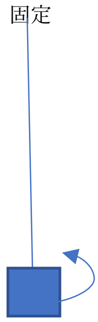
ねじれ振り子の周期による物体の体積の測定について

２年Ｇ組　18 番　高原　賢都

1、 目的

物体を糸でつるした後の回転運動を参考にすることによって物体の体積の概算をする
今回は密度が一様な立方体Ａの体積を求めるとする。

２、実験



固定台から真下に糸をつるし、糸の下部を物体の中心につけてつるした糸の長さが 30cm になるように固定台で糸をとめる。
物体を 3,5,7 回転ねじった後、手を放してその物体が何秒後に初めて回転が止まったかを三回計測する。

３，実験結果

５円玉（外径 23mm 内径 5mm 重さ 3.75g）

	3 回転	5 回転	7 回転	平均
一回目[s]	5.14	5.03	5.24	
二回目[s]	5.05	5.24	5.02	
三回目[s]	5.24	5.06	5.07	
平均[s]	5.13	5.11	5.12	5.12

立方体Ａ（重さ 68.81g）

	3 回転	5 回転	7 回転	平均
一回目	16.68	16.86	16.55	
二回目	16.57	16.99	15.98	
三回目	16.19	16.63	16.26	
平均	16.48	16.83	16.27	16,54

4.1，考察 1

実験結果では回転数と時間の相関がほぼないと考えられるので、5 円玉も立方体 A の場合でも回転数によって時間が変わることはないと考えた。このことから、物体が回転し始めてから止まるまでの時間は 9 回の実験の平均とする。物体が回転し始めてから止まるまでの時間はねじれ振り子の周期の半分ともいえるので、今回の実験モデルを考えて理論的に考えていく。

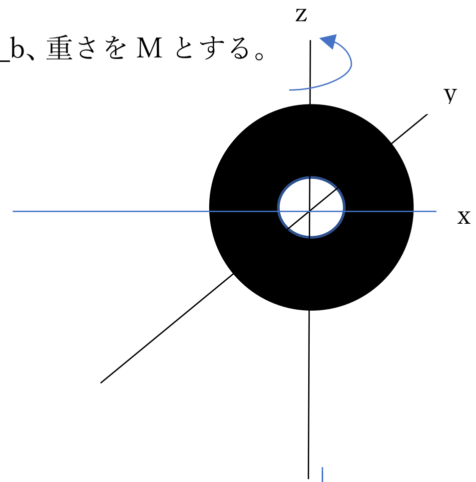
A[rad]物体をねじると、反対向きに-kθ[N]の復元力が生じる。(k を比例定数とする)

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -k\theta$$

この 2 階線形微分方程式を初期値を考えて解くと、

$$\theta(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{I}}t\right) \quad , \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}}$$

五円玉の Z 軸周りの慣性モーメントを I_z、内径を 2R_a、外径を 2 R_b、重さを M とする。
五円玉の厚みを無視して考えるとする



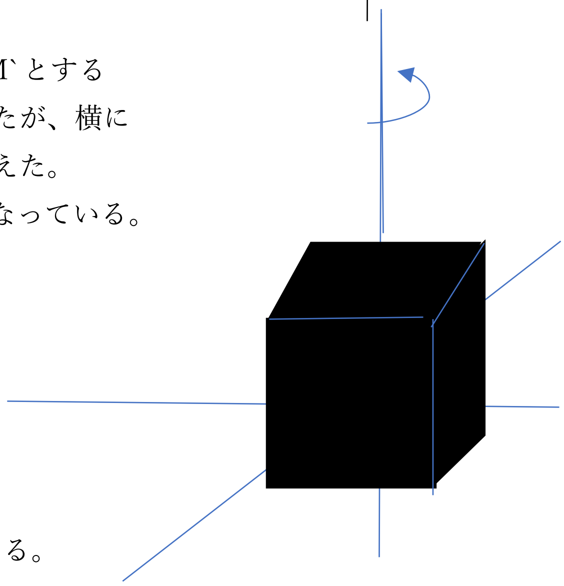
$$I_y = \sum m_i r^2 = \sum m_i x^2 + \sum m_i z^2 = I_x + I_z = 2I_z$$

$$I_y = \iint p(x,z)*(x^2+z^2)dxdz = \int_{R_a}^{R_b}\int_0^{2\pi} p(x,z)*r^2*r*d\theta dr$$

面密度 p(x,z)は一様とする。

$$I_z = \frac{I_y}{2} = \frac{M}{2(-R_a^2+R_b^2)\pi}\left(\int_{R_a}^{R_b} r^3\,dr\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) = \frac{M}{4}(R_a^2+R_b^2)$$

立方体の一辺を r、z 軸周りの慣性モーメントを I`_z、重さを M`とする
。立方体 A の上部に糸と立方体をとめるための軽い金具を使ったが、横に
広がっていないため慣性モーメントにはあまり影響しないと考えた。
金具も回転するため重さ M`は立方体 A と金具の重さの合計となっている。



$$I`_z = \int_{-\frac{r}{2}}^{\frac{r}{2}}\int_{-\frac{r}{2}}^{\frac{r}{2}}\int_{-\frac{r}{2}}^{\frac{r}{2}} p(x,y,z)*(x^2+y^2)dxdydz$$

$$= \int_{-\frac{r}{2}}^{\frac{r}{2}}\int_{-\frac{r}{2}}^{\frac{r}{2}}\frac{M`}{r^3}*\left(\int_{-\frac{r}{2}}^{\frac{r}{2}}dz\right)*(x^2+y^2)dxdy = \frac{M`}{6}r^2$$

k は G を横弾性係数、I を軸の断面 2 次極モーメント
L を糸の長さとした時、GI/L と表せるので k は一定の値となる。

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}} \quad より、k = I\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

$$\frac{I_z}{T_1^2} = \frac{I`_z}{T_2^2} \qquad \frac{r^2}{R_a^2 + R_b^2} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 \left(\frac{3M}{2M`}\right)$$

計測した値を代入すると、r=9.817mm となるが、実際の立方体 A の一辺の長さは 20.15mm 程度となる。

差がとても大きくなった理由として、「5 円玉の厚さを無視した」「5 円玉の構造が空気抵抗を受けやすく、軽すぎたので回転中に空気抵抗をたくさん受けた」の 2 点が考えられる。立方体 A の密度が一様ではない可能性もあるが、素材は真鍮なのでこれはあまり考えにくいと考えた。以上の 2 つの理由を検証するため、5 円玉の厚さを考慮した慣性モーメントを求めたり、5 円玉の代わりにあらかじめ大きさがわかっている 100g の円柱を縦に回してみる。

4,2, 考察 2

100g の円柱 A の回転周期の半分（直径 35.8 mm 高さ 36.95mm 重さ 100.0g）

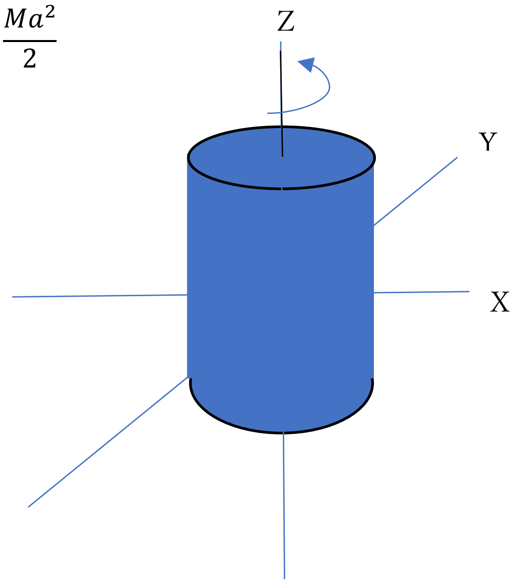
	3 回転	5 回転	7 回転	平均
一回目	30.10	29.55	29.98	
二回目	29.46	29.45	29.19	
三回目	29.81	29.89	29.87	
平均	29.79	29.63	29.68	29.70

縦に円柱をつるした時の円柱 A の回転周期 T_3=29.70×2=59.40 とする。

円柱の半径を a、高さを h、重さ M_3 した時の z 軸回転の慣性モーメント I_z3 を求める。

$$I_{z3} = \int_0^h \iint p(x,y,z) * (x^2 + y^2)dxdydz = \frac{M}{a^2\pi}\int_0^a \int_0^{2\pi} r^2 * rd\vartheta dr = \frac{Ma^2}{2}$$

$$\frac{I_{z3}}{T_3^2} = \frac{I`_z}{T_2^2} \qquad \frac{M_3 a^2}{2T_3^2} = \frac{M_2 r^2}{6T_2^2} \qquad r = \frac{aT_2}{T_3}\sqrt{\frac{3M_3}{M_2}}$$



測定した数値を代入すると、r=20.81[mm]となり、これは実際の立方体 A の長さ+0.66{mm}程度のずれとなった。r∝T^2 のため、周期が少しずれただけで推定される r も大きく変わってしまう。よって、このずれは立方体 A の回転中にかかる空気抵抗と計測した周期の誤差が原因だと考えた。

4,3、考察 3

5 円玉を厚さのある物体と考えて慣性モーメントを求める。

5 円玉の厚さを s[mm]とする。
一般的に 5 円玉の厚さは 1.5mm なので、ここでは s=1.5 とする。
微小空間と重心の距離を x とすると、平行軸の定理より、

$$dI_z = \frac{R_a^2 + R_b^2}{4} dM + x^2 dM$$

$$I_z = \int dI_z = \frac{M}{s}\int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \frac{(R_a^2 + R_b^2)}{4} + x^2 dx = \frac{M(R_a^2 + R_b^2)}{4} + \frac{Ms^2}{12}$$

$$\frac{I_z}{T_1^2} = \frac{I`_z}{T_2^2} \quad r = \frac{T_2}{T_1}\sqrt{\frac{M_1}{2M_2}(3(R_a^2 + R_b^2) + s^2)}$$

数値を代入すると、r=10.80 となり、厚さを考慮せずに計算したときよりは若干正確になったが実際の長さには 9.35mm も足りない。

5，結果

立方体 A の推定した体積は r^3=9.012[cm^3]。実際の立方体 A の体積は 8.181[cm^3]
差は 0.831[cm^3]となり実際の**+10.15%**の体積が推定された

これらの実験結果より、考察 1 で差がとても大きくなった主な理由は「5 円玉の構造が空気抵抗を受けやすく、軽すぎたので回転中に空気抵抗をたくさん受けた」が適切であると考えた。このことから、物体が回転した時に空気抵抗を受けにくいと差が小さく測定できると考えた。

６、感想

ロマンはある実験だと思うが、水を使った方が正確に速く体積を推定できると思った。
Word で数式は本当に疲れるので次から TeX を使ってみようと思う。