

# 初期宇宙の熱的性質

# イントロ

- ・ **宇宙の熱的性質**(温度,エネルギー密度,エントロピーなど)を**標準模型**の熱力学的性質から調べる
- ・ **クォークハドロン相転移**などの大規模な数値計算が必要な領域に対して近似的な方法で相転移温度を推定する
- ・ **ダークマター**の候補として考えられる粒子の残存量を理論的に計算して観測値と比較する

# 量子統計の一般論

Fermi–Dirac分配関数

$$f(\mathbf{P}) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E(\mathbf{P}) - \mu}{T}\right) \pm 1}$$



$$n = \frac{gT^3}{2\pi^2} \int_0^\infty dx \frac{x^2}{\exp\left[\sqrt{x^2 + (m/T)^2}\right] \pm 1}$$

$$\rho = \frac{gT^4}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{x^2 \sqrt{x^2 + (m/T)^2}}{\exp\left[\sqrt{x^2 + (m/T)^2}\right] \pm 1}$$

$$p = \frac{gT^4}{6\pi} \int_0^\infty dx \frac{x^4 (x^2 + (m/T)^2)^{-\frac{1}{2}}}{\exp\left[\sqrt{x^2 + (m/T)^2}\right] \pm 1}$$

$$s = \frac{\rho + p}{T}$$

$$\rho = \frac{\pi^2}{30} g_\rho(T) T^4 \quad s = \frac{2\pi^2}{45} g_S(T) T^3$$

有効自由度  $g_\rho(T) = \frac{15}{\pi^4} \sum_A g_A \left(\frac{T_A}{T}\right)^4 \int_0^\infty dx \frac{x^2 \sqrt{x^2 + (m_A/T_A)^2}}{\exp\left[\sqrt{x^2 + (m_A/T_A)^2}\right] \pm 1}$

$$g_S(T) = \frac{15}{\pi^4} \sum_A g_A \left(\frac{T_A}{T}\right)^3 \int_0^\infty dx \frac{x^2 (x^2 + \frac{3}{4}(m_A/T_A)^2)(x^2 + (m_A/T_A)^2)^{-\frac{1}{2}}}{\exp\left[\sqrt{x^2 + (m_A/T_A)^2}\right] \pm 1}$$

有効自由度は相対論的な粒子( $m < T$ )が支配的

# 標準模型

電弱相転移( $T \approx 100\text{GeV}$ )

対称性の自発的破れ→質量

$SU(2)_L \otimes U(1)_Y \rightarrow U(1)_{EM}$  を伴い

内部自由度が変化する

クォーク・ハドロン転移( $T \approx 170\text{MeV}$ )

陽子, 中性子が形成され, クォークはグルーオンと共にハドロンの中に閉じ込められる

→有効自由度の急激な減少

電子陽電子対消滅( $T \approx 0.5\text{MeV}$ )

ニュートリノ脱結合( $T \approx 1.5\text{MeV}$ )

ニュートリノと光子の温度に差ができる

参考:  $1\text{ MeV} = 1.16 \times 10^{10}\text{ K}$

## Standard Model of Elementary Particles

three generations of matter (fermions)			interactions / force carriers (bosons)	
I	II	III	g	H
mass $\approx 2.16\text{ MeV}/c^2$	$\approx 1.273\text{ GeV}/c^2$	$\approx 172.57\text{ GeV}/c^2$	0 0 1	$\approx 125.2\text{ GeV}/c^2$
charge $2/3$	$2/3$	$2/3$	0 0 1	0 0 0
spin $1/2$	$1/2$	$1/2$	g	H
u	c	t	gluon	higgs
up	charm	top		
d	s	b	$\gamma$	
down	strange	bottom	photon	
e	$\mu$	$\tau$	Z	
electron	muon	tau	Z boson	
$<0.8\text{ eV}/c^2$	$<0.17\text{ MeV}/c^2$	$<18.2\text{ MeV}/c^2$	$\approx 80.3692\text{ GeV}/c^2$	
0 $1/2$	0 $1/2$	0 $1/2$	$\pm 1$ 1	
$\nu_e$	$\nu_\mu$	$\nu_\tau$	W	
electron neutrino	muon neutrino	tau neutrino	W boson	
QUARKS				
LEPTONS				
SCALAR BOSONS				
GAUGE BOSONS VECTOR BOSONS				

# 平坦 ( $K = 0$ ) な宇宙

Friedmann 方程式

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3}$$

エントロピー保存(共動体積あたり)

$$S = a^3 s$$

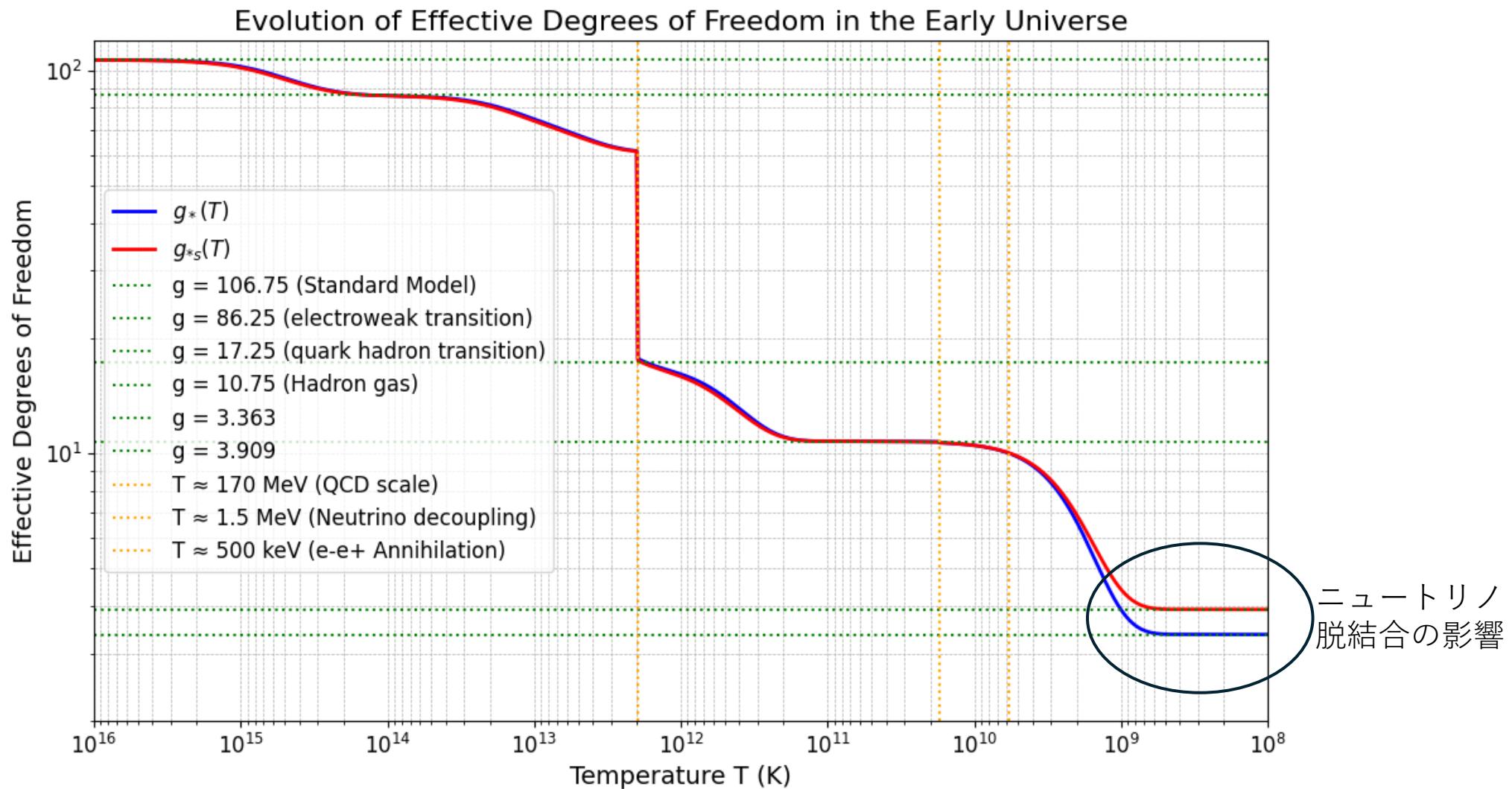


宇宙時間  $t$  と光子温度  $T$  の関係

$$t = \sqrt{\frac{45}{4\pi^3}} m_{PL} \int_T^\infty dT \left( 1 + \frac{1}{3} \frac{d \ln g_S}{d \ln T} \right) \frac{1}{\sqrt{g_\rho} T^3}$$

# 数値計算の結果

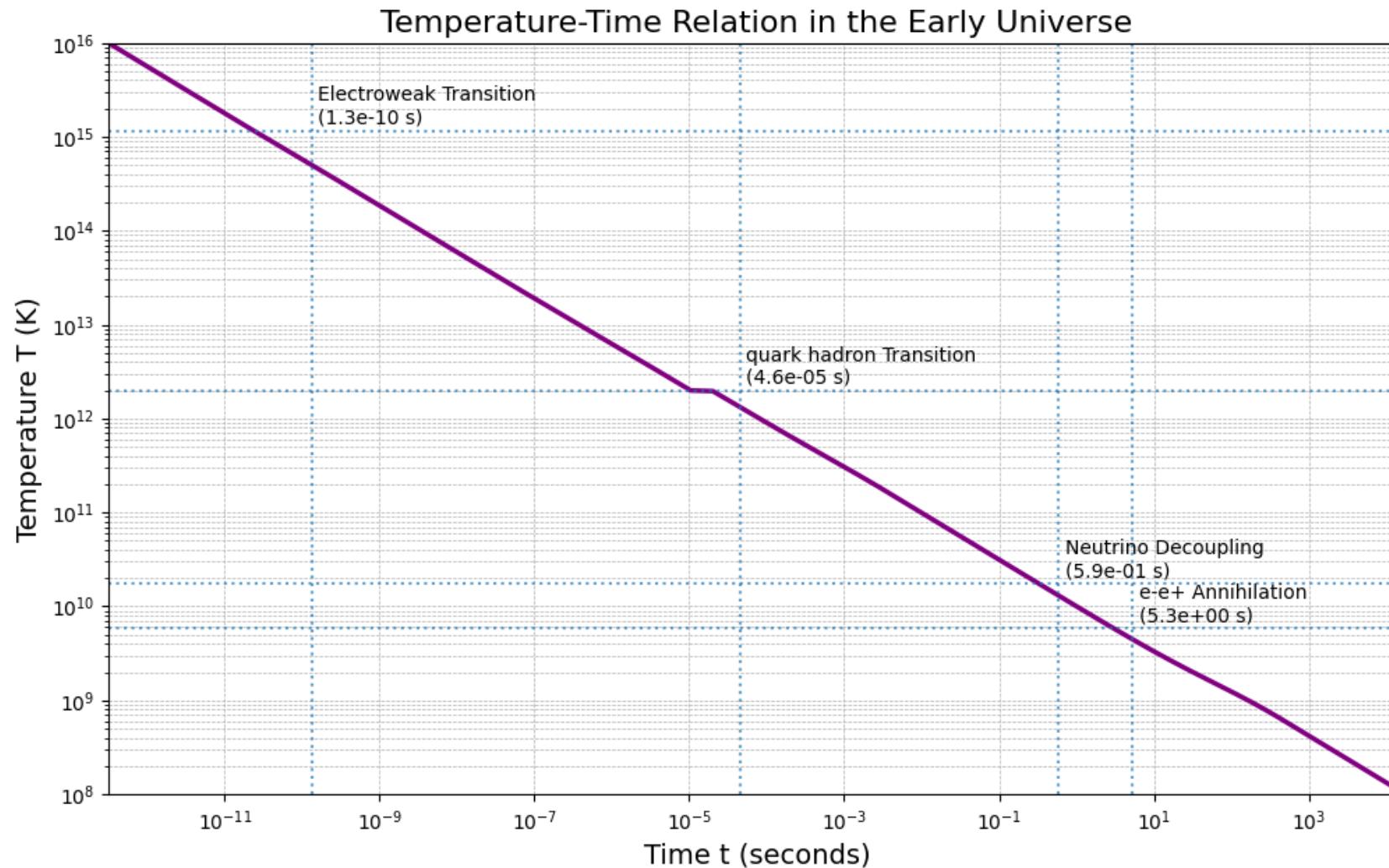
(※相転移温度は170MeVに設定)



縦軸：温度[K]

横軸：時間[s]

(※相転移温度は170MeVに設定)



数値計算によって、  
現在の光子, ニュートリノ温度

$$T_0 = 2.725 \quad T_{\mu 0} = 1.945$$

となる。

観測結果[1]

$$T_0 = 2.715 \pm 0.001$$

と近くなる。

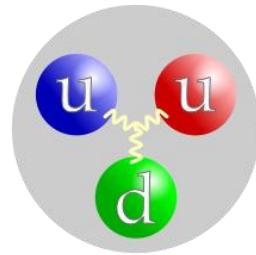
# 問題点

- ・ クォークハドロン転移は一瞬で起こるものではない  
第一原理から計算をするためには大規模な格子QCD計算が必要  
(※QCD 量子色力学 強い相互作用の基礎理論)
- ・ ハドロンが及ぼす有効自由度を含めて計算していない
- ・ 電弱相転移中の支配方程式の補正が必要  
→ QFTの3-loop計算を用いて100 GeVから300 GeVの温度における標準模型の熱力学的役割を果たす基本的な熱力学関数を推定した[7]
- ・ 高エネルギー( $T \geq 1 \text{ TeV}$ )側は標準模型で説明できない

# ハドロン

[2]より、2024年までに発見されている比較的重いハドロン(150種類ほど)を考慮した数値計算をした

相転移前と後のグラフを接続して、交点の位置を特定することで相転移の宇宙時間、温度を推定する

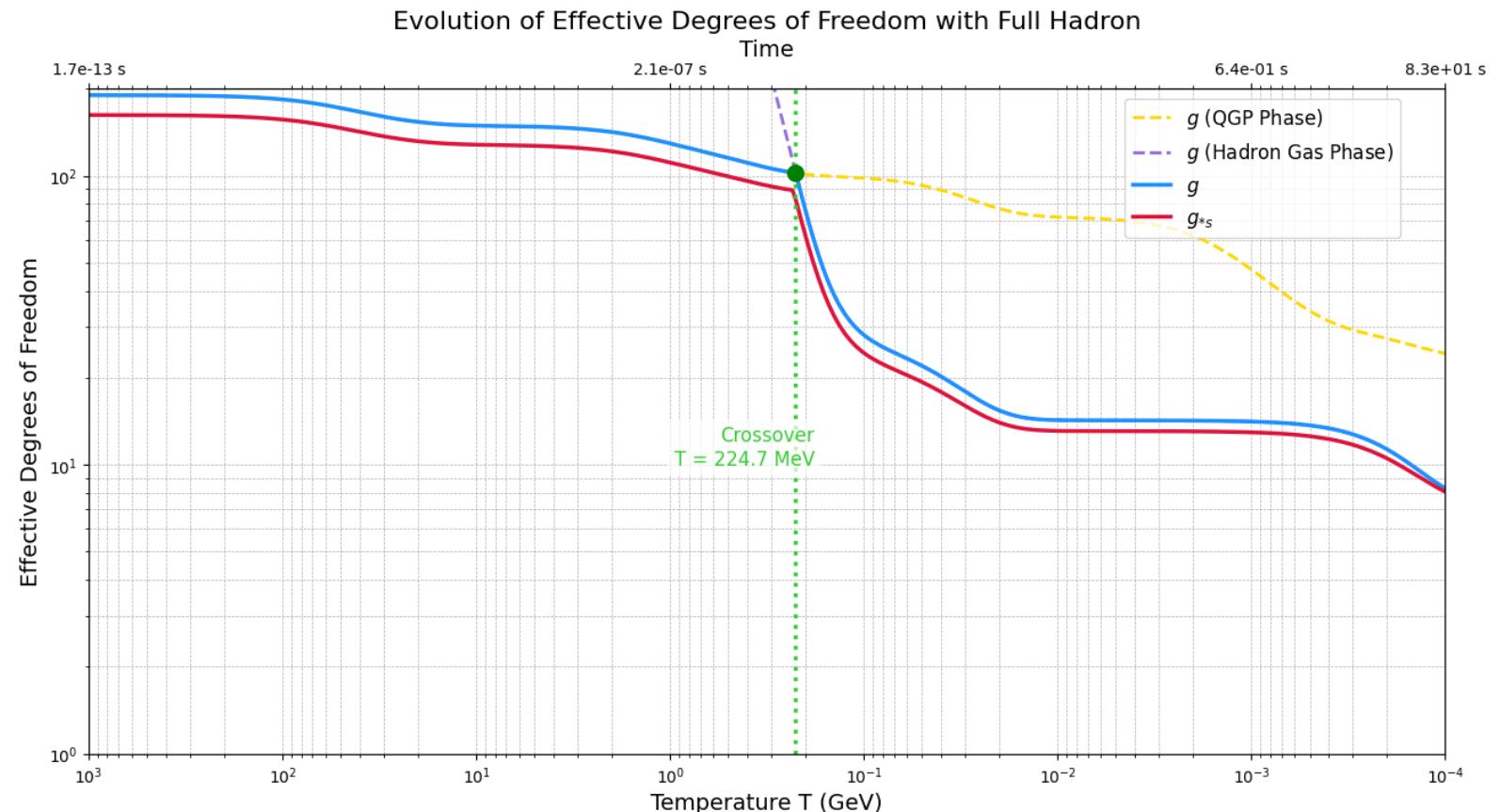


数値計算の結果

$$T_{QH} \approx 225 \text{ MeV}$$

格子QCDによる計算結果[8]

$$T_{QH} \approx 150 \sim 170 \text{ MeV}$$



# ダークマターの候補となる物質

- Spin 1/2 質量  $m [GeV]$  **Majorana fermion**  $\chi = \bar{\chi}$  の場合

標準模型に加えて初期宇宙に存在した可能性のある粒子を加える



現在のMajorana fermion  $\chi$  の密度パラメーター  $\Omega_\chi$  を推定する



観測結果を使いダークマターの性質を調べる

## 粒子の数密度の時間発展

$$\frac{dn}{dt} + 3Hn = \langle\sigma v\rangle (n_{eq}^2 - n^2)$$

粒子はいずれ数密度が小さくなる

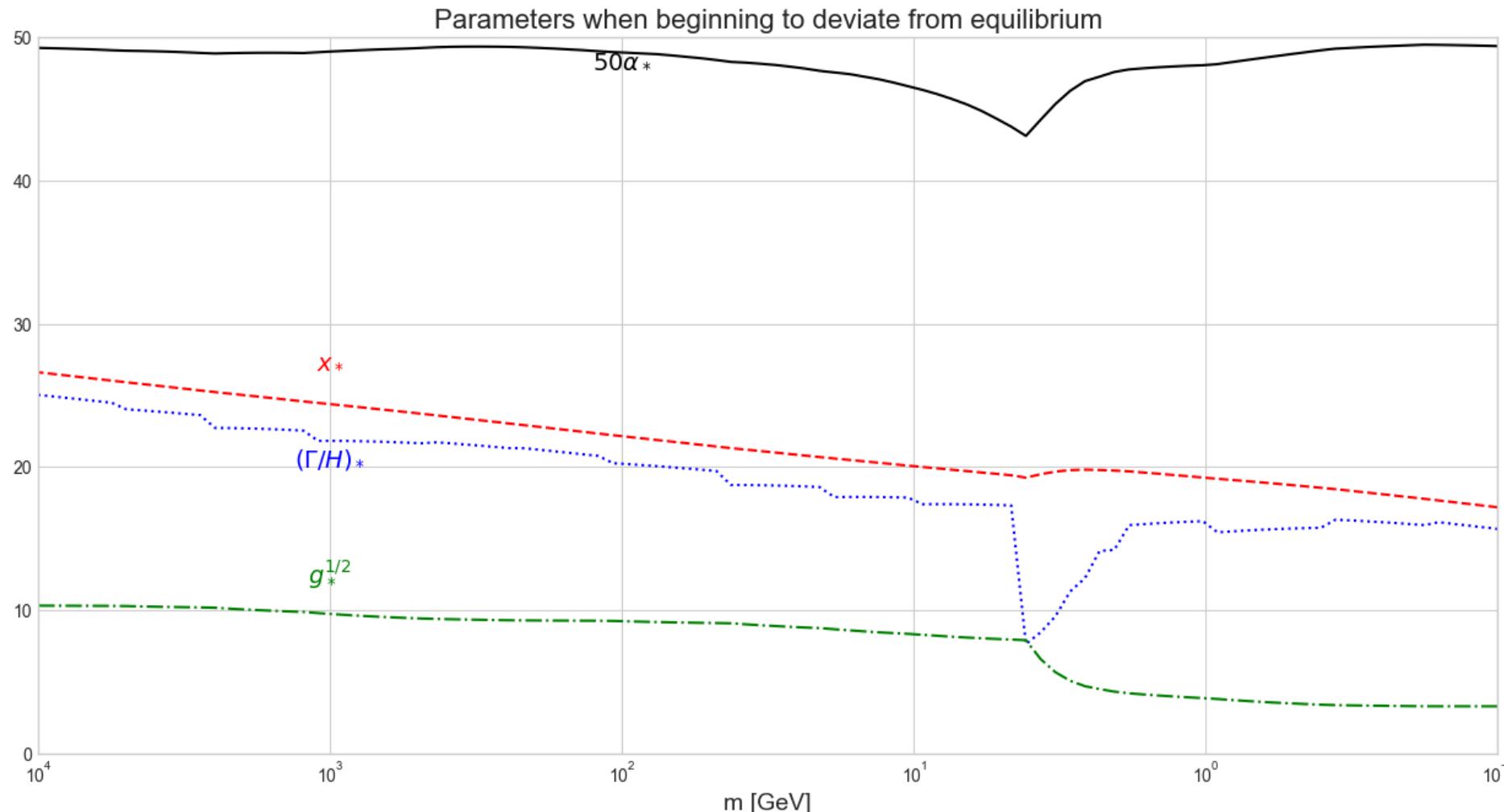


熱平衡状態ではなくなり、対消滅できずに粒子は**残る**

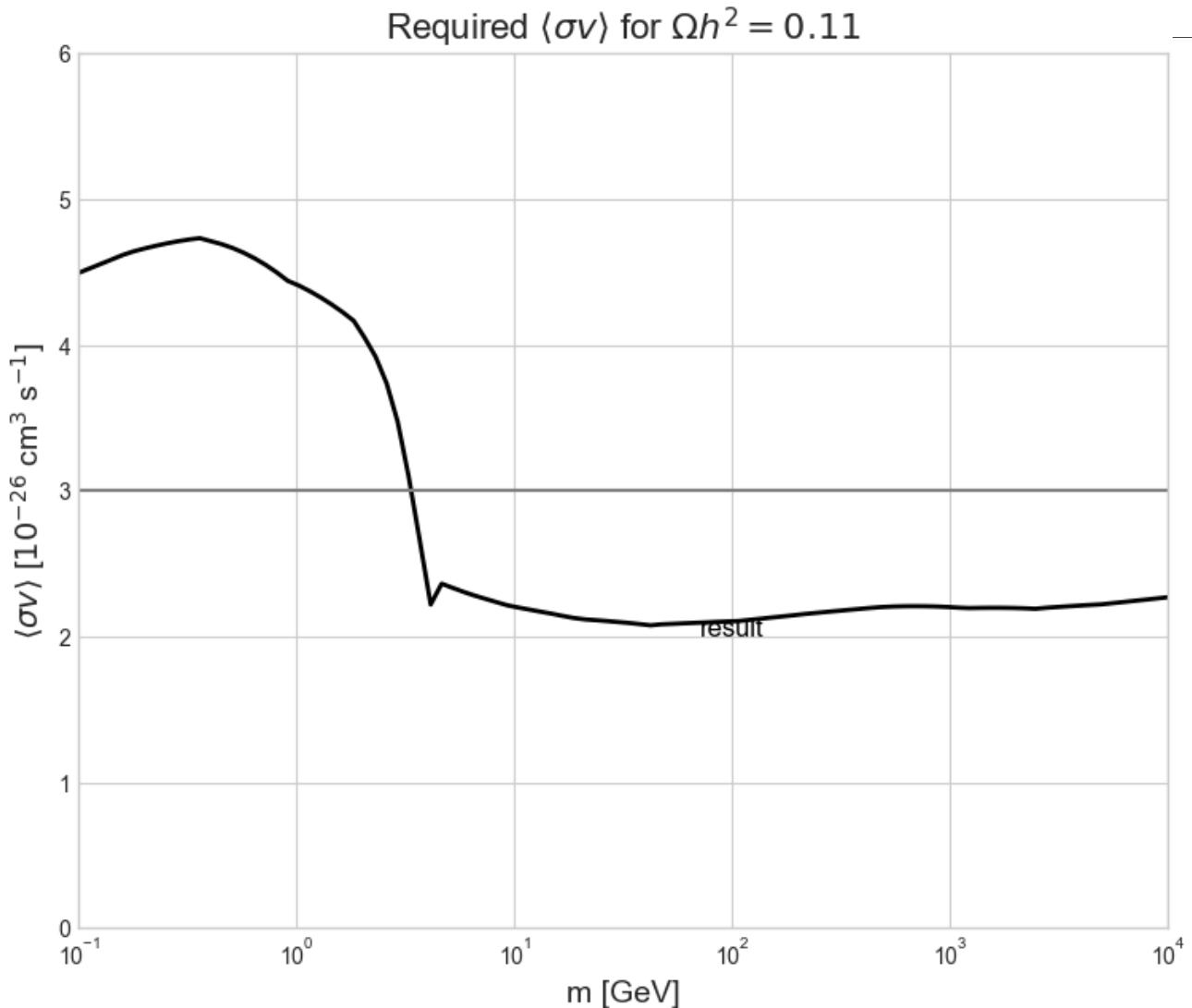
この方程式を量子統計の式と平坦な時空の式を用いて解くと

$$10^{26} \langle \sigma v \rangle \approx 0.902 \left( \frac{0.11}{\Omega h^2} \right) \left( \frac{x_*}{\sqrt{g_*}} \right) \left( \frac{(\Gamma/H)_*}{1 + \alpha_*(\Gamma/H)_*} \right)$$

数値計算により、各種物理量は以下の図のようになる。



$\langle \sigma v \rangle_{weak}$  は質量に依存して、以下の図のようになる。  
 $g$ のリストとして[5]Appendix:A を用いた。



**Table A1.** Values for time,  $g_{*n}$ ,  $g_{*\epsilon}$ ,  $g_{*p}$ , and  $g_{*s}$  from  $T = 10 \text{ TeV}$  to  $10 \text{ keV}$ . In the region between 150–214 MeV, the values for all five quantities depend on the model's transition temperature. We should emphasize that the values for this period are based on our simple no-chemical potential model.

$k_B T$ (eV)	$T$ (K)	Time (s)	$g_{*n}$	$g_{*\epsilon}$	$g_{*p}$	$g_{*s}$	Tr. Temp.
10 TeV	$1.16 \times 10^{17}$	$2.32 \times 10^{-15}$	95.50	106.75	106.75	106.75	All
5 TeV	$5.80 \times 10^{16}$	$9.29 \times 10^{-15}$	95.49	106.75	106.75	106.75	All
2 TeV	$2.32 \times 10^{16}$	$5.81 \times 10^{-14}$	95.47	106.74	106.73	106.74	All
1 TeV	$1.16 \times 10^{16}$	$2.32 \times 10^{-13}$	95.39	106.72	106.65	106.70	All
500 GeV	$5.80 \times 10^{15}$	$9.30 \times 10^{-13}$	95.11	106.61	106.38	106.56	All
200 GeV	$2.32 \times 10^{15}$	$5.83 \times 10^{-12}$	93.55	105.90	104.75	105.61	All
100 GeV	$1.16 \times 10^{15}$	$2.36 \times 10^{-11}$	89.89	103.53	100.80	102.85	All
50 GeV	$5.80 \times 10^{14}$	$9.73 \times 10^{-11}$	83.53	97.40	93.94	96.53	All
20 GeV	$2.32 \times 10^{14}$	$6.40 \times 10^{-10}$	77.39	88.45	87.22	88.14	All
10 GeV	$1.16 \times 10^{14}$	$2.58 \times 10^{-9}$	76.20	86.22	85.85	86.13	All
5 GeV	$5.80 \times 10^{13}$	$1.04 \times 10^{-8}$	75.27	85.60	84.68	85.37	All
2 GeV	$2.32 \times 10^{13}$	$6.61 \times 10^{-8}$	71.14	82.50	79.69	81.80	All
1 GeV	$1.16 \times 10^{13}$	$2.75 \times 10^{-7}$	65.37	76.34	72.97	75.50	All
500 MeV	$5.80 \times 10^{12}$	$1.15 \times 10^{-6}$	59.69	69.26	66.43	68.55	All
214 <sup>+</sup> MeV	$2.48 \times 10^{12}$	$6.63 \times 10^{-6}$	55.37	62.49	61.52	62.25	All
214 <sup>-</sup> MeV	$2.48 \times 10^{12}$	$6.63 \times 10^{-6}$	30.27	62.49	33.88	54.80	214 MeV
		$6.63 \times 10^{-6}$	55.37	62.49	61.52	62.25	170 + 150 MeV
200 MeV	$2.32 \times 10^{12}$	$8.42 \times 10^{-6}$	26.45	50.75	29.62	45.47	214 MeV
		$7.61 \times 10^{-6}$	55.21	62.21	61.34	61.99	170 + 150 MeV
190 MeV	$2.20 \times 10^{12}$	$1.00 \times 10^{-5}$	24.14	44.01	27.04	39.77	214 MeV
		$8.44 \times 10^{-6}$	55.10	62.03	61.21	61.83	170 + 150 MeV
180 MeV	$2.09 \times 10^{12}$	$1.20 \times 10^{-5}$	22.16	38.27	24.84	34.91	214 MeV
		$9.42 \times 10^{-6}$	54.99	61.87	61.07	61.67	170 + 150 MeV
170 <sup>+</sup> MeV	$1.97 \times 10^{12}$	$1.44 \times 10^{-5}$	20.49	33.47	22.98	30.84	214 MeV
		$1.06 \times 10^{-5}$	54.88	61.72	60.94	61.52	170 + 150 MeV
170 <sup>-</sup> MeV	$1.97 \times 10^{12}$	$1.44 \times 10^{-5}$	20.49	33.47	22.98	30.84	214 + 170 MeV

$m \geq 10 \text{ GeV}$  のとき,

$$\begin{aligned}10^{27} <\sigma v> \Omega h^2 &= 2.0 + 0.3 \log(10^{27} <\sigma v>) \\&= 2.1 - 0.3 \log(\Omega h^2)\end{aligned}$$

という表式でフィッティングすることができる.[3]

$\Omega h^2 = 0.11 \pm 0.001$  という観測結果[4]を用いると

$$<\sigma v> \approx 2.5 \times 10^{-26} [\text{cm}^{-3} \text{s}^{-1}]$$

が得られる. この散乱断面積は**弱い相互作用**に対応する.

(※電磁気力, 強い相互作用はオーダーが5~10ほど大きい)

逆に  $<\sigma v>_{weak} \approx 2.5 \times 10^{-26} [\text{cm}^{-3} \text{s}^{-1}]$  だとすると  $\Omega h^2 \approx 0.11$  となる.

これは、ダークマターの支配的な相互作用が**弱い相互作用**(WIMP)であることを正当化している。

# 近年の観測結果

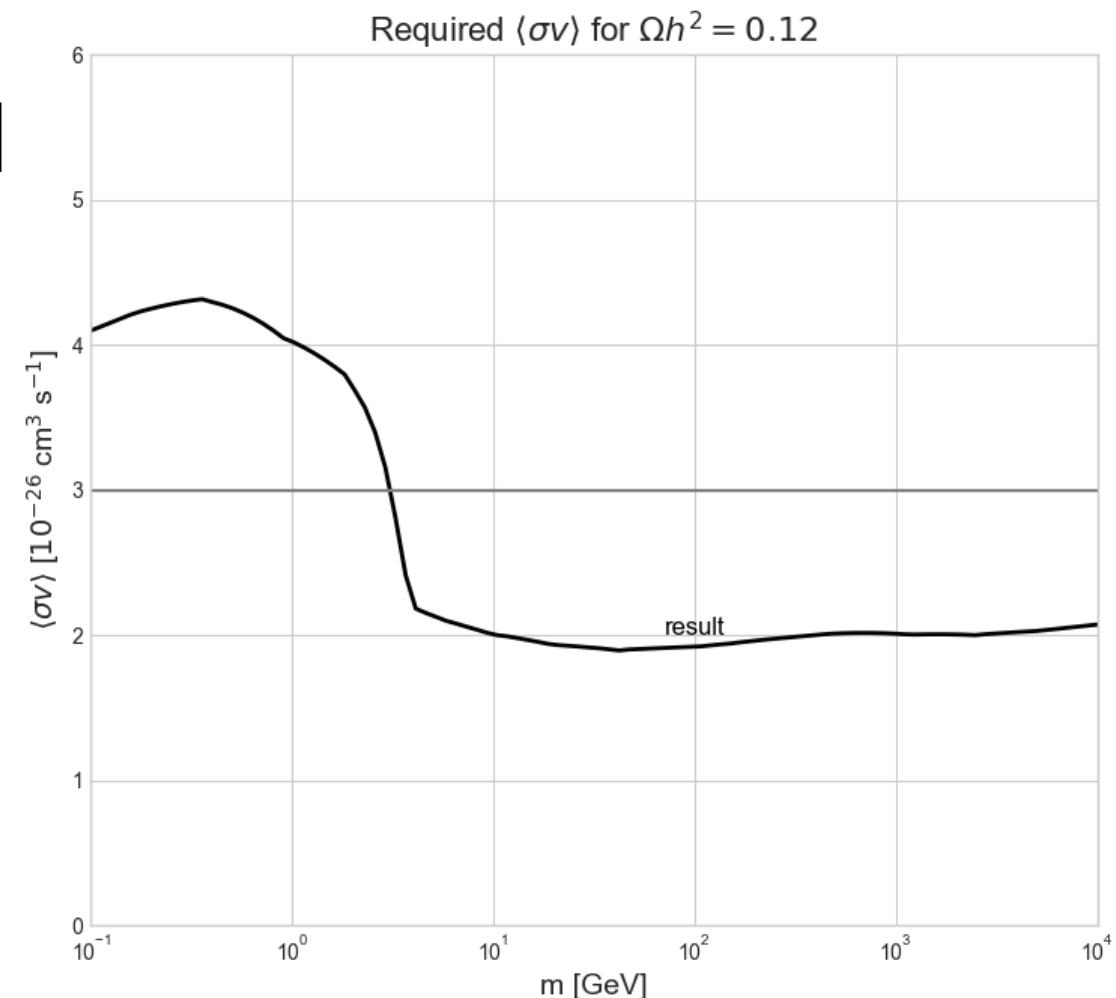
[6] Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters

では  $\Omega h^2 = 0.120 \pm 0.001$

$\rightarrow \langle \sigma v \rangle \approx 2.0 \times 10^{-26} [cm^{-3}s^{-1}]$

一般的なWIMPに対するこの結果は  
 $\langle \sigma v \rangle \approx 3.0 \times 10^{-26} [cm^{-3}s^{-1}]$

と表されてたが、実際はWIMPの  
質量に依存していることが分かった



# まとめ

- 粒子の生成, 消滅が盛んな初期宇宙では平衡状態と近似して標準模型の熱力学的なアプローチを行うことで, 観測値と良い精度で一致する物理量を計算することができると思った
- 高エネルギー領域に存在する粒子は実験的に観測することが現段階では難しい. しかし, ダークマターが宇宙に存在していることは観測から言える. 観測のデータを用いることで**ダークマター候補**の粒子の質量やスピン, 相互作用, 内部自由度に制約を付けることが可能になるとと思った

# 参考文献

- [1] K. Nakamura et al. [Particle Data Group Collaboration], J. Phys. G G37, 075021 (2010)
- [2] [S. Navas et al. \(Particle Data Group\), Phys. Rev. D 110, 030001 \(2024\)](#) and 2025 update
- [3] Gary Steigman, Basudeb Dasgupta, John F. Beacom, Phys.Rev. D86 (2012) 023506(2012) [arXiv:1204.3622 [hep-ph]].
- [4] E. Komatsu et al. [WMAP Collaboration], Astrophys. J.Suppl., 192 (2011) 18. [arXiv:1001.4538 [astro-ph.CO]].
- [5] [Lars Husdal](#) Galaxies, 4(4), 78 (2016) arXiv:1609:04979
- [6] Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters
- [7] [M. Laine, M. Meyer](#) JCAP 1507 (2015) 035 arXiv:1503.04935[hep-ph]
- [8] D. Boyanovsky, H.J de Vega and D.J Schwarz, Annu. Rev. Nucl. Part. Sci., 56, 441500 (2006)  
教科書
- [9] 東京大学出版会 松原隆彦 宇宙論の物理<上><下>
- [10] Weinberg, S. Cosmology; Oxford University Press: Oxford, UK, 2008