2次元球面のリーマン曲率テンソル, リッチテンソル, スカラー曲率

半径 r の2次元球面

$$ds^2 = r^2\ d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\ d\phi^2$$

に対して, リーマン曲率テンソル $R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}$, リッチテンソル $R_{\alpha\beta}$, スカラー曲率 R を求めよ.

解答

一般に n 次元リーマン曲率テンソルの自由度は $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$ なので, 2次元球面の $R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}$ の自由度は1となる. よって, $R^{\theta}{}_{\phi\theta\phi}$ の値でリーマン曲率テンソルは一意に決定される.
以下, 簡単のため座標系を $\theta = 1\ \ \phi = 2$ とする.
$g_{\alpha\beta}$ の逆行列 $g^{\alpha\beta}$ を考えると, $g^{11} = \dfrac{1}{r^2},\ \ g^{22} = \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta},\ \ g^{12} = g^{21} = 0$ となる.
測地線方程式の形式を変分原理 $\delta I = \delta \displaystyle\int \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}|^2 d\tau = \frac{1}{2}m\ \delta \int g^{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta d\tau$ から求める.
定数を除くと, 同値な条件は $\delta \displaystyle\int \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2\right) d\tau = \delta \int L(\theta,\phi,\dot{\theta},\dot{\phi}) d\tau$ となる.

汎関数の停留値問題なので, Eluer 方程式を考えると

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 2\ddot{\theta} - 2\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2 = 0$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\phi} = 2\sin^2\theta\ddot{\phi} + 4\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}\dot{\phi} = 0$$

が得られる. 一方, 測地線方程式

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}\ \dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = 0$$

より, Christoffel 記号は

$$\Gamma^1{}_{22} = -\sin\theta\cos\theta,\quad \Gamma^2{}_{12} = \Gamma^2{}_{21} = \cot\theta,\qquad \mathrm{other} = 0$$

となる. 各テンソルを曲率テンソルの反対称性に注意しながら計算すると,

$$\begin{gathered}
R^1{}_{212} = \partial_1\Gamma^1{}_{22} - \partial_2\Gamma^1{}_{21} + \Gamma^1{}_{\mu1}\Gamma^\mu{}_{22} - \Gamma^1{}_{\mu2}\Gamma^\mu{}_{21} = -\cos^2\theta + \sin^2\theta + \cos^2\theta = \sin^2\theta \\
R^2{}_{121} = \partial_2\Gamma^2{}_{11} - \partial_1\Gamma^2{}_{12} + \Gamma^2{}_{\mu2}\Gamma^\mu{}_{11} - \Gamma^2{}_{\mu1}\Gamma^\mu{}_{12} = \frac{1}{\sin^2\theta} - \cot^2\theta = 1 \\
R^1{}_{221} = -R^1{}_{212} = -\sin^2\theta,\qquad R^2{}_{112} = -R^2{}_{121} = -1 \\
R_{11} = R^\mu{}_{1\mu1} = R^2{}_{121} = 1,\qquad R_{22} = R^\mu{}_{2\mu2} = \sin^2\theta,\qquad R_{12} = R_{21} = 0 \\
R_{1212} = g_{1\mu}R^\mu{}_{212} = g_{11}R^\theta{}_{212} = a^2 R^\theta{}_{212} \\
R = R^\mu{}_\mu = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} = g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} = \frac{2}{r^2}
\end{gathered}$$

が得られる.

以上の計算により, 半径 r の 2 次元球面では

計量

$$ds^2 \ = \ r^2 \ d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \ d\phi^2$$

Christoffel 記号

$$\Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta \qquad \Gamma^{\phi}{}_{\theta\phi} = \Gamma^{\phi}{}_{\phi\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \qquad \text{other} = 0$$

リーマン曲率テンソル

$$R^{\theta}{}_{\phi\theta\phi} = \sin^2\theta \quad R^{\theta}{}_{\phi\phi\theta} = -\sin^2\theta \quad R^{\phi}{}_{\theta\phi\theta} = 1 \quad R^{\phi}{}_{\theta\theta\phi} = -1 \quad \text{other} = 0$$

リッチテンソル

$$R_{\theta\theta} = 1 \qquad R_{\phi\phi} = \sin^2\theta \qquad R_{\theta\phi} = R_{\phi\theta} = 0$$

スカラー曲率

$$R = \frac{2}{r^2}$$

となることが分かる.