K) = \{C^l, \delta\}$ のコホモロジー群である.
つまり、$H^*(C^*(K)) = H^*(C^*) = H^*(K)$ で簡潔に表せる.

definition 3.12
Kronecker 積という双 1 次写像は

$$H_l(C_*) \otimes H^l(C^*) \to \mathbb{Z} \qquad ([z],[f]) \mapsto f(z)$$

で定義される.

proposition 3.12
Kronecker 積は well-defind である.

このように (コ) チェインを定義することで、単体複体 K の (コ) ホモロジー群を計算することができることが分かった。しかし、位相空間 X の (コ) ホモロジー群を計算することはまだできない。一般に、位相空間 X は C^∞ 三角形分割 (K,t) を持ち、$X = |K|$ という多面体とみなすことができる。このとき、$X = |K|$ の特異 (コ) ホモロジー群は K の単体的 (コ) ホモロジー群と同型になり、三角形分割の構成に依らないことが示されるので、具体的な位相空間に対しても単体的 (コ) ホモロジー群を求める方法は有効である。次節では、単体的 (コ) ホモロジー群ではない、一般の位相空間に対しての特異 (コ) ホモロジー群を構成する。

(b) **特異ホモロジー**

definition 3.13

$$\Delta^k = \{x = (x_1, \cdots, x_k) \in \mathbb{R}^k \ ; \ x_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{k} a_i \leq 1\}$$

これを**標準的** k **単体**という. 位相空間 X に対して任意の連続写像 $\sigma : \Delta^k \to X$ を X の**特異** k **単体**という.X の特異 k 単体全体によって生成される自由アーベル群を $S_k(X)$ と表し、その元 $c \in S_k(X)$ を X の**特異** k **チェイン**という.

definition 3.14

$i = 0, 1, \cdots, k$ に対して連続写像 $\epsilon_i : \Delta^{k-1} \to \Delta^k$ を

$$\epsilon_0(x_1, \cdots, x_{k-1}) = (1 - \sum_{i=1}^{k-1} x_i, x_1, \cdots, x_{k-1})$$
$$\epsilon_i(x_1, \cdots, x_{k-1}) = (x_1, \cdots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \cdots, x_{k-1})$$

とする. ここで, **境界作用素**は

$$\partial : S_k(X) \to S_{k-1}(X) \qquad \partial\sigma = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \sigma \circ \epsilon_i$$

により定義される.

proposition 3.14

境界作用素は 2 回作用させると常に 0 になる

$$\partial \circ \partial = 0$$

definition 3.15

$S_*(X) = \{S_k(X), \partial\}$ はチェイン複体となり, これを X の**特異チェイン複体**という.
そのホモロジー群を $H_*(S_*(X)) = H_*(X)$ と書き, X の**特異ホモロジー群**という.
また, **コチェイン複体** $Hom(S_*(X), \mathbb{Z}) = S^*(X)$ と書き, そのコホモロジー群 $H^*(S^*(X)) = H^*(X)$ を X の**特異コホモロジー群**という.
一般に, アーベル群 A を係数とする特異ホモロジー群をチェイン複体 $S_*(X) \otimes A$ のホモロジー $H_*(S_*(X) \otimes A) = H_*(X; A)$, 特異コホモロジー群をコチェイン複体 $S^*(X) \otimes A$ のコホモロジー $H^*(S^*(X) \otimes A) = H^*(X; A)$ と書き,X の部分空間 Y の相対的なホモロジー群 $H_*(X, Y; A)$ は $S_*(X) \otimes A / S_*(Y) \otimes A$ のホモロジーとして定義される.

proposition 3.15

$X = |K| = |V|$ である場合, $H_*(X) = H_*(|K|) \cong H_*(K) \cong H_*(V)$ となる. 特に, 単体的コホモロジー群 $H_*(K)$ は位相不変であり, 三角形分割 $(K,t)(V,s)$ の取り方に依らず定まる.

(c) C^∞ **多様体の** C^∞ **三角形分割**

definition 3.16

M を n 次元 C^∞ 多様体とする.n 次元単体複体 K による M の三角形分割 $t : |K| \to M$ は,K の任意の n 単体 $|\sigma|$ に対して,t の $|\sigma|$ への制限 $t|_{|\sigma|}$ が C^∞ **埋め込み**であるとき, C^∞ **三角形分割**という.$t|_{|\sigma|}$ が C^∞ **埋め込み**であるとは,$|\sigma|$ によって貼られる n 次元部分空間の中で $|\sigma|$ のある開近傍 U から M への C^∞ 埋め込みに拡張できることをいう.

theorem 3.17(Cairns J.H.C. Whitehead)

すべての C^∞ 多様体は C^∞ 三角形分割を持つ. また, 境界のある C^∞ 多様体の境界の C^∞ 三角形分割は, 全体の C^∞ 三角形分割に拡張できる.

proposition 3.18

C^∞ 三角形分割 $t : |K| \to M$ により $H_n(M,;\mathbb{Z})$ と $H_n(K;\mathbb{Z})$ を同一視する.
K の n 次元ホモロジー群 $H_n(K;\mathbb{Z})$ は $c_0 = \sum \langle \sigma_i \rangle$ の表すホモロジー類 $[M] \in H_n(M,;\mathbb{Z})$ が生成する無限巡回群である. ここで, $[M]$ を M の基本類という.

theorem 3.19

M を n 次元連結向き付け可能な C^∞ 級閉多様体とする. このとき,

$$H_n(M;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

であり, 向きを指定すると定まる基本類 $[M]$ はこの群の生成元である.

(d) C^∞ 多様体の C^∞ 特異チェイン複体

以下 M は C^∞ 多様体であるとする.

definition 3.20
標準的 k 単体から M への C^∞ 写像 $\sigma : \Delta^k \to M$ を M の C^∞ **特異** k **単体**という.
M の C^∞ 特異 k 単体全体の生成する自由アーベル群を $S_k^\infty(M)$ と表し, その元 $c \in S_k^\infty(M)$ を M の C^∞ **特異** k **チェイン**という. このとき, $S_*^\infty(M) = \{S_k^\infty(M), \partial\}$ は M の特異チェイン複体 $S_*(M)$ の部分複体となり、$S_*^\infty(M)$ を M の C^∞ **特異チェイン複体**という. その双対複体 $Hom(S_*^\infty(M), \mathbb{R}) = S_\infty^*(M)$ を M の $\mathbb{R}$ 係数の C^∞ **特異コチェイン複体**という.

proposition 3.20
包含写像 $S_*^\infty(M) \subset S_*(M)$ は自然な同型 $H_*(S_*^\infty(M)) \cong H_*(S_*(M))$ を誘導する.

3.2 微分形式の積分と Stokes の定理

(a) n 次元多様体上の n 形式の積分

definition 3.21

M の座標近傍からなる局所有限な開被覆 $\{U_i\}$ とそれに従属する 1 の分割 $\{f_i\}$ をとる.
M を向き付けられた n 次元 C^∞ 多様体とし, ω は n 形式で $\mathrm{supp}\ \omega$ がコンパクトなものとする.
このとき,

$$\int_M \omega = \sum_i \int_{U_i} f_i \omega$$

と定義して, U_i の座標関数を選べば積分が定まる. これは微分形式の変換則とヤコビアンの性質より, 座標関数の取り方に依らない. また, 有限個の i を除いて積分値は 0 なので総和が確定する.

proposition 3.21

$\int_M \sigma$ の定義は開被覆やそれに従属する 1 の分割の取り方に依らない. また、積分の線形性がある.

(b) Stokes の定理 (多様体の場合)

theorem 3.22(Stokes の定理)

M を向き付けられた n 次元 C^∞ 多様体, σ を台がコンパクトな $n-1$ 形式とする. このとき,

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

が成立する. ここで, 境界 ∂M には M から誘導された向きを入れるものとする.
証明は教科書 P114,115

proposition 3.22

M を向き付けられた境界を持たない n 次元 C^∞ 多様体, σ を台がコンパクトな $n-1$ 形式とする.
このとき,

$$\int_M d\omega = 0$$

が成立する.

(c) 微分形式のチェイン上の積分と Stokes の定理

M の C^∞ 特異 k 単体 $\sigma : \Delta^k \to M$ による微分形式 $\omega \in A^k(M)$ の引き戻し $\sigma^*\omega$ を考える.

definition 3.23

特異チェイン上での微分形式の積分を考えるために, $\omega \in A^k(M)$ の特異 k 単体 σ 上の積分を

$$\int_\sigma \omega = \int_{\Delta^k} \sigma^*\omega$$

により定義する. 一般の特異チェイン $c = \sum_i a_i\sigma_i \in S_k^\infty(M)$ に対して線形に拡張して

$$\int_c \omega = \sum_i a_i \int_{\sigma_i} \omega = \sum_i a_i \int_{\Delta^k} \sigma^*\omega$$

を得る. これを特異チェイン上の微分形式の積分として定義する.

theorem 3.23 (チェイン上の Stokes の定理)

C^∞ 多様体 M の C^∞ 特異 k チェイン $c \in S_*^\infty(M)$ と $\omega \in A^{k-1}(M)$ に対し,

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega$$

が成り立つ. 証明は教科書 P117,118

3.3 de Rham の定理

(a) de Rham コホモロジー

M は n 次元 C^{∞} 多様体であり, M 上の k 形式全体を $\omega \in A^k(M)$, 外微分作用素 $d : A^k(M) \to A^{k-1}(M)$ と表記する.

definition 3.24
$d\omega = 0$ となるとき**閉形式**, $\omega = d\eta$ となる $\eta \in A^{k-1}(M)$ が存在するとき**完全形式**という.
M 上の閉じた k 形式全体を $Z^k(M)$, 完全な k 形式全体を $B^k(M)$ とすると,

$$Z^k(M) = Ker(d : A^k(M) \to A^{k+1}(M)) \qquad B^k(M) = Im(d : A^{k-1}(M) \to A^k(M))$$

であり, $B^k(M) \subset Z^k(M)$ であり, どちらも $A^k(M)$ の線形部分空間である.

definition 3.25
$H^k_{DR}(M) = Z^k(M)/B^k(M)$ を **M の k 次元 de Rham コホモロジー群**という.
$\omega \in Z^k(M)$ に対し, de Rham コホモロジー群の代表する類を $[\omega] \in H^k_{DR}(M)$ と書き, これを ω の表す **de Rham コホモロジー類**という. また, 直和

$$H^*_{DR}(M) = \bigoplus_{k=0}^{n} H^k_{DR}(M)$$

を **M の de Rham コホモロジー群**という.
これは, コチェイン複体 $\{A^*(M); d\}$ のコホモロジー $H^*(A^*(M); d) = H^*_{DR}(M)$ からも定義できる. このコチェイン複体 $\{A^*(M); d\}$ を **de Rham 複体**という.
一方, $A^*(M)$ には外積の定義する積構造が入っている. この積構造は $H^*_{DR}(M)$ にも次のような積構造を誘導する.
$x \in H^k_{DR}(M)$,$y \in H^l_{DR}(M)$ がそれぞれ $\omega \in Z^k(M)$,$\eta \in H^l_{DR}(M)$ の表す de Rham コホモロジー類のとき,

$$xy = [\omega \wedge \eta] \in H^{k+l}_{DR}(M)$$

という積構造を考える.$\omega \wedge \eta$ は閉形式であり, 積 xy は x, y を表す閉形式の取り方に依らず定まる.
実際, $\omega' = \omega + d\xi$,$\eta' = \eta + d\tau$ という取り方をすると,

$$\omega' \wedge \eta' = \omega \wedge \eta + d((-1)^k \omega \wedge \tau + \xi \wedge d\tau) \qquad yx = (-1)^{kl} xy$$

となるので, 積 xy は同じ de Rham コホモロジー類となることが分かる.
この積構造を M の **de Rham コホモロジー代数**という.

proposition 3.26

M, N を C^∞ 多様体とし $f : M \to N$ を C^∞ 写像とする. このとき,$f^* : A^*(N) \to A^*(M)$ は de Rham コホモロジー代数の準同型写像 $f^* : H^*_{DR}(N) \to H^*_{DR}(M)$ を誘導する.
具体的に, $x = [\omega] \in H^k_{DR}(N)$ と表されているとき, $f^*(x) = [f^*\omega]$ と定義すると $f^*(xy) = f^*(x)f^*(y)$ となることが分かる.

(b) de Rham の定理

M から de Rham 複体 $\{A^*(M), d)\}$ と C^∞ 特異コチェイン複体 $\{S^*_\infty(M), \delta)\}$ という 2 つのコチェイン複体が定義された. 両者を微分形式のチェイン上の積分で関連づける.

definition 3.27

$$I : A^k(M) \to S^k_\infty(M) = Hom(S^\infty_k(M), \mathbb{R}) \qquad I(\omega)(c) = \int_c \omega$$

という写像 $I : A^*(M) \to S^*_\infty(M)$ を定義する.

proposition 3.27

写像 $I : A^*(M) \to S^*_\infty(M)$ はコチェイン写像である. すなわち, $I \circ d = \delta \circ I$ である.

proof

$\omega \in A^k(M)$ を任意の k 形式, $c \in S^*_{k+1}(M)$ を任意の特異 $k+1$ チェインとする.

$$I(d\omega)(c) = \int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega = I(\omega)(\partial c) = \delta I(\omega)(c)$$

が成立するので, $I \circ d = \delta \circ I$ である.

theorem 3.27 (de Rham の定理)

コチェイン写像 $I : A^*(M) \to S^*_\infty(M)$ は同型写像

$$I : H^*_{DR}(M) \cong H^*(S^*_\infty(M)) \cong H^*(S^*(M)) = H^*(M; \mathbb{R})$$

を誘導する.
すなわち,M の de Rham コホモロジーは $\mathbb{R}$ を係数とする特異コホモロジーと同型であり, de Rham コホモロジーは位相不変であることが分かる.

三角形分割 $t : |K| \to M$ が与えられている場合の de Rham の定理について考える.
$\langle\sigma\rangle$ を向き付けられた l 単体とし, $\omega \in A^l(M)$ を M 上の任意の l 形式とする.
多面体 $|K|$ は十分大きな N に対して $\mathbb{R}^N$ の部分空間になるとし,$|\sigma|$ の貼る l 次元の部分空間を L とする.L は $\mathbb{R}^l$ と微分同相であり, そこには $\langle\sigma\rangle$ の向きが誘導する向きが入る.C^∞ 三角形分割の定義から, $t|_{|\sigma|} : |\sigma| \to M$ は $|\sigma|$ の L のなかにおけるある開近傍 U から M への C^∞ 写像に拡張することができるので, $t^*\omega$ は U 情の l 形式と思える.

definition 3.28
$\langle\sigma\rangle$ 上の ω の積分は

$$\int_{\langle\sigma\rangle} \omega = \int_{|\sigma|} t^*\omega$$

で定義され, コチェイン写像 $I : A^*(M) \to C^*(K, \mathbb{R}) \quad I(\omega)(\langle\sigma\rangle) = \int_{\langle\sigma\rangle} \omega$ も定義できる.

theorem 3.28(三角形分割された多様体に対する de Rham の定理)
M を C^∞ 多様体とし, 三角形分割 $t : |K| \to M$ が与えられているものとする. このとき, コチェイン写像 $I : A^*(M) \to C^*(K, \mathbb{R})$ は同型写像 $I : H^*_{DR}(M) \cong H^*(K; \mathbb{R})$ を誘導する.

definition 3.29
$dim(H_k(M; \mathbb{R})) = \beta_k$ を Betti 数という.

(c) Poincare の補題

proposition 3.30 M を C^∞ 多様体とする. $\pi : M \times \mathbb{R} \to M$ を第一成分への射影, $i : M \to M \times \mathbb{R}$ を $i(p) = (p, 0)$ により定義される写像とする. このとき,π の誘導する写像

$$\pi^* : H^*_{DR}(M) \to H^*_{DR}(M \times \mathbb{R})$$

は同型写像であり、$i^* : H^*_{DR}(M \times \mathbb{R}) \to H^*_{DR}(M)$ はその逆写像である.
証明は教科書 P124,125 を参照

proposition 3.31 (Poincare の補題)
$\mathbb{R}^n$ の de Rham コホモロジーは自明である. すなわち, $H^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$, $H^k(\mathbb{R}^n) = 0 \ \ (k \neq 0)$

proposition 3.32

M, N を C^∞ 多様体とする. M から N への 2 つの C^∞ 写像が互いにホモトープならば, それらが誘導する準同型写像 $H^*_{DR}(N) \to H^*_{DR}(M)$ は一致する.

definition 3.33

2 つの C^∞ 多様体 M, N は C^∞ 写像 $f : M \to N$, $g : N \to M$ が存在して, $g \circ f$, $f \circ g$ がそれぞれ M, N の恒等写像にホモトープであるとき, 互いに同じ**ホモトピー型**を持つという.　また 1 点と同じホモトピー型を持つ多様体を**可縮**という.

proposition 3.33 (de Rham コホモロジーのホモトピー不変性)

同じホモトピー型を持つ C^∞ 多様体の de Rham コホモロジーは互いに同型である. 特に可縮な多様体の de Rham コホモロジーは自明である.