

補題

$K \triangleright G$, K が H の部分群, H が G の部分群のとき, $H/K \subset Z(G/K) \Leftrightarrow [G, H]$ が K の部分群

証明

G/K 上で $hK \in H/K, gK \in G/K$ が可換になる条件は、 $h \in H, g \in G$ に対して

$$hK \cdot gK = gK \cdot hK \Leftrightarrow hgK = ghK \Leftrightarrow K = ghg^{-1}h^{-1}K \text{ より、 } [G, H] \subset K$$

これらは同値変形なので、 $H/K \subset Z(G/K)$ ならば $[G, H] \subset K$ が成立して、その逆も言える。
よって補題は証明された。

命題 4.3.9

(1) G が可解群 $\Leftrightarrow D_n(G) = 1_G$ となる $n > 0$ が存在

(2) G がべき零群 $\Leftrightarrow \Gamma_n(G) = 1_G$ となる $n > 0$ が存在

証明 (1)

・十分性の証明

G は可解群なので、 $G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots G_n = 1_G$ という部分群の列を取ることができる。可解群の定義より、 $i = 0, 1, 2 \cdots n-1$ に対し、 $G_i \triangleright G_{i+1}$, G_i/G_{i+1} がアーベル群となり、 $[G_i, G_i] = D(G_i) \subset G_{i+1}$ も成立することが分かる。

$i = 0$ のとき、 $D(G) \subset G_1$ が成り立つ。 $D_i(G) \subset G_i$ であることを仮定すると、 $D_{i+1}(G) = D(D_i(G)) \subset D(G_i) \subset G_{i+1}$ より、帰納的に $D_i(G) \subset G_i$ が示された。 $i = n$ のとき、 $D_n \subset G_n = 1_G$ となるので、 $D_n(G) = 1_G$ となる $n > 0$ が存在する。

・必要性の証明

$D_n(G) = 1_G$, $G_0 = G$, $G_i = D_i(G)$ とすると、 $G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots G_n = 1_G$ となり、 $G_{i+1} = D_{i+1}(G) \triangleleft D_i(G) = G_i$ $G_i/G_{i+1} = D_i(G)/D_{i+1}(G)$ はアーベル群となるので、 G は可解群となる。

証明 (2)

・十分条件の証明

$G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots G_n = 1_G$ をべき零群とする。 G はべき零群なので、 $G_{i+1} \triangleleft G$, $G_i/G_{i+1} \subset Z(G/G_{i+1})$ となる。補題より、 $G = G$, $H = G_i$, $K = G_{i+1}$ とすると、 K が H の部分群, H が G の部分群, K が G の正規部分群なので、 $[G, G_i] \subset G_{i+1}$ となる。 $i = 0$ のとき、 $\Gamma_1(G) = D(G) \subset G_1$ が成り立つ。 $\Gamma_i(G) \subset G_i$ を仮定すると、 $\Gamma_{i+1}(G) = [G, \Gamma_i(G)] \subset [G, G_i] \subset G_{i+1}$ となり、数学的帰納法より $\Gamma_i(G) \subset G_i$ が成立する。 $i = n$ のとき、 $\Gamma_n(G) \subset G_n = 1_G$ より、 $\Gamma_n(G) = 1_G$ となる n が存在する。

・必要性の証明

$\Gamma_n(G) = 1_G$, $G_0 = G$, $G_i = \Gamma_i(G)$ とする。

$G_i = \Gamma_i(G) \triangleleft G$ を仮定すると、 $G_{i+1} = \Gamma_{i+1}(G) = [G, \Gamma_i(G)] \triangleleft G$

$D(G) = [G, G] \triangleleft G$ となり数学的帰納法より $G_i = \Gamma_i(G) \triangleleft G$ が成り立つ。補題より、 $[G, G_i] = [G, \Gamma_i(G)] = \Gamma_{i+1}(G) = G_{i+1} \subset G_{i+1} \Leftrightarrow \Gamma_i(G)/\Gamma_{i+1}(G) \subset Z(G/\Gamma_{i+1}(G)) \Leftrightarrow G_i/G_{i+1} \subset Z(G/G_{i+1})$ となるので、 G がべき零群となる。