星の内部構造とレーン・エムデン方程式

理学部物理学科１年

この発表の流れ

- レーンエムデン方程式とは
- 方程式の導出
- 方程式の解について
- いろいろな計算と具体例

レーン・エムデン方程式とは

理想的な状況における球対称で力学平衡にある自己重力流体の密度分布を記述する微分方程式

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right)+\theta^n=0$$

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2}+\frac{2}{\xi}\frac{d\theta}{d\xi}+\theta^n=0$$

方程式の導出

エムデン方程式は密度ρ、圧力P、位置rに関する3つの独立した式から導くことができる

(i) 連続の式
$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$

(ii) 静水圧平衡
$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r\rho}{r^2}$$

(iii) ポリトロピック関係式
$$P = K\rho^{\gamma} = K\rho^{1+\frac{1}{n}}$$

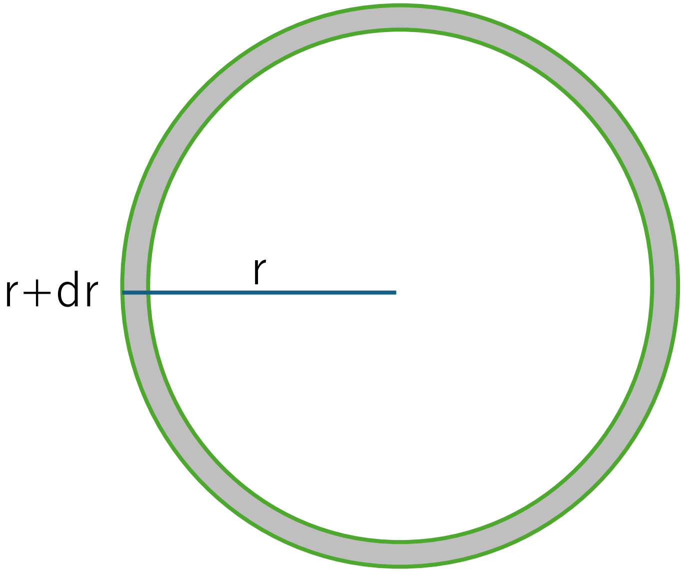
連続の式

球中心からの距離をrとする
r+drからrの球殻の質量をdM_rとすると

$dM_r = 4\pi r^2 \rho dr$より、

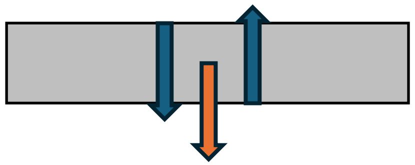
$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$

$$M = \int_0^R dM_r = \int_0^R 4\pi r^2 \rho dr$$



静水圧平衡

高さdr、表面積Sm^2の物体の一部にかかる力を考える。力学的に平衡な状態なので、



$$P(r)S = P(r+dr)S + \frac{GM_r S\rho}{r^2}dr$$

$$\frac{dP}{dr} = \frac{P(r+dr) - P(r)}{dr} = -\frac{GM_r\rho}{r^2}$$

ポリトロピック関係式

密度を求めるためには、(i)(ii)の式だけでなく、圧力と密度に関する式が必要になる

ここで、$P = K\rho^{\gamma} = K\rho^{1+\frac{1}{n}}$という関係が成り立つ簡単な状況を考えると、(i)(ii)の式と連立することで密度分布を求めることができる。(Kは定数)

この関係をポリトロピックな関係、 n をポリトロピック指数と呼び、ポリトロピックな関係で球対称な力学平衡にある流体をポリトロープと呼ぶ。

ポリトロピック指数nによるポリトロープの分類

ポリトロープは様々な天体を記述するモデルとして用いられる。ポリトロピック指数n が大きくなるにつれて、流体の中心密度は高くなることが知られている。

n=0　密度一定のガス

n=0.5~1　中性子星

n=1.5　非相対論的ガス球　白色矮星　木星型、地球型惑星

n=3~3.5　相対論的ガス　太陽などの恒星

n=5　半径が無限大の星

n=∞　等温ガス球

レーン・エムデン方程式の導出

$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r\rho}{r^2}$の両辺の$\frac{r^2}{\rho}$をかけてrで微分すると、

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dP}{dr}\right) = \frac{d}{dr}(-GM_r) = -4\pi r^2 G\rho$$

中心密度ρ_c中心圧力P_cを無次元媒介変数θを用いて表す

$$\rho=\rho_c\theta^n \qquad P = K\rho^{1+\frac{1}{\mathrm{n}}} = K\rho_c^{1+\frac{1}{n}}\theta^{n+1} = P_c\theta^{n+1}$$

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho_c\theta^n}P_c\frac{d\theta^{n+1}}{dr}\right) = \frac{(n+1)P_c}{\rho_c}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\theta}{dr}\right) = -4\pi r^2 G\rho_c\theta^n$$

$$\frac{(n+1)P_c}{\rho_c}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\theta}{dr}\right) = -4\pi r^2 G\rho_c\theta^n$$

$$\left\{\frac{(n+1)P_c}{4\pi G\rho_c^2}\right\}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\theta}{dr}\right) + \theta^n = 0$$

$a^2 = \frac{(n+1)P_c}{4\pi G\rho_c^2}[m^2]$　　　$\xi = \frac{r}{a}$という無次元化された変数を用いると

$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right) + \theta^n = 0$が得られる。

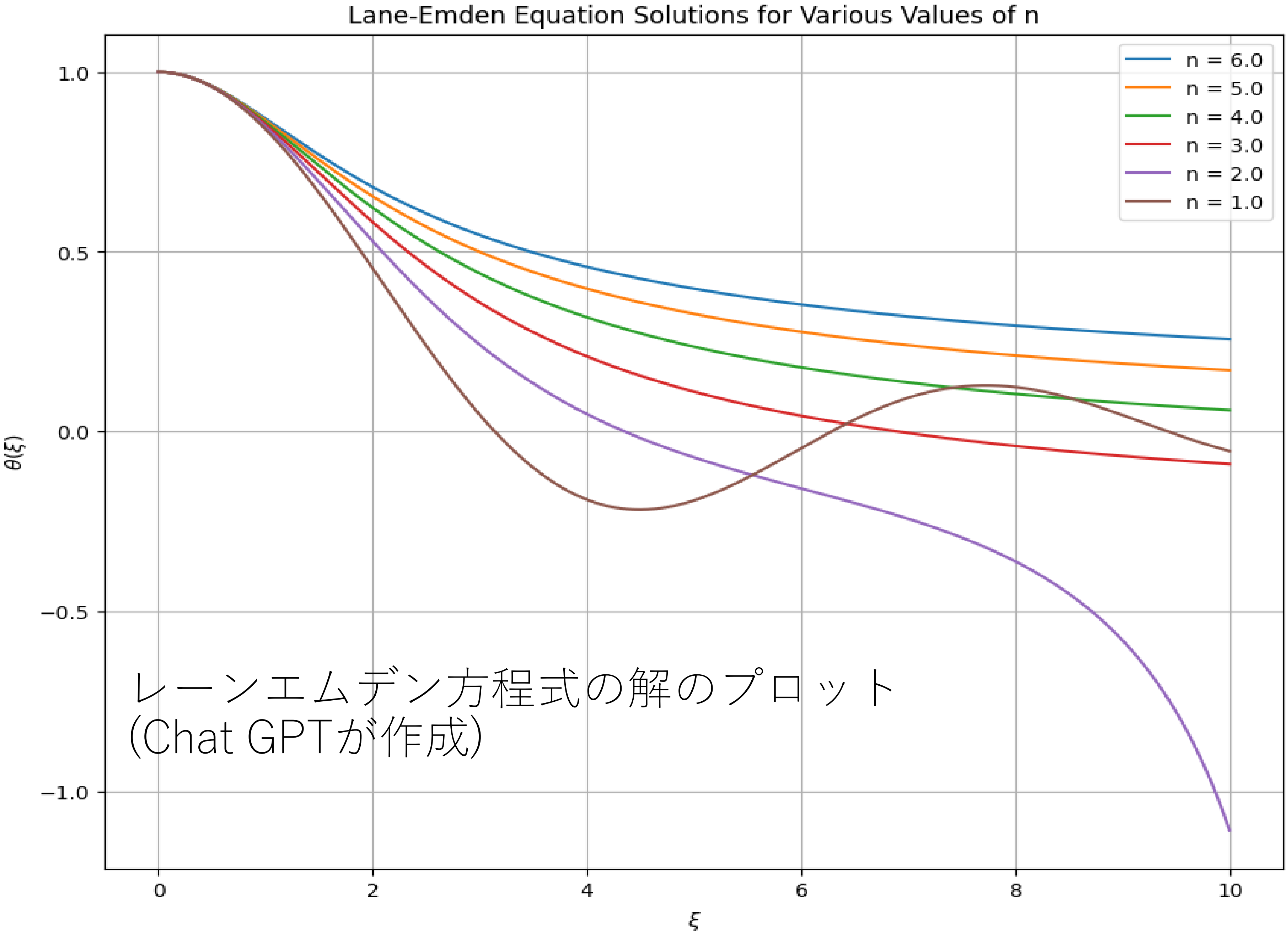
$\xi = 0$(中心)での境界条件

ρ=$\rho_c\theta^n$より、$\theta = 1$

$M_r \propto r^3$ $\quad\quad \lim_{r\to 0}\frac{GM_r\rho}{r^2} = \lim_{r\to 0}\frac{GM_r\rho_c}{r^2} = 0$

$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r\rho}{r^2}$より、$\left(\frac{dP}{dr}\right)_{r=0} = \left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=0} = 0$

レーンエムデン方程式は２階の微分方程式なので、境界条件が２個あると方程式の解は一意に定まる。



レーンエムデン方程式の解のプロット
(Chat GPTが作成)

$\theta(\xi)$=0となる最小のξをξ_nとする。

ρ=$\rho_c\theta^n$　$\xi=\dfrac{r}{a}$ より、星の表面までの距離R(星の半径R)は$a\xi_n$となる

レーンエムデン方程式の厳密解

レーンエムデン方程式の厳密解はn=0,1,5で存在することが知られている。

n=0の時

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right) = -1 \quad \frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right) = -\xi^2$$

$$\frac{d\theta}{d\xi} = -\frac{1}{3}\xi + C_1 \qquad \left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=0} = 0 \text{ より} \quad C_1 = 0$$

$$\theta(\xi) = C_2 - \frac{1}{6}\xi^2 \qquad \theta(0) = 1 \quad C_2 = 1$$

$$\theta(\xi) = 1 - \frac{1}{6}\xi^2 \qquad \xi_0 = a\sqrt{6}$$

n=1の時

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right)+\theta=0$$

$Z=\theta\xi$とすると、$\dfrac{d\theta}{d\xi}=\dfrac{d}{d\xi}\left(\dfrac{Z}{\xi}\right)=\dfrac{1}{\xi}\dfrac{dZ}{d\xi}-\dfrac{Z}{\xi^2}$

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{dZ}{d\xi}-Z\right)+\frac{Z}{\xi}=\frac{1}{\xi}\frac{d^2Z}{d\xi^2}+\frac{Z}{\xi}=0 \qquad \frac{d^2Z}{d\xi^2}+Z=0$$

一般解は$\mathrm{Z}=Acos\xi+Bsin\xi$　　$\xi=0$の時、$Z=A=0$

$$\theta(\xi)=\frac{Z}{\xi}=\frac{Bsin\xi}{\xi} \qquad \lim_{\xi\to0}\theta(\xi)=\lim_{\xi\to0}\frac{Bsin\xi}{\xi}=B=1$$

$$\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=0}=\lim_{\xi\to0}\frac{\xi cos\xi-sin\xi}{\xi^2}=\lim_{\xi\to0}\frac{\xi+o(\xi^2)-\xi}{\xi^2}=0 \qquad \theta(\xi)=\frac{sin\xi}{\xi} \quad \xi_1=\pi a$$

n=5と中心近傍の解

n=5の時

長いので省略　$\theta(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{3}\xi^2}}$ が得られる　$\xi_5 = \infty$

中心近傍での解について

レーンエムデン方程式はξ=0で確定特異点になるため、 特異点近傍での展開を考える。 球対称モデルで、 $\pm\xi$の時にもエムデン方程式の形は不変なので、θは偶関数になる。

中心近傍の解

$$\theta(\xi) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_{2i}\xi^{2i}$$ として、エムデン方程式に代入すると

（計算するだけなので省略）

$$\theta(\xi) \approx 1 - \frac{1}{6}\xi^2 + \frac{n}{120}\xi^4$$ となる

実際、n=0,1,5の時の厳密解の4次までの項と一致していることが分かる。

例:n=5の時

$$\theta(\xi) = \left(1 + \frac{1}{3}\xi^2\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{6}\xi^2 + \frac{1}{9}\xi^4\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{6}\xi^2 + \frac{1}{24}\xi^4$$

星の全質量

星の全質量$M(R)$は次の積分で求められる　$M(a\xi_n)=\int_0^{a\xi_n}4\pi r^2\rho dr$

$$M(a\xi_{\mathrm{n}})=\int_0^{\xi_n}4\pi a^3\xi^2\rho_c\theta^n d\xi=4\pi a^3\rho_c\int_0^{\xi_n}\xi^2\theta^n d\xi$$

$$\int_0^{\xi_n}\xi^2\theta^n d\xi=\int_0^{\xi_n}-\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right)d\xi=-\xi_n^2\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_n}$$ より

$$M(a\xi_n)=-4\pi a^3\rho_c\xi_{\mathrm{n}}^2\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_n}>0$$

n=5の時、 $M(a\xi_5)$は有限になる。

星の平均密度を$\bar{\rho}$とする。

$$\bar{\rho}=\frac{M(R)}{\frac{4}{3}\pi R^3}=-\frac{4\pi a^3\rho_c\xi_{\mathrm{n}}^2\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_n}}{\frac{4}{3}\pi a^3\xi_n^3}=-\frac{3}{\xi_n}\rho_c\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_n}$$

指数n、星の半径、質量が求まり、ニュートン法などでξ_{n}や$\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_n}$の近似値が求まったとすると、中心密度$\rho_c$も求まる

またaも求まるのでK, P_cも求めることができる。

試しに太陽の中心密度を計算する

例：太陽

太陽の半径、質量から中心密度を求める

$$R = 6.960 \times 10^8 m \qquad M = 1.988 \times 10^{30}\mathrm{kg} \qquad \mathrm{n} = 3$$

$$-\frac{1}{\xi_3}\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_3} = 6.152 \times 10^{-3}$$

$$\rho_c = \frac{-M}{4\pi R^3}\frac{1}{\xi_3}\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_3} = 7.629 \times 10^4 kg/m^3$$

太陽 - Wikipediaによると、太陽の中心密度は$1.56 \times 10^5 kg/m^3$より、よい精度で計算できていることが確認できた。

参考文献

- 福江純・沢武文・高橋真総「極・宇宙を解く」　恒星社
- ポリトロープ - Wikipedia
- 田中秀和　天体物理学III　宇宙流体力学 astrophys_fluid_dyn.pdf (tohoku.ac.jp)
- 太陽 – Wikipedia

ご清聴ありがとうございました