Lie代数と表現論ノート

J.E. Humphreys　Introduction to Lie Algebras and Representation Theory

Humphreysの行間埋めノートです　作成日　2025/12/13

目次

1 Chapter I BASIC CONCEPTS

1.1 Definitions and first examples

1.1.1 The notion of Lie algebra

Definition 1.1 Lie 代数

体 $\mathbb{F}$ 上のベクトル空間 L で

$$[\ ,\ ] : L \times L \to L \qquad (x, y) \mapsto [x, y]$$

という**ブラケット (btaket)** が定義され, 次の性質

(L1)$[\ ,\ ]$ が**双線形写像**

つまり, $\forall x, y, z \in L \quad , \forall \lambda_i \in \mathbb{F}$ に対し

$$[\lambda_1 x + \lambda_2 y, z] = \lambda_1 [x, z] + \lambda_2 [y, z]$$
$$[x, \lambda_1 y + \lambda_2 z] = \lambda_1 [x, y] + \lambda_2 [x, z]$$

が成立する.

(L2)$\forall x \in L$ に対し

$$[x, x] = 0$$

が成立する.

(L3)$\forall x, y, z \in L$ に対して **Jacobi 恒等式**

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

が成立する.

を満たす $(L, [,])$ を **Lie 代数**という.

(L1)(L2) から

$$[x + y, x + y] = [x, x + y] + [y, x + y] = [x, y] + [y, x] = 0$$

が成立するので, 任意の $\forall x, y \in L$ に対して Lie braket は**反可換**

$$[x, y] = -[y, x]$$

であることが分かる. また, **(L2) を忘れ**, 反可換性と双線形性を仮定することで

$$[x, x] = -[x, x] \Leftrightarrow [x, x] = 0$$

が言える. これは (L2) そのものなので, **反可換性と (L2) は同値**であることが言える.

Lie 代数の例として以下のようなものがある.

Example 1.1　Lie 代数の例

(1) $\mathbb{R}^3$ と外積 $(\mathbb{R}^3, \times)$
(2) 一般線形 Lie 代数 $\mathfrak{gl}(V) = (\mathrm{End}\ V, [\ ,\ ])$
(3) 特殊線形 Lie 代数 $\mathfrak{sl}(V)$
(4) symplectic Lie 代数 $\mathfrak{sp}(V)$
(5) 直交代数 $\mathfrak{o}(V)$
(6) ベクトル場 (多様体論) $(\mathfrak{X}(M), [\ ,\ ])$　特に, Lie 群の原点 e での接空間 T_eG
(7) 相空間上の関数全体と poisson 括弧 (解析力学) $(C^\infty(TQ^*), \{\ ,\ \})$

proof

(1) **外積**
$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^3$ に対して, 外積 $\times$ は明らかに双線形性を満たし,

$$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

であり, **ベクトル 3 重積 (vector triple product)**

$$(\boldsymbol{x} \times (\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{z})) + (\boldsymbol{y} \times (\boldsymbol{z} \times \boldsymbol{x})) + (\boldsymbol{z} \times (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y})) = \boldsymbol{0}$$

を満たす.

(2) **一般線形 Lie 代数**
交換子 $[\ ,\ ] : \mathrm{End}\ V \times \mathrm{End}\ V \to \mathrm{End}\ V$ を

$$[f, g] = f \circ g - g \circ f = fg - gf$$

で定義する. これは一般に非可換である.
このとき, 明らかに双線形性と $[f, f] = 0$ を満たし

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = fgh - ghf - fhg + hgf + ghf - hfg - gfh + fhg + hfg - fgh - hgf + gfh = 0$$

を満たすので, これは Lie 代数である.
また, End V に交換子がついたこの Lie 代数を一般線形代数と呼び, $\mathfrak{gl}(V)$ で表す.
また, V が有限次元ベクトル空間の場合では基底をあらわに書けるので, 線形変換を考えると

$$\mathrm{End}\ V \simeq M(n, \mathbb{F})$$

となることが分かる. ここで $\dim V = n$ とした.

(3) から (5) は省略する. 線形 Lie 群のときに証明する.

(6) **ベクトル場**
任意の $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して braket を

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf) \qquad \forall f \in C^\infty(M)$$

で定義する. ここで一般に $XY \notin \mathfrak{X}(M)$ であるが, $[X,Y] \in \mathfrak{X}(M)$ となることに注意する必要がある.
実際, 座標近傍を $(U, x_1, \cdots x_n)$ として $[X,Y]$ の局所座標表示を考えると $X|_U = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $Y|_U = \sum b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ として

$$[X,Y]|_U = \sum_i \sum_j \left(a_j \frac{\partial b_j}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_j}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_U \in \mathfrak{X}(U)$$

となるので, braket はベクトル場で閉じること

$$[\ ,\ ] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M) \qquad (X,Y) \mapsto [X,Y]$$

が確かめられる.
また, 定義より双線形性が成り立ち, **jacobi 恒等式**

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$$

が成立する. この $0 \in \mathfrak{X}(M)$ は M の各点 p にゼロベクトルを対応させるベクトル場である.
Jacodi 恒等式の証明は (2) と同じのため省略する.

(7) **相空間上の関数全体と Poisson 括弧**
ポアソン括弧 (Poisson braket) の定義にはハミルトンベクトル場 X_g, Y_f と symplectic 2 形式 Ω の symplectic 内積

$$\{f,g\}_p = \langle \Omega | X_g, Y_f \rangle = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} \right)$$

で定義できるが, 一般的な解析力学では symplectic 内積の結果のみを用いて

$$\{f,g\}_p = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} \right)$$

で Poisson 括弧 $\{,\} : C^\infty(TQ^*) \times C^\infty(TQ^*) \to C^\infty(TQ^*)$ を定義する.
ここで, $C^\infty(TQ^*)$ は相空間上の関数全体の集合とする.
Poisson 括弧は明らかに双線形性があり, $\{f,f\}_p = 0$ となる.
また, これも任意の $f,g,h \in C^\infty(TQ^*)$ に対して Jacobi 恒等式

$$\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$$

が成り立つ. 証明は計算するだけなので省略する.

Definition 1.2　Lie 代数の同型

L, L' を体 $\mathbb{F}$ 上の Lie 代数とする.
ベクトル空間上の**同型** $\phi : L \to L'$ があり, 任意の $\forall x,y \in L$ に対して

$$\phi([x,y]) = [\phi(x), \phi(y)]$$

が成立するとき, Lie 代数 L, L' は**同型**といい, ϕ を Lie 代数の同型ともいう.

1.1.2 Linear Lie algebras

Definition 1.3 部分 Lie 代数

$\mathbb{F}$ 上の Lie 代数 L の部分集合 $K \subset L$ が**部分 Lie 代数**であるとは, 任意の $\forall a, b \in K$ に対して

$$[a, b] \in K \subset L$$

が成り立つことである.

この braket は Lie 代数 L に付随するものである. 次に**線形 Lie 代数**と呼ばれる $\mathfrak{gl}(V)$ の部分 Lie 代数を考える.

Definition 1.4 線形 Lie 代数

線形 Lie 代数とは, 一般線形代数 $\mathfrak{gl}(V)$ の部分 Lie 代数である.

$\mathfrak{gl}(V)$ の部分 Lie 代数なので, braket は交換子 $[f, g] = fg - gf$ で定義される.
線形 Lie 代数には以下のようなものがある.

Example 1.4 線形 Lie 代数の例

(1) 特殊線形 Lie 代数 $\mathfrak{sl}(V) = \{X \in \mathfrak{sl}(V) \mid \mathrm{Tr}(X) = 0\}$
(2) 直交 Lie 代数 $\mathfrak{so}(V) = \{X \in \mathfrak{so}(V) \mid X^T = -X\}$
(3) 狭義上三角行列 $\mathfrak{t}(n, \mathbb{F}) = \{X \in \mathfrak{t}(n, \mathbb{F}) \mid X \in$ 狭義上三角行列全体の集合 $\}$
(4) 上三角行列 $\mathfrak{n}(n, \mathbb{F}) = \{X \in \mathfrak{n}(n, \mathbb{F}) \mid X \in$ 上三角行列全体の集合 $\}$
(5) 対角行列 $\mathfrak{d}(n, \mathbb{F}) = \{X \in \mathfrak{d}(n, \mathbb{F}) \mid X \in$ 対角全体の集合 $\}$

proof

(1)$\forall X, Y \in \mathfrak{sl}(V)$ に対して

$$\mathrm{Tr}[X, Y] = \mathrm{Tr}(XY - YX) = \mathrm{Tr}(XY) - \mathrm{Tr}(YX) = 0$$

より, $[X, Y] \in \mathfrak{sl}(V)$ よって, $\mathfrak{sl}(V)$ は線形 Lie 代数である.

(2)$\forall X, Y \in \mathfrak{so}(V)$ に対して

$$([X, Y])^T = (XY - YX)^T = Y^T X^T - X^T Y^Y = YX - XY = -[X, Y]$$

より, $[X, Y] \in \mathfrak{so}(V)$ よって, $\mathfrak{so}(V)$ は線形 Lie 代数である.

(3)$\forall X, Y \in \mathfrak{t}(n, \mathbb{F})$ に対して

$$[X, Y] = XY - YX \in \mathfrak{n}(n, \mathbb{F}) \subset \mathfrak{t}(n, \mathbb{F})$$

より, $[X, Y] \in \mathfrak{t}(n, \mathbb{F})$ よって, $\mathfrak{t}(n, \mathbb{F})$ は線形 Lie 代数である.

(4)$\forall X, Y \in \mathfrak{n}(n, \mathbb{F})$ に対して

$$[X, Y] = XY - YX \in \mathfrak{n}(n, \mathbb{F})$$

より, $[X, Y] \in \mathfrak{n}(n, \mathbb{F})$ よって, $\mathfrak{n}(n, \mathbb{F})$ は線形 Lie 代数である.

(5)$\forall X, Y \in \mathfrak{d}(n, \mathbb{F})$ に対して

$$[X, Y] = XY - YX = 0 \in \mathfrak{d}(n, \mathbb{F})$$

より, $[X, Y] \in \mathfrak{d}(n, \mathbb{F})$ よって, $\mathfrak{d}(n, \mathbb{F})$ は線形 Lie 代数である.

1.1.3 Lie algebras of derivations

Definition 1.5　$\mathbb{F}$-代数

$\mathfrak{U}$ を $\mathbb{F}$ 上ベクトル空間とする. このとき, 二項演算

$$\star : \mathfrak{U} \times \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$$

が定義されていて, $\forall x, y, z \in \mathfrak{U}$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$ に対して**双線形性**

$$x \star (\lambda_1 y + \lambda_2 z) = \lambda_1 x \star y + \lambda_2 x \star z$$
$$(\lambda_1 y + \lambda_2 z) \star x = \lambda_1 y \star x + \lambda_2 z \star x$$

を満たすとき, $\mathfrak{U}$ を **$\mathbb{F}$-代数**という.

Lie 代数 L にも双線形性を持つ二項演算 $L \times L \to L$ として braket があるので, **Lie 代数も $\mathbb{F}$-代数**である.

Definition 1.6　$\mathbb{F}$-代数における微分

$\mathbb{F}$ 代数 $\mathfrak{U}$ における**微分**とは, 線形写像 $\delta : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$ で $\forall a, b \in \mathfrak{U}$ に対して
Leibniz 則

$$\delta(a \star b) = \delta(a) \star b + a \star \delta(b)$$

を満たすものである.
また, $\mathfrak{U}$ の微分全体を Der $\mathfrak{U}$ と呼び, これは End $\mathfrak{U}$ の部分ベクトル空間である.

より強く, Der $\mathfrak{U}$ は**線形 Lie 代数**, つまり $\mathfrak{gl}(\mathfrak{U})$ の部分 Lie 代数と言える.

proof

$\forall d, \delta \in \mathrm{Der}\mathfrak{U}$,$\forall a, b \in \mathfrak{U}$ に対して

$$\begin{aligned}
[d, \delta](a \star b) &= d\delta(a \star b) - \delta d(a \star b) \\
&= d\left(\delta(a) \star b + a \star \delta(b)\right) - \delta\left(d(a) \star b + a \star d(b)\right) \\
&= (d\delta - \delta d)(a) \star b + a \star (d\delta - \delta d)(b) \\
&= [d, \delta](a) \star b + a \star [d, \delta](b)
\end{aligned}$$

が成り立つ. よって, Der $\mathfrak{U}$ は線形 Lie 代数であることが示された.

Lie 代数としての Der $\mathfrak{U}$ を**微分代数** (derivation algebra) という.

Example ad x
次に $\mathbb{F}$-代数をより狭く Lie 代数として微分代数 Der L を考える. $\mathbb{F}$-代数の 2 項演算 $\star$ を braket[,] として考える.

ここで, 次のような線形写像は Lie 代数の種類によらず Der L の元であると言える.
$x \in L$ を任意に固定して

$$\mathrm{ad}\ x : L \to L \qquad y \mapsto [x, y]$$

という線形写像を考える. このとき **Jacobi 恒等式**から

$$\mathrm{ad}\ x([y, z]) = [x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x.z]] = [\mathrm{ad}\ x(y), z] + [y, \mathrm{ad}\ x(z)]$$

が言えるので, ad $x \in$ Der L となる.
つまり, braket[,] は Lie 代数の条件である **Jacobi 恒等式**考えることで本質的に**微分**と同じ役割を持てることが分かる. ad x の形で書ける微分代数の元を**内部微分**といい, そうでない元を**外部微分**という.

似たような話は代数以外にも表れる.

Example 1 Lie 微分 (多様体論)
φ_t をベクトル場 X で生成されるフロー (flow) とする.
このとき, ベクトル場の **Lie 微分**を

$$\mathcal{L}_X Y = \lim_{t \to 0} \frac{(\varphi_{-t})_* Y - Y}{t}$$

で定義すると

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$$

を満たすことが分かる. (証明は松本多様体 §17 補足 を参照)
ベクトル場 $\mathfrak{X}(M)$ は交換子で Lie 代数を構成するので,

$$\mathcal{L}_X([Y, Z]) = [X, [Y, Z]] = [\mathcal{L}_X Y, Z] + [Y, \mathcal{L}_X Z]$$

を満たすことが分かる. これは ad を $\mathcal{L}$ に変えた式であるが, Lie 微分の微分としての性質を braket が保証しているとも言うことができるだろう.

Example 2 Poisson 括弧 (解析力学, 量子力学)
簡単のため, 総空間上の関数は時間に陽に依存しないとする. Poisson 括弧も相空間 (phase spase) 上の関数全体を Lie 代数とすることが分かる.
この事実と微分代数の知識から, Poisson 括弧も微分としての役割を持つことが予測される.
実際, Leibniz 則

$$\{fg, h\}_p = f\{g, h\}_p + g\{f, h\}$$

を満たすことが計算により確かめられる. Poisson 括弧と微分の性質として, 正準力学の重要な方程式である

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\}$$

がある. この式は, Poisson 括弧が微分としての役割を持つことを保証しており, さらに系の時間発展に対する物理量の**保存**を示唆していることが分かる. 実際, この式は Lie 微分の式と本質的に同じことを言っており, 解析力学を symplectic 幾何学を用いて定式化する際には Hamilton ベクトル場によって生成されるフローを考え, その軌道上で物理量の保存を議論することができる. これは Lie 代数のノートなので詳しくは述べないが, 多様体論で以下のような補題がある.

補題

X, Y を完備なベクトル場とする.
$[X, Y] = 0$ であるための必要十分条件は, $\forall t \in \mathbb{R}$ について $(\varphi_t)_* Y = Y$ が成り立つことである.

また, 正準量子化を通して量子力学に対しても同じようなことが言える. (無限次元であるが)
Heisenberg の運動方程式

$$\frac{d\hat{\mathcal{O}}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{\mathcal{O}}, \hat{H}]$$

ここに出現する交換子も

$$[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}]$$

という Leibniz 則を満たす.
この関係は量子力学の演算子の計算に対して以下のような応用が利く.

$$[A, B^n] = \sum_{k=0}^{n-1} B^k [A, B] B^{n-1-k}$$

特に,$[A, B]$ が定数 (c 数) の場合は

$$[A, B^n] = n[A, B]B^{n-1}$$

が成り立つので, 演算子による展開を考えると

$$[A, f(B)] = [A, B]\frac{df}{dB}$$

が言える. 例えば

$$[\hat{x}, \sin(\hat{p})] = i\hbar \frac{\partial \sin(p)}{\partial p} = i\hbar \cos(\hat{p})$$

が成り立つ.

1.1.4 Abstract Lie algebras

1.2 Ideals and homomorphisms

1.2.1 Ideals

1.2.2 Homomorphisms and representations

1.2.3 Automorphisms

1.3 Solvable and nilpotent Lie algebras

1.3.1 Solvability

後で書きます

1.3.2 Nilpotency

Definition 3.2 冪零 Lie 代数

L を Lie 代数とする. L に対して

$$L^0 = L \quad L^1 = [L, L] \quad L^i = [L, L^{i-1}]$$

のような減少列

$$L = L^0 \supset L^1 \supset L^2 \supset \cdots \supset L^i \supset \cdots$$

を定義する. この減少列が $\{0\}$ で止まるとき, すなわち

$$L^{N-1} \neq 0 \qquad L^N = [L, L^{N-1}] = 0$$

となる $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ が存在するとき, L を**冪零 (Nilpotent)Lie 代数**という.

注意: L の微分列から定義される $L^{(i)}$ と区別するために括弧 () を付けないようにする.

また, 帰納的に考えることで

$$L^{(1)} = [L, L] = L^1 \qquad L^{(2)} = [L^1, L^1] \subset [L, L^1]$$

より

$$L^{(i)} = [L^{(i-1)}, L^{(i-1)}] \subset [L, L^{i-1}] = [L.L^i]$$

が得られる. また, L がべき零 Lie 代数のとき, 定義から任意の $x \in L$ に対して ad x がべき零となることが分かる. この逆を言えるのが次節で証明する **Engel の定理**である. これは Lie 代数のべき零性を ad で特徴付けている.

Proposition 3.2 冪零 Lie 代数の性質

L を Lie 代数とする. また $f : L \to K$ を Lie 準同型とする.

(a)L がべき零 Lie 代数ならば L の任意の部分 Lie 代数 A は冪零 Lie 代数である.

　また, Imf もべき零 Lie 代数となる.

(b)L がべき零 Lie 代数ならば, 任意の L のイデアル I に対して構成される商 Lie 代数 L/I もべき零 Lie 代数となる.

(c)$L/Z(L)$ がべき零 Lie 代数ならば, L もべき零 Lie 代数である.

(d)L が非零のべき零 Lie 代数ならば, $Z(L) \neq 0$ である.

proof

(a) L のべき零性より, $L^N = 0$ となる $N > 0$ が存在する. また, $A \subset L$ なので, A に関する減少列を考えることで帰納的に $A^i \subset L^i$ となる. よって, $A^N = 0$ となる $N > 0$ は存在するので A もべき零 Lie 代数である. f は Lie 準同型なので,

$$f(L^1) = f([L, L]) = [\mathrm{Im} f, \mathrm{Im} f] = (\mathrm{Im} f)^1$$

となる. 帰納的に考えると

$$f(L^i) = [\mathrm{Im} f, f(L^{i-1})] = (\mathrm{Im} f)^i$$

が言えるので, L がべき零 Lie 代数ならば $(\mathrm{Im} f)^N = 0$ となる $N > 0$ が存在する.
よって, Im f はべき零 Lie 代数である.

(b) 射影 $\pi : L \to L/A \quad x \mapsto x + A$ は Lie 準同型写像である．実際, $\forall x, y \in L \quad \forall a, b \in \mathbb{K}$ に対して

$$\pi(ax + by) = ax + by + A = a(x + A) + b(y + A) = a\pi(x) + b\pi(y)$$

$$\pi([x, y]) = [x, y] + A = [x + A, y + A] = [\pi(x), \pi(y)]$$

が成立することが確かめられる.
よって, (a) より $\mathrm{Im}\ \pi = L/A$ はべき零 Lie 代数となる.

(c) $L/Z(L)$ のべき零性より, $(L/Z(L))^N = 0$ となる $N > 0$ が存在する.
準同型な射影 $\pi : L \to L/Z(L)$ を考えると, (a) より

$$(L/Z(L))^N = (\mathrm{Im}\ \pi)^N = \pi(L^N) = 0$$

なので, $L^N \subset Z(L)$ である．L の減少列を考えると L^N は中心に入るので

$$L^{N+1} = [L, L^N] = 0$$

となる．よって, L はべき零 Lie 代数となる.

(d) L はべき零 Lie 代数なので, $L^{N-1} \neq 0,\ L^N = 0$ となるような $N > 0$ が存在する．ここで, 中心の定義より

$$L^N = [L, L^{N-1}] = 0 \qquad L^{N-1} \subset Z(L)$$

となるので, $Z(L) \neq 0$ であることが示された.

1.3.3 Proof of Engel's Theorem

Engel の定理を示す前にいくつかの重要な補題を示す.

Lemma 3.3.1

$x \in \mathfrak{gl}(V)$ がべき零ならば, $\mathrm{ad}x \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{gl}(V))$ もべき零である

proof

べき零性より, $x^N = 0$ となる $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ が存在する.
x による左移動, 右移動を

$$\lambda_x : \mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}(V) \quad (y \mapsto xy)$$

$$\rho_x : \mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}(V) \quad (y \mapsto yx)$$

とする.
$(\lambda_x^N)y = x^N y, \quad (\rho_x^N)y = yx^N$ より, x のべきゼロ性から λ_x, ρ_x もべき零.
また, 任意の $y \in \mathfrak{gl}(V)$ に対して $\mathrm{ad}\, x(y) = [x, y] = (\lambda_x - \rho_x)(y)$ となるので

$$\begin{aligned}(\mathrm{ad}\, x)^{2N} &= (\lambda_x - \rho_x)^{2N} \\ &= \sum_{k=0}^{2N} \binom{2N}{k} (\lambda_x)^k (-\rho_x)^{2N-k}\end{aligned}$$

$\sum$ の第 $0 \sim N$ 項で ρ_x のべき零性, 第 $N \sim 2N$ 項で λ_x のべき零性が現れるので $(\mathrm{ad}\, x)^{2N} = 0$
よって, $\mathrm{ad}\, x \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{gl}(V))$ はべき零である． $\square$
また, ρ_x, λ_x のべき零性より ad $x^{2N-1} = 0$ ともなれる.

Theorem 3.3.2

$V \neq \{0\}$ を有限次元ベクトル空間, $\mathfrak{gl}(V)$ の任意の部分 Lie 代数を L とする.
このとき, 任意の $x \in L$ がべき零ならば, ある $v \in V \setminus \{0\}$ が存在して, 任意の $x \in L$ に対して $x(v) = 0$ を満たす.

step of proof

$\dim L = 0$ のときは明らか. $\dim V$ に関する数学的帰納法で示す.
step1:
L の部分 Lie 代数を $K \subsetneq L$ とする. $\dim L \leq m-1$ で Theorem 3.3.2 が成立すると**仮定**すると, $K \subsetneq N_L(K)$ となることを示す.
step2:
K を極大部分 Lie 代数とすると, $N_L(K) = L$ となり, $\dim L - \dim K = 1$ であることを示す.
step3:
$W = \{v \in V \mid \forall y \in K,\ y(v) = 0\ \}$ が step2 から nonzero な V の部分ベクトル空間であることを示し, その元を用いて v を構成すると題意を満たすようなものの存在性を示すことができる.

proof

$\cdot$ $\dim V = 0$ のとき $L = \{0\}$ より $x(v) = 0$ となる v は必ず存在.
$\cdot$ $\dim V = 1$ のとき $L = \mathbb{F}x$ となる $x \in L$ が存在してべき零性より $x^{N-1} \neq 0$, $x^N = 0$ となる $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ が存在.
次に $x^{N-1}(w) \neq 0$ となる $w \in V$ を取る. 取れないならば $x^{N-1}(w) = 0$ となる $w \in V$ は存在するので証明が終わる.
$v = x^{N-1}(w)$ とすれば $x(v) = 0$ となる $x \in V$ は w から必ず構成できる. これは任意の $x \in L$ に対して言えるので示された.
$\cdot$ $\dim L \leq m-1$ のとき, 命題が真であるとする.
L の部分 Lie 代数 $K \subsetneq L$ を任意に 1 つ取る.
$\mathrm{ad} : L \to \mathfrak{gl}(L)$ の制限 $\mathrm{ad}|_K : K \to \mathfrak{gl}(L)$ の像 Im ad の任意の元 $\mathrm{ad}\, x \in \mathrm{Im}\ \mathrm{ad}$ は Lemma 3.3.1 よりべき零である.
L, K の Lie 代数としての構造を忘れて $\mathbb{F}$ 上ベクトル空間としたとき, L/K を作れる. ここで任意の $x \in L$ に対して

$$\mathrm{Ad}|_K(x) : L/K \to L/L \qquad y + K \mapsto \mathrm{ad}(x)(y) + K$$

が well-defined な線形写像であることを示す. ad の線形性と K の部分 Lie 代数の定義より

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ad}|_K(x)(y' + K) &= \mathrm{ad}(x)(y') + K \\
&= \mathrm{ad}(x)(y) + \mathrm{ad}(x)(y' - y) + K \\
&= \mathrm{ad}(x)(y) + [x, y' - y] + K \\
&= \mathrm{Ad}|_K(x)(y + K)
\end{aligned}$$

より, $\mathrm{Ad}|_K(x)$ は well-defined であり, ad の線形性から線形写像である.
また, ad の準同型性より,

$$\mathrm{Ad}|_K : K \to \mathfrak{gl}(L/K) \qquad x \mapsto \mathrm{Ad}|_K(x)$$

も well-defined な Lie 代数の準同型である. Lemma 3.3.1 より $\mathrm{Ad}|_K(x)$ はべき零であり $\mathrm{Im}\ \mathrm{Ad}|_K$ は $\mathfrak{gl}(L/K)$ の部分 Lie 代数であることが分かる.
帰納法の仮定を $V \to L/K$, $L \to \mathrm{Im}\ \mathrm{Ad}|_K$ とすると, $\dim \mathrm{Im}\ \mathrm{Ad}|_K \leq \dim(L/K) < \dim L$ より, ある $v + K \in L/K \setminus \{0 + K\}$ が存在して, 任意の $\mathrm{Ad}|_K(x) \in \mathrm{Im}\ \mathrm{Ad}|_K$ に対して $\mathrm{Ad}|_K(x)(v + K) = 0 + K$ が成り立つということである. これを言い換えると,

$$\mathrm{Ad}|_K(x)(v + K) = \mathrm{ad}(x)(v) + K = 0 + K$$

より, $\mathrm{ad}(x)(v) = [x, v] \in K$. すなわち $v \in N_L(K)$ であることを保証する.
また, 正規化代数 $N_L(K)$ の定義より $K \subset N_L(K)$ となるので, $K \subsetneq N_l(K)$, すなわち K が $N_L(K)$ の真部分集合であることが分かる.
正規化代数の定義より, $N_L(K)$ は K をイデアルとする L の極大 Lie 部分代数である.
実際, $K \subset N_L(K)$ であり, $\forall x \in N_L(K),\ \forall y \in K$ に対して $[x, y] \in K$ より K はイデアルとなる. また, $N_L(K) \subset J$ として J のイデアルが K とすると, $\forall x \in J,\ \forall y \in K$ に対して $[x, y] \in K$ が成立. しかし, 正規化代数の定義より, $J \subset N_L(K)$ となるので $N_L(K) = J$. よって, $N_L(K)$ は K をイデアルとする極大部分 Lie 代数である.
ここで, K を $K \subsetneq L$ を満たす極大部分 Lie 代数とする.
$N_L(K) \subset L$ であり, $K \subsetneq N_L(K)$ であるので K の極大性から $N_L(K) = L$ であることが分かる.
よって, $N_L(K) = L$ は K をイデアルとするので商 Lie 代数 L/K を定義できる.
次に, 射影 $\pi : L \to L/K \quad x \in x \mapsto x + K$ を考える.
$\dim(L/K) > 1$ と仮定すると, $\dim P = 1$, $P \subset L/K$ という部分 Lie 代数が構成できることを確かめる.
実際, $\forall x_1, x_2 \in \pi^{-1}(P)$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$ とすると

$$\pi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 x_1 + K + \lambda_2 x_2 + K = \lambda_1(x_1 + K) + \lambda_2(x_2 + K) = \lambda_1 \pi(x_1) + \lambda_2 \pi(x_2) \in P$$
$$\pi([x_1, x_2]) = [x_1, x_2] + K = [x_1 + K, x_2 + K] = [\pi(x_1), \pi(x_2)] = 0 + K \in P$$

より, P は L/K の部分 Lie 代数であり, $\pi^{-1}(P)$ は L の部分 Lie 代数となる.
また, 任意の $\forall y \in K$ に対して $\pi(y) = \bar{0} \in P$ であるので, $K \subset \pi^{-1}(P)$ となる.
$\dim P = 1$ なので, $\bar{0} \neq p \in P$ となる元 $p \in P$ がある. $\pi(x) = p \neq 0$ となる $x \in L$ が存在するので, $\pi^{-1}(p) \notin K$ であり, $\pi^{-1}(P) \subset L$ となる.
次に, $\bar{x} \in L/K \setminus P$ を満たす $\bar{x}$ が存在することから, $\pi(x) = \bar{x} \notin P,\ x \notin \pi^{-1}(P)$. が分かるので, $K \subsetneq \pi^{-1}(P) \subsetneq L$ が示された. しかし, これは K の極大性に矛盾する. よって, $\dim(L/K) = \dim L - \dim K = 1$ であることが分かるので, $\forall z \in L \setminus K$ とすると任意の $x \in L$ はある $h \in K$ とある $r \in \mathbb{F}$ で $x = h + rz$ と表される.
よって, 任意の $z \in L \setminus K$ に対して $L = K + z\mathbb{F}$ と表されることが分かる.
ここで, L の部分ベクトル空間 $W = \{v \in V \mid \forall y \in K,\ y(v) = 0\}$ を考える. $\dim K < \dim L$ より帰納法の仮定を用いて $W \neq \{0\}$ であることが分かる. K は L のイデアルなので $\forall z \in L \setminus K,\ \forall y \in K,\ \forall w \in W$ に対して

$$yz(w) = zy(w) - [z, y](w) = z \cdot 0 - 0 = 0$$

が成り立つので, $\forall w \in W$ に対して $z(w) \in W$ が成立する. $z \in L$ より, $z^{N-1}(w) \neq 0,\ z^N(w) = 0$ となる $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ が存在. $v = z^{N-1}(w)$ とすると, 任意の $\forall x \in L$ に対して

$$x(v) = (h + rz)(z^{N-1}(w)) = 0 + rz^N(w) = 0$$

となるので $v \in V \setminus \{0\}$ が存在して $\forall x \in L$ に対して $x(v) = 0$ となる. よって題意は示された. □

Theorem 3.3.3　Engel の定理

L を有限次元 Lie 代数とする. このとき以下の 2 つの命題は同値である.

(1) L はべき零 Lie 代数

(2) 任意の $x \in L$ に対して ad x がべき零

proof

($\Leftarrow$) べき零 Lie 代数の定義より自明に成り立つ.

($\Rightarrow$) $\dim L$ に関する帰納法を用いる.

$\dim L = 0, 1$ のとき自明.

$\dim L \leq m - 1$ のとき, ($\Rightarrow$) 側の主張を仮定する.

$\dim L = m$ のとき, Im ad $\subset \mathfrak{gl}(L)$ より Theorem 3.3.2 を用いると, ある $v \in L \setminus \{0\}$ が存在して任意の $\forall \mathrm{ad}(x) \in$ Im ad に対して $\mathrm{ad}(x)(v) = [x, v] = 0$ を満たすことが分かる. つまり, $v \in Z(L)$ のため, L の中心は非ゼロである.

$\dim(L/Z(L)) < \dim L = m$ に対して, $[x] = x + Z(L) \in L/Z(L)$ となり, $[x]$ はべき零なので, Lemma 3.3.1 より $\mathrm{ad}[x]$ もべき零になる.

帰納法の仮定より, $L/Z(L)$ はべき零 Lie 代数となる.

Proposition 3.2 (c) より, "$L/Z(L)$ がべき零 $\Rightarrow L$ もべき零" となるので, L はべき零 Lie 代数となる.

これにより帰納法は回るので, 題意は示された. $\square$

Definition 3.3.4　ベクトル空間の旗と安定化

V を n 次元 $\mathbb{K}$ 上ベクトル空間とする. V の**旗** (flag) とは, 部分ベクトル空間の増大列

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = V$$

であって, $0 \leq i \leq n$ に対して $\mathrm{dim}V_i = i$ が成立するようなものである.
また, $x \in \mathrm{End}V$ が $0 \leq i \leq n$ について $x(V_i) \subset V_i$ を満たすならば, x は旗を**安定化**する (stabilize) という.

Proposition 3.3.5　強い安定性と狭義上三角行列

L は $\mathfrak{gl}(V)$ の部分 Lie 代数であり, 任意の $x \in L$ に対して x はべき零であるとする.
このとき,

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = V$$

という旗が存在し, 任意の $x \in L$ は $x(V_i) \subset V_{i-1} \subset V_i$ を満たす.
すなわち, V の基底を適当にとると $L \subset \mathfrak{n}_n(\mathbb{K})$ となる.

proof

補題 3 より, ある $v \in V \setminus \{0\}$ が存在し, 任意の $x \in L$ に対して $x(v) = 0$ となる.
その $v \in V \setminus \{0\}$ に対して, $V_1 = \langle v \rangle_{\mathbb{K}}$ とすると $V_1 \subset \mathrm{Ker}\ x$ であるので, 商ベクトル空間 $W = V/V_1$ を構成する.
W への L の作用 $\tau : L \to \mathfrak{gl}(W)$　$x \mapsto \bar{x}$ は

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "x"] \arrow[d, "P"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & V \arrow[r, "P"] & V/V_1 \\
V/V_1 \arrow[urr, "\bar{x}"'] & &
\end{tikzcd}$$

を可換にするように定まり. これは準同型定理より一意な構成であることが分かる.
任意の $x \in L$ はべき零なので, 任意の $\bar{x} \in \mathfrak{gl}(W)$ もべき零となる.
$\dim V$ に関する帰納法を用いる. $\dim V = 0, 1$ のときは自明.
$\dim W = \dim V - 1$ に対して主張を仮定すると, $\bar{x}$ はべき零なので

$$\{0\} = W_0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_{\dim V - 1} = W = V/V_1$$

という旗（flag）が存在して, $\bar{x}$ によって旗は安定化される. さらに強く,

$$\bar{x} : W_i \to W_{i-1} \subset W_i$$

も言える.
ここで, V_i を以下のように定義する.

$$V_i \equiv \begin{cases} \pi^{-1}(W_{i-1}) & (i = 1, 2, \ldots, \dim V) \\ 0 & (i = 0) \end{cases}$$

ここで, $\pi: V \to V/V_1$ は自然な射影である. これを用いると

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & \{0\}=W_0 & \subset & W_1 & \subset & W_2 & \subset\cdots\subset & W_{\dim V-1}=W \\ & & \downarrow{\scriptstyle \pi^{-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi^{-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi^{-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi^{-1}} \\ \{0\}=V_0 & \subset & V_1 & \subset & V_2 & \subset & V_3 & \subset\cdots\subset & V_{\dim V}=V \end{array}$$

という旗が存在する.
$\bar{x}$ に関する帰納法の仮定を用いると, 任意の $v \in V_i$ に対して

$$\pi(x(v)) = x(v) + V_1 = \bar{x}(v + V_1) \in W_{i-2}$$

となるので $\pi^{-1}(W_{i-2}) = V_{i-1} \ni x(v)$ より,$x : V_i \to V_{i-1} \subset V_i$ が成り立つ.
よって帰納法より題意は示された.

次に, $L \subset \mathfrak{n}_n(K)$ となること, すなわち $\forall x \in L \lhd \mathfrak{gl}(V)$ の行列表示を考える.
$V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = V$ に沿って基底を選ぶ.

- V_1 の基底として e_1, つまり $V_1 = \langle e_1 \rangle_K$
- V_2 の基底として e_1, e_2, つまり $V_2 = \langle e_1, e_2 \rangle_K$
- これを続けて, $V_i = \langle e_1, \ldots, e_i \rangle_K$ となるように基底を選ぶ.

$\forall x \in L \lhd \mathfrak{gl}(V)$ という線型変換は $x(V_i) \subset V_{i-1}$ を満たすことが示されているので, $x(e_j) \in V_{j-1}$ より

$$x(e_j) = \sum_{k=1}^{j-1} a_{kj} e_k$$

となる. $j = 1$ のとき $x(e_1) = 0$, $\quad j = 2$ のとき $x(e_2) = a_{12}e_1$
これ続けてを行列表示すると, $v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i$ として, $x(v) = \sum_{i=1}^{n} v_i \sum_{k=1}^{i-1} a_{ki} e_k$ より,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & a_{n-1,n} \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}}_{x} \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ \\ v_n \end{pmatrix}}_{v}$$

となる. よって, $L \subset \mathfrak{n}_n(K)$ である.
実際, 狭義上三角行列の任意の元はべき零であり,

$$v = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (c \in K \setminus \{0\})$$

という $v \neq 0$ のベクトルは, 任意の $A \in \mathfrak{n}_n(K)$ に対して $Av = 0$ となることが確かめれる. よって題意は示された.

Lemma 3.3.6

L をべき零 Lie 代数, I を L のイデアルとする.
$I \neq \{0\}$ ならば $I \cap Z(L) \neq \{0\}$ である. 特に $Z(L) \neq \{0\}$ でもある.

proof

I は L のイデアルなので, 定義より $\forall x \in L,\ \forall i \in I$ に対して $\mathrm{ad}(x)(i) = [x, i] \in I$ が成り立つ. よって

$$\mathrm{ad}_I : L \to \mathfrak{gl}(I) \quad ,\ x \mapsto \mathrm{ad}\ x$$

となり, $\mathrm{ad}_I(L) \subset \mathfrak{gl}(I)$ と言える.
補題 2 より, ある $i \in I \setminus \{0\}$ が存在して, $\forall \mathrm{ad}\, x \in \mathrm{ad}_I(L)$ に対して

$$\mathrm{ad}_I(x)(i) = [x, i] = 0$$

を満たす.
中心 $Z(L)$ の定義より, $i \in I \cap Z(L)$ のため $I \cap Z(L) \neq \{0\}$ である.
$I = Z(L)$ としたとき, $Z(L) \cap Z(L) = Z(L) \neq \{0\}$ でもある. よって題意は示された.

2 Chapter II　Semisimple Lie Algebras

2.1 Theorems of Lie and Cartan

2.1.1 Lie's Theorem

べき零 Lie 代数に対する Engel の定理の本質は, 任意のべき零な Lie 代数の元に対して共通の固有ベクトルが存在することだった. 次の定理も性質は似ているが, 体 $\mathbb{F}$ が必要な固有値を全て含むことを保証するために, 代数閉体であることと標数が 0 であることも必要とする.

Definition 4.1.1　代数閉体と標数

$\mathbb{F}$ を体とする. 任意の定数でない 1 変数多項式 $f(x) \in F[x]$ に対し $\alpha \in \mathbb{F}$ があり $f(\alpha) = 0$ となるとき, $\mathbb{F}$ を**代数閉体**であるという,
また, 自然な環準同型 $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{F} \quad n \mapsto n \cdot 1 \in \mathbb{F}$ の Ker ϕ を考える.
Ker ϕ は素イデアルなので, Ker $\phi = (0)$ もしくは素数 p があり Ker $\phi = p\mathbb{Z}$ となる.
Ker $\phi = (0)$ のとき, $\mathbb{F}$ の標数 char $\mathbb{K}$ を 0, Ker $\phi = p\mathbb{Z}$ のとき, $\mathbb{F}$ の標数 char $\mathbb{K}$ を p と定める.

例えば, 複素数体 $\mathbb{C}$ は代数閉体であり, 有理数体 $\mathbb{Q}$ の標数は 0, $\mathbb{F}_p$ は p である.

Definition 4.1.2　ウェイト空間 (weight space)

V を有限次元 $\mathbb{F}$ 上ベクトル空間として $\mathfrak{gl}(V)$ の部分 Lie 代数 L を考える. $\rho : L \to \mathfrak{gl}(V)$ を表現とすると, $\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(L, \mathbb{K})$ に対し

$$V_\lambda = \{ v \in V \mid \forall x \in L\ ,\ x(v) = \lambda(x)v\ \}$$

とおく. $V_\lambda \neq 0$ のとき, λ を L 上の**ウェイト (weight)** という.
また, $V_\lambda \neq 0$ を**ウェイト空間 (weight space)** という.

Theorem 4.1.3

V を有限次元 $\mathbb{F}$ 上ベクトル空間として, $\mathfrak{gl}(V)$ の部分 Lie 代数 L が可解だとする.
このとき, $V \neq 0$ ならば V には任意の $x \in L$ に対する共通固有ベクトルが存在する.

Proof step
Theorem 3.3.2 のように dim$L$ に関する帰納法で示す.
Step1, まず dim I=dim$L - 1$ となるような L のイデアル I が存在することを示す.
Step2, 任意の $x \in I$ に対して,

$$x(v) = \lambda(x)v$$

が満たされるような $v \in V \setminus \{0\}$ と $\lambda : I \to \mathbb{K}$ が存在することを示す.
Step3, $V_\lambda = \{w \in V \mid x(w) = \lambda(x)v \quad \forall x \in I\}$ が L 不変. すなわち任意の $x \in L$ に対して $x(V_\lambda) \subset V_\lambda$ であることを示す.
Step4, $L = I + \mathbb{F}z$ とかけ, Step3 より z は V_λ 上の線形変換を定める. 体は代数閉体なので固有多項式の根は必ず体上に存在して, 固有値を α に対応する z の固有ベクトルを $v_0 \in V_\lambda$ とすると, この v_0 が共通固有ベクトルとなるので題意を満たす.

Theorem 4.1.4　Lie の定理

L を $\mathfrak{gl}(V)$ の可解な部分 Lie 代数とし, $\dim V = n < \infty$ とする.
このとき, 任意の $x \in L$ は V 内のある旗を安定化させる.
よって, 適当な V の基底を定めることで $L \in \mathfrak{t}_n(\mathbb{F})$ となる.

Proof
Theorem 4.1.3 と $\dim L$ に関する帰納法を用いて示す

Theorem 4.1.5　Corollary A

$\phi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ を有限次元表現とする. このとき L が可解なら $\mathrm{Im}\ \phi = \phi(L)$ も可解なので, $\phi(L)$ も V 内のある旗を安定化させる.

Proof : Lie の定理から成立する.

Theorem 4.1.6　Corollary B

L を可解とする.
このとき, L のイデアルの列 $0 = L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_n = L$ で, $\dim L_i = i$ となるものが存在する.

Proof
ad:$L \to \mathfrak{gl}(L)$ は有限次元表現であるので, ad L は可解となる.
よって, L 内のある旗を安定化させる.

$$\{0\} = L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_n = L \qquad s.t.\ \dim L_i = i$$

任意の ad $x \in$ ad L に対して, $\mathrm{ad}(x)(L_i) \subset L_i$ が安定化の条件なので, $0 \leq i \leq n$ に対して L_i は L のイデアルである. よって題意は示された.

Theorem 4.1.7　Corollary C

L を可解とする.
このとき $x \in [L, L]$ ならば ad x はべき零である. 特に, $[L, L]$ はべき零である.

2.1.2 Jordan-Chevalley decomposition

以下, 体 $\mathbb{F}$ の標数を 0 とする.

任意の $x \in M_n(\mathbb{K})$ は線形変換で Jordan 標準形にでき, Jordan 標準形は対角行列とべき零行列の和に直すことができる. この章では, 任意の $x \in \mathrm{End}V$ を一意な半単純とべき零行列の和に直す方法を考える.

Definition 4.2.1

$x \in \mathrm{End}V$ が **半単純** (semi-simple) とは, 「x の $\mathbb{F}$ 上最小多項式の根がすべて違う」ようなもの.
また, $\mathbb{F}$ が代数閉体のとき, 同値な言い換えとして「x が対角化可能」とも言える.

ここで, 2 つの可換で半単純な $x, y \in \mathrm{End}\ V$ は同時対角化であることに気をつける.

Lemma 4.2.1

x, y が可換で半単純なら, $x \pm y$ も半単純

proof

x, y が可換な半単純なので同時対角化可能

$$x\,|n\rangle = \lambda_x\,|n\rangle \qquad y\,|n\rangle = \lambda_y\,|n\rangle$$

よって, $(x \pm y)\,|n\rangle = (\lambda_x + \lambda_y)\,|n\rangle$ より, $x \pm y$ は対角化可能で半単純となる.

これは当たり前の話だが, $W \subset V$ として制限したとき, $x(W) \subset W$ を満たせば $x \in \mathrm{End}\ W$ で半単純となる.

Proposition 4.2.1

V を $\mathbb{K}$ 上ベクトル空間, $x \in \mathrm{End}\ V$ とする.
(a) 次の条件を満たす $x_s,\ x_n \in \mathrm{End}\ V$ が**一意**に存在する.

$$x = x_s + x_n \qquad [x_s, x_n] = 0$$

ここで, x_s は半単純, x_n はべき零とする.
(b) 以下のような性質を満たす定数項を持たない 1 変数多項式 $p(T),\ q(T)$ が存在する.

$$x_s = p(x) \qquad x_n = q(x)$$

特に

$$[x_s, x] = [x_n.x] = [x_s, x_n] = 0$$

を満たす.
(c) $A \subset B \subset V$ とする.
$x(B) \subset A$ ならば, $x_s(B) \subset A$ かつ $x_n(B) \subset A$ を満たす.

$x = x_x + x_n$ という x の一意な分解を**ジョルダン・シュバレー分解** (Jordan-Chevalley-decomposition) という.
$x_s,\ x_n$ をそれぞれ半単純成分 (semisimple part) べき零成分 (nilpotent part) という.

proof

(後で書きます...)

Lemma 4.2.2

$x \in \mathrm{End}\ V$ の Jordan 分解が $x = x_s + x_n$ となるとき
$\mathrm{ad}\ x = \mathrm{ad}\ x_s + \mathrm{ad}\ x_n$ も $\mathrm{ad}\ x \in$ End(End V) の Jordan 分解となる.

proof

(後で書きます...)

Lemma 4.2.3

$\mathfrak{U}$ を有限次元 F-代数とする. このとき、$\mathfrak{U}$ の微分全体の集合 Der $\mathfrak{U}$ は, そのすべての元 $x \in \mathrm{Der}\ \mathfrak{U}$ の半単純成分 x_s とべき零成分 x_n を含んでいる.
すなわち, $x \in \mathrm{Der}\ \mathfrak{U}$ ならば $x_s,\ x_n \in \mathrm{Der}\ \mathfrak{U}$ ということ.

proof

(後で書きます...)

2.1.3 Cartan's Criterion

前章より, $[L, L]$ がべき零 Lie 代数ならば, 定義より L が可解になることが分かる. また, Engel の定理によって, Lie 代数のべき零性をその元の ad のべき零性で必要十分に言えることが示せた. すなわち, $[L, L]$ がべき零ということと, 任意の $x \in [L, L]$ に対して ad x がべき零であることは同値であることが言える.
この章では Lie 代数の可解性を自己準同型のトレースを用いて特徴づける.

Lemma 4.3.1

$A \subset B$ を $\mathfrak{gl}(V)$（$\dim V < \infty$）の 2 つの部分空間とする.
$M = \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid [x, B] \subset A\}$ という集合 M があり, ある $x \in M$ が, すべての $y \in M$ に対して $\mathrm{Tr}(xy) = 0$ を満たすとする. このとき, x はべき零である.

proof

(後で書きます...)

可解性の判定条件を述べる前に, 有用な恒等式を示す.

Lemma 4.3.2

$x, y, z \in \mathrm{End}\ V$ とする. このとき

$$\mathrm{Tr}([x, y]z) = \mathrm{Tr}(x[y, z])$$

が成り立つ.

proof

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}([x,y]z) &= \mathrm{Tr}(xyz - yxz)\\ &= \mathrm{Tr}(xyz) - \mathrm{Tr}(xzy)\\ &= \mathrm{Tr}(x[y,z])\end{aligned}$$

より示された. これによって, 括弧積を隣に移せることが分かる.

Theorem 4.3.3　Cartan's Criterion)

L を有限次元ベクトル空間 V の $\mathfrak{gl}(V)$ の部分 Lie 代数とする.
すべての $x \in [L,L]$ および $y \in L$ に対して $\mathrm{Tr}(xy) = 0$ が成り立つならば, L は可解である.

proof

Lemma 4.3.1 の A を $[L,L]$ B を L とする. このとき

$$M = \{z \in \mathfrak{gl}(V) \mid [z,L] \subset [L,L]\}$$

となり, 明らかに $L \subset M$ を満たす. $x,y,z \in L$ とすると

$$\mathrm{Tr}([x,y]z) = \mathrm{Tr}(x[y,z]) = \mathrm{Tr}([y,z]x)$$

が成り立ち, $[y,z] \in [L,L]$ なので, 定理の仮定が成り立つならば $\mathrm{Tr}([x,y]z) = 0$ となる.
Lemma 4.3.1 より, 任意の $w \in [L,L] \subset L \subset M$ は任意の $z \in L \subset M$ に対して $\mathrm{Tr}(wz) = 0$ を満たすので, 任意の $z \in [L,L]$ はべき零である.
また, w がべき零なら ad w も前章の補題よりべき零であり, Engel の定理より $[L,L]$ がべき零 Lie 代数となる. 可解の定義より, L が可解 Lie 代数となるので, 定理は示された.

Corollary 4.3.4

L を Lie 代数とする. $\forall x \in [L,L],\ \forall y \in L$ に対して $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}x\ \mathrm{ad}y) = 0$ が成立するならば, L は可解 Lie 代数.

proof

$\forall \mathrm{ad}\ x \in \mathrm{ad}([L,L]) = [\mathrm{ad}\ L, \mathrm{ad}\ L],\ \forall y \in \mathrm{ad}\ L$ に対して Cartan Criterion を適用すると ad L が可解 Lie 代数となる. 準同型定理より

$$\mathrm{ad}\ L \simeq L/Z(L)$$

となり, $Z(L)$ も可解なので, 前章 prop3.1 より L も可解となる.

2.2 Killing form

2.2.1 Criterion for semisimplicity

Definition 5.1.1

$x, y \in L$ に対して

$$\kappa(x, y) := \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\ x, \mathrm{ad}\ y)$$

κ が L 上双線形で対称のとき, K は **Killing 形式** (Killing form) とよばれる.

Killing 形式の結合性

$$\kappa([x, y], z) = \kappa(x, [y, z])$$

proof

$$\begin{aligned}\kappa([x, y], z) &= \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\ [x, y], \mathrm{ad}\ z)\\ &= \mathrm{Tr}([\mathrm{ad}\ x, \mathrm{ad}\ y], \mathrm{ad}\ z)\\ &= \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\ x, [\mathrm{ad}\ y, \mathrm{ad}\ z])\\ &= \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\ x, \mathrm{ad}\ [y, z])\\ &= \kappa(x, [y, z])\end{aligned}$$

より示された.

Lemma 5.1.2

I を L のイデアルとする. κ を L の Killing 形式, κ_I を I の Killing 形式とすると、$\kappa_I = \kappa|_{I\times I}$ である.

proof

線形代数より, W が (有限次元) ベクトル空間 V の部分空間であり, $\phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ のとき, $\mathrm{Tr}\phi = \mathrm{Tr}(\phi|_W)$ である.

$x, y \in I$ とすると, 任意の $z \in L$ に対してイデアルの定義より $\mathrm{ad}\ x, \mathrm{ad}\ y(z) \in I$ となるので,

$$\begin{aligned}\kappa_I(x, y) &= \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_I\ x, \mathrm{ad}_I\ y)\\ &= \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_I\ x, \mathrm{ad}_I\ y)\\ &= \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\ x, \mathrm{ad}\ y)|_{I\times I}\\ &= \kappa_{I\times I}\end{aligned}$$

が成り立つ. よって示された.

Definition 5.1.3

一般に Lie 代数のの対称内積 β に対して

$$S_\beta = \{x \in L \mid \beta(x, y) = 0,\ \forall y \in L\}$$

という集合 S_β を対称内積 β の**根基** (radical) という.

$S_\beta = \{0\}$ のとき, 対称内積 β を**非退化** (nondegenerate) な内積という.

また, 対称内積 β として Killing 形式 κ を使うことで, 結合則より根基が L の部分 Lie 代数となることが分かる.

proof

$x, y \in S,\ z \in L$ として, Killing 形式 κ の結合則より

$$\kappa([x,y],z) = \kappa(x,[y,z]) = 0$$

最後の式 $= 0$ は $x \in S$ を用いた. よって, $[x,y] \in S$ になるので示された.

線形代数の観点から、非退化性を判定するための実用的な方法は以下が知られている.

Lemma 5.14

L の基底 $x_1 \cdots, x_N$ を固定する. Killing 形式の行列 $\{\kappa(x_i, x_j)\}_{ij}$ が正則であることと, Killing 形式 κ が非退化であることは同値.

proof

(Hump には載ってないですが, 行列が正則なことを $Kv = 0$ ならば $v = 0$ と言い換えれば示せます. 具体的な証明は後で書きます)

Lie 代数 L が**半単純** (semi-simple) であるとは, Rad $L = 0$ である場合, すなわち L に含まれる最大の可解イデアルが 0 以外にないことを思い出そう. これは, L が 0 でない可換イデアルを持たないことと**同値**である.
実際, そのような可換イデアルは必ず Rad の中に含まれなければならない. 逆に, Rad が 0 でなければそのような L のイデアルを含んでいる. すなわち、それは Rad L の導来列における最後の 0 でない項である.

Theorem 5.1.5

L を Lie 代数とする. このとき L が半単純であることと, その Killing 形式 κ が非退化であるは同値.

proof

(長いので後で書きます...)

2.2.2 Simple ideals of Lie Algebras

Definition 5.2.1

Lie 代数がそのイデアル $I_1, \cdots, I_t$ に対して

$$L = I_1 + I_2 + \cdots + I_t$$

と分解されるとき, L はイデアルの直和でかけるという.
実際, $i \neq j$ に対して

$$[I_i, I_j] \subset I_i \cap I_j = \{0\}$$

となるので, L はイデアルの直和で表せ

$$L = I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots \oplus I_t$$

となる.

Theorem 5.2.2

L を半単純 Lie 代数とする. このとき L の単純イデアル $L_1, \cdots L_t$ が存在して

$$L = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_t$$

と分解される. また, この分解は一意であり, L の任意の単純イデアルは, ある L_j に等しい.
さらに, L_i 上の Killing 形式 κ_{L_i} は L 上の Killing 形式の制限 $\kappa|_{L_i \times L_i}$ に等しい.

proof

I を L の任意のイデアルとする. このとき,

$$I^\perp = \{x \in L \mid \kappa(x, y) = 0 \quad \forall y \in I\}$$

も L のイデアルとなる. 実際, $x \in I^\perp$, $y, z \in L$, とすると, Killing 形式の結合則より

$$\kappa([x, y], z) = \kappa(x, [y, z]) = 0$$

より, $[x, y] \in I^\perp$ となるため示される. また, $x \in I \cap I^\perp$ に対して, 任意の $y \in L$ は $[x, y] \in I \cap I^\perp$ を満たすので, $I \cap^\perp$ は L のイデアルであることが分かる.
さらに, $\forall x \in [I \cap I^\perp, I \cap I^\perp] \subset I^\perp$ $\forall y \in I \cap I^\perp \subset I$ に対して

$$\kappa(x, y) = 0$$

が満たされるので, Corollary 4.3.4 より $I \cap I^\perp$ は可解イデアルである. L が半単純なので, $I \cap I^\perp = \{0\}$ となる. また, L が半単純なので Killing 形式は非退化であることから,

$$\phi : L \to L^* \qquad x \mapsto \kappa(x, \ )$$

が同型写像となる. 線形代数より, $\dim I + \dim I^\perp = \dim L$ であるので, $L = I \oplus I^\perp$ が成り立つ.
次に, 半単純 Lie 代数 L は単純イデアルの直和で表せることを $\dim L$ の帰納法で示す.
もし L に 0 でない真のイデアルが存在しなければ, L はすでに単純であり, 証明は完了する.
そうでなければ, L_1 を極小の非ゼロイデアルが存在する. このとき, $L = L_1 \oplus L_1^\perp$ と分解される.
I を L_1 の非ゼロなイデアルとすると, $\forall x \in I \subset L_1$, $\forall z \in L_1^\perp$ に対して

$$[x, z] \in [L_1, L_1^\perp] \subset L_1 \cap L_1^\perp = \{0\}$$

が成立するので, I は L のイデアルでもある. よって, $L_1 = I$ となるので, 極小性より L_1 は単純イデアルであることが分かる.
同様の議論によって, $L_1^{\perp}$ のイデアルは、そのまま L 全体のイデアルにもなることが分かる. もし $L_1^{\perp}$ が半単純ではないと仮定すると S という可解な $L_1^{\perp}$ のイデアルが存在して, それは L の可解なイデアルにもなるが, L は半単純なので矛盾. よって, $L_1^{\perp}$ も半単純である.
$\dim L_1^{\perp} < \dim L$ なので, 帰納的の仮定より, $L_1^{\perp}$ は単純イデアル $L_2, \cdots, L_t$ の直和で表せる. $L = L_1 \oplus L_1^{\perp}$ と組み合わせると帰納法は完了し,

$$L = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_t$$

と分解されることが分かる.
次に, この分解が一意であることを示す. I を L の任意の単純イデアルとすると, $[I, L]$ も L のイデアルとなる. また, $Z(L)$ は可解イデアルであるので $Z(L) = 0$ となることから, $[I, L] \neq 0$ である. $[I, L]$ は I のイデアルでもあり, I は単純イデアルなので, $[I, L] = I$ となる.
他方, $L = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_t$ より

$$[I, L] = [I, L_1] \oplus [I, L_2] \oplus \cdots \oplus [I, L_t]$$

が成り立つ. ここで, $[I, L_j]$ は I のイデアルであるので, 単純性より 1 つの直和因子を除いて他はすべて 0 でなければならない. もしある j に対して $[I, L_j] = I$ となるとすると, L_j は L のイデアルなので $I \subset L_j$ となり, 単純イデアルの定義より $I = L_j$ となる.
最後に, L_i 上の Killing 形式 κ_{L_i} が L 上の Killing 形式の制限 $\kappa|_{L_i \times L_i}$ に等しいことを示す.
これは Lemma 5.1.2 より明らかである. よって示された.

Corollary 5.2.3

L を半単純 Lie 代数とする. このとき, 以下が成り立つ.
(1) $L = [L, L]$
(2) L の任意のイデアルは半単純である.
(3) 任意の Lie 代数の準同型 $\phi : L \to L'$ に対して, $\mathrm{Im}\phi$ は半単純である.
(4) L の任意のイデアルは L の単純イデアルの直和である.

proof

(1) L の単純イデアル $L_1, \cdots, L_t$ に対して

$$L = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_t$$

と分解され, 各 L_i は L の単純イデアルなので, $[L, L_i] = L_i$ となる. よって,

$$[L, L] = [L, L_1] \oplus [L, L_2] \oplus \cdots \oplus [L, L_t] = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_t = L$$

が成り立つ.
(2) I を L の任意のイデアルとすると, Theorem 5.2.2 の証明より, I のイデアルは L のイデアルであることが分かる. もし, I が半単純でなければ, L も半単純ではなくなるので矛盾. よって I は半単純であることが示された.
(3) $\phi : L \to L'$ を Lie 代数の準同型とする. このとき, $\mathrm{Im}\phi \simeq L/\mathrm{Ker}\phi$ である. また, $\mathrm{Ker}\phi$ は L のイデアル

であるので, (2) より半単純である.
また, 半単純リー代数の商代数は半単純であることが知られている. 実際, L の任意のイデアル I は

$$I = \bigoplus_{j \in A} S_j$$

と表せるので, 商代数 L/I は

$$L/I \simeq \bigoplus_{j \notin A} S_j$$

となる. 単純 Lie 代数の直和は可解イデアルを持たないため半単純である. よって, $\mathrm{Im}\phi$ も半単純であることが示された.
(4) I を L の任意のイデアルとすると, Corollary 5.2.3 (2) より, I は半単純である. よって, I は I の単純イデアルの直和で表せるが, I の単純イデアルは L のイデアルでもあるので, I は L の単純イデアルの直和で表せる. よって示された.

2.2.3 Inner derivations

Killing 形式の非退化性がもたらす, さらなる重要な帰結があることについて述べる. その前に内部微分について考える. 内部微分 (Inner derivations) とは, $\delta \in \mathrm{Der}\ L$ に対して, ある $x \in L$ が存在して $\delta = \mathrm{ad}\ x$ となる δ のことであった.

任意の Lie 代数 L に対して, ad L は Der L のイデアルであることが示される.

proof

$\forall x, y \in L,\ \forall \delta \in \mathrm{Der}\ L$ に対して,

$$\begin{aligned}[\delta, \mathrm{ad}\ x](y) &= (\delta \mathrm{ad}\ x - \mathrm{ad}\ x\delta)(y) \\ &= \delta([x, y]) - [x, \delta(y)] \\ &= [\delta(x), y] + [x, \delta(y)] - [x, \delta(y)] \\ &= [\delta(x), y] \\ &= \mathrm{ad}\ \delta(x)(y)\end{aligned}$$

より, $[\delta, \mathrm{ad}\ x] = \mathrm{ad}\ \delta(x) \in \mathrm{ad}\ L$ となるので示された.

Theorem 5.3.1

L を半単純 Lie 代数とする. このとき, すべての微分は内部微分である. すなわち,

$$\mathrm{Der}\ L = \mathrm{ad}\ L$$

が成り立つ.

proof

L は半単純であるため, 可解イデアルである中心は $Z(L) = 0$ となる.

ad の準同型性から得られる $L/Z(L) \simeq \mathrm{ad}\ L$ より, $L \to \mathrm{ad}L$ は Lie 代数の同型写像となる.

よって, Theorem 5.1.5 より, ad L の Killing 形式は非退化である. $M = \mathrm{ad}\ L$, $D = \mathrm{Der}\ L$ とすると, $[D, M] \subset M$ となることが分かる.

M は D のイデアルであるので, Lemma 5.1.2 より M の Killing 形式 κ_M は, D の Killing 形式の制限 $\kappa_D|_{M\times M} = \kappa_M$ に等しい.

したがって, κ_D も非退化である. M の直交補空間を κ_D に関して

$$I = M^{\perp} = \{x \in D \mid \kappa_D(x, y) = 0 \quad \forall y \in M\}$$

と定めると, κ_D の M 上の非退化性より $I \cap M = 0,\quad D = I \oplus M$ となる. また, I, M は D のイデアルであるので, $[I, M] \subset I \cap M = 0$ が成り立つ.

もし, $\delta \in I$ ならば, 先ほどの性質より $[\delta, \mathrm{ad}\ x] = \mathrm{ad}\ \delta(x) = 0$ となる.

ad の単射性より, $\delta(x) = 0$ が任意の $x \in L$ に対して成り立つので, $\delta = 0$ となる. 従って, $\delta = 0,\ I = \{0\}$ が成り立ち, $D = M$ となる.

よって, $\mathrm{Der}\ L = \mathrm{ad}\ L$ が示された.

2.2.4 Abstract Jordan decomposition

Theorem5.3.1 を用いることで, 任意の半単純 Lie 代数 L において抽象的ジョルダン分解 (Abstract Jordan decomposition) を導入することができる. 有限次元の F-代数 $\mathfrak{A}$ において, Der $\mathfrak{A}$ はそのすべての要素の End $\mathfrak{A}$ における半単純成分とベキ零成分を含んでいること, すなわち, $\delta \in \mathrm{End}\ \mathfrak{A}$ が $\delta \in \mathrm{Der}\ \mathfrak{A}$ ならば, $\delta_s, \delta_n \in \mathrm{Der}\ \mathfrak{A}$ であることを思い出そう.

特に, Theorem 5.3.1 より, Der L は ad L と一致しており, 一方で $L \to \mathrm{ad}\ L$ は 1 対 1 であるため, 各 $x \in L$ は ad $x = \mathrm{ad}\ s + \mathrm{ad}\ n$ が ad x の End L における通常のジョルダン分解となるような一意の要素 $s, n \in L$ を決定する. これは $x = s + n$ かつ $[s, n] = 0$ であり、s が ad-半単純 (ad-semisimple)（すなわち ad s が半単純）, n が ad-ベキ零 (ad-nilpotent) であることを意味する. 言葉の不正確さを承知の上で, これらを $s = x_s$、$n = x_n$ と書き, x の半単純成分およびベキ零成分と呼ぶ. この時点で, L が線形 Lie 代数であった場合に x_s, x_n という記法が曖昧になると思われるが, 今得られた x の抽象的な分解が, すべての場合において通常のジョルダン分解と一致することが (6.4) で示される.

$L = \mathfrak{sl}(V)$ の場合にこれを示す.

proof

$x \in L$ に対して, End V の Jordan 分解を

$$x = x_s + x_n$$

とする. このとき, $\mathrm{tr}(x_n) = 0$ であることから, $x_n \in L$ となる. また, $\mathrm{tr}(x) = 0$ であることから, $x_s \in L$ となる.

Lemma 4.2 A より, ad x_s および ad x_n はそれぞれ End(End)(V) の Jordan 分解で得られる半単純およびべき零である.

$L \subset \mathrm{End}\ V$ となるので, 従って, ad x_s, ad x_n も End L の Jordan 分解で得られる半単純およびべき零である.

この End L における Jordan 分解から, s, n という ad 半単純および ad-べき零な要素は一意に存在することが先ほどの議論から分かる. つまり, 抽象 Jordan 分解は, 一意である.

以上より, $x_s = s,\ x_n = n$ となることが分かる. よって, $\mathfrak{sl}(V)$ に対して, 抽象 Jordan 分解は通常の Jordan 分解と一致することが示された.

Notes

素標数 (標数 p) においても, Killing 形式の非退化性は Lie 代数の構造に対して非常に強力な示唆を与える.

Seligman [1], Pollack [1], Kaplansky [1] を参照せよ.

2.3 Complete reducibility of representations

我々は, 随伴表現 (adojoint representations) を用いることで, 半単純 Lie 代数 L の解析を進めていく.
結局のところ, L は $\mathfrak{sl}(2,F)$ のコピーから構築されていることがわかる. そのような L の 3 次元部分環の随伴作用を調べるためには, $\mathfrak{sl}(2,F)$ の表現に関する正確な情報が必要となるが, それについては以下の § 7 で述べる. まず, 任意の半単純リー環の表現に関する重要な一般定理 (Weyl's Theorem) を証明する.

2.3.1 Modules

表現を加群の言葉で言い換えられることを説明する.

Definition 6.1.1

L を Lie 代数, V をベクトル空間とする.
ベクトル空間への左からの作用 $L \times V \to V$

$$(x,v) \mapsto x.v$$

が以下の条件を満たすとき, V を L **加群**という.
$\forall x,y \in L,\ \forall a,b \in \mathbb{F},\ \forall v,w \in V$ に対して (M1) $(ax+by).v = a(x.v)+b(y.v)$
(M2) $x.(av+bw) = a(x.v)+b(x.w)$
(M3) $[x,y].v = x.(y.v)-y.(x.v)$

例えば、$\phi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ が L の表現であるなら，$x.v = \phi(x)(v)$ を通じて V を L-加群とみなすことができる.
逆に, L-加群 V が与えられれば, この条件によって表現 $\phi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ が定義される.
実際, $x \in L$ に対して, $\phi(x) : V \to V$ を

$$\phi(x)(v) = x.v$$

と定めると, (M1), (M2) より $\phi(x) \in \mathfrak{gl}(V)$ となる. さらに, (M3) より, ϕ は Lie 代数の準同型であることが分かるので, ϕ は L の表現となる.

Definition 6.1.2

L-加群の準同型とは, 線形写像 $\phi : V \to W$ であり,

$$\phi(x.v) = x.\phi(v)$$

を満たすものをいう. また, L 部分加群とは, $W \subset V$ であり, 任意の $x \in L,\ w \in W$ に対して

$$x.w \in W$$

を満たすものをいう.

つまり, L-加群の準同型とは, ϕ と L の作用が可換な線形写像である.
また, Ker ϕ は L 部分加群であることが分かる.
実際, $v \in \text{Ker}\ \phi,\ x \in L$ とすると,

$$\phi(x.v) = x.\phi(v) = x.0 = 0$$

が成り立つので, $x.v \in \text{Ker}\ \phi$ となることから示される.

Definition 6.1.3

ϕ がベクトル空間の同型写像 $V \to W$ であるとき, V と W は L-加群として同型という.
この場合, 2 つの加群は L の同値な表現を与えていると言われる.
L 加群 V が, 自分自身と 0 を除いて L 部分加群を持たない時, V を**既約** (irreducible) という.
V が既約な L-部分加群の直和であるとき, V を**完全可約** (completely reducible) という.

特に, 0 次元のベクトル空間は既約な L-加群とはみなさない. しかし, L が自明に作用する 1 次元の空間は既約と呼べる.

V が完全可約であることと, V の各 L-部分加群 W が補空間 W'（$V = W \oplus W'$ となるような L-部分加群）を持つことは同値である.

proof

「V が完全可約 $\Longrightarrow V = W \oplus W'$ と表せる」を示す.
V が完全可約なので

$$V = \bigoplus_{i \in I} V_i$$

と表せる. ここで, V_i は既約な L 加群である.
codim $W = \dim V - \dim W$ に関する帰納法で証明する.
codim $W = 0$ のとき, $V = W$ となるので, 自明に補空間 $W' = \{0\}$ を取れば良い.
codim $W = k > 0$ のとき, 余次元が k より小さい部分加群には補空間が存在すると仮定する.
余次元は正なので, $W \subsetneq V = \oplus_{i \in I} V_i$ であり, ある $j \in I$ が存在して, $V_j \not\subset W$ となる.
$W \cap V_j$ は V_j の部分加群となるが, V_j は既約なので $W \cap V_j = \{0\}$ となる.
よって, $W + V_j = W \oplus V_j$ となり,

$$\text{codim } (W + V_j) < \text{codim } W$$

となる. 帰納法の仮定より, $V = (W \oplus V_j) \oplus W'$ となる W' が存在することが分かる.
結合法則より

$$V = W \oplus (V_j \oplus W')$$

となるので, これは codim $W = k$ の場合にも補空間が存在することが示される.
よって, 帰納法が回るので示された.
次に, 「$V = W \oplus W'$ と表せる $\Longrightarrow V$ が完全可約」を示す.
これは $\dim V$ に関する帰納法で示す.
$\dim V = 0$ のときは明らか.
$\dim V < n$ のとき, V が完全既約であることを仮定する.
ここで, V の L 部分加群のうち, 次元が最小なものを V_1 とする. このとき, V_1 はその選び方から既約である.
命題より, $V = V_1 \oplus W$ となる W が存在する. もし, $W = \{0\}$ であれば, $V = V_1$ となり, V は既約である.
そうでなければ, $\dim W < \dim V$ なので, 帰納法の仮定より, W は完全可約である.
したがって

$$V = V_1 \oplus W = V_1 \oplus \bigoplus_{i \in I} V_i$$

と表せるので, V も完全可約である.
よって, 帰納法が回るので示された.

W, W' が任意の L-加群であるとき, 当然ながらその直和を $x.(w, w') = (x.w, x.w')$ と定義することで, 自然な方法で L-加群にすることができる. これらの概念はすべて標準的なものであり, $\dim V = \infty$ の場合でも意味をなす. もちろん, 「既約」や「完全可約」という用語は L の表現に対しても同様に適用される.

Lemma 6.1.4 Schur's Lemma

$\phi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ を既約表現とする.
このとき, すべての $\phi(x)$ $(x \in L)$ と可換な $\mathrm{End}V$ の元, すなわち、L-加群の自己準同型はスカラー倍のみである.

3 References

· Lie 代数, 表現論

· James E Humphreys. Introduction to Lie algebras and representation theory. Springer, 1972.

· 高間俊至, 奥山竜司. 表現論ノート

· 山口航平. 有限次元半単純リー環の表現論

· 雪江明彦. 代数学 2 環と体とガロア理論

· 多様体論

· 松本幸夫 多様体の基礎 東京大学出版会

· 坪井 俊 幾何学 I 多様体入門 東京大学出版会

· 物理

· 山本義隆, 中村孔一 解析力学 I II 朝倉書店