接ベクトル空間

grad31415

2025/02/21

1　接ベクトル空間

1.1　速度ベクトル

M を m 次元多様体とし、点 $p \in M$ における接ベクトル空間を $T_p(M)$ とする。また、写像

$$f : M \to \mathbb{R}$$

と、多様体 M 上の曲線

$$c : [-\epsilon, \epsilon] \to M$$

を考える。ここで導入する速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ は、局所座標系に依存せず、M 上の任意の関数 f に対して実数値を返す演算子として定義される.

具体的には、以下のように定義する：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}(f) &= \frac{d}{dt}(f \circ c)(t)\Big|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^{m} \frac{dx_i}{dt}\Big|_{t=0} \frac{\partial f}{\partial x_i}, \end{aligned} \tag{1}$$

すなわち速度ベクトルは

$$\boldsymbol{v} = \frac{dc}{dt}\Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{m} \frac{dx_i}{dt}\Big|_{t=0} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

ここで用いている $\{x_i\}_{i=1}^m$ は局所座標系であるが、この表現は任意の局所座標系で展開可能である.

また、接ベクトル空間は点 p での局所座標基底

$$T_p(M) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m} \right\rangle$$

を生成系として構成されるため、明らかに $\boldsymbol{v} \in T_p(M)$ となる．さらに、簡単な計算により $T_p(M)$ がベクトル空間であることも示される．なお，局所座標系の変換（例えば $\psi^{-1} \circ \phi$）により基底が変わることも可能である[1].

[1]参考：松本『多様体の基礎』 演習問題 9.1

1.2 関数 $f : M \to N$ の微分 df

M を m 次元多様体，N を n 次元多様体とし，写像

$$f : M \to N$$

を考える．また，$\boldsymbol{v} \in T_p(M)$ および $\boldsymbol{w} \in T_{f(p)}(N)$ とする．

写像 f の微分

$$df : T_p(M) \to T_{f(p)}(N)$$

は，曲線

$$f \circ c : [-\epsilon, \epsilon] \to N$$

に沿った速度ベクトルを用いて定義される．すなわち，点 $p \in M$ における速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して，点 $f(p) \in N$ における速度ベクトル

$$\boldsymbol{w} = \frac{d}{dt}(f \circ c)(t)\Big|_{t=0}$$

が対応する．局所座標系 $\{x_i\}$（M 上）と $\{y_j\}$（N 上），ただし $y_j = f_j(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ と表されるとき，以下の例が成り立つ．

例 1.2.1

局所座標基底に対して，

$$df\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_p = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p)\Big(\frac{\partial}{\partial y_j}\Big)_{f(p)}.$$

証明: 点 p の局所座標表示を $(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ とし，$\boldsymbol{v} = \frac{\partial}{\partial x_i}$ とする．このとき，

$$\boldsymbol{v} = \frac{dc}{dt}\Big|_{t=0} = \sum_{k=1}^{m} \frac{dx_k}{dt}\Big|_{t=0} \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

曲線 $c(t)$ の座標表示は

$$c(t) = \big(p_1, p_2, \ldots, p_{i-1},\, p_i + t,\, p_{i+1}, \ldots, p_m\big)$$

となるので，$\frac{dx_k}{dt}\Big|_{t=0} = \delta_{ik}$ である．したがって，$f \circ c$ に沿った速度ベクトル $\boldsymbol{w}$ は

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w} = \frac{d}{dt}(f \circ c)(t)\Big|_{t=0} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{dy_j}{dt}\Big|_{t=0} \frac{\partial}{\partial y_j} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \frac{dx_k}{dt}\Big|_{t=0} \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(p) \frac{\partial}{\partial y_j} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p)\Big(\frac{\partial}{\partial y_j}\Big)_{f(p)}.
\end{aligned}$$

これにより示された．

例 1.2.2　(Jacobi 行列)

　局所座標基底で任意のベクトルを

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{m} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

と表すとき，その微分

$$df(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w} = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_{f(p)}$$

は，各成分が

$$w_j = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p)\, v_i$$

と表される．

証明:　df の線形性より，

$$df\Big(\sum_{i=1}^{m} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big) = \sum_{i=1}^{m} v_i\, df\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big).$$

例 1.2.1 より，

$$df\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p) \left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_{f(p)}.$$

よって，

$$df(\boldsymbol{v}) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p)\, v_i\right) \left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_{f(p)},$$

すなわち各成分は

$$w_j = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p)\, v_i.$$

これで示された．

　ここで，$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ は Jacobi 行列の成分と呼ばれる．また，逆写像の定理より，Jacobi 行列の行列式が 0 でないとき，df は微分同相写像となり，$T_p(M)$ と $T_{f(p)}(N)$ は同相であることが分かる．