多様体論 自主ゼミ 6/27

Defenition 3.0.　群論

　群 G が集合 X に作用するとする。

(i)$x \in X$ に対して、x の G による軌道を $G \cdot x = \{gx \mid g \in G\}$ とする。

(ii)$G \cdot x = X$ となる $x \in X$ が存在するとき、X は G の等質空間であり、この作用は推移的であるという。

(iii)$x \in X$ に対して、x の安定化群を $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$ とする。

Defenition 3.1.

　位相空間 X の同相写像の集合 G が写像の合成について群となっているとき、G を位相空間 X の変換群といい、群 G が位相空間 X に作用するという。

X 上の同値関係を $x, y \in X$ に対し、$x \sim y \Leftrightarrow G \cdot x = G \cdot y$ と定義する。
ここで、$G \cdot x$ は G による $x \in X$ の軌道である。

※教科書 (坪井 幾何学 1 多様体入門 P50) の定義とこの定義は同値になっている。
　証明は雪江 代数学 1 群論入門の命題 4.1.21 を参照

Theorem 3.1.

　X がハウスドルフ空間, G が有限群ならば、同値類の集合 X/G はハウスドルフ空間となる。

Theorem 3.2.

　より一般に、M が n 次元 C^∞ 級多様体、G が C^∞ 級有限変換群、安定化群 $G_x = id$ ならば、M/G は同じく n 次元 C^∞ 級多様体である。

Example 3.1.　射影空間

n 次元実射影空間 $\boldsymbol{R}P^n$ を 2 種類の同値関係から構成する。
S^n は n 次元 C^∞ 級多様体であり、点 $\boldsymbol{x} \in S^n$ に対して、対蹠点 $-\boldsymbol{x}$ が一意に定義できる。
対蹠点を対応させる写像を F とすると、$G = \{id_{S^n}, F\} \simeq \boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}$ は S^n の変換群になっている。
また、点 x の安定化群 $G_x = id_{S^n}$ となる。
S^n 上の同値関係は、

$$x \sim y \Leftrightarrow G \cdot x = G \cdot y \Leftrightarrow y = -x$$

となるので、$S^n/G = S^n/\{id_{S^n}, F\} = \boldsymbol{R}P^n$ となる。
よって、n 次元実射影空間 $\boldsymbol{R}P^n$ はハウスドルフ空間であり、n 次元 C^∞ 級多様体でもある。
自然な射影 $\pi : S^n \to P^n$ を考えると、その逆写像 $\pi^{-1}(p)$ は 2 点 $p, -p$ からなる。
このような状況を S^n は P^n の 2 重被覆空間である と表現することがある。

また、$\boldsymbol{R}^{n+1} - \{0\}$ 上の同値関係を

$$\boldsymbol{x}_1 \sim \boldsymbol{x}_2 \Leftrightarrow \lambda \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2 \text{ となる } \lambda \in \boldsymbol{R} - \{0\} \text{ が存在する}$$

で定義すると、$\boldsymbol{R}^{n+1} - \{0\}/\sim\, = \boldsymbol{R}P^n$ となる。

同様に $\boldsymbol{C}^{n+1} - \{0\}$ 上の同値関係を

$$\boldsymbol{x}_1 \sim \boldsymbol{x}_2 \Leftrightarrow \lambda \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2 \text{ となる } \lambda \in \boldsymbol{C} - \{0\} \text{ が存在する}$$

で定義すると、$\boldsymbol{C}^{n+1} - \{0\}/\sim\, = \boldsymbol{C}P^n$ となる。これを n 次元複素射影空間という。
$\boldsymbol{C}P^n$ は複素 n 次元 (実 $2n$ 次元) 多様体にもなり、$\boldsymbol{C}P^1 \simeq S^2$ を満たす。(問題 3.4.4)

Appendix　ホップ・ファイブレーション (Hopf fibration)

自然な射影 $\pi : S^{2n+1} \to \boldsymbol{C}P^n$ を考えると、この写像は次元を 1 下げているので、$\pi^{-1}(p)$ は S^1 と位相同型になることが分かる。
つまり、S^{2n+1} は $\boldsymbol{C}P^n$ 上のファイバーを S^1 となるファイバー束となる。(P108 図 5.8)

Example 3.2.　レンズ空間

$S^3 = \{(z_1, z_2) \in \boldsymbol{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ とする。
p, q を互いに素な正の整数として、C^∞ 写像 f_k を

$$f_k : (z_1, z_2) = (e^{2\pi i \frac{k}{p}}\ z_1\ , e^{2\pi i \frac{kq}{p}}\ z_2)$$

で定義する。

このとき、$G = \{f_0, f_1 \cdots f_{p-1}\} \simeq \boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$ は S^3 の C^∞ 級有限変換群となり、安定化群 $G_x = f_0 = id$ となるので、$S^3/G = L_{p,q}$ はハウスドルフ空間となり、3 次元多様体にもなる。

これはレンズ空間 $L_{p,q}$ と呼ばれており、$L_{2,1} = \boldsymbol{R}P^3$ となる。

Defenition 3.2.　ファイバー束

多様体 M 上のファイバー束とは可微分多様体 E と C^{∞} 級写像 $\pi : E \to M$ の組であって以下 2 つの条件を満たすものである。
(1)$x \in M$ に対して $\pi^{-1}(x)$ は可微分多様体 F と微分同相である。
(2)$x \in M$ に対して、x の開近傍 U と微分同相写像 $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times F$ があって、第 1 成分への射影 $p : U \times F \to U$ に対して $p \cdot \varphi = \pi$ が満たされる。

このとき、E を全空間、M を底空間、$E_x = \pi^{-1}(x) \simeq F$ を x 上のファイバーとよび、C^{∞} 級写像 $s : M \to E$ で $\pi \cdot s = id$ を満たすものをファイバー束 $\pi : E \to M$ の C^{∞} 級切断とよぶ。
特に、$F = \boldsymbol{R}^k$ ならばファイバー束はベクトル束になる。

Example 3.3.

可微分多様体 M の接ベクトル束 $\pi : TM \to TM$ はベクトル束の条件を満たす。また、点 $p \in M$ 上のファイバーは $\pi^{-1}(p) = T_pM$ となる。

Theorem 3.3.

ハウスドルフ空間 F, B の間に (2) の条件を満たすような連続写像 $\pi : E \to B$ が存在するとき、E はハウスドルフ空間になる。