Greenの定理とその応用例

2024/12/19

Greenの定理1(3次元)

$$\oint_{\partial\Omega}\phi\nabla\psi d\boldsymbol{S}=\int_{\Omega}(\nabla\phi)(\nabla\psi)dV+\int_{\Omega}\phi\nabla^2\psi dV \tag{1}$$

証明
左辺に発散定理を行う

Greenの定理2(3次元)

$$\oint_{\partial\Omega}(\phi\nabla\psi-\psi\nabla\phi)d\boldsymbol{S}=\int_{\Omega}\phi\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\phi d\Omega \tag{2}$$

証明
(1)式のϕとψを入れ替えて両辺を(1)から引く

応用例

1, 電磁気学 (静電場もしくは積分領域が十分大きい時)

$$\frac{\epsilon_0}{2}\oint_S\phi(\boldsymbol{r})\nabla\phi(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{S}=0=\frac{\epsilon_0}{2}\int_{\Omega}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}\ dV-\frac{1}{2}\int_{\Omega}\phi(\boldsymbol{r})\cdot\rho(\boldsymbol{r})\ dV$$

$$U=\int_{\Omega}u_E(\boldsymbol{r})\ dV=\frac{\epsilon_0}{2}\int_{\Omega}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}\ dV=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\phi(\boldsymbol{r})\cdot\rho(\boldsymbol{r})dV$$

2, 確率保存則

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int\rho(\boldsymbol{r},t)d^3r&=\int(\psi(\boldsymbol{r},t)\frac{\partial\psi^*(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}+\psi^*(\boldsymbol{r},t)\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t})d^3r\\&=-\frac{\hbar}{2mi}\int\psi^*(\boldsymbol{r},t)\nabla^2\psi(\boldsymbol{r},t)-\psi(\boldsymbol{r},t)\nabla^2\psi^*(\boldsymbol{r},t)d^3r\\&=-\frac{\hbar}{2mi}\int_{\partial\Omega}\psi^*(\boldsymbol{r},t)\nabla\psi(\boldsymbol{r},t)-\psi(\boldsymbol{r},t)\nabla\psi^*(\boldsymbol{r},t)d\boldsymbol{S}=-\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{S}\end{aligned}$$

$\int\rho(\boldsymbol{r},t)d^3r$は収束するため、$|\psi(\boldsymbol{r},t)|<|\boldsymbol{r}|^{-\frac{3}{2}-\epsilon}$という境界条件が必要
これを考えると、r$\to\infty$での境界条件より$\frac{d}{dt}\int\rho(\boldsymbol{r},t)d^3r=0\quad\cdots(3)$

$\int\rho(\boldsymbol{r},0)d^3r=1$という規格化条件を付けると、(3)より確率が保存するので、任意の時間tに対して、$\displaystyle\int\rho(\boldsymbol{r},t)d^3r=1$が成立する。