理論物理学と微分幾何学 ゲージ理論ノート

小林著 ”接続の微分幾何とゲージ理論”の自主ゼミの要約ノートでした. 更新日 2025/12/30

進捗状況

・2025/12/30 1.7 まで TeX で書きました. ノートは 7.4 章 ”ゲージ場の量子化”まで作成済み.(NEW)

この pdf について

私個人の勉強ノートの要約であるとともに, 理論物理に興味がある物理系の学部生にも見せれるようなものにしたいと思ってますが, self-consisted できない内容なので参考文献にある本を読みながら眺めてほしいです.

前提知識

・数学

線形代数と微積文学に加えて、基礎的な集合と位相、多様体の知識を必要とする。ホモロジー群に関する知識があると後半は読みやすいと思われる。(コ) ホモロジー群や特異ホモロジー、基礎的な圏論に関する pdf は別に作成しているので、もしかしたらこれと合体させるかも。

・物理

特にいらないが、後半の物理的背景を理解するためには学部の物理に加えて基礎的な一般相対論や場の量子論が必要になる。超対称性場の理論やアノマリーなどのやや高度な物理に関しては適度に解説を加えるつもりです。

目次

1　接続の一般論

1.1　ベクトル束の接続

Definition 1.1.1　ベクトル束の接続

ベクトル束 E の**接続**, または**共変微分**は線形写像

$$\nabla : \Gamma(E) \to \Gamma(T^*M \otimes E)$$

で Leibniz の式

$$\nabla(f\xi) = df \otimes \xi + f \cdot \nabla\xi \qquad f \in C^\infty(M) \quad \xi \in \Gamma(E)$$

を満たすものである.

接続 $\nabla_i \quad (i = 1, \cdots n)$ に対して, $\sum_{i=1}^n t_i \nabla_i \quad (\sum t_i = 1)$ も接続となることが分かる
また, 局所自明化 $\pi^{-1}(U_\alpha) = U_\alpha \times \mathbf{R}^r$ によって $E|_{U_\alpha}$ 上の局所的な接続 ∇_α を定義でき, 局所有限な M の開被覆 $\{U_\alpha\}$ とそれに従属する 1 の分割 $\{\rho_\alpha\}$ を使うことで E 上全体の切断

$$\nabla\xi = \sum \nabla_\alpha \rho_\alpha \xi$$

を定義できる.
∇_α は積バンドルの自明な接続を取ればよく, 森田微分幾何 P198 に構成の仕方が書かれている.

Definition 1.1.2　微分形式の一般化

$\wedge^k T^*M \otimes E$ の切断 $\Gamma(\wedge^k T^*M \otimes E)$ を E に値をとる M 上の k 次微分形式 $A^k(M; E)$ という.
つまり,

$$\Gamma(\wedge^k T^*M \otimes E) = A^k(M; E)$$

となる.
$k = 0$ のときは, $A^0(M; E) = \Gamma(E)$ となる.

この定義は M 上の微分形式の一般化である.
また, 次のような自然な同一視ができることが知られている.

Theorem 1.1.3　微分形式の一般化

E に値をとる M 上の k 形式全体 $A^k(M; E)$ は, $\mathfrak{X}(M)$ の k 個の直積から $\Gamma(E)$ への, $C^\infty(M)$ 加群として多重線形かつ交代的な写像全体と自然に同一視できる. すなわち

$$A^k(M; E) = \{\bigotimes_k \mathfrak{X}(M) \to \Gamma(E)\ ;\ C^\infty(M) \text{ 加群として多重線形かつ交代的な写像 }\}$$

proof

〜更新中〜

証明は森田微分幾何 P73 定理 2.8 の一般化として与えられる.

このように微分形式を一般化できることが分かった. しかし, 値を別の場所に取るような微分形式の外積は定義できていない. ここで, 次のような問題を考える.

Proposition 1.1.4

E に値をとる M 上の k 形式 $A^k(M;E)$ の任意の元 η は,

$$\eta = \theta \otimes \xi \quad (\theta \in A^k(M),\ \xi \in \Gamma(E) = A^0(M;E))$$

という形の一次結合で表せる.

この補題を使うことで, $A^p(M;E)$ と $A^q(M)$ の外積を自然にかつ一意的に定義することができる.
一般化された微分形式をより広く扱うためにベクトルバンドル End E を定義する.

Definition 1.1.5

ファイバー E_p の自己準同型の全体 End $E_p = \mathrm{Hom}(E_p, E_p)$ をファイバーとしたベクトルバンドルを End E と表す.

この定義から, End E の切断 Γ(End E) は $s : M \to$ End E $\quad p \mapsto$ End E_p という滑らかな割り当てとなる.

Example 1.1.6

1, 接続
ベクトル束 E の接続 ∇ は

$$\nabla : A^0(M;E) \to A^1(M;E)$$

である.

2, 曲率
接続の曲率 R は

$$R : A^0(M;E) \to A^2(M;E) \qquad R \in A^2(\mathrm{End}\ E)$$

である.

Definition 1.1.8

共変外微分 $D : A^p(M;E) \to A^{p+1}(M;E)$ という微分作用素は

$$D(\xi \otimes \theta) = \nabla\xi \wedge \theta + \xi \otimes d\theta$$

によって定義される.

ここで $\nabla\xi \wedge \theta$ は補題を用いて一意的に計算できることが証明できる.
また, 外微分作用素 d は 2 回繰り返すと恒等的に 0 になるが, 共変外微分 D は 0 にならない. その理由は曲率が 0 でないためである. ここで次の定義, 定理が存在する.

Proposition 1.1.8

任意の $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ 　$\varphi \in A^1(M; E)$ に対して

$$D\varphi(X, Y) = \frac{1}{2}\left(\nabla_X(\varphi(Y) - \nabla_Y(\varphi(X)) - \varphi([X, Y])\right))$$

が成立する.

proof

～更新中～

これは M 上の 1 次微分形式の外微分の式の拡張になることが分かる.

1.2 ベクトル束の曲率

Definition 1.2.1

任意の $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$R(X,Y) = \frac{1}{2}(\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]})$$

を対応させるような写像を, ∇ の**曲率**という.

Proposition 1.2.2

任意の $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$　$f, g, h \in C^\infty(M)$　$s \in \Gamma(E)$ に対して

$$(1)\ R(X,Y) = -R(Y,X)$$

$$(2)\ R(fX, gY)(hs) = fghR(X,Y)(s)$$

が成立する.

proof

～更新中～
証明は森田微分幾何 P200 補題 5.20 で与えられる

この性質から曲率が End E に値をとる M 上の 2 次形式であることが分かる.
曲率の定義として同値なものが存在することが知られている. また, その定義では共変外微分を用いることで従来の定義のような複雑さを解消することができる.

Definition 1.2.3

$\theta \in A^p(M;E)$ に対して, $R \in A^2(M;\mathrm{End}\ E)$ は

$$D^2\theta = R \wedge \theta$$

で定義される.
特に, $p = 0$ のときは

$$R = D^2 : \Gamma(E) \to A^2(M;E) \qquad D^2\xi = R\xi$$

となる. このとき, $R : \Gamma(E) \to A^2(M;E)$ を **曲率** という.

Theorem 1.2.4

曲率の定義 2.9 と定義 2.11 は同値である

proof

～更新中～
定義 2.9→2.11 の証明は森田微分幾何 P245 演習問題 5.6
定義 2.11→2.9 の証明は小林微分幾何とゲージ理論 P46 にある.

また, 補題 (共変外微分の計算式) に $\varphi = D\xi$ を代入すれば直ちに確かめられる.

1.3 ベクトル束の接続形式, 曲率形式

Definition 1.3.1

ベクトル束は自明化を考えれば局所的に直積束なので, 局所的には 1 次独立な切断の組 $(e_1, \cdots, e_r)$ が存在する. これを E の U 上の局所標構場もしくは枠とする.

接続形式 ω_λ^μ とは

$$\nabla e_\lambda = \sum_\mu \omega_\lambda^\mu e_\mu$$

で定義される M 上の $\mathfrak{gl}$ に値を取る 1 形式

曲率形式 Ω_λ^μ とは

$$Re_\lambda = \sum_\mu \Omega_\lambda^\mu e_\mu$$

で定義される M 上の $\mathfrak{gl}$ に値を取る 2 形式とする. また, 計算をすることで

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$$

接続 ∇ の**構造方程式**が得られる. これを曲率形式の定義としてもよい.

この表示は局所標構場に依存してしまう. 以下の補題により, ファイバー上の変換関数 $\psi_{\alpha\beta} = a \in GL(r; \mathbf{R})$ を用いることで接続形式と曲率形式の変換を行うことができる.

Proposition 1.3.2

接続形式 ω, 曲率形式 Ω は変換関数 $\psi_{\alpha\beta}(x) = a \in GL(r; \mathbf{R})$ を用いることで

$$\omega \to a^{-1}\omega a + a^{-1}da$$

$$\Omega \to a^{-1}\Omega a$$

のように変換される.

proof

〜更新中〜

証明は森田微分幾何 P203 命題 5.22 や小林微分幾何 P41,46 にある.
逆に, 接続形式と変換関数が与えられると, そのような接続 ∇ が一意的に存在することが知られている. 補足: 一般に Lie 群 G の元 a で Lie 環 $\mathfrak{g}$ の元 X に共役作用させると $a^{-1}Xa \in \mathfrak{g}$ となることが知られているので, 変換後の曲率形式も $\mathfrak{gl}$ に値を取ることが分かる.

Proposition 1.3.3

任意の $\xi \in \Gamma(E)$ に対して,
$$DR = 0$$
が成り立つ. 局所標構場を用いて展開すると
$$d\Omega - \Omega \wedge \omega + \omega \wedge \Omega = 0$$
となる. これを Bianchi 恒等式という.

proof

共変外微分を 3 回作用させる. R の定義より,
$$\begin{aligned} D^3\xi &= D^2(D\xi) = R \wedge (D\xi) \\ &= D(D^2\xi) = D(R\xi) = (DR)\xi + R \wedge (D\xi) \end{aligned}$$
両辺を引くことで, $DR = 0$ を得る.

次はファイバーに内積を入れることで, 局所標構場を正規直交基構に限定する. このときのファイバーはベクトル空間であり, 正規直交基構に限定されているので変換関数は直交群 $O(r)$ に限定できる. このとき接続形式, 曲率形式がどの空間に値を取る微分形式になるか議論する. (答えは Lie 環 $\mathfrak{o}(r)$ となる)

Definition 1.3.4

各点 $x \in M$ で E のファイバーに内積 $g_x : E_x \times E_x \to \mathbf{R}$ が与えられていて x に対して微分可能とする.
任意の $\xi, \eta \in \Gamma(E)$ に対して
$$d(g(\xi, \eta)) = g(\nabla\xi, \eta) + g(\xi, \nabla\eta)$$
となるとき, 接続 ∇ は g を保つ, ∇ は g と両立する, あるいは平行であるという.
一般に,
$$d(g(\xi, \eta)) = \nabla g(\xi, \eta) + g(\nabla\xi, \eta) + g(\xi, \nabla\eta)$$
となるため, 平行の条件は $\nabla g = 0$ とも表される.

また, Riemann 計量のときと同様に, 任意の E には U_α とそれに従属する 1 の分割を考えることで内積 g が存在することが言える. 内積を入れたので, ファイバーに対する長さ $||\xi|| = \sqrt{g(\xi,\xi)}$ を定義でき, Gram-Schmidt の直交化法を用いて標構場から正規直交基構をつくることができる. 正規直交基底はこのとき, $dg = \nabla g = 0$ となる.
小林微分幾何 P50,51 にあるように計算から以下のことが分かる.

Proposition 1.3.5

$$\omega_{\lambda}{}^{\mu} + \omega_{\mu}{}^{\lambda} = 0$$

$$\Omega_{\lambda}{}^{\mu} + \Omega_{\mu}{}^{\lambda} = 0$$

を得る. また, 変換関数 $\psi_{\alpha\beta} = a \in O(r)$ を用いることで

$$\omega \to a^{-1}\omega a + a^{-1}da$$

$$\Omega \to a^{-1}\Omega a$$

のように変換される.
すなわち接続, 曲率形式は Lie 環 $\mathfrak{o}(r)$ に値をとる M 上の 1,2 形式となる.

proof

～更新中～

逆に, このような交代性を満たす接続形式が g を保つ接続を定義することも証明できる.
また, 接続形式と変換関数から接続を一意に定めることができることを思い出すと以下のような定理が分かる.

Theorem 1.3.6

M を Riemann 多様体, U を任意の座標近傍とする.
$(s_1, \cdots, s_n)$ を TU の正規直交枠, $(\theta^1, \cdots, \theta^n) \in A^1(U)$ をその双対枠とする.
このとき,
(1) ${\omega_\lambda}^\mu + {\omega_\mu}^\lambda = 0$
(2) $d\theta^i = -\sum_{j=1}^n \omega_j^i \wedge \theta^j$
を満たすような $\mathfrak{gl}(n)$ に値をとる U 上の 1 形式 $\omega|_U$ はただ 1 つしか存在しない.

proof

〜更新中〜

ここで, (1) の条件は Riemann 計量 g を保つような必要十分条件を与えている.
(2) と合わせることによって, 接続が一意に定まることが知られている (証明は森田微分幾何 命題 5.32 にまかせる).
また, TM 上の変換関数は座標変換の Jacobi 行列であることがベクトルバンドルの議論から言える.
よって, 接続形式と変換行列が一意に定まるので接続も一意に定まることが示された.
このような任意の Riemann 多様体 M の接バンドル TM が持つただ 1 通りに定まるような自然な接続を **Levi-Civita 接続**もしくは **Riemann 接続**という.

物理学の一般相対論やゲージ理論が数学としての微分幾何学であるこの話にどのように繋がるか考える.
細かい説明は省略するが, 一般相対論における共変微分 ∇ は微分幾何学の接続 ∇ であり, 一般相対論における接続 (Christoffel 記号) Γ やゲージ理論におけるゲージ場 A は微分幾何学における接続形式 ω である. 実際, 共変微分の式 $\nabla_\alpha A^\mu = \partial_\alpha A^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} A^\beta$ は微分幾何学の接続の定義式の 1 つである $\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla s$ と全く同じであることが分かる.

補足 1: 一般相対論は正規直交化された局所座標を設定して, その座標軸を α などと表記して ∇_α とすることで α 方向の共変微分を作っている. これはベクトルバンドル E の枠の α 成分の正規直交枠 $X = e_\alpha$ での共変微分 ∇_X である.
補足 2: ベクトルバンドル $E|_U$ の枠の α 成分をを s_α とすると $\nabla s_\alpha = \omega^\mu_\alpha s_\mu$ で接続形式 $\omega|_U$ は定義されるので, 一般相対論では $\nabla = \partial + \Gamma$ となり, ゲージ理論では $\nabla = \partial + A$ となる. 数学のゲージ理論でも $\nabla = d + A$ のような表し方をする場合がある.

(1) の条件が $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$ という表記になることは Definition 2.16 から明らかである.
(2) の条件は
· 捻率テンソル $T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$ が 0 になること
· スカラー関数 $f : M \to \mathbf{R}$ の共変微分は可換である $(\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) f = 0$
· Christoffel 記号の下 2 つの添え字が対称になること $\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\nu\mu}$
という表記を用いることがあるがこれらは**全て同値な条件**であることが計算により分かる.

補足 3: これら以外にも一般相対論やゲージ場の物理は数学としての微分幾何学やゲージ理路と密接な関係がある. 一般相対論は Riemann 幾何学で定式化されているので自明だが, ゲージ理論 (物理) やその先の理論物理学ではファイバーバンドルの理論やゲージ理論 (数学), ホモロジーに出てくる式を簡略化して用いていることがよくある印象がある.

1.4 ファイバー束

Definition 1.4.1

点 $x \in M$ を固定してファイバー E_x の標構全体の集合 P_x を考える.
ファイバーの自然な基から他の基を選ぶのは同型写像 $u : \mathbf{R}^r \to E_x$ という写像で与えられる. また, この同型写像を 1 つ固定すると他の同型写像は

$$u = u_0 \circ a \qquad a \in GL(r; \mathbf{R})$$

という合成で必ず与えられるため, ファイバー E_x の標構全体の集合 P_x は以下のような 1 対 1 対応

$$a \in GL(r; \mathbf{R}) \to u = u_0 \circ a \in P_x$$

によって得られるが, この a の選び方は固定する u_0 に依存する.
次に

$$P = \bigcup_{x \in M} P_x$$

を定義する. また, 点 $x \in U$ 上に標構場を取るような対応 $\sigma_U(x)$ を

$$\sigma_U(x) : \mathbf{R}^r \to E_x$$

とする. ここで $\mathbf{R}^r$ は U 上の局所座標表示である.
このとき, 1 対 1 の対応

$$\varphi_U : P = \bigcup_{x \in M} P_x \to U \times GL(r; \mathbf{R}) \qquad \sigma_U(x) \circ s \mapsto (x, s)$$

を考えることで, P 上に $U \times GL(r; \mathbf{R})$ の多様体構造を入れる. また, 射影 $\pi : P \to M \quad , \pi(P_x) = x$ で定義することで主ファイバー束 P が得られる.
このように定義されたファイバー束 P を E に同伴する主ファイバー束 P と定義する.

Definition 1.4.2

Lie 群 G を構造群とする M 上の主ファイバー束 P とは次のような性質をもつ多様体である.
(1) 微分可能な写像 $\pi : P \to M$ が与えられていて

$$\pi(P_x) = x$$

(2) 群 G が P に右から作用しており
(2,1)$\pi(us) = \pi(u)$
(2,2)$\pi(u) = \pi(u')$ ならば $u' = us$ となる元 s が一意的に存在する
(2,3)M に開被覆 U_α があり, 各 U_α 上に微分可能切断 $U_\alpha \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ が存在する.
このようなときに, (P, π, M, G) あるいは P は G を構造群とする主ファイバー束であるという.

(2,1) は群作用が同じファイバー $\pi^{-1}(x)$ に移すこと. (2,1)(2,2) を合わせて G がファイバー $\pi^{-1}(x)$ 上に単純推移的である, またはファイバー $\pi^{-1}(x)$ は G の等質空間であるという.
ベクトルバンドルのときと同様に, 自明化を行うことで変換関数 $\psi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G \quad , \quad \psi_{\alpha\beta}(x) \in G$ を定義でき, これはコサイクル条件 $\psi_{\alpha\beta}(x)\psi_{\beta\gamma}(x) = \psi_{\alpha\gamma}(x) \quad ; \quad x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ を満たす.

Definition 1.4.3

主ファイバー束 P とその構造群 G の表現 $\rho : G \to GL(r, \mathbf{R})$ を考える
$G \times (P \times \mathbf{R}^r) \to P \times \mathbf{R}^r$ という群作用

$$s : (u, y) \mapsto (us, \rho(s)^{-1}y) \qquad s \in G\ , (u, y) \in P \times \mathbf{R}^r$$

が作る軌道と 1 対 1 対応する商空間 $(P \times \mathbf{R}^r)/G$ を $P \times_\rho \mathbf{R}^r$ という.
$P \times_\rho \mathbf{R}^r$ は $\mathbf{R}^r$ がファイバーとなるベクトル束となり, これをファイバー束に同伴するベクトル束という.

M の開被覆 U_α に関する P の変換関数 $\psi_{\alpha\beta}$ を使うと, $E = P \times_\rho \mathbf{R}^r$ は変換関数 $\{\rho \circ \psi_{\alpha\beta}\}$ によって与えられるベクトル束であることも示せる.

Example 1.4.4

構造群は $GL(r, \mathbf{R})$ となるので, 表現 $\rho : GL(r, \mathbf{R}) \to GL(r, \mathbf{R})$ となる.
(1)$\rho(s) = s$ のとき, $P \times_\rho \mathbf{R}^r = E$
(2)$\rho(s) =^t s^{-1}$ のとき, $P \times_\rho \mathbf{R}^r = E^*$
(3)$\rho(s) = s \otimes s$ のとき, $P \times_\rho \mathbf{R}^r = E \otimes E$ となる.

Definition 1.4.5

随伴表現によって定義される群作用

$$\mathfrak{g} \times G \to \mathfrak{g} \quad Ad(s)X = sXs^{-1} \qquad (s \in G,\ X \in \mathfrak{g})$$

を考える. 随伴表現によってつくられる $\mathfrak{g}$ をファイバーとし P に同伴するベクトル束を

$$P \times_{Ad} \mathfrak{g} = (P \times \mathfrak{g})/G$$

で定義する. この商空間は

$$s : (u, X) \mapsto (us, Ad(s^{-1})X) \qquad s \in G,\ (u, X) \in P \times \mathfrak{g}$$

で与えられる G の作用によりつくった商空間である.
また, $\{Ad\ \psi_{\alpha\beta}\}$ を変換関数としてもつベクトル束としても構成できる.

P 上の曲率形式は変換関数への共役作用によって同一視されるので, 曲率形式が M 上 $P \times_{Ad} \mathfrak{g}$ に値を持つ 2 次微分形式を与えることが分かる. また, これは後々に登場する定理によって容易に示すことができる. これを曲率 R といい, $R \in A^2(M; P \times_{Ad} \mathfrak{g})$ となる.

Definition 1.4.6

P を主 G 束とする. 各 $A \in \mathfrak{g}$ によって生成される G の 1 助変数部分群を e^{tA} あるいは $\exp tA$ と表す.
$\exp tA$ を P に右から作用させると, 各 $u \in P$ に対し, 軌道 $u \exp tA$ の $t = 0$ $(u \in P)$ における接ベクトルを定義でき, これを $A^*_u = uA \in T_uP$ とする.
このような接ベクトル $A^*_u \in T_uP$ と点 $u \in P$ を対応付けるような P 上ベクトル場 A^* を $A \in \mathfrak{g}$ に対応する**基本ベクトル場**という.

これまで定義したベクトル束の接続形式はどれも U 上でのみ定義されているものだったが, 次は接続形式を P 上に

拡張する. 主 G 束 P の接続, 接続形式を再定義することによって, P の接続形式を構造群 G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ に値をもつ P 上の 1 次微分形式である条件を満たすものとすることができる.

1.5 主ファイバー束の接続形式

Definition 1.5.1

P は Lie 群 G を構造群とする M 上の主ファイバー束, $s_\alpha \in G$ とする.
$\pi^{-1}(U_\alpha)$ 上で ω を

$$\omega = s_\alpha^{-1}\omega_\alpha s_\alpha + s_\alpha d s_\alpha$$

とすると, ω は P 全体で定義された $\mathfrak{g}$ に値を取る 1 次微分形式である. これを P 上 $\mathfrak{g}$ 値の接続形式という.

実際, 変換関数を用いて $\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ 上でも計算すると

$$\omega_\beta = \psi_{\alpha\beta}^{-1}(x)\omega_\alpha\psi_{\alpha\beta}(x) + \psi_{\alpha\beta}^{-1}(x)d\psi_{\alpha\beta}(x) \qquad s_\beta = \psi_{\beta\alpha}(x)s_\alpha$$

を代入して $\pi^{-1}(U_\alpha)$ 上でも $\pi^{-1}(U_\beta)$ 上でも σ は変わらないことが確認できる.
また, G による右作用 $P \times G \to G$ を $R_a : P \to P \quad u \mapsto ua$ で定義する.
このとき,

$$R_a^*\omega = a^{-1}\omega a \qquad a \in G$$
$$\omega(A^*) = A \qquad A \in \mathfrak{g}$$

を満たすことが証明できる.(小林微分幾何 P61,62)
立場を逆転させて, このような条件を満たす $\omega \in A^1(P;\mathfrak{g})$ を接続形式の定義にすることで主束上に接続を定義することができることが分かる. (ここでいう**接続**は未定義語である. 主束の接続形式を定義した後に主束の接続を定義する.)
まず初めに, **主束上の接続形式**を定義する.

Definition 1.5.2

主束 P 上の接続形式 $\omega \in A^1(P;\mathfrak{g})$ とは,
(i) 任意の $A \in \mathfrak{g}$ に対し, $\omega(A^*) = A$
(ii) 任意の $a \in G$ に対し, $R_a^*\omega = a^{-1}\omega a$
を満たす P 上 $\mathfrak{g}$ 値の微分形式である.

Definition 1.5.3

主 G 束 P の垂直部分空間 V_u は

$$V_u = \{X \in T_uP\ ;\ \pi_*X = 0\}$$

で定義される.

P 上ベクトル場の射影による押し出しが 0 になるのは, 垂直部分空間の元がファイバーに沿ったベクトルであることを意味している.
また, 各 $A \in \mathfrak{g}$ の定義する基本ベクトル場 A^* は主 G 束と基本ベクトル場の定義よりいたるところ垂直で

$$V_u = \{A_u^*\ ;\ A \in \mathfrak{g}\}$$

となる. また, 各点 $u \in P$ での線形写像 $\omega_u : T_uP \to \mathfrak{g}$ を用いて写像

$$A \mapsto A_u^* \mapsto \omega_u(A_u^*) = A$$

を構成することにより, ω_u は単射であることが分かる. 一方, $\dim V_u = \dim\mathfrak{g}$ であるので以下のような同型対応が存在する.

以上より, 次のような定理が存在する.

Proposition 1.5.4

任意の点 $u \in P$ において $\omega_u : T_uP \to \mathfrak{g}$ による

$$V_u \cong \mathfrak{g}$$

という自然な同一視が存在する.

垂直部分空間 V_u の定義と特徴付けを述べたので, これを用いて**主束上の接続**を定義する. この接続はベクトル束の接続 ∇ とは違い空間の分布を用いているので分かりにくいが, 接ベクトル全体の空間をファイバーに沿って"**垂直**"な空間と"**水平**"な空間に分けるものであり, 接束に対する共変微分の幾何学的意味の拡張みたいなものである.

Definition 1.5.5

主 G 束 P 上の接続とは, 各点 $u \in P$ において T_uP の部分空間 H_u を対応させる.
すなわち分布 $\{H_u \in T_uP \mid u \in P\}$ であり
(i) $T_uP = H_u \oplus V_u$ と直和分解される.
　つまり任意の $X \in T_uP$ に対して $X = X^H + X^V$ と分解できる.
(ii) H_u は右作用に関して不変, すなわち $H_{ua} = (R_a)_* H_u$
(iii) H_u は u について微分可能
を満たすものである.

また, 任意の主 G 束 P は接続を持つことが保証されている.(森田微分幾何 P285 命題 6.38)
これで主束に対する**接続**と**接続形式**を定義できた. このような接続を **Ehresmann 接続**という.
この 2 つは一見何も関係がないように思われるが, 以下の定理によって接続形式によって接続が定まり, 接続からも接続形式が定まることが分かる.

Theorem 1.5.6

T_uP の**水平部分空間** H_u を Ehresmann 接続 ω の核

$$H_u = \{X \in T_uP \ ; \ \omega_u(X) = 0\}$$

で定義すると, $T_uP = V_u \oplus H_u$ のように直和分解でき, H_u は右作用に関して不変で u について微分可能となる. よって, この構成は P **上に接続を定める**.

proof

～更新中～
証明：今野微分幾何 6.3 定理 6.3.2(1) を見よ

Theorem 1.5.7

水平部分空間 $H_u = \{\mathrm{Ker}\ \omega_u \in T_uP \mid u \in P\}$ という分布は P 上の接続形式全体の集合から P 上の接続全体の集合への **1 対 1 対応**を与える.

proof

～更新中～

証明：今野微分幾何 6.3 定理 6.3.2(2) を見よ

ベクトル束の接続 ∇ の定義や接続形式の定義は代数的 (?) だが, 各点 u に対して行う T_uP の直和分解はファイバーに対して水平な空間 H_u と垂直な空間 V_u を定める**幾何学的な定義**である.
以上により, 接続と接続形式が同値な概念であることが分かった. 主束に接続が与えられると, 任意の P 上ベクトル場の元 X は垂直成分 X^V と水平成分 X^H に分けられる. この分かれ方はファイバーに沿った幾何学的概念を与えるだけでなく, 接続形式や押し出しの演算に対して

$$\omega(X) = \omega(X^V) \qquad \pi_*(X) = \pi_*(X^H)$$

という計算しやすい計算結果を与えることができる.

1.6 主束の接続からベクトル束の接続へ

ここでは, 主束 P に同伴するベクトル束 $E = P \times_\rho V$ から良い性質を満たす P 上 p 次 V 上微分形式全体の集合 $A^p_{\mathrm{hor,Ad}}(P;V)$ を構成することによって, 同伴ベクトル束との同型 $A^p(P \times_\rho V) \simeq A^p_{\mathrm{hor,Ad}}(P;V)$ を示す.
その後に主束上の微分形式に対する共変外微分を定義して, 共変外微分に関する重要な公式を示す.

1.6.1 主束とそれに同伴するベクトル束の関係

主束 P に同伴するベクトル束 E を

$$E = P \times_\rho V$$

として, $(u, y) \in P \times V$ の定める E の元を $[u, y]$ とする.
各 $u \in P$ には**同型写像**

$$\Phi_u : V \to E_x \qquad y \mapsto \Psi_u(y) = [u, y]$$

がある. これを用いて以下のような写像 $\tilde{\xi}$ を定義する.

$$\tilde{\xi} : P \to V \qquad \tilde{\xi}(u) = \Psi_u^{-1}(\xi(\pi(u)))$$

ここで, $\pi : P \to M$ は射影である.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\tilde{\xi}: & P & \overset{\pi}{\to} & M & \overset{\xi}{\to} & E_x & \xrightarrow{\Psi_u^{-1}} & V \\
& \Cup & & \Cup & & \Cup & & \Cup \\
& u & \longmapsto & \pi(u) & \longmapsto & \xi(x) & \longmapsto & z \\
& & & \| & & \| & & \| \\
& & & x & & [u,z] & & \tilde{\xi}(u)
\end{array}$$

$\tilde{\xi}$ は右作用に対して以下のような性質が成り立つ.

Proposition 1.6.1

$\tilde{\xi}$ は G の右作用 $R_a \ : u \mapsto ua$ で $\quad (a \in G)$

$$\tilde{\xi}(ua) = \rho(a)^{-1}\tilde{\xi}(u)$$

となる.

proof

上図より,

$$\xi(\pi(u)) = [u, \tilde{\xi}(u)]$$

が成立する. また, 同伴ベクトル束の定義より

$$\xi(\pi(ua)) = [ua, \tilde{\xi}(ua)] = [u, \rho(a)\tilde{\xi}(ua)]$$

も成立する. 主束の定義 (単純推移的) より, $\pi(u) = \pi(ua)$ となるので

$$[u, \tilde{\xi}(u)] = [u, \rho(a)\tilde{\xi}(ua)]$$

よって, $\tilde{\xi}(u) = \rho(a)\tilde{\xi}(ua)$ が成り立つ.
以上より, $\tilde{\xi}(ua) = \rho(a)^{-1}\tilde{\xi}(u)$ が示された.

この $\tilde{\xi}$ を p 次微分形式に拡張する.

Definition 1.6.2　$\tilde{\xi}$ の構成

各 $\xi \in A^p(E) = A^p(P \times_\rho V)$ に対して, P 上 V 値 p 次微分形式 $\tilde{\xi} \in A^p(P;V)$ を

$$\tilde{\xi}(X_1, \cdots, X_p) = \Psi_u^{-1}(\xi(\pi_* X_1, \cdots, \pi_* X_p)) \qquad X_1 \cdots, X_p \in T_u P$$

で定義する.

このようにベクトル束に値を持つ微分形式から構成された微分形式 $\tilde{\xi} \in A^p(P;V)$ は以下の重要な 2 つの性質を持つことが知られている.

Theorem 1.6.3　水平性と随伴性

$\tilde{\xi} \in A^p(P;V)$ は以下 2 つの性質を持っている.

・ 水平性　$\tilde{\xi}(X_1, \ldots, X_p) = 0 \quad \text{for} \quad X_i \in V_u$ for some i

・ 随伴性　$R_a^* \, \tilde{\xi} = \rho(a)^{-1}\tilde{\xi} \qquad a \in G$

proof

・**随伴性**

主束の定義より,

$$\pi \circ R_a = \pi \qquad \pi_* \circ R_{a*} = \pi_*$$

が成立. 右作用で引き戻すと

$$\begin{aligned} R_a^* \, \tilde{\xi}(X_1, \cdots, X_p) &= \tilde{\xi}(R_{a*}X_1, \cdots, R_{a*}X_p) \\ &= \Psi_{ua}^{-1}(\xi(\pi_* \circ R_{a*}X_1, \cdots, \pi_* \circ R_{a*}X_p)) \\ &= \Psi_{ua}^{-1}(\xi(\pi_* X_1, \cdots, \pi_* X_p)) \end{aligned}$$

前の propostion

$$\tilde{\xi}(ua) = \Psi_{ua}^{-1}\xi(\pi(u)) = \rho(a)^{-1}\Psi_u^{-1}\xi(\pi(u)) = \rho(a)^{-1}\tilde{\xi}(u)$$

より,

$$\Psi_{ua}^{-1} = \rho(a)^{-1}\Psi_u^{-1}$$

よって

$$\begin{aligned} \Psi_{ua}^{-1}(\xi(\pi_* X_1, \cdots, \pi_* X_p)) &= \rho(a)^{-1}\Psi_u^{-1}(\xi(\pi_* X_1, \cdots, \pi_* X_p) \\ &= \rho(a)^{-1}\tilde{\xi}(X_1, \cdots, X_p) \end{aligned}$$

となるので, 随伴性 $R_a^* \, \tilde{\xi} = \rho(a)^{-1}\tilde{\xi} \qquad a \in G$ が示された.

・ **水平性**

垂直部分空間 V_u の定義より, $X_i \in V_u$ ならば

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}(X_1, \cdots, X_p) &= \Psi_u^{-1}(\xi(\pi_* X_1, \cdots, \pi_* X_i, \cdots, \pi_* X_p)) \\ &= \Psi_u^{-1}(\xi(\pi_* X_1, \cdots, 0, \cdots, \pi_* X_p)) \end{aligned}$$

$\xi \in A^p(E)$ は微分形式なので多重線形性を持つ.
よって, $\tilde{\xi}(X_1, \cdots, X_p) = 0$ となり, 水平性も示された.

P 上 V に値を取る k 次微分形式 $\alpha \in A^k(P,V)$ のうち

(1) 水平性　$\tilde{\xi}(X_1,\ldots,X_p)=0 \quad \text{for} \quad X_i \in V_u$ for some i

(2) 随伴性　$R_a^*\,\tilde{\xi}=\rho(a)^{-1}\tilde{\xi} \qquad a\in G$

を満たす $A^k(P;V)$ の部分空間を $A^k_{\mathrm{hor,Ad}}(P;V)$ とする.

これより, $\xi \in A^p(E)$ から構成した $\tilde{\xi}$ は $\tilde{\xi}\in A^p_{\mathrm{hor,Ad}}(P;V)$ となることが分かる.

また, $\tilde{\xi}\in A^p_{\mathrm{hor,Ad}}(P;V)$ ならば $\tilde{\xi}=\Psi_u^{-1}\pi_*\xi$ によって $\xi\in A^p(P)$ は得られる.

以上により以下の定理が得られる.

Theorem 1.6.4

$\xi\in A^p(P\times_\rho V)$ と $\tilde{\xi}\in A^p_{\mathrm{hor,Ad}}(P;V)$ は $\tilde{\xi}(X_1,\cdots,X_p)=\Psi_u^{-1}(\xi(\pi_*X_1,\cdots,\pi_*X_p))$ で **1 対 1 対応**する.

よって,

$$A^p_{\mathrm{hor,Ad}}(P;V)\simeq A^p(P\times_\rho V)$$

となる.

1.6.2　主束上の微分形式と共変外微分

主束上の微分形式に対して共変外微分を定義する. その前に接ベクトルに対する**水平射影**と**垂直射影**を定義する.

Definition 1.6.5　水平射影 垂直射影

$h: T_uP\to H_u$ を V_u に沿った射影

$$h|_H=\mathrm{id} \quad ,h|_V=0 \qquad ,h(X_1,\cdots,X_p)=(X_1^H,\cdots,X_p^H)$$

で定義する. これを**水平射影**という.

$h: T_uP\to V_u$ を H_u に沿った射影

$$h|_V=\mathrm{id} \quad ,h|_H=0 \qquad ,h(X_1,\cdots,X_p)=(X_1^V,\cdots,X_p^V)$$

で定義する. これを**垂直射影**という.

Definition 1.6.5　共変外微分

接続の与えられた主束 P 上 V 値の微分形式 $\varphi\in A^p(P;V)$ に対して

$$D\varphi=d\varphi\circ h \qquad D\varphi(X_1,\cdots,X_p)=d\varphi(X_1^H,\cdots,X_{p+1}^H)$$

とおき, 作用素 $D: A^p(P;V)\to A^{p+1}(P;V)$ を**共変外微分**という.

この共変外微分には次のような性質がある.

Proposition 1.6.6

$\tilde{\xi}\in A^p_{\mathrm{hor,Ad}}(P;V)$ に対して

$$D\tilde{\xi}\in A^{p+1}_{\mathrm{hor,Ad}}(P;V)$$

となる.

proof

· **随伴性**

一般に, $F : M \to N$ を C^∞ 写像として $F^*d = dF^*$ が成立.

$R_a^* \circ d = d \circ R_a^*$ より

$$\begin{aligned} R_a^*\ D\tilde{\xi}(X_1, \cdots, X_p) &= R_a^*\ d\tilde{\xi}(X_1^H, \cdots, X_{p+1}^H) \\ &= d\ R_a^*\tilde{\xi}(X_1^H, \cdots, X_{p+1}^H) \\ &= \rho(a)^{-1} d\tilde{\xi}(X_1^H, \cdots, X_{p+1}^H) \\ &= \rho(a)^{-1} D\tilde{\xi}(X_1, \cdots, X_p) \end{aligned}$$

より $R_a^*\ D\tilde{\xi} = \rho(a)^{-1} D\tilde{\xi}$ が示された.

· **水平性**

また, ある $X_i \in V_u$ なら, 多重線形性より

$$D\tilde{\xi}(X_1, \cdots, X_p) = d\tilde{\xi}(X_1^H, \cdots, X_i^H, \cdots, X_{p+1}^H) = 0$$

よって, 水平性も満たされるので,$D\tilde{\xi} \in A^{p+1}_{\mathrm{hor,Ad}}(P; V)$ となる.

次はよく使う補題を示す.

Lemma 1.6.7

$\varphi \in A^p(P)$ が M 上 p 次微分形式 $\phi \in A^p(M)$ を用いて $\varphi = \pi^*\phi$ と表されるとき

$$D\varphi = d\varphi$$

となる.

直感的には, M 上の微分形式を射影で引き戻した主束上の微分形式は水平なベクトルでしか計算結果を変えないので, 平行射影 h は恒等写像とみなせることが分かる.

proof

$$d\varphi(X_1, \cdots, X_{p+1}) = d(\pi^*\phi)(X_1, \cdots, X_{p+1})$$

引き戻しと外微分は可換なので

$$\begin{aligned} d(\pi^*\phi)(X_1, \cdots, X_{p+1}) &= \pi^* d\phi(X_1, \cdots, X_{p+1}) \\ &= d\phi(\pi_* X_1, \cdots, \pi_* X_{p+1}) \\ &= d\phi(h \circ X_1, \cdots, h \circ X_{p+1}) \\ &= d\phi \circ h(X_1, \cdots, X_{p+1}) \\ &= D\phi(X_1, \cdots, X_{p+1}) \end{aligned}$$

よって, $d\phi = D\phi$ が示された.

この補題を用いて次の式を示す.

Proposition 1.6.8

$\alpha \in A^q(M), \quad \tilde{\xi} \in A^p_{\mathrm{hor,Ad}}(P) \quad , \pi^*\alpha = \varphi \in A^q(P)$ と表されるとき,

$$D(\varphi \wedge \tilde{\xi}) = d\varphi \wedge \tilde{\xi} + (-1)^q \varphi \wedge D\tilde{\xi}$$

が成り立つ.

proof

$$\begin{aligned} D(\varphi \wedge \tilde{\xi}) &= d(\varphi \wedge \tilde{\xi}) \circ h \\ &= (d\varphi \wedge \tilde{\xi}) \circ h + (-1)^q \varphi \wedge d\tilde{\xi} \circ h \end{aligned}$$

補題より $d\varphi = D\varphi$ であり, $\tilde{\xi}$ は垂直成分をキャンセルするので

$$D(\varphi \wedge \tilde{\xi}) = d\varphi \wedge \tilde{\xi} + (-1)^q \varphi \wedge D\tilde{\xi}$$

が示された.

共変外微分の計算は微分形式が水平で随伴性を持つ場合には簡単に行えることが予測される. Lie 群, Lie 代数の用語を用いることで共変外微分は formal に計算できることが知られているので, Lie 代数の用語の定義と性質を述べる.

1.6.3 Lie 群と Lie 代数

～更新中～

Definition 1.6.9 微分表現

V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする. 準同型写像 $\rho : G \to GL(V)$ を Lie 群 G の**表現**という.
単位元 $e \in G$ における微分 $\rho_{*e} : T_eG = \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ は Lie 環の準同型であるが, これを**微分表現** という.

C^∞ 多様体である Lie 群 G の原点での接空間は括弧積で Lie 代数となることが知られている. また, 多様体上の表現の微分を考えると Lie 代数から Lie 代数の準同型が得られる.

Example 1.6.10 随伴表現

G を Lie 群, $\mathfrak{g}$ をその Lie 環とする.
$g \in G$ に対して、準同型写像 $F_g : G \to G$ を $F_g(h) = ghg^{-1}$ により定めると, $F_g \circ F_h = F_{gh}$ を満たす.
よって、その単位元 $e \in G$ における微分写像 $(F_g)_{*e} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ は $(F_g)_{*e} \circ (F_h)_{*e} = (F_{gh})_{*e}$ を満たす.
G の表現を

$$\mathrm{Ad} : G \to GL(\mathfrak{g}) \qquad g \mapsto \mathrm{Ad}_g = (F_g)_{*e} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

により定め, これを G の**随伴表現**という. 随伴表現の微分表現 $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ は次で与えられる.

Proposition 1.6.11

$X \in \mathfrak{g}$ に対して $\mathrm{ad}(X) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ は $\mathrm{ad}(X)Y = [X, Y]$ で与えられる.

proof

$F_g = R_{g^{-1}} \circ L_g$ である。また $\{R_{\exp tX}\}_{t \in \mathbb{R}}$ は $X^{\#}$ の生成する 1 パラメータ変換群であるから

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}(X)Y &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Ad}_{\mathrm{Exp}_G tX}(Y) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (F_{\mathrm{Exp}_G tX})_{*e}(Y) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (R_{\mathrm{Exp}_G(-tX)})_{*\mathrm{Exp}_G tX}(L_{\mathrm{Exp}_G tX})_{*e}(Y^{\#}_e) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (R_{\mathrm{Exp}_G(-tX)})_{*\mathrm{Exp}_G tX}(Y^{\#}_{\mathrm{Exp}_G tX}) = [X^{\#}, Y^{\#}]_e = [X, Y] \end{aligned}$$

この微分表現を用いることで性質のいい微分形式の共変外微分は計算が楽になる.

Proposition 1.6.12

$\alpha \in A^p_{\mathrm{hor.Ad}}(P)$ に対して, 共変外微分は

$$D\alpha = d\alpha + \rho_*(\omega) \wedge \alpha$$

となる. ここで $\rho_* : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ を, 表現 ρ の微分表現とした.

proof

〜更新中〜

表現が随伴表現の場合は微分表現が交換子になるので計算がしやすい.
実際, 主束に同伴するベクトル束が随伴表現で同伴している場合は次の式が自明に成り立つ.

Example 1.6.13　共変外微分の計算

表現が随伴表現で $V = \mathfrak{g}$ のとき, 同伴ベクトル束は $E = P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g}$ となる.
$\alpha \in A^p_{\mathrm{hor,Ad}}(P; \mathfrak{g})$ の共変外微分は

$$D\alpha = d\alpha + [\omega, \alpha]$$

となる.
ここで, 微分形式 $\alpha \in A^a(P)$, $\beta \in A^b(P)$ の交換子 $[\alpha, \beta]$ は

$$[\alpha, \beta] = \alpha \wedge \beta - (-1)^{ab} \beta \wedge \alpha$$

で定義した.

proof

随伴表現なので $\rho_* = \mathrm{ad}$ であり, Lemma1.6.11 より示された.

計算例

接続形式 $\omega = \omega \circ v$ は定義より水平性を満たさない (垂直性を満たすので)

$$\Omega = D\omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] \neq d\omega + [\omega, \omega]$$

となる. しかし, $\Omega \in A^2_{\mathrm{hor,Ad}}(P; \mathfrak{g})$ となることが示されるので

$$D\Omega = d\Omega + [\omega, \Omega]$$

となることが分かる. また

$$\Omega = D\omega = d\omega \circ h = (d\omega \circ h) \circ h = \Omega \circ h$$

であり, $h \circ v = v \circ h = 0$ となるので

$$\begin{aligned} D\Omega(X, Y, Z) &= d\Omega(h \circ X, h \circ Y, h \circ Z) \\ &= \frac{1}{2}\left([d\omega, \omega] - [\omega, d\omega]\right)(h \circ X, h \circ Y, h \circ Z) \end{aligned}$$

$\omega = \omega \circ v$ と $h \circ X$ が重なる項が各項に必ず 1 つあるので多重線形性より,

ビアンキ (Bianchi) 恒等式

$$D\Omega = 0$$

が得られる.

1.7　主ファイバー束の曲率

Definition 1.7.1

P 上の $\mathfrak{g}$ 上に値をとる 1 形式 ω を用いて P 上の曲率形式を

$$\Omega = D\omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = d\omega + \omega \wedge \omega$$

で定義する. 曲率形式は P 上の $\mathfrak{g}$ 値 2 次微分形式である.

ここで、U 上の微分形式 ω_α の交換子は

$$[\omega_\alpha, \omega_\alpha](X, Y) = [\omega_\alpha(X), \omega_\alpha(Y)]$$

で定義する.
また, V に値を取る M 上の微分形式 $\xi, \eta \in A^1(V, M)$ に対しては V の基底を v_i で取ると, $\xi = \sum \xi_i v_i$, $\eta = \sum \eta_j v_j$ と一意的に $\xi_i, \eta_j \in A^1(M)$ を用いて表せる. このとき,V に値を取る M 上の微分形式の交換子は

$$[\xi, \eta] = \sum_{i,j} \xi_i \wedge \eta_j [v_i, v_j]$$

となる. よって、$\omega|_U \in A^1(\mathfrak{g}, M)$ の交換子は

$$(\omega|_U \wedge \omega|_U)(X, Y) = \frac{1}{2}(\omega|_U(X)\omega|_U(Y) - \omega|_U(Y)\omega|_U(X)) = \frac{1}{2}[\omega|_U, \omega|_U](X, Y)$$

が成立する. よって, P 上 $\mathfrak{g}$ 値の 1 形式 $\omega = s_\alpha^{-1}\omega_\alpha s_\alpha + s_\alpha d s_\alpha$ に対しても

$$\frac{1}{2}[\omega, \omega] = \omega \wedge \omega$$

が成立するので, 2.26 の等式は成立する. 一般の P 上微分形式にはこれは当てはまらない場合に注意する必要がある.
実際, k, l 次微分形式の交換子の定義は $[\xi, \eta] = \xi \wedge \eta - (-1)^{kl}\eta \wedge \xi$ となる.
また, 交換子の外微分は

$$\begin{aligned} d[\xi, \eta] &= d(\xi \wedge \eta) - (-1)^{kl} d(\eta \wedge \xi) \\ &= d\xi \wedge \eta + (-1)^k \xi \wedge d\eta - (-1)^{kl} d\eta \wedge \xi - (-1)^{kl+l} \eta \wedge d\xi \\ &= [d\xi, \eta] + (-1)^k [\omega, d\eta] \end{aligned}$$

となる.
より詳しい説明は森田微分幾何 §2.4 や中原トポロジー 2 P43 にある.

Proposition 1.7.1

ω を主 G 束 P の接続形式, Ω をその曲率とする. このとき

(i) 任意の $a \in G$ に対し, $R_a^* \Omega = a^{-1}\Omega a$.
(ii) 任意の $X, Y \in T_u P$ に対し, $\Omega(X, Y) = D\omega(X, Y) = d\omega(X^H, Y^H)$ が成立. つまり $\Omega \circ v = 0$
(iii) ベクトル場が水平なベクトル場 $X, Y \in H$ ならば $\Omega(X, Y) = -\frac{1}{2}\omega([X, Y])$
(iv)$D\Omega = d\Omega + [\omega, \Omega] = 0$　　(Bianchi の恒等式)

が成立する.

1.8　ホロノミー群

〜更新中〜

1.9　ゲージ場

2　ホモロジーと de Rham の定理

この 2 章では基礎的なトポロジーと微分形式の関係について考える.
コメント: 証明は後で書きます.....

2.1　単体複体のホモロジー

definition 3.1
$\mathbb{R}^N$ の $l+1$ 個の頂点 $v_0, v_1 \cdots v_l$ に対して、l 本のベクトル $v_i - v_0 \quad (1 \leq i \leq l)$ が一次独立のとき、**一般の位置**にあるという。
一般の位置にある $l+1$ 子の点の集合 σ に対して、それらの点を含む最小の凸集合

$$|\sigma| = \{\sum_{i=0}^{l} a_i v_i \ ; \ a_i \geq 0, \ \sum_{i=0}^{l} a_i = 1\} = |v_0 v_1 \cdots v_l|$$

を l **単体**という。$\tau \subset \sigma$ に対して $|\tau|$ は単体となり、このような単体 $|\tau|$ を $|\sigma|$ **の辺**という.

definition 3.2
$\mathbb{R}^N$ 単体の集合 K は (i)(ii)(iii) を満たすとき、**単体複体**という
(i)$|\sigma| \in K$ ならば $|\sigma|$ の任意の辺 $|\tau|$ は $|\tau| \in K$ を満たす.
(ii)K の単体 $|\sigma|, |\tau|$ の共通部分 $|\sigma| \cap |\tau| \neq \varnothing$ は $|\sigma|, |\tau|$ の共通の辺である.
(iii) 任意の単体 $|\sigma| \in K$ 上の任意の点 x に対して,x のある開近傍 U を適当にとれば U と交わる K の単体は有限個しかない.

definition 3.3
単体複体 K に属するすべての単体の和集合 $|K| \subset \mathbb{R}^N 1$ を**多面体**という.
位相空間 X に対して適当な単体複体 K を選び, 同相写像 $t : |K| \to X$ が与えられたとき, 対 (K, t) を X の**三角形分割**という.

definition 3.4
頂点の集合 V のべき集合 2^V の部分集合 K が (i)(ii) を満たすとき、K を**抽象的単体複体**という.
(i) すべての $v \in V$ に対し $\{v\} \in K$ であり,$\varnothing \notin K$
(ii)$\sigma \in K$ ならば, すべての $\tau \subset \sigma, \ \tau \neq \varnothing$ に対して $\tau \in K$

proposition 3.4

Euclid 単体複体は抽象的単体複体である.

また, V が有限集合ならば, 任意の抽象的単体複体は Euclid 単体複体として実現できる.

definition 3.5

各 l 単体 $|\sigma| = |v_0 v_1 \cdots v_l|$ の頂点 $\{v_0, v_1 \cdots, v_l\}$ に順序を付ける。2 つの順序付けが偶置換で移りあうという同値関係を考えたときに、頂点の順序付けの同値類をその単体の**向き**という.

単体には向きが 2 つ入り, 向きの指定された単体を**向き付けられた単体**といい,$\langle\sigma\rangle$ で表す.

definition 3.6

単体複体の各 l 単体 $|\sigma_i|_{i \in I_l}$ に向きを 1 つ指定し,$\langle\sigma_i\rangle$ を構成する.

$\langle\sigma_i\rangle$ **が生成する自由加群**を $C_l(K)$ として、その群の元 $c = \sum c_i \langle\sigma\rangle_i \in C_l(K)$ を

K の l 次元チェインという. $|\sigma_i|$ に逆の向きを入れたものは $-\langle\sigma_i\rangle$ とする。

definition 3.7

$$\partial : C_l(K) \to C_{l-1}(K) \qquad \partial \langle v_0 v_1 \cdots v_l\rangle = \sum_{i=0}^{l} (-1)^i \langle v_0 \cdots \hat{v}_i \cdots v_l\rangle$$

という準同型写像を**境界作用素**という.

準同型の性質を用いてこれを線形に拡張することで、$c \in C_l(K)$ の演算を定義する.

proposition 3.7

境界作用素は 2 回繰り返すと常に 0 になる

$$\partial \circ \partial = 0$$

これは境界には境界がないことを意味する.

definition 3.8

$$Z_l(K) = \{c \in C_l(K)\ ;\ \partial c = 0\} \qquad B_l(K) = \{\partial c\ ;\ c \in C_{l+1}(K)\}$$

$Z_l(K), B_l(K)$ の元を K の l 次元**サイクル, バウンダリー**という.

また,$B_l(K) \subset Z_l(K)$ より, 商群 $H_l(K) = Z_l(K)/B_l(K)$ を K の l 次元 **(単体的) ホモロジー群**という.

$z \in Z_l(K)$ の代表するホモロジー類は $[z] \in H_l(K)$ と表され, 2 つのサイクル $z, z' \in Z_l(K)$ が同じホモロジー類を表すとき, すなわち $z' - z = \partial c$ となるようなチェイン $c \in C_{l+1}(K)$ が存在するとき, 互いに**ホモローグ**であるという.

proposition 3.8

K のホモロジー群 $H_*(K)$ とは, **チェイン複体** $C_*(K) = \{C_l(K), \partial\}$ のホモロジー群である.
つまり、$H_*(C_*(K)) = H_*(C_*) = H_*(K)$ で簡潔に表せる.

definition 3.9

$\sum c_i \langle\sigma\rangle_i \in C_l(K)$ $c_i \in \mathbf{Z}$ のとき, $H_*(K)$ は整数係数のホモロジー群 $H_*(K;\mathbf{Z})$ であるという.
一般に, **アーベル群** A **を係数とするホモロジー群**はチェイン複体 $C_l(K) \otimes A$ のホモロジーとして定義され, $H_*(K;A)$ と表される.
L を K の部分複体とすると, **相対ホモロジー群** $H_*(K,L;A)$ が $C_*(K) \otimes A / C_*(L) \otimes A$ のホモロジーとして定義される.

definition 3.10

チェイン複体 $C_* = \{C_l, \partial\}$ の双対を**コチェイン複体** $C^* = \{C^l, \delta\} = Hom(C_l, \mathbb{Z})$ で定義する.
双対の境界作用素 $\delta : C^l \to C^{l+1}$ は

$$f \in C^l = Hom(C_l.\mathbb{Z}) \quad , \quad c \in C_{l+1} \quad , \quad \delta f(c) = f(\delta c)$$

という演算となる.

proposition 3.10

双対の境界作用素は 2 回繰り返すと常に 0 となる

$$\delta \circ \delta = 0$$

definition 3.11

$$Z^l(C^*) = \{f \in C^l \ ; \ \delta f = 0\} \qquad B^l(C^*) = \{\delta f \ ; \ f \in C^{l-1}\}$$

$Z^l(C^*), B^l(C^*)$ の元を C^* の l 次元**コサイクル, コバウンダリー**という.
$B^l(C^*) \subset Z^l(C^*)$ より, 商群 $H^l(C^*) = Z^l(C^*)/B^l(C^*)$ を C^* の l 次元 **(単体的) コホモロジー群**という.
$f \in Z^l(C^*)$ の代表するコホモロジー類は $[f] \in H^l(C^*)$ と表され, 2 つのコサイクル $f, f' \in Z^l(C^*)$ が同じコホモロジー類を表すとき, すなわち $f' - f = \delta g$ となるようなコチェイン $g \in C^{l-1}$ が存在するとき, 互いに**コホモローグ**であるという.

proposition 3.11
K のコホモロジー群 $H^*(K)$ とは, **コチェイン複体** $C^*(K) = \{C^l, \delta\}$ のコホモロジー群である.
つまり、$H^*(C^*(K)) = H^*(C^*) = H^*(K)$ で簡潔に表せる.

definition 3.12
Kronecker 積という双 1 次写像は

$$H_l(C_*) \otimes H^l(C^*) \to \mathbb{Z} \qquad ([z],[f]) \mapsto f(z)$$

で定義される.

proposition 3.12
Kronecker 積は well-defind である.

このように (コ) チェインを定義することで、単体複体 K の (コ) ホモロジー群を計算することができることが分かった。しかし、位相空間 X の (コ) ホモロジー群を計算することはまだできない。一般に、位相空間 X は C^∞ 三角形分割 (K,t) を持ち、$X = |K|$ という多面体とみなすことができる。このとき、$X = |K|$ の特異 (コ) ホモロジー群は K の単体的 (コ) ホモロジー群と同型になり、三角形分割の構成に依らないことが示されるので、具体的な位相空間に対しても単体的 (コ) ホモロジー群を求める方法は有効である。次節では、単体的 (コ) ホモロジー群ではない、一般の位相空間に対しての特異 (コ) ホモロジー群を構成する。

2.2 特異ホモロジー

definition 3.13

$$\Delta^k = \{x = (x_1, \cdots, x_k) \in \mathbb{R}^k \ ; \ x_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{k} a_i \leq 1\}$$

これを**標準的 k 単体**という. 位相空間 X に対して任意の連続写像 $\sigma : \Delta^k \to X$ を X の**特異 k 単体**という.X の特異 k 単体全体によって生成される自由アーベル群を $S_k(X)$ と表し、その元 $c \in S_k(X)$ を X の**特異 k チェイン**という.

definition 3.14

$i = 0, 1, \cdots, k$ に対して連続写像 $\epsilon_i : \Delta^{k-1} \to \Delta^k$ を

$$\epsilon_0(x_1, \cdots, x_{k-1}) = (1 - \sum_{i=1}^{k-1} x_i, x_1, \cdots, x_{k-1})$$
$$\epsilon_i(x_1, \cdots, x_{k-1}) = (x_1, \cdots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \cdots, x_{k-1})$$

とする. ここで, **境界作用素**は

$$\partial : S_k(X) \to S_{k-1}(X) \qquad \partial\sigma = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \sigma \circ \epsilon_i$$

により定義される.

proposition 3.14

境界作用素は 2 回作用させると常に 0 になる

$$\partial \circ \partial = 0$$

definition 3.15

$S_*(X) = \{S_k(X), \partial\}$ はチェイン複体となり, これを X の**特異チェイン複体**という.
そのホモロジー群を $H_*(S_*(X)) = H_*(X)$ と書き, X の**特異ホモロジー群**という.
また, **コチェイン複体** $Hom(S_*(X), \mathbb{Z}) = S^*(X)$ と書き, そのコホモロジー群 $H^*(S^*(X)) = H^*(X)$ を X の**特異コホモロジー群**という.
一般に, アーベル群 A を係数とする特異ホモロジー群をチェイン複体 $S_*(X) \otimes A$ のホモロジー $H_*(S_*(X) \otimes A) = H_*(X; A)$, 特異コホモロジー群をコチェイン複体 $S^*(X) \otimes A$ のコホモロジー $H^*(S^*(X) \otimes A) = H^*(X; A)$ と書き,X の部分空間 Y の相対的なホモロジー群 $H_*(X, Y; A)$ は $S_*(X) \otimes A / S_*(Y) \otimes A$ のホモロジーとして定義される.

proposition 3.15

$X = |K| = |V|$ である場合, $H_*(X) = H_*(|K|) \cong H_*(K) \cong H_*(V)$ となる. 特に, 単体的コホモロジー群 $H_*(K)$ は位相不変であり, 三角形分割 $(K, t)(V, s)$ の取り方に依らず定まる.

2.3 可微分多様体の三角形分割

2.3.1 C^∞ 多様体の C^∞ 三角形分割

definition 3.16

M を n 次元 C^∞ 多様体とする.n 次元単体複体 K による M の三角形分割 $t : |K| \to M$ は,K の任意の n 単体 $|\sigma|$ に対して,t の $|\sigma|$ への制限 $t|_{|\sigma|}$ が C^∞ **埋め込み**であるとき, C^∞ **三角形分割**という.$t|_{|\sigma|}$ が C^∞ **埋め込み**であるとは,$|\sigma|$ によって貼られる n 次元部分空間の中で $|\sigma|$ のある開近傍 U から M への C^∞ 埋め込みに拡張できることをいう.

theorem 3.17(Cairns J.H.C. Whitehead)

すべての C^∞ 多様体は C^∞ 三角形分割を持つ. また, 境界のある C^∞ 多様体の境界の C^∞ 三角形分割は, 全体の C^∞ 三角形分割に拡張できる.

proposition 3.18

C^∞ 三角形分割 $t : |K| \to M$ により $H_n(M, ; \mathbb{Z})$ と $H_n(K; \mathbb{Z})$ を同一視する.
K の n 次元ホモロジー群 $H_n(K; \mathbb{Z})$ は $c_0 = \sum \langle \sigma_i \rangle$ の表すホモロジー類 $[M] \in H_n(M, ; \mathbb{Z})$ が生成する無限巡回群である. ここで, $[M]$ を M の基本類という.

theorem 3.19

M を n 次元連結向き付け可能な C^∞ 級閉多様体とする. このとき,

$$H_n(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

であり, 向きを指定すると定まる基本類 $[M]$ はこの群の生成元である.

2.3.2　C^∞ 多様体の C^∞ 特異チェイン複体

以下 M は C^∞ 多様体であるとする.

definition 3.20
標準的 k 単体から M への C^∞ 写像 $\sigma : \Delta^k \to M$ を M の C^∞ **特異** k **単体**という.
M の C^∞ 特異 k 単体全体の生成する自由アーベル群を $S_k^\infty(M)$ と表し, その元 $c \in S_k^\infty(M)$ を M の C^∞ **特異** k **チェイン**という. このとき, $S_*^\infty(M) = \{S_k^\infty(M), \partial\}$ は M の特異チェイン複体 $S_*(M)$ の部分複体となり、$S_*^\infty(M)$ を M の C^∞ **特異チェイン複体**という. その双対複体 $Hom(S_*^\infty(M), \mathbb{R}) = S^*_\infty(M)$ を M の $\mathbb{R}$ 係数の C^∞ **特異コチェイン複体**という.

proposition 3.20
包含写像 $S_*^\infty(M) \subset S_*(M)$ は自然な同型 $H_*(S_*^\infty(M)) \cong H_*(S_*(M))$ を誘導する.

2.4 微分形式の積分と Stokes の定理

2.4.1 (a) n 次元多様体上の n 形式の積分

definition 3.21

M の座標近傍からなる局所有限な開被覆 $\{U_i\}$ とそれに従属する 1 の分割 $\{f_i\}$ をとる.
M を向き付けられた n 次元 C^∞ 多様体とし, ω は n 形式で supp ω がコンパクトなものとする.
このとき,

$$\int_M \omega = \sum_i \int_{U_i} f_i\omega$$

と定義して, U_i の座標関数を選べば積分が定まる. これは微分形式の変換則とヤコビアンの性質より, 座標関数の取り方に依らない. また, 有限個の i を除いて積分値は 0 なので総和が確定する.

proposition 3.21

$\int_M \sigma$ の定義は開被覆やそれに従属する 1 の分割の取り方に依らない. また、積分の線形性がある.

2.4.2 (b) Stokes の定理 (多様体の場合)

theorem 3.22(Stokes の定理)

M を向き付けられた n 次元 C^∞ 多様体, σ を台がコンパクトな $n-1$ 形式とする. このとき,

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

が成立する. ここで, 境界 ∂M には M から誘導された向きを入れるものとする.
証明は教科書 P114,115

proposition 3.22

M を向き付けられた境界を持たない n 次元 C^∞ 多様体, σ を台がコンパクトな $n-1$ 形式とする. このとき,

$$\int_M d\omega = 0$$

が成立する.

2.4.3 (c) 微分形式のチェイン上の積分と Stokes の定理

M の C^∞ 特異 k 単体 $\sigma : \Delta^k \to M$ による微分形式 $\omega \in A^k(M)$ の引き戻し $\sigma^*\omega$ を考える.

definition 3.23

特異チェイン上での微分形式の積分を考えるために, $\omega \in A^k(M)$ の特異 k 単体 σ 上の積分を

$$\int_\sigma \omega = \int_{\Delta^k} \sigma^*\omega$$

により定義する. 一般の特異チェイン $c = \sum_i a_i\sigma_i \in S_k^\infty(M)$ に対して線形に拡張して

$$\int_c \omega = \sum_i a_i \int_{\sigma_i} \omega = \sum_i a_i \int_{\Delta^k} \sigma^*\omega$$

を得る. これを特異チェイン上の微分形式の積分として定義する.

theorem 3.23 (チェイン上の Stokes の定理)

C^∞ 多様体 M の C^∞ 特異 k チェイン $c \in S_*^\infty(M)$ と $\omega \in A^{k-1}(M)$ に対し,

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega$$

が成り立つ. 証明は教科書 P117,118

3.3 de Rham の定理

(a) de Rham コホモロジー

M は n 次元 C^∞ 多様体であり, M 上の k 形式全体を $\omega \in A^k(M)$, 外微分作用素 $d : A^k(M) \to A^{k-1}(M)$ と表記する.

definition 3.24
$d\omega = 0$ となるとき**閉形式**, $\omega = d\eta$ となる $\eta \in A^{k-1}(M)$ が存在するとき**完全形式**という.
M 上の閉じた k 形式全体を $Z^k(M)$, 完全な k 形式全体を $B^k(M)$ とすると,

$$Z^k(M) = Ker(d : A^k(M) \to A^{k+1}(M)) \qquad B^k(M) = Im(d : A^{k-1}(M) \to A^k(M))$$

であり, $B^k(M) \subset Z^k(M)$ であり, どちらも $A^k(M)$ の線形部分空間である.

definition 3.25
$H^k_{DR}(M) = Z^k(M)/B^k(M)$ を M **の** k **次元 de Rham コホモロジー群**という.
$\omega \in Z^k(M)$ に対し, de Rham コホモロジー群の代表する類を $[\omega] \in H^k_{DR}(M)$ と書き, これを ω の表す **de Rham コホモロジー類**という. また, 直和

$$H^*_{DR}(M) = \bigoplus_{k=0}^{n} H^k_{DR}(M)$$

を M **の de Rham コホモロジー群**という.
これは, コチェイン複体 $\{A^*(M); d\}$ のコホモロジー $H^*(A^*(M); d) = H^*_{DR}(M)$ からも定義できる. このコチェイン複体 $\{A^*(M); d\}$ を **de Rham 複体**という.
一方, $A^*(M)$ には外積の定義する積構造が入っている. この積構造は $H^*_{DR}(M)$ にも次のような積構造を誘導する.
$x \in H^k_{DR}(M)$, $y \in H^l_{DR}(M)$ がそれぞれ $\omega \in Z^k(M)$, $\eta \in H^l_{DR}(M)$ の表す de Rham コホモロジー類のとき,

$$xy = [\omega \wedge \eta] \in H^{k+l}_{DR}(M)$$

という積構造を考える.$\omega \wedge \eta$ は閉形式であり, 積 xy は x, y を表す閉形式の取り方に依らず定まる. 実際, $\omega' = \omega + d\xi$, $\eta' = \eta + d\tau$ という取り方をすると,

$$\omega' \wedge \eta' = \omega \wedge \eta + d((-1)^k \omega \wedge \tau + \xi \wedge d\tau) \qquad yx = (-1)^{kl} xy$$

となるので, 積 xy は同じ de Rham コホモロジー類となることが分かる.
この積構造を M の **de Rham コホモロジー代数**という.

proposition 3.26
M, N を C^∞ 多様体とし $f : M \to N$ を C^∞ 写像とする. このとき,$f^* : A^*(N) \to A^*(M)$ は de Rham コホモロジー代数の準同型写像 $f^* : H^*_{DR}(N) \to H^*_{DR}(M)$ を誘導する.
具体的に, $x = [\omega] \in H^k_{DR}(N)$ と表されているとき, $f^*(x) = [f^*\omega]$ と定義すると $f^*(xy) = f^*(x)f^*(y)$ となることが分かる.

2.4.4 (b) de Rham の定理

M から de Rham 複体 $\{A^*(M), d)\}$ と C^∞ 特異コチェイン複体 $\{S^*_\infty(M), \delta)\}$ という 2 つのコチェイン複体が定義された. 両者を微分形式のチェイン上の積分で関連づける.

definition 3.27

$$I : A^k(M) \to S^k_\infty(M) = Hom(S^\infty_k(M), \mathbb{R}) \qquad I(\omega)(c) = \int_c \omega$$

という写像 $I : A^*(M) \to S^*_\infty(M)$ を定義する.

proposition 3.27
写像 $I : A^*(M) \to S^*_\infty(M)$ はコチェイン写像である. すなわち, $I \circ d = \delta \circ I$ である.

proof
$\omega \in A^k(M)$ を任意の k 形式, $c \in S^*_{k+1}(M)$ を任意の特異 $k+1$ チェインとする.

$$I(d\omega)(c) = \int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega = I(\omega)(\partial c) = \delta I(\omega)(c)$$

が成立するので, $I \circ d = \delta \circ I$ である.

theorem 3.27 (de Rham の定理)
コチェイン写像 $I : A^*(M) \to S^*_\infty(M)$ は同型写像

$$I : H^*_{DR}(M) \cong H^*(S^*_\infty(M)) \cong H^*(S^*(M)) = H^*(M; \mathbb{R})$$

を誘導する.
すなわち,M の de Rham コホモロジーは $\mathbb{R}$ を係数とする特異コホモロジーと同型であり, de Rham コホモロジーは位相不変であることが分かる.

三角形分割 $t : |K| \to M$ が与えられている場合の de Rham の定理について考える.
$\langle\sigma\rangle$ を向き付けられた l 単体とし, $\omega \in A^l(M)$ を M 上の任意の l 形式とする.
多面体 $|K|$ は十分大きな N に対して $\mathbb{R}^N$ の部分空間になるとし,$|\sigma|$ の貼る l 次元の部分空間を L とする.L は $\mathbb{R}^l$ と微分同相であり, そこには $\langle\sigma\rangle$ の向きが誘導する向きが入る.C^∞ 三角形分割の定義から, $t|_{|\sigma|} : |\sigma| \to M$ は $|\sigma|$ の L のなかにおけるある開近傍 U から M への C^∞ 写像に拡張することができるので, $t^*\omega$ は U 情の l 形式と思える.

definition 3.28
$\langle\sigma\rangle$ 上の ω の積分は

$$\int_{\langle\sigma\rangle} \omega = \int_{|\sigma|} t^*\omega$$

で定義され, コチェイン写像 $I : A^*(M) \to C^*(K, \mathbb{R}) \quad I(\omega)(\langle\sigma\rangle) = \int_{\langle\sigma\rangle} \omega$ も定義できる.

theorem 3.28(三角形分割された多様体に対する de Rham の定理)
M を C^∞ 多様体とし, 三角形分割 $t : |K| \to M$ が与えられているものとする. このとき, コチェイン写像 $I : A^*(M) \to C^*(K, \mathbb{R})$ は同型写像 $I : H^*_{DR}(M) \cong H^*(K; \mathbb{R})$ を誘導する.

definition 3.29
$dim(H_k(M; \mathbb{R})) = \beta_k$ を Betti 数という.

(c) Poincare の補題

proposition 3.30 M を C^∞ 多様体とする. $\pi : M \times \mathbb{R} \to M$ を第一成分への射影, $i : M \to M \times \mathbb{R}$ を $i(p) = (p, 0)$ により定義される写像とする. このとき,π の誘導する写像

$$\pi^* : H^*_{DR}(M) \to H^*_{DR}(M \times \mathbb{R})$$

は同型写像であり、$i^* : H^*_{DR}(M \times \mathbb{R}) \to H^*_{DR}(M)$ はその逆写像である.
証明は教科書 P124,125 を参照

proposition 3.31 (Poincare の補題)
$\mathbb{R}^n$ の de Rham コホモロジーは自明である. すなわち, $H^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$, $H^k(\mathbb{R}^n) = 0 \ \ (k \neq 0)$

proposition 3.32
M, N を C^∞ 多様体とする. M から N への 2 つの C^∞ 写像が互いにホモトープならば, それらが誘導する準同型写像 $H^*_{DR}(N) \to H^*_{DR}(M)$ は一致する.

definition 3.33
2 つの C^∞ 多様体 M, N は C^∞ 写像 $f : M \to N$, $g : N \to M$ が存在して, $g \circ f$, $f \circ g$ がそれぞれ M, N の恒等写像にホモトープであるとき, 互いに同じ**ホモトピー型**を持つという.　また 1 点と同じホモトピー型を持つ多様体を**可縮**という.

proposition 3.33 (de Rham コホモロジーのホモトピー不変性)
同じホモトピー型を持つ C^∞ 多様体の de Rham コホモロジーは互いに同型である. 特に可縮な多様体の de Rham コホモロジーは自明である.

3 Riemann 幾何学入門

3.1 Riemann 計量

3.2 Hodge star 作用素

3.3 Hodge の定理

4 Chern-Weil 理論

4.1 不変多項式と Chern-Weil 準同型

4.2 Chern 類

4.3 Pontrjagin 類と Euler 類

4.4 Chern-Simons 形式

5 Yang-Mills の接続

5.1 接続全体の集合

ファイバー束 P の接続全体の集合 $\mathscr{C} = \mathscr{C}(P)$ の性質を考える.

Proposition 2.28 ベクトル束 E の接続全体

接続全体の集合を $\mathscr{C}(E)$ とする.
$\mathscr{C}(E)$ は原点を固定すると $A^1(\mathrm{End}\ E)$ と見なせ, $\mathscr{C}(E)$ はアフィン空間となる.

$\nabla, \nabla_0 \in \mathscr{C}$ に対して, $\alpha = \nabla - \nabla_0$ としたとき, $\alpha \in A^1(\mathrm{End}\ E)$ となる.
逆に, $\nabla_0 \in \mathscr{C}$ に対して, 任意の $\alpha \in A^1(\mathrm{End}\ E)$ を考えると $\alpha + \nabla_0 \in \mathscr{C}$ となる.
以上より, $\nabla_0 \in \mathscr{C}(E)$ を 1 つ選べばそれを原点として $\mathscr{C}(E)$ はベクトル空間 $A^1(\mathrm{End}\ E)$ と見なせる.
よって, $\mathscr{C}(E)$ はアフィン空間である.

Proposition 2.29 内積 h が入るベクトル束 E の接続全体

内積 h を保つ接続全体の集合を $\mathscr{C}(E,h)$ とする.
$\mathscr{C}(E,h)$ は原点を固定すると $A^1(\mathrm{End}\ (E,h))$ と見なせ, $\mathscr{C}(E,h)$ はアフィン空間となる.

$\nabla, \nabla_0 \in \mathscr{C}(E,h)$ に対して, $\alpha = \nabla - \nabla_0$ としたとき, $\alpha \in A^1(\mathrm{End}\ E)$ となる.
また, $\alpha(h) = \nabla h - \nabla_0 h = 0 - 0 = 0$ より,α の条件として

$$h(\alpha\xi, \eta) + h(\xi, \alpha\eta) = 0$$

が得られる.
このような α を各点 x に対して集めてファイバーを束ねることを考える.

$$\mathrm{End}(E,h)_x = \{A \in \mathrm{End}(E_x);\ h(A\xi,\eta) + h(\xi, A\eta) = 0, \forall \xi, \eta \in E_x\}$$

このような $\mathrm{End}(E,h)_x$ を点 $x \in M$ におけるファイバーとするベクトル束を End E とする.

$$\mathrm{End}\ (E,h) = \bigcup_x \mathrm{End}(E,h)_x$$

これは $\mathrm{End}(E)$ の部分ベクトル束であり,

$$\alpha \in A^1(\mathrm{End}\ (E,h))$$

となる.
以上より, $\nabla_0 \in \mathscr{C}(E,h)$ を 1 つ選べばそれを原点として $\mathscr{C}(E,h)$ は $A^1(\mathrm{End}\ (E,h))$ と見なせる.
よって $\mathscr{C}(E,h)$ はアフィン空間である.

Proposition 2.30　主 G 束 P の接続全体

主 G 束 P の接続全体の集合を $\mathscr{C}(P)$ とする.
$\mathscr{C}(P)$ は原点 $\omega_0 \in \mathscr{C}(P)$ を固定すると $A^1(P \times_{Ad} \mathfrak{g})$ と見なせ, $\mathscr{C}(P)$ はアフィン空間となる.

実際, P がベクトル束 E に同伴する主 $GL(r;\mathbf{R})$ 束である場合は $P \times_{Ad} \mathfrak{g} = \mathrm{End}\ E$, E に内積が与えられた場合, Q を (E,h) に同伴する主 $O(r)$ 束である場合は $P \times_{Ad} \mathfrak{g} = \mathrm{End}(E,h)$ となり, 命題 2.28,29 と一致する.

5.2　ゲージ変換全体の集合

Definition 2.31　E のゲージ変換 1

M 上ベクトル束 E のゲージ変換 $\varphi : E \to E$ がファイバー E_x を E_x にベクトル空間の同型写像として移すとき, φ を E のゲージ変換という. また, E のゲージ変換全体が作る群を $\mathscr{G}(E)$ と表す.

ベクトル束 E に同伴する主 $GL(r,\mathbf{R})$ 束 P に $\mathscr{G}(E)$ は

$$\varphi \circ u : \mathbf{R}^r \to E_x \to E_x \qquad u : \mathbf{R}^r \to E_x \in P \qquad \varphi \in \mathscr{G}(E)$$

で与えられる.

$$\varphi(u) = \varphi \circ u \in P$$

と定義することで, φ は P の C^∞ 級同相写像で, 任意の $a \in GL(r;\mathbf{R})$ に対して

$$\varphi(ua) = \varphi(u) \cdot a$$

となる. 逆に P の変換 φ がこれを満たすならば $u \in E_x$ の表示によらず $\varphi = \varphi(u) \circ u^{-1} = \varphi(ua) \circ (ua)^{-1}$ という同型写像が定義できる. これは内積 h が与えられているときに内積を保つような変換のみを考えた場合にも成立する.

Definition 2.32　主 G 束 P のゲージ変換

主 G 束 P に対して

$$\varphi(ua) = \varphi(u)a \qquad u \in P, \quad a \in G$$

となるような P の自己同型群を P の**ゲージ変換**, ゲージ変換全体のつくる群を**ゲージ変換群**よび, $\mathscr{G} = \mathscr{G}(P)$ と表す.

次にゲージ変換群の性質を考える.
群作用 $(P \times G) \times G \to P \times G$ を

$$b : (u,a) \to (ub, b^{-1}ab) \qquad u \in P \qquad a,b \in G$$

で定義して, 同じ軌道を同一視した商空間を G をファイバーとするファイバー束 $P \times_{Ad} G$ とする.
$(u,a) \in P \times G$ で代表される $P \times_{Ad} G$ の元は $x = \pi(u)$ におけるファイバー P_x の同型写像かつゲージ変換 φ

$$\varphi_x(v) = \varphi \circ v = u \circ a \circ u^{-1} \circ v \in P_z \qquad v \in P_x$$

を与える. これが $P \times_{Ad} G$ の代表元の取り方に依存しないことは

$$(ub) \circ (b^{-1}ab) \circ (ub)^{-1} \circ v = u \circ a \circ u^{-1} \circ v$$

から分かる. よって, $P \times_{Ad} G$ の切断とゲージ変換群は対応するので, P のゲージ変換をファイバー束の切断 $\Gamma(P \times_{Ad} G)$ とすることができる.
以上より次の命題が成り立つ.

Proposition 2.33　主 G 束 P のゲージ変換群 $\mathscr{G}(P)$

主 G 束 P のゲージ変換群 $\mathscr{G}(P)$ は

$$\mathscr{G}(P) = \Gamma(P \times_{Ad} G)$$

としてとらえることができる. また, その Lie 環と指数写像 $\exp : \mathfrak{g} \to G$ を考えることによって,

$$\exp : A^0(P \times_{Ad} \mathfrak{g})) \to \Gamma(P \times_{Ad} G) = \mathscr{G}(P)$$

が得られる.

5.3　接続全体の空間に作用するゲージ変換群

5.4　Yang-Mills の方程式

5.5　弱安定な Yang-Mills 接続

6　4 次元多様体入門

6.1　SD/ASD への分解

6.2　Instanton

6.3　モジュライ空間

6.4　モジュライ空間の大域的構造

7　非可換ゲージ理論と数学

7.1　古典的ゲージ理論

7.2　Yang-Mills Lagrangian

7.3　Wilson loop

7.4　ゲージ場の量子化

8　Spin 構造と Dirac 作用素

9　指数定理

10　アノマリーと幾何学

11　Seiberg-Witten 方程式

12　超対称性場の理論と幾何学

13　位相的場の理論

14　参考文献

・多様体論
・松本幸夫 多様体の基礎 東京大学出版会
・坪井 俊 幾何学 1 多様体入門 東京大学出版会

・微分幾何学
・小林 昭七 接続の微分幾何とゲージ理論
・森田 茂之 微分形式の幾何学
・二木 昭人 微分幾何講義 SGC ライブラリ 23
・今野 宏　 微分幾何学 東京大学出版会

・ゲージ理論
・Uhlenbeck Freed Instantons and Four-Manifolds
・深谷 賢治 ゲージ理論とトポロジー

・ゲージ理論
・Tom Leinster ベーシック圏論

・位相的場の理論
・高間俊至 位相的場の理論ノート

・Lie 代数, 表現論
・James E Humphreys. Introduction to Lie algebras and representation theory. Springer, 1972.
・高間俊至, 奥山竜司. 表現論ノート

・物理数学
・中原幹夫 理論物理学のための幾何学とトポロジー 1,2

・一般相対論
・Robert M.Wald　General Relativity

・場の量子論
・坂本眞人　場の量子論 (1)(2)
・Peskin Schroeder An introduction to Quantum Field Theory

・弦理論
・畑 浩之 入門 弦理論

・超対称性場の理論
・J. Wess,J.Bagger　 Supersymmetry and Supergravity