1　多様体

1.1　接ベクトル束

1.1.1　接ベクトル束

一般に、多様体 M 上のベクトル束 E とは、
(i)E から M の上への可微分写像 π が存在する
(ii) 任意の点 $x \in M$ に対し,x 上のファイバー $E_x = \pi^{-1}(x)$ は一定次元のベクトル空間である
(iii) 任意の点 $x \in M$ に対し、近傍 U があり、$\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times R^r$ という微分同相写像が存在する。
を満たすような多様体である。
(iii) は、接ベクトル束 E は局所的に M とファイバー E_x の直積であることを表している。局所的でなく解釈できる例として直積束 $E = M \times R^r$ がある。すなわち、ベクトル束 E は M の各点 x にベクトル空間 $E_x \approx R^r$ がついてるようなものと考えることができる。

1.1.2　変換関数

ベクトル束の定義から変換関数をファイバー上に導入する
$x \in U_\alpha \cap U_\beta$ に対して、E_x から R^r 同型写像が

$$\varphi_\alpha(x) : E_x \to R^r \qquad \varphi_\beta(x) : E_x \to R^r$$

のように存在する。ここで

$$\psi_{\alpha\beta}(x) = \varphi_\alpha(x) \circ \varphi_\beta^{-1}(x) \quad : R^r \to R^r$$

という写像を考えると、これは U_β の局所座標表示から U_α の局所座標表示への変換となる。
これを $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ で動かすと、

$$\psi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(r, R)$$

が得られる。この写像の族を E の変換関数と呼ぶ。
変換関数の性質として

$$\psi_{\alpha\beta}(x) \circ \psi_{\beta\gamma}(x) = \psi_{\alpha\gamma}(x) \qquad x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$$

がある。これは変換関数の定義より明らかである。逆に、M の被覆と変換関数の性質を満たすような写像 $\psi_{\alpha\beta}$ が与えられたとき、$\psi_{\alpha\beta}$ を変換関数に持つベクトル束 E が作れる。(教科書 3 ページを参照。ファイバー上の変換関数で移れる点を同一視する同値関係で直積ファイバー束の直和を割るとベクトル束 E が得られる。)

1.1.3 変換関数の例

・接ベクトル束 TM

$(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ を $x \in U_\alpha$ の局所座標系、$(y^1, y^2, \cdots, y^n)$ を $x \in U_\beta$ の局所座標系とする。
このとき、接ベクトル $X \in T_xM$ は基底を表示すると

$$X = \sum a^i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum b^i \frac{\partial}{\partial y_j}$$

と表せる。chain-rule を使うと

$$a^i = \sum \frac{\partial x^i}{\partial y^j} b^j$$

と、ヤコビアンを用いて表せる。このヤコビアンはファイバー T_xM 上の変換関数の例であり、ヤコビアンの積に関する性質より変換関数の性質も満たすことが分かる。

・余接ベクトル束 T^*M

$(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ を $x \in U_\alpha$ の局所座標系、$(y^1, y^2, \cdots, y^n)$ を $x \in U_\beta$ の局所座標系とする。
このとき、余接ベクトル $df \in T_x^*M$ は基底を表示すると

$$df = \sum a_i dx^i = \sum b_j dy^j$$

と表せる。chain-rule を使うと

$$a_i = \sum \frac{\partial y^j}{\partial x^i} b_j$$

となる。これは接ベクトル TM とは逆の変換則を満たす変換関数の一例である。

1.2　流れと Lie 微分

　X を M のベクトル場とする。X の積分曲線 $x(t) \in M$ とは、$x(t)$ における接ベクトルが $X \in T_xM$ となるようなものである。(U, φ) が与えられたとき

$$\frac{dx(t)}{dt}|_{t=t_0} = X(x(t))$$

局所座標系を使うと

$$\frac{dx(t)}{dt}|_{t=t_0} = \frac{d\varphi(x(t))}{\partial x^\mu}\frac{dx^\mu}{dt} = \frac{d\varphi(x(t))}{\partial x^\mu}X^\mu$$

より、

$$\frac{dx^\mu}{dt} = X^\mu$$

となる。
この t は一般に $(-\epsilon + t_0, \epsilon + t_0)$ の局所的な範囲のみを動くが、M がコンパクト多様体ならば積分曲線は任意の $t \in R$ で**大域的に**存在することが知られている。

$\sigma(t, x_0)$ を多様体上の X の積分曲線とすると

$$\frac{d\sigma(t)}{dt} = X(\sigma(t))$$

初期条件は $\sigma(0, x_0) = x_0$ である。
写像 $\sigma : R \times M \to M$ は $X \in \mathfrak{X}$ によって生成される**流れ**という。

ピカール・リンデレフの定理
X が連続的でかつリプシッツ連続ならば解 $\sigma(t, x_0)$ は局所的に**一意**に存在する。また、M がコンパクト多様体ならば大域的に存在する。

流れの性質

$$\sigma(t, \sigma(s, x_0)) = \sigma(t + s, x_0)$$

証明

$$\frac{d\sigma(t+s, x_0)}{dt} = \frac{d\sigma(t+s, x_0)}{d(t+s)} = X(\sigma(t+s, x_0))$$

$$\frac{d}{dt}\sigma(t, \sigma(s, x_0)) = X(\sigma(t, \sigma(s, x_0)))$$

初期条件 $\sigma(s, x_0)$ も同じなので、上 2 つの式は同じ微分方程式となる。ピカール・リンデレフの定理より解は一意に存在するので $\sigma(t, \sigma(s, x_0)) = \sigma(t + s, x_0)$ となることが示された。