# Lie 代数と表現論ノート

J.E. Humphreys　　Introduction to Lie Algebras and Representation Theory

Humphreys の行間埋めノートです　　　　作成日　2025/12/13

# 目次

# 1 Chapter I BASIC CONCEPTS

## 1.1 Definitions and first examples

### 1.1.1 The notion of Lie algebra

**Definition 1.1 Lie 代数**

体 $\mathbb{F}$ 上のベクトル空間 $L$ で

$$[\ ,\ ] : L \times L \to L \qquad (x, y) \mapsto [x, y]$$

という**ブラケット (btaket)** が定義され, 次の性質

(L1)$[\ ,\ ]$ が**双線形写像**

つまり, $\forall x, y, z \in L \quad , \forall \lambda_i \in \mathbb{F}$ に対し

$$[\lambda_1 x + \lambda_2 y, z] = \lambda_1 [x, z] + \lambda_2 [y, z]$$
$$[x, \lambda_1 y + \lambda_2 z] = \lambda_1 [x, y] + \lambda_2 [x, z]$$

が成立する.

(L2)$\forall x \in L$ に対し

$$[x, x] = 0$$

が成立する.

(L3)$\forall x, y, z \in L$ に対して **Jacobi 恒等式**

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

が成立する.

を満たす $(L, [,])$ を **Lie 代数**という.

(L1)(L2) から

$$[x + y, x + y] = [x, x + y] + [y, x + y] = [x, y] + [y, x] = 0$$

が成立するので, 任意の $\forall x, y \in L$ に対して Lie braket は**反可換**

$$[x, y] = -[y, x]$$

であることが分かる. また, **(L2) を忘れ**, 反可換性と双線形性を仮定することで

$$[x, x] = -[x, x] \Leftrightarrow [x, x] = 0$$

が言える. これは (L2) そのものなので, **反可換性と (L2) は同値**であることが言える.

Lie 代数の例として以下のようなものがある.

**Example 1.1　Lie 代数の例**

(1) $\mathbb{R}^3$ と外積 $(\mathbb{R}^3, \times)$
(2) 一般線形 Lie 代数 $\mathfrak{gl}(V) = (\mathrm{End}\ V, [\ ,\ ])$
(3) 特殊線形 Lie 代数 $\mathfrak{sl}(V)$
(4) symplectic Lie 代数 $\mathfrak{sp}(V)$
(5) 直交代数 $\mathfrak{o}(V)$
(6) ベクトル場 (多様体論) $(\mathfrak{X}(M), [\ ,\ ])$　特に, Lie 群の原点 $e$ での接空間 $T_eG$
(7) 相空間上の関数全体と poisson 括弧 (解析力学) $(C^\infty(TQ^*), \{\ ,\ \})$

**証明:**
(1) **外積**
$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^3$ に対して, 外積 $\times$ は明らかに双線形性を満たし,

$$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

であり, **ベクトル 3 重積 (vector triple product)**

$$(\boldsymbol{x} \times (\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{z})) + (\boldsymbol{y} \times (\boldsymbol{z} \times \boldsymbol{x})) + (\boldsymbol{z} \times (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y})) = \boldsymbol{0}$$

を満たす.

(2) **一般線形 Lie 代数**
交換子 $[\ ,\ ] : \mathrm{End}\ V \times \mathrm{End}\ V \to \mathrm{End}\ V$ を

$$[f, g] = f \circ g - g \circ f = fg - gf$$

で定義する. これは一般に非可換である.
このとき, 明らかに双線形性と $[f, f] = 0$ を満たし

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = fgh - ghf - fhg + hgf + ghf - hfg - gfh + fhg + hfg - fgh - hgf + gfh = 0$$

を満たすので, これは Lie 代数である.
また, End $V$ に交換子がついたこの Lie 代数を一般線形代数と呼び, $\mathfrak{gl}(V)$ で表す.
また, $V$ が有限次元ベクトル空間の場合では基底をあらわに書けるので, 線形変換を考えると

$$\mathrm{End}\ V \simeq M(n, \mathbb{F})$$

となることが分かる. ここで $\dim V = n$ とした.

(3) から (5) は省略する. 線形 Lie 群のときに証明する.

(6) **ベクトル場**
任意の $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して braket を

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf) \qquad \forall f \in C^\infty(M)$$

で定義する. ここで一般に $XY \notin \mathfrak{X}(M)$ であるが, $[X,Y] \in \mathfrak{X}(M)$ となることに注意する必要がある.
実際, 座標近傍を $(U, x_1, \cdots x_n)$ として $[X,Y]$ の局所座標表示を考えると $X|_U = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $Y|_U = \sum b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ として

$$[X,Y]|_U = \sum_i \sum_j \left( a_j \frac{\partial b_j}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_j}{\partial x_j} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_U \in \mathfrak{X}(U)$$

となるので, braket はベクトル場で閉じること

$$[\ ,\ ] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M) \qquad (X,Y) \mapsto [X,Y]$$

が確かめられる.
また, 定義より双線形性が成り立ち, **jacobi 恒等式**

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$$

が成立する. この $0 \in \mathfrak{X}(M)$ は $M$ の各点 $p$ にゼロベクトルを対応させるベクトル場である.
Jacodi 恒等式の証明は (2) と同じのため省略する.

(7) **相空間上の関数全体と Poisson 括弧**
ポアソン括弧 (Poisson braket) の定義にはハミルトンベクトル場 $X_g, Y_f$ と symplectic 2 形式 $\Omega$ の symplectic 内積

$$\{f,g\}_p = \langle \Omega | X_g, Y_f \rangle = \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} \right)$$

で定義できるが, 一般的な解析力学では symplectic 内積の結果のみを用いて

$$\{f,g\}_p = \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} \right)$$

で Poisson 括弧 $\{,\} : C^\infty(TQ^*) \times C^\infty(TQ^*) \to C^\infty(TQ^*)$ を定義する.
ここで, $C^\infty(TQ^*)$ は相空間上の関数全体の集合とする.
Poisson 括弧は明らかに双線形性があり, $\{f,f\}_p = 0$ となる.
また, これも任意の $f,g,h \in C^\infty(TQ^*)$ に対して Jacobi 恒等式

$$\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$$

が成り立つ. 証明は計算するだけなので省略する.

**Definition 1.2　Lie 代数の同型**

$L, L'$ を体 $\mathbb{F}$ 上の Lie 代数とする.
ベクトル空間上の**同型** $\phi : L \to L'$ があり, 任意の $\forall x,y \in L$ に対して

$$\phi([x,y]) = [\phi(x), \phi(y)]$$

が成立するとき, Lie 代数 $L, L'$ は**同型**といい, $\phi$ を Lie 代数の同型ともいう.

### 1.1.2 Linear Lie algebras

**Definition 1.3 部分 Lie 代数**

$\mathbb{F}$ 上の Lie 代数 $L$ の部分集合 $K \subset L$ が**部分 Lie 代数**であるとは, 任意の $\forall a, b \in K$ に対して

$$[a, b] \in K \subset L$$

が成り立つことである.

この braket は Lie 代数 $L$ に付随するものである. 次に**線形 Lie 代数**と呼ばれる $\mathfrak{gl}(V)$ の部分 Lie 代数を考える.

**Definition 1.4 線形 Lie 代数**

線形 Lie 代数とは, 一般線形代数 $\mathfrak{gl}(V)$ の部分 Lie 代数である.

$\mathfrak{gl}(V)$ の部分 Lie 代数なので, braket は交換子 $[f, g] = fg - gf$ で定義される.
線形 Lie 代数には以下のようなものがある.

**Example 1.4 線形 Lie 代数の例**

(1) 特殊線形 Lie 代数 $\mathfrak{sl}(V) = \{X \in \mathfrak{sl}(V) \mid \mathrm{Tr}(X) = 0\}$
(2) 直交 Lie 代数 $\mathfrak{so}(V) = \{X \in \mathfrak{so}(V) \mid X^T = -X\}$
(3) 狭義上三角行列 $\mathfrak{t}(n, \mathbb{F}) = \{X \in \mathfrak{t}(n, \mathbb{F}) \mid X \in$ 狭義上三角行列全体の集合 $\}$
(4) 上三角行列 $\mathfrak{n}(n, \mathbb{F}) = \{X \in \mathfrak{n}(n, \mathbb{F}) \mid X \in$ 上三角行列全体の集合 $\}$
(5) 対角行列 $\mathfrak{d}(n, \mathbb{F}) = \{X \in \mathfrak{d}(n, \mathbb{F}) \mid X \in$ 対角全体の集合 $\}$

証明:
(1)$\forall X, Y \in \mathfrak{sl}(V)$ に対して

$$\mathrm{Tr}[X, Y] = \mathrm{Tr}(XY - YX) = \mathrm{Tr}(XY) - \mathrm{Tr}(YX) = 0$$

より, $[X, Y] \in \mathfrak{sl}(V)$ よって, $\mathfrak{sl}(V)$ は線形 Lie 代数である.

(2)$\forall X, Y \in \mathfrak{so}(V)$ に対して

$$([X, Y])^T = (XY - YX)^T = Y^T X^T - X^T Y^Y = YX - XY = -[X, Y]$$

より, $[X, Y] \in \mathfrak{so}(V)$ よって, $\mathfrak{so}(V)$ は線形 Lie 代数である.

(3)$\forall X, Y \in \mathfrak{t}(n, \mathbb{F})$ に対して

$$[X, Y] = XY - YX \in \mathfrak{n}(n, \mathbb{F}) \subset \mathfrak{t}(n, \mathbb{F})$$

より, $[X, Y] \in \mathfrak{t}(n, \mathbb{F})$ よって, $\mathfrak{t}(n, \mathbb{F})$ は線形 Lie 代数である.

(4)$\forall X, Y \in \mathfrak{n}(n, \mathbb{F})$ に対して

$$[X, Y] = XY - YX \in \mathfrak{n}(n, \mathbb{F})$$

より, $[X, Y] \in \mathfrak{n}(n, \mathbb{F})$ よって, $\mathfrak{n}(n, \mathbb{F})$ は線形 Lie 代数である.

(5)$\forall X, Y \in \mathfrak{d}(n, \mathbb{F})$ に対して

$$[X, Y] = XY - YX = 0 \in \mathfrak{d}(n, \mathbb{F})$$

より, $[X,Y] \in \mathfrak{o}(n,\mathbb{F})$ よって, $\mathfrak{o}(n,\mathbb{F})$ は線形 Lie 代数である.

### 1.1.3 Lie algebras of derivations

**Definition 1.5 $\mathbb{F}$-代数**

$\mathfrak{U}$ を $\mathbb{F}$ 上ベクトル空間とする. このとき, 二項演算

$$\star : \mathfrak{U} \times \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$$

が定義されていて, $\forall x, y, z \in \mathfrak{U},\ \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$ に対して**双線形性**

$$x \star (\lambda_1 y + \lambda_2 z) = \lambda_1 x \star y + \lambda_2 x \star z$$
$$(\lambda_1 y + \lambda_2 z) \star x = \lambda_1 y \star x + \lambda_2 z \star x$$

を満たすとき, $\mathfrak{U}$ を **$\mathbb{F}$-代数**という.

Lie 代数 $L$ にも双線形性を持つ二項演算 $L \times L \to L$ として braket があるので, **Lie 代数も $\mathbb{F}$-代数**である.

**Definition 1.6 $\mathbb{F}$-代数における微分**

$\mathbb{F}$ 代数 $\mathfrak{U}$ における**微分**とは, 線形写像 $\delta : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$ で $\forall a, b \in \mathfrak{U}$ に対して
**Leibniz 則**

$$\delta(a \star b) = \delta(a) \star b + a \star \delta(b)$$

を満たすものである.
また, $\mathfrak{U}$ の微分全体を Der $\mathfrak{U}$ と呼び, これは End $\mathfrak{U}$ の部分ベクトル空間である.

より強く, Der $\mathfrak{U}$ は**線形 Lie 代数**, つまり $\mathfrak{gl}(\mathfrak{U})$ の部分 Lie 代数と言える.

**証明**

$\forall d, \delta \in \mathrm{Der}\mathfrak{U}$ , $\forall a, b \in \mathfrak{U}$ に対して

$$\begin{aligned}
[d,\delta](a \star b) &= d\delta(a \star b) - \delta d(a \star b) \\
&= d\left(\delta(a) \star b + a \star \delta(b)\right) - \delta\left(d(a) \star b + a \star d(b)\right) \\
&= (d\delta - \delta d)(a) \star b + a \star (d\delta - \delta d)(b) \\
&= [d,\delta](a) \star b + a \star [d,\delta](b)
\end{aligned}$$

が成り立つ. よって, Der $\mathfrak{U}$ は線形 Lie 代数であることが示された.
Lie 代数としての Der $\mathfrak{U}$ を**微分代数** (derivation algebra) という.

**Example ad $x$**

次に $\mathbb{F}$-代数をより狭く Lie 代数として微分代数 Der $L$ を考える. $\mathbb{F}$-代数の 2 項演算 $\star$ を braket[ , ] として考える.
ここで, 次のような線形写像は Lie 代数の種類によらず Der $L$ の元であると言える.
$x \in L$ を任意に固定して

$$\mathrm{ad}\ x : L \to L \qquad y \mapsto [x,y]$$

という線形写像を考える. このとき **Jacobi 恒等式**から

$$\mathrm{ad}\ x([y,z]) = [x,[y,z]] = [[x,y],z] + [y,[x.z]] = [\mathrm{ad}\ x(y), z] + [y, \mathrm{ad}\ x(z)]$$

が言えるので, ad $x \in$ Der $L$ となる.
つまり, braket[ , ] は Lie 代数の条件である **Jacobi 恒等式**考えることで本質的に**微分**と同じ役割を持てることが分

かる. ad $x$ の形で書ける微分代数の元を**内部微分**といい, そうでない元を**外部微分**という.

似たような話は代数以外にも表れる.

**Example 1　Lie 微分 (多様体論)**
$\varphi_t$ をベクトル場 $X$ で生成されるフロー (flow) とする.
このとき, ベクトル場の **Lie 微分**を

$$\mathcal{L}_X Y = \lim_{t\to 0} \frac{(\varphi_{-t})_* Y - Y}{t}$$

で定義すると

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$$

を満たすことが分かる. (証明は松本多様体 §17 補足 を参照)
ベクトル場 $\mathfrak{X}(M)$ は交換子で Lie 代数を構成するので,

$$\mathcal{L}_X([Y, Z]) = [X, [Y, Z]] = [\mathcal{L}_X Y, Z] + [Y, \mathcal{L}_X Z]$$

を満たすことが分かる. これは ad を $\mathcal{L}$ に変えた式であるが, Lie 微分の微分としての性質を braket が保証しているとも言うことができるだろう.

**Example 2　Poisson 括弧 (解析力学, 量子力学)**
簡単のため, 総空間上の関数は時間に陽に依存しないとする. Poisson 括弧も相空間 (phase spase) 上の関数全体を Lie 代数とすることが分かる.
この事実と微分代数の知識から, Poisson 括弧も微分としての役割を持つことが予測される.
実際, Leibniz 則

$$\{fg, h\}_p = f\{g, h\}_p + g\{f, h\}$$

を満たすことが計算により確かめられる. Poisson 括弧と微分の性質として, 正準力学の重要な方程式である

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\}$$

がある. この式は, Poisson 括弧が微分としての役割を持つことを保証しており, さらに系の時間発展に対する物理量の**保存**を示唆していることが分かる. 実際, この式は Lie 微分の式と本質的に同じことを言っており, 解析力学を symplectic 幾何学を用いて定式化する際には Hamilton ベクトル場によって生成されるフローを考え, その軌道上で物理量の保存を議論することができる. これは Lie 代数のノートなので詳しくは述べないが, 多様体論で以下のような補題がある.

**補題**
$X, Y$ を完備なベクトル場とする.
$[X, Y] = 0$ であるための必要十分条件は, $\forall t \in \mathbb{R}$ について $(\varphi_t)_* Y = Y$ が成り立つことである.

また, 正準量子化を通して量子力学に対しても同じようなことが言える. (無限次元であるが)
Heisenberg の運動方程式

$$\frac{d\hat{\mathcal{O}}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{\mathcal{O}}, \hat{H}]$$

ここに出現する交換子も

$$[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}]$$

という Leibniz 則を満たす.
この関係は量子力学の演算子の計算に対して以下のような応用が利く.

$$[A, B^n] = \sum_{k=0}^{n-1} B^k [A, B] B^{n-1-k}$$

特に,$[A, B]$ が定数 (c 数) の場合は

$$[A, B^n] = n[A, B]B^{n-1}$$

が成り立つので, 演算子による展開を考えると

$$[A, f(B)] = [A, B]\frac{df}{dB}$$

が言える. 例えば

$$[\hat{x}, \sin(\hat{p})] = i\hbar\frac{\partial \sin(p)}{\partial p} = i\hbar\cos(\hat{p})$$

が成り立つ.

### 1.1.4 Abstract Lie algebras

## 1.2 Ideals and homomorphisms

### 1.2.1 Ideals

### 1.2.2 Homomorphisms and representations

### 1.2.3 Automorphisms

## 1.3 Solvable and nilpotent Lie algebras

### 1.3.1 Solvability

後で書きます

### 1.3.2 Nilpotency

**Definition 3.2 冪零 Lie 代数**

$L$ を Lie 代数とする. $L$ に対して

$$L^0 = L \qquad L^1 = [L, L] \qquad L^i = [L, L^{i-1}]$$

のような減少列

$$L = L^0 \supset L^1 \supset L^2 \supset \cdots \supset L^i \supset \cdots$$

を定義する. この減少列が $\{0\}$ で止まるとき, すなわち

$$L^{N-1} \neq 0 \qquad L^N = [L, L^{N-1}] = 0$$

となる $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ が存在するとき, $L$ を**冪零 (Nilpotent)Lie 代数**という.

注意: $L$ の微分列から定義される $L^{(i)}$ と区別するために括弧 () を付けないようにする.

また, 帰納的に考えることで

$$L^{(1)} = [L, L] = L^1 \qquad L^{(2)} = [L^1, L^1] \subset [L, L^1]$$

より

$$L^{(i)} = [L^{(i-1)}, L^{(i-1)}] \subset [L, L^{i-1}] = [L.L^i]$$

が得られる. また, $L$ がべき零 Lie 代数のとき, 定義から任意の $x \in L$ に対して ad $x$ がべき零となることが分かる. この逆を言えるのが次節で証明する **Engel の定理**である. これは Lie 代数のべき零性を ad で特徴付けている.

**Proposition 3.2 冪零 Lie 代数の性質**

$L$ を Lie 代数とする. また $f : L \to K$ を Lie 準同型とする.
(a)$L$ がべき零 Lie 代数ならば $L$ の任意の部分 Lie 代数 $A$ は冪零 Lie 代数である.
　また, $\mathrm{Im} f$ もべき零 Lie 代数となる.
(b)$L$ がべき零 Lie 代数ならば, 任意の $L$ のイデアル $I$ に対して構成される商 Lie 代数 $L/I$ もべき零 Lie 代数となる.
(c)$L/Z(L)$ がべき零 Lie 代数ならば, $L$ もべき零 Lie 代数である.
(d)$L$ が非零のべき零 Lie 代数ならば, $Z(L) \neq 0$ である.

**証明**

(a) $L$ のべき零性より, $L^N = 0$ となる $N > 0$ が存在する. また, $A \subset L$ なので, $A$ に関する減少列を考えることで帰納的に $A^i \subset L^i$ となる. よって, $A^N = 0$ となる $N > 0$ は存在するので $A$ もべき零 Lie 代数である.
$f$ は Lie 準同型なので,

$$f(L^1) = f([L, L]) = [\mathrm{Im} f, \mathrm{Im} f] = (\mathrm{Im} f)^1$$

となる. 帰納的に考えると

$$f(L^i) = [\mathrm{Im} f, f(L^{i-1})] = (\mathrm{Im} f)^i$$

が言えるので, $L$ がべき零 Lie 代数ならば $(\mathrm{Im} f)^N = 0$ となる $N > 0$ が存在する.
よって, Im $f$ はべき零 Lie 代数である.

(b) 射影 $\pi : L \to L/A \quad x \mapsto x + A$ は Lie 準同型写像である. 実際, $\forall x, y \in L \quad \forall a, b \in \mathbb{K}$ に対して

$$\pi(ax + by) = ax + by + A = a(x + A) + b(y + A) = a\pi(x) + b\pi(y)$$

$$\pi([x, y]) = [x, y] + A = [x + A, y + A] = [\pi(x), \pi(y)]$$

が成立することが確かめられる.
よって, (a) より $\mathrm{Im}\ \pi = L/A$ はべき零 Lie 代数となる.

(c) $L/Z(L)$ のべき零性より, $(L/Z(L))^N = 0$ となる $N > 0$ が存在する.
準同型な射影 $\pi : L \to L/Z(L)$ を考えると, (a) より

$$(L/Z(L))^N = (\mathrm{Im}\ \pi)^N = \pi(L^N) = 0$$

なので, $L^N \subset Z(L)$ である. $L$ の減少列を考えると $L^N$ は中心に入るので

$$L^{N+1} = [L, L^N] = 0$$

となる. よって, $L$ はべき零 Lie 代数となる.

(d) $L$ はべき零 Lie 代数なので, $L^{N-1} \neq 0,\ L^N = 0$ となるような $N > 0$ が存在する. ここで, 中心の定義より

$$L^N = [L, L^{N-1}] = 0 \qquad L^{N-1} \subset Z(L)$$

となるので, $Z(L) \neq 0$ であることが示された.

### 1.3.3 Proof of Engel's Theorem

Engel の定理を示す前にいくつかの重要な補題を示す.

**Lemma 3.3.1 ad のべき零性**

$x \in \mathfrak{gl}(V)$ がべき零ならば, $\mathrm{ad}x \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{gl}(V))$ もべき零である

**proof**

べき零性より, $x^N = 0$ となる $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ が存在する.
$x$ による左移動, 右移動を

$$\lambda_x : \mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}(V) \quad (y \mapsto xy)$$

$$\rho_x : \mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}(V) \quad (y \mapsto yx)$$

とする.
$(\lambda_x^N)y = x^N y, \quad (\rho_x^N)y = yx^N$ より, $x$ のべきゼロ性から $\lambda_x, \rho_x$ もべき零.
また, 任意の $y \in \mathfrak{gl}(V)$ に対して $\mathrm{ad}\, x(y) = [x, y] = (\lambda_x - \rho_x)(y)$ となるので

$$\begin{aligned}(\mathrm{ad}\, x)^{2N} &= (\lambda_x - \rho_x)^{2N} \\ &= \sum_{k=0}^{2N} \binom{2N}{k} (\lambda_x)^k (-\rho_x)^{2N-k}\end{aligned}$$

$\sum$ の第 $0 \sim N$ 項で $\rho_x$ のべき零性, 第 $N \sim 2N$ 項で $\lambda_x$ のべき零性が現れるので $(\mathrm{ad}\, x)^{2N} = 0$
よって, $\mathrm{ad}\, x \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{gl}(V))$ はべき零である. □
また, $\rho_x, \lambda_x$ のべき零性より $\mathrm{ad}\ x^{2N-1} = 0$ ともなれる.

**Theorem 3.3.2**

$V \neq \{0\}$ を有限次元ベクトル空間, $\mathfrak{gl}(V)$ の任意の部分 Lie 代数を $L$ とする.
このとき, 任意の $x \in L$ がべき零ならば, ある $v \in V \setminus \{0\}$ が存在して, 任意の $x \in L$ に対して $x(v) = 0$ を満たす.

**step of proof**

$\dim L = 0$ のときは明らか. $\dim V$ に関する数学的帰納法で示す.

step1:

$L$ の部分 Lie 代数を $K \subsetneq L$ とする. $\dim L \leq m-1$ で Theorem 3.3.2 が成立すると**仮定**すると, $K \subsetneq N_L(K)$ となることを示す.

step2:

$K$ を極大部分 Lie 代数とすると, $N_L(K) = L$ となり, $\dim L - \dim K = 1$ であることを示す.

step3:

$W = \{v \in V \mid \forall y \in K,\ y(v) = 0\ \}$ が step2 から nonzero な $V$ の部分ベクトル空間であることを示し, その元を用いて $v$ を構成すると題意を満たすようなものの存在性を示すことができる.

**proof**

· $\dim V = 0$ のとき $L = \{0\}$ より $x(v) = 0$ となる $v$ は必ず存在.

· $\dim V = 1$ のとき $L = \mathbb{F}x$ となる $x \in L$ が存在してべき零性より $x^{N-1} \neq 0$ , $x^N = 0$ となる $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ が存在.
次に $x^{N-1}(w) \neq 0$ となる $w \in V$ を取る. 取れないならば $x^{N-1}(w) = 0$ となる $w \in V$ は存在するので証明が終わる.
$v = x^{N-1}(w)$ とすれば $x(v) = 0$ となる $x \in V$ は $w$ から必ず構成できる. これは任意の $x \in L$ に対して言えるので示された.

· $\dim L \leq m-1$ のとき, 命題が真であるとする.

$L$ の部分 Lie 代数 $K \subsetneq L$ を任意に 1 つ取る.

$\mathrm{ad} : L \to \mathfrak{gl}(L)$ の制限 $\mathrm{ad}|_K : K \to \mathfrak{gl}(L)$ の像 $\mathrm{Im\ ad}$ の任意の元 $\mathrm{ad}\,x \in \mathrm{Im\ ad}$ は Lemma 3.3.1 よりべき零である.
$L, K$ の Lie 代数としての構造を忘れて $\mathbb{F}$ 上ベクトル空間としたとき, $L/K$ を作れる. ここで任意の $x \in L$ に対して

$$\mathrm{Ad}|_K(x) : L/K \to L/L \qquad y + K \mapsto \mathrm{ad}(x)(y) + K$$

が well-defined な線形写像であることを示す. ad の線形性と $K$ の部分 Lie 代数の定義より

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}|_K(x)(y' + K) &= \mathrm{ad}(x)(y') + K \\ &= \mathrm{ad}(x)(y) + \mathrm{ad}(x)(y' - y) + K \\ &= \mathrm{ad}(x)(y) + [x, y' - y] + K \\ &= \mathrm{Ad}|_K(x)(y + K)\end{aligned}$$

より, $\mathrm{Ad}|_K(x)$ は well-defined であり, ad の線形性から線形写像である.
また, ad の準同型性より,

$$\mathrm{Ad}|_K : K \to \mathfrak{gl}(L/K) \qquad x \mapsto \mathrm{Ad}|_K(x)$$

も well-defined な Lie 代数の準同型である. Lemma 3.3.1 より $\mathrm{Ad}|_K(x)$ はべき零であり $\mathrm{Im\ Ad}|_K$ は $\mathfrak{gl}(L/K)$ の部分 Lie 代数であることが分かる.
帰納法の仮定を $V \to L/K$ , $L \to \mathrm{Im\ Ad}|_K$ とすると, $\dim \mathrm{Im\ Ad}|_K \leq \dim(L/K) < \dim L$ より, ある $v + K \in L/K \setminus \{0 + K\}$ が存在して, 任意の $\mathrm{Ad}|_K(x) \in \mathrm{Im\ Ad}|_K$ に対して $\mathrm{Ad}|_K(x)(v + K) = 0 + K$ が成り立つということである. これを言い換えると,

$$\mathrm{Ad}|_K(x)(v + K) = \mathrm{ad}(x)(v) + K = 0 + K$$

より, $\mathrm{ad}(x)(v)=[x,v]\in K$. すなわち $v\in N_L(K)$ であることを保証する.
また, 正規化代数 $N_L(K)$ の定義より $K\subset N_L(K)$ となるので, $K\subsetneq N_l(K)$, すなわち $K$ が $N_L(K)$ の真部分集合であることが分かる.
正規化代数の定義より, $N_L(K)$ は $K$ をイデアルとする $L$ の極大 Lie 部分代数である.
実際, $K\subset N_L(K)$ であり, $\forall x\in N_L(K),\ \forall y\in K$ に対して $[x,y]\in K$ より $K$ はイデアルとなる. また, $N_L(K)\subset J$ として $J$ のイデアルが $K$ とすると, $\forall x\in J,\ \forall y\in K$ に対して $[x,y]\in K$ が成立. しかし, 正規化代数の定義より, $J\subset N_L(K)$ となるので $N_L(K)=J$. よって, $N_L(K)$ は $K$ をイデアルとする極大部分 Lie 代数である.
ここで, $K$ を $K\subsetneq L$ を満たす極大部分 Lie 代数とする.
$N_L(K)\subset L$ であり, $K\subsetneq N_L(K)$ であるので $K$ の極大性から $N_L(K)=L$ であることが分かる.
よって, $N_L(K)=L$ は $K$ をイデアルとするので商 Lie 代数 $L/K$ を定義できる.
次に, 射影 $\pi:L\to L/K\quad x\in x\mapsto x+K$ を考える.
$\dim(L/K)>1$ と仮定すると, $\dim P=1$ , $P\subset L/K$ という部分 Lie 代数が構成できることを確かめる.
実際, $\forall x_1,x_2\in\pi^{-1}(P)$ ,$\forall\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{F}$ とすると

$$\pi(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)=\lambda_1x_1+K+\lambda_2x_2+K=\lambda_1(x_1+K)+\lambda_2(x_2+K)=\lambda_1\pi(x_1)+\lambda_2\pi(x_2)\in P$$

$$\pi([x_1,x_2])=[x_1,x_2]+K=[x_1+K,x_2+K]=[\pi(x_1),\pi(x_2)]=0+K\in P$$

より, $P$ は $L/K$ の部分 Lie 代数であり, $\pi^{-1}(P)$ は $L$ の部分 Lie 代数となる.
また, 任意の $\forall y\in K$ に対して $\pi(y)=\bar{0}\in P$ であるので, $K\subset\pi^{-1}(P)$ となる.
$\dim P=1$ なので, $\bar{0}\neq p\in P$ となる元 $p\in P$ がある. $\pi(x)=p\neq 0$ となる $x\in L$ が存在するので, $\pi^{-1}(p)\notin K$ であり, $\pi^{-1}(P)\subset L$ となる.
次に, $\bar{x}\in L/K\backslash P$ を満たす $\bar{x}$ が存在することから, $\pi(x)=\bar{x}\notin P,\ x\notin\pi^{-1}(P)$ . が分かるので, $K\subsetneq\pi^{-1}(P)\subsetneq L$ が示された. しかし, これは $K$ の極大性に矛盾する. よって, $\dim(L/K)=\dim L-\dim K=1$ であることが分かるので, $\forall z\in L\setminus K$ とすると任意の $x\in L$ はある $h\in K$ とある $r\in\mathbb{F}$ で $x=h+rz$ と表される.
よって, 任意の $z\in L\setminus K$ に対して $L=K+z\mathbb{F}$ と表されることが分かる.
ここで, $L$ の部分ベクトル空間 $W=\{v\in V\mid\forall y\in K,\ y(v)=0\}$ を考える. $\dim K<\dim L$ より帰納法の仮定を用いて $W\neq\{0\}$ であることが分かる. $K$ は $L$ のイデアルなので $\forall z\in L\setminus K,\ \forall y\in K,\ \forall w\in W$ に対して

$$yz(w)=zy(w)-[z,y](w)=z\cdot 0-0=0$$

が成り立つので, $\forall w\in W$ に対して $z(w)\in W$ が成立する. $z\in L$ より, $z^{N-1}(w)\neq 0,\ z^N(w)=0$ となる $N\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ が存在. $v=z^{N-1}(w)$ とすると, 任意の $\forall x\in L$ に対して

$$x(v)=(h+rz)(z^{N-1}(w))=0+rz^N(w)=0$$

となるので $v\in V\setminus\{0\}$ が存在して $\forall x\in L$ に対して $x(v)=0$ となる. よって題意は示された. $\square$

**Theorem 3.3.3 Engel の定理**

$L$ を有限次元 Lie 代数とする. このとき以下の 2 つの命題は同値である.

(1) $L$ はべき零 Lie 代数

(2) 任意の $x \in L$ に対して $\mathrm{ad}\, x$ がべき零

**proof**

($\Leftarrow$) べき零 Lie 代数の定義より自明に成り立つ.

($\Rightarrow$) $\dim L$ に関する帰納法を用いる.

$\dim L = 0, 1$ のとき自明.

$\dim L \leq m - 1$ のとき, ($\Rightarrow$) 側の主張を仮定する.

$\dim L = m$ のとき, $\mathrm{Im\ ad} \subset \mathfrak{gl}(L)$ より Theorem 3.3.2 を用いると, ある $v \in L \setminus \{0\}$ が存在して任意の $\forall \mathrm{ad}(x) \in \mathrm{Im\ ad}$ に対して $\mathrm{ad}(x)(v) = [x, v] = 0$ を満たすことが分かる. つまり, $v \in Z(L)$ のため, $L$ の中心は非ゼロである.

$\dim(L/Z(L)) < \dim L = m$ に対して, $[x] = x + Z(L) \in L/Z(L)$ となり, $[x]$ はべき零なので, Lemma 3.3.1 より $\mathrm{ad}[x]$ もべき零になる.

帰納法の仮定より, $L/Z(L)$ はべき零 Lie 代数となる.

Proposition 3.2 (c) より, ”$L/Z(L)$ がべき零 $\Rightarrow$ $L$ もべき零” となるので, $L$ はべき零 Lie 代数となる.

これにより帰納法は回るので, 題意は示された. □

**Definition 3.3.4　ベクトル空間の旗と安定化**

$V$ を n 次元 $\mathbb{K}$ 上ベクトル空間とする. $V$ の**旗** (flag) とは, 部分ベクトル空間の増大列

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = V$$

であって, $0 \leq i \leq n$ に対して $\mathrm{dim} V_i = i$ が成立するようなものである.
また, $x \in \mathrm{End} V$ が $0 \leq i \leq n$ について $x(V_i) \subset V_i$ を満たすならば, $x$ は旗を**安定化**する (stabilize) という.

**Corollary　3.3.5　強い安定性と狭義上三角行列**

$L$ は $\mathfrak{gl}(V)$ の部分 Lie 代数であり, 任意の $x \in L$ に対して $x$ はべき零であるとする.
このとき,

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = V$$

という旗が存在し, 任意の $x \in L$ は $x(V_i) \subset V_{i-1} \subset V_i$ を満たす.
すなわち, $V$ の基底を適当にとると $L \subset \mathfrak{n}_n(\mathbb{K})$ となる.

Proof

補題 3 より, ある $v \in V \setminus \{0\}$ が存在し, 任意の $x \in L$ に対して $x(v) = 0$ となる.
その $v \in V \setminus \{0\}$ に対して, $V_1 = \langle v \rangle_{\mathbb{K}}$ とすると $V_1 \subset \mathrm{Ker}\ x$ であるので, 商ベクトル空間 $W = V/V_1$ を構成する.
$W$ への $L$ の作用 $\tau : L \to \mathfrak{gl}(W)\ \ x \mapsto \bar{x}$ は

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "x"] \arrow[d, "P"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & V \arrow[r, "P"] & V/V_1 \\ V/V_1 \arrow[urr, "\bar{x}"'] & & \end{tikzcd}$$

を可換にするように定まり. これは準同型定理より一意な構成であることが分かる.
任意の $x \in L$ はべき零なので, 任意の $\bar{x} \in \mathfrak{gl}(W)$ もべき零となる.
$\dim V$ に関する帰納法を用いる. $\dim V = 0, 1$ のときは自明.
$\dim W = \dim V - 1$ に対して主張を仮定すると, $\bar{x}$ はべき零なので

$$\{0\} = W_0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_{\dim V - 1} = W = V/V_1$$

という旗（flag）が存在して, $\bar{x}$ によって旗は安定化される. さらに強く,

$$\bar{x} : W_i \to W_{i-1} \subset W_i$$

も言える.
　ここで, $V_i$ を以下のように定義する.

$$V_i \equiv \begin{cases} \pi^{-1}(W_{i-1}) & (i = 1, 2, \ldots, \dim V) \\ 0 & (i = 0) \end{cases}$$

ここで, $\pi : V \to V/V_1$ は自然な射影である. これを用いると

$$\begin{tikzcd} & \{0\} = W_0 \arrow[d, "\pi^{-1}"] & \subset & W_1 \arrow[d, "\pi^{-1}"] & \subset & W_2 \arrow[d, "\pi^{-1}"] & \subset \cdots \subset & W_{\dim V - 1} = W \arrow[d, "\pi^{-1}"] \\ \{0\} = V_0 \quad \subset & V_1 & \subset & V_2 & \subset & V_3 & \subset \cdots \subset & V_{\dim V} = V \end{tikzcd}$$

という旗が存在する.

$\bar{x}$ に関する帰納法の仮定を用いると, 任意の $v \in V_i$ に対して

$$\pi(x(v)) = x(v) + V_1 = \bar{x}(v + V_1) \in W_{i-2}$$

となるので $\pi^{-1}(W_{i-2}) = V_{i-1} \ni x(v)$ より,$x : V_i \to V_{i-1} \subset V_i$ が成り立つ.

よって帰納法より題意は示された.

次に, $L \subset \mathfrak{n}_n(K)$ となること, すなわち $\forall x \in L \triangleleft \mathfrak{gl}(V)$ の行列表示を考える.

$V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = V$ に沿って基底を選ぶ.

- $V_1$ の基底として $e_1$, つまり $V_1 = \langle e_1 \rangle_K$
- $V_2$ の基底として $e_1, e_2$, つまり $V_2 = \langle e_1, e_2 \rangle_K$
- これを続けて, $V_i = \langle e_1, \ldots, e_i \rangle_K$ となるように基底を選ぶ.

$\forall x \in L \triangleleft \mathfrak{gl}(V)$ という線型変換は $x(V_i) \subset V_{i-1}$ を満たすことが示されているので, $x(e_j) \in V_{j-1}$ より

$$x(e_j) = \sum_{k=1}^{j-1} a_{kj} e_k$$

となる. $j = 1$ のとき $x(e_1) = 0, \quad j = 2$ のとき $x(e_2) = a_{12}e_1$

これ続けてを行列表示すると, $v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i$ として, $x(v) = \sum_{i=1}^{n} v_i \sum_{k=1}^{i-1} a_{ki} e_k$ より,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & a_{n-1,n} \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}}_{x} \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ \\ v_n \end{pmatrix}}_{v}$$

となる. よって, $L \subset \mathfrak{n}_n(K)$ である.

実際, 狭義上三角行列の任意の元はべき零であり,

$$v = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (c \in K \setminus \{0\})$$

という $v \neq 0$ のベクトルは, 任意の $A \in \mathfrak{n}_n(K)$ に対して $Av = 0$ となることが確かめれる. よって題意は示された.

**Lemma 3.3.6**

$L$ をべき零 Lie 代数, $I$ を $L$ のイデアルとする.
$I \neq \{0\}$ ならば $I \cap Z(L) \neq \{0\}$ である. 特に $Z(L) \neq \{0\}$ でもある.

**proof**

$I$ は $L$ のイデアルなので, 定義より $\forall x \in L$, $\forall i \in I$ に対して $\mathrm{ad}(x)(i) = [x, i] \in I$ が成り立つ. よって

$$\mathrm{ad}_I : L \to \mathfrak{gl}(I) \quad , \; x \mapsto \mathrm{ad}\ x$$

となり, $\mathrm{ad}_I(L) \subset \mathfrak{gl}(I)$ と言える.
補題 2 より, ある $i \in I \setminus \{0\}$ が存在して, $\forall \mathrm{ad}\, x \in \mathrm{ad}_I(L)$ に対して

$$\mathrm{ad}_I(x)(i) = [x, i] = 0$$

を満たす.
中心 $Z(L)$ の定義より, $i \in I \cap Z(L)$ のため $I \cap Z(L) \neq \{0\}$ である.
$I = Z(L)$ としたとき, $Z(L) \cap Z(L) = Z(L) \neq \{0\}$ でもある. よって題意は示された.

# 2 Chapter II Semisimple Lie Algebras

## 2.1 Theorems of Lie and Cartan

### 2.1.1 Lie's Theorem

べき零 Lie 代数に対する Engel の定理の本質は, 任意のべき零な Lie 代数の元に対して共通の固有ベクトルが存在することだった. 次の定理も性質は似ているが, 体 $\mathbb{F}$ が必要な固有値を全て含むことを保証するために, 代数閉体であることと標数が 0 であることも必要とする.

**Definition 4.1.1 代数閉体と標数**

$\mathbb{F}$ を体とする. 任意の定数でない 1 変数多項式 $f(x) \in F[x]$ に対し $\alpha \in \mathbb{F}$ があり $f(\alpha) = 0$ となるとき, $\mathbb{F}$ を**代数閉体**であるという,
また, 自然な環準同型 $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{F} \quad n \mapsto n \cdot 1 \in \mathbb{F}$ の Ker $\phi$ を考える.
Ker $\phi$ は素イデアルなので, Ker $\phi = (0)$ もしくは素数 $p$ があり Ker $\phi = p\mathbb{Z}$ となる.
Ker $\phi = (0)$ のとき, $\mathbb{F}$ の標数 char $\mathbb{K}$ を 0, Ker $\phi = p\mathbb{Z}$ のとき, $\mathbb{F}$ の標数 char $\mathbb{K}$ を p と定める.

例えば, 複素数体 $\mathbb{C}$ は代数閉体であり, 有理数体 $\mathbb{Q}$ の標数は 0, $\mathbb{F}_p$ は p である.

**Definition 4.1.2 ウェイト空間 (weight space)**

$V$ を有限次元 $\mathbb{F}$ 上ベクトル空間として $\mathfrak{gl}(V)$ の部分 Lie 代数 $L$ を考える. $\rho : L \to \mathfrak{gl}(V)$ を表現とすると, $\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(L, \mathbb{K})$ に対し

$$V_\lambda = \{ v \in V \mid \forall x \in L \ , \ x(v) = \lambda(x)v \ \}$$

とおく. $V_\lambda \neq 0$ のとき, $\lambda$ を $L$ 上の**ウェイト (weight)** という.
また, $V_\lambda \neq 0$ を**ウェイト空間 (weight space)** という.

**Theorem 4.1.3**

$V$ を有限次元 $\mathbb{F}$ 上ベクトル空間として, $\mathfrak{gl}(V)$ の部分 Lie 代数 $L$ が可解だとする.
このとき, $V \neq 0$ ならば $V$ には任意の $x \in L$ に対する共通固有ベクトルが存在する.

Proof step
Theorem 3.3.2 のように dim$L$ に関する帰納法で示す.
Step1, まず dim $I$=dim$L - 1$ となるような $L$ のイデアル $I$ が存在することを示す.
Step2, 任意の $x \in I$ に対して,

$$x(v) = \lambda(x)v$$

が満たされるような $v \in V \setminus \{0\}$ と $\lambda : I \to \mathbb{K}$ が存在することを示す.
Step3, $V_\lambda = \{w \in V \mid x(w) = \lambda(x)v \quad \forall x \in I\}$ が $L$ 不変. すなわち任意の $x \in L$ に対して $x(V_\lambda) \subset V_\lambda$ であることを示す.
Step4, $L = I + \mathbb{F}z$ とかけ, Step3 より $z$ は $V_\lambda$ 上の線形変換を定める. 体は代数閉体なので固有多項式の根は必ず体上に存在して, 固有値を $\alpha$ に対応する $z$ の固有ベクトルを $v_0 \in V_\lambda$ とすると, この $v_0$ が共通固有ベクトルとなるので題意を満たす.

**Theorem 4.1.4　Lie の定理**

$L$ を $\mathfrak{gl}(V)$ の可解な部分 Lie 代数とし, $\dim V = n < \infty$ とする.
このとき, 任意の $x \in L$ は $V$ 内のある旗を安定化させる.
よって, 適当な $V$ の基底を定めることで $L \in \mathfrak{t}_n(\mathbb{F})$ となる.

Proof
Theorem 4.1.3 と $\dim L$ に関する帰納法を用いて示す

**Theorem 4.1.5　Corollary A**

$\phi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ を有限次元表現とする. このとき $L$ が可解なら $\mathrm{Im}\ \phi = \phi(L)$ も可解なので, $\phi(L)$ も $V$ 内のある旗を安定化させる.

Proof : Lie の定理から成立する.

**Theorem 4.1.6　Corollary B**

$L$ を可解とする.
このとき, $L$ のイデアルの列 $0 = L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_n = L$ で, $\dim L_i = i$ となるものが存在する.

Proof
ad:$L \to \mathfrak{gl}(L)$ は有限次元表現であるので, ad $L$ は可解となる.
よって, $L$ 内のある旗を安定化させる.

$$\{0\} = L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_n = L \qquad s.t.\ \dim L_i = i$$

任意の ad $x \in$ ad $L$ に対して, $\mathrm{ad}(x)(L_i) \subset L_i$ が安定化の条件なので, $0 \leq i \leq n$ に対して $L_i$ は $L$ のイデアルである. よって題意は示された.

**Theorem 4.1.7　Corollary C**

$L$ を可解とする.
このとき $x \in [L, L]$ ならば ad $x$ はべき零である. 特に, $[L, L]$ はべき零である.

# 3 References


· Lie 代数, 表現論

· James E Humphreys. Introduction to Lie algebras and representation theory. Springer, 1972.

· 高間俊至, 奥山竜司. 表現論ノート

· 雪江明彦. 代数学 2 環と体とガロア理論

· 多様体論

· 松本幸夫 多様体の基礎 東京大学出版会

· 坪井 俊 幾何学 I 多様体入門 東京大学出版会

· 物理

· 山本義隆, 中村孔一 解析力学 I II 朝倉書店