接続の微分幾何とゲージ理論

小林昭七 著

Yang-Mills 接続を中心に

小林著 ”接続の微分幾何とゲージ理論”の自主ゼミの要約ノートです　　作成日　2025/10/18

目次

1　接続の一般論

1.1　ベクトル束の切断

Definition 2.1　接続

ベクトル束 E の**接続**, または**共変微分**は線形写像

$$\nabla : \Gamma(E) \to \Gamma(T^*M \otimes E)$$

で Leibniz の式

$$\nabla(f\xi) = df \otimes \xi + f \cdot \nabla\xi \qquad f \in C^\infty(M) \quad \xi \in \Gamma(E)$$

を満たすものである

接続 $\nabla_i \quad (i = 1, \cdots n)$ に対して, $\sum_{i=1}^n t_i \nabla_i \quad (\sum t_i = 1)$ も接続となることが分かる
また, 局所自明化 $\pi^{-1}(U_\alpha) = U_\alpha \times \mathbf{R}^r$ によって $E|_{U_\alpha}$ 上の局所的な接続 ∇_α を定義でき, 局所有限な M の開被覆 $\{U_\alpha\}$ とそれに従属する 1 の分割 $\{\rho_\alpha\}$ を使うことで E 上全体の切断

$$\nabla\xi = \sum \nabla_\alpha \rho_\alpha \xi$$

を定義できる.
∇_α は積バンドルの自明な接続を取ればよく, 森田微分幾何 P198 に構成の仕方が書かれている.

Definition 2.2　微分形式の一般化

$\wedge^k T^*M \otimes E$ の切断 $\Gamma(\wedge^k T^*M \otimes E)$ を E に値をとる M 上の k 次微分形式 $A^k(M; E)$ という.
つまり,

$$\Gamma(\wedge^k T^*M \otimes E) = A^k(M; E)$$

となる.
$k = 0$ のときは, $A^0(M; E) = \Gamma(E)$ となる.

この定義は M 上の微分形式の一般化である.
また, 次のような自然な同一視ができることが知られている.

Theorem 2.3　微分形式の一般化

E に値をとる M 上の k 形式全体 $A^k(M; E)$ は, $\mathfrak{X}(M)$ の k 個の直積から $\Gamma(E)$ への, $C^\infty(M)$ 加群として多重線形かつ交代的な写像全体と自然に同一視できる. すなわち

$$A^k(M; E) = \{\bigotimes_k \mathfrak{X}(M) \to \Gamma(E) \ ; \ C^\infty(M) \text{ 加群として多重線形かつ交代的な写像 }\}$$

証明は森田微分幾何 P73 定理 2.8 の一般化として与えられる.
このように微分形式を一般化できることが分かった. しかし, 値を別の場所に取るような微分形式の外積は定義できていない. ここで, 次のような問題を考える.

Proposition 2.4　一般化された微分形式の分解

E に値をとる M 上の k 形式 $A^k(M;E)$ の任意の元 η は,

$$\eta = \theta \otimes \xi \quad (\theta \in A^k(M),\ \xi \in \Gamma(E) = A^0(M;E))$$

という形の一次結合で表せる.

この補題を使うことで, $A^p(M;E)$ と $A^q(M)$ の外積を自然にかつ一意的に定義することができる.
一般化された微分形式をより広く扱うためにベクトルバンドル End E を定義する.

Definition 2.5　E の自己準同型の全体

ファイバー E_p の自己準同型の全体 End $E_p = \mathrm{Hom}(E_p, E_p)$ をファイバーとしたベクトルバンドルを End E と表す.

この定義から, End E の切断 Γ(End E) は $s : M \to$ End E　$p \mapsto$ End E_p という滑らかな割り当てとなる.

Example 2.6　微分形式の一般化

1, 接続
ベクトル束 E の接続 ∇ は

$$\nabla : A^0(M;E) \to A^1(M;E)$$

である.

2, 曲率
接続の曲率 R は

$$R : A^0(M;E) \to A^2(M;E) \qquad R \in A^2(\mathrm{End}\ E)$$

である.

Definition 2.7　共変外微分

共変外微分 $D : A^p(M;E) \to A^{p+1}(M;E)$ という微分作用素は

$$D(\xi \otimes \theta) = \nabla\xi \wedge \theta + \xi \otimes d\theta$$

によって定義される.

ここで $\nabla\xi \wedge \theta$ は補題を用いて一意的に計算できることが証明できる.
また, 外微分作用素 d は 2 回繰り返すと恒等的に 0 になるが, 共変外微分 D は 0 にならない. その理由は曲率が 0 でないためである. ここで次の定義, 定理が存在する.

Proposition 2.8　共変外微分の計算式

任意の $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$　$\varphi \in A^1(M;E)$ に対して

$$D\varphi(X,Y) = \frac{1}{2}\left(\nabla_X(\varphi(Y) - \nabla_Y(\varphi(X)) - \varphi([X,Y]))\right)$$

が成立する.

これは M 上の 1 次微分形式の外微分の式の拡張になることが分かる.

Definition 2.9 曲率 1

任意の $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$R(X,Y) = \frac{1}{2}(\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]})$$

を対応させるような写像を, ∇ の**曲率**という.

1.2 ベクトル束の曲率

Proposition 2.10 曲率の性質

任意の $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$　$f, g, h \in C^\infty(M)$　$s \in \Gamma(E)$ に対して

$$(1)\ R(X,Y) = -R(Y,X)$$

$$(2)\ R(fX, gY)(hs) = fghR(X,Y)(s)$$

が成立する.

証明は森田微分幾何 P200 補題 5.20 で与えられる.
この性質から曲率が End E に値をとる M 上の 2 次形式であることが分かる.
曲率の定義として同値なものが存在することが知られている. また, その定義では共変外微分を用いることで従来の定義のような複雑さを解消することができる.

Definition 2.11 曲率 2

$\theta \in A^p(M; E)$ に対して, $R \in A^2(M; \mathrm{End}\ E)$ は

$$D^2\theta = R \wedge \theta$$

で定義される.
特に, $p = 0$ のときは

$$R = D^2 : \Gamma(E) \to A^2(M; E) \qquad D^2\xi = R\xi$$

となる. このとき, $R : \Gamma(E) \to A^2(M; E)$ を **曲率** という.

Theorem 2.12 曲率の定義 2 の同値性

曲率の定義 2.9 と定義 2.11 は同値である

定義 2.9→2.11 の証明は森田微分幾何 P245 演習問題 5.6
定義 2.11→2.9 の証明は小林微分幾何とゲージ理論 P46 にある.
また, 補題 (共変外微分の計算式) に $\varphi = D\xi$ を代入すれば直ちに確かめられる.

1.3　ベクトル束の接続形式, 曲率形式

Definition 2.13　接続形式 曲率形式

ベクトル束は自明化を考えれば局所的に直積束なので, 局所的には 1 次独立な切断の組 $(e_1, \cdots, e_r)$ が存在する. これを E の U 上の局所標構場もしくは枠とする.

接続形式 ω_λ^μ とは

$$\nabla e_\lambda = \sum_\mu \omega_\lambda^\mu e_\mu$$

で定義される M 上の $\mathfrak{gl}$ に値を取る 1 形式

曲率形式 Ω_λ^μ とは

$$Re_\lambda = \sum_\mu \Omega_\lambda^\mu e_\mu$$

で定義される M 上の $\mathfrak{gl}$ に値を取る 2 形式とする. また, 計算をすることで

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$$

接続 ∇ の**構造方程式**が得られる. これを曲率形式の定義としてもよい.

この表示は局所標構場に依存してしまう. 以下の補題により, ファイバー上の変換関数 $\psi_{\alpha\beta} = a \in GL(r; \mathbf{R})$ を用いることで接続形式と曲率形式の変換を行うことができる.

Proposition 2.14　接続 曲率形式の変換則

接続形式 ω, 曲率形式 Ω は変換関数 $\psi_{\alpha\beta}(x) = a \in GL(r; \mathbf{R})$ を用いることで

$$\omega \to a^{-1}\omega a + a^{-1} da$$

$$\Omega \to a^{-1}\Omega a$$

のように変換される.

証明は森田微分幾何 P203 命題 5.22 や小林微分幾何 P41,46 にある.
逆に, 接続形式と変換関数が与えられると, そのような接続 ∇ が一意的に存在することが知られている. 補足: 一般に Lie 群 G の元 a で Lie 環 $\mathfrak{g}$ の元 X に共役作用させると $a^{-1}Xa \in \mathfrak{g}$ となることが知られているので, 変換後の曲率形式も $\mathfrak{gl}$ に値を取ることが分かる.

Proposition 2.15　Bianchi 恒等式

任意の $\xi \in \Gamma(E)$ に対して,

$$DR = 0$$

が成り立つ. 局所標構場を用いて展開すると

$$d\Omega - \Omega \wedge \omega + \omega \wedge \Omega = 0$$

となる. これを Bianchi 恒等式という.

証明
共変外微分を 3 回作用させる. R の定義より,

$$\begin{aligned} D^3\xi &= D^2(D\xi) = R\wedge(D\xi) \\ &= D(D^2\xi) = D(R\xi) = (DR)\xi + R\wedge(D\xi) \end{aligned}$$

両辺を引くことで, $DR=0$ を得る.
次はファイバーに内積を入れることで, 局所標構場を正規直交基構に限定する. このときのファイバーはベクトル空間であり, 正規直交基構に限定されているので変換関数は直交群 $O(r)$ に限定できる. このとき接続形式, 曲率形式がどの空間に値を取る微分形式になるか議論する. (答えは Lie 環 $\mathfrak{o}(r)$ となる)

Definition 2.16　平行

各点 $x\in M$ で E のファイバーに内積 $g_x : E_x\times E_x\to\mathbf{R}$ が与えられていて x に対して微分可能とする.
任意の $\xi,\eta\in\Gamma(E)$ に対して

$$d(g(\xi,\eta)) = g(\nabla\xi,\eta) + g(\xi,\nabla\eta)$$

となるとき, 接続 ∇ は g を保つ, ∇ は g と両立する, あるいは平行であるという.
一般に,

$$d(g(\xi,\eta)) = \nabla g(\xi,\eta) + g(\nabla\xi,\eta) + g(\xi,\nabla\eta)$$

となるため, 平行の条件は $\nabla g=0$ とも表される.

また, Riemann 計量のときと同様に, 任意の E には U_α とそれに従属する 1 の分割を考えることで内積 g が存在することが言える. 内積を入れたので, ファイバーに対する長さ $||\xi|| = \sqrt{g(\xi,\xi)}$ を定義でき, Gram-Schmidt の直交化法を用いて標構場から正規直交基構をつくることができる. 正規直交基底はこのとき, $dg=\nabla g=0$ となる.
小林微分幾何 P50,51 にあるように計算から以下のことが分かる.

Proposition 2.17　正規直交基構の接続形式と曲率形式

局所標構場を正規直交基構に限定すると

$$\omega_\lambda{}^\mu + \omega_\mu{}^\lambda = 0$$

$$\Omega_\lambda{}^\mu + \Omega_\mu{}^\lambda = 0$$

を得る. また, 変換関数 $\psi_{\alpha\beta} = a\in O(r)$ を用いることで

$$\omega\to a^{-1}\omega a + a^{-1}da$$

$$\Omega\to a^{-1}\Omega a$$

のように変換される.
すなわち接続, 曲率形式は Lie 環 $\mathfrak{o}(r)$ に値をとる M 上の 1,2 形式となる.

逆に, このような交代性を満たす接続形式が g を保つ接続を定義することも証明できる.
また, 接続形式と変換関数から接続を一意に定めることができることを思い出すと以下のような定理が分かる.

Theorem 2.18　Levi-Civita 接続の一意性

M を Riemann 多様体, U を任意の座標近傍とする.
$(s_1, \cdots, s_n)$ を TU の正規直交枠, $(\theta^1, \cdots, \theta^n) \in A^1(U)$ をその双対枠とする.
このとき,
(1) ${\omega_\lambda}^\mu + {\omega_\mu}^\lambda = 0$
(2) $d\theta^i = -\sum_{j=1}^n \omega_j^i \wedge \theta^j$
を満たすような $\mathfrak{gl}(n)$ に値をとる U 上の 1 形式 $\omega|_U$ はただ 1 つしか存在しない.

ここで, (1) の条件は Riemann 計量 g を保つような必要十分条件を与えている.
(2) と合わせることによって, 接続が一意に定まることが知られている (証明は森田微分幾何 命題 5.32 にまかせる).
また, TM 上の変換関数は座標変換の Jacobi 行列であることがベクトルバンドルの議論から言える.
よって, 接続形式と変換行列が一意に定まるので接続も一意に定まることが示された.
このような任意の Riemann 多様体 M の接バンドル TM が持つただ 1 通りに定まるような自然な接続を **Levi-Civita 接続**もしくは **Riemann 接続**という.

物理学の一般相対論やゲージ理論が数学としての微分幾何学であるこの話にどのように繋がるか考える.
細かい説明は省略するが, 一般相対論における共変微分 ∇ は微分幾何学の接続 ∇ であり, 一般相対論における接続 (Christoffel 記号) Γ やゲージ理論におけるゲージ場 A は微分幾何学における接続形式 ω である. 実際, 共変微分の式 $\nabla_\alpha A^\mu = \partial_\alpha A^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} A^\beta$ は微分幾何学の接続の定義式の 1 つである $\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla s$ と全く同じであることが分かる.

補足 1: 一般相対論は正規直交化された局所座標を設定して, その座標軸を α などと表記して ∇_α とすることで α 方向の共変微分を作っている. これはベクトルバンドル E の枠の α 成分の正規直交枠 $X = e_\alpha$ での共変微分 ∇_X である.
補足 2: ベクトルバンドル $E|_U$ の枠の α 成分をを s_α とすると $\nabla s_\alpha = \omega^\mu_\alpha s_\mu$ で接続形式 $\omega|_U$ は定義されるので, 一般相対論では $\nabla = \partial + \Gamma$ となり, ゲージ理論では $\nabla = \partial + A$ となる. 数学のゲージ理論でも $\nabla = d + A$ のような表し方をする場合がある.

(1) の条件が $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$ という表記になることは Definition 2.16 から明らかである.
(2) の条件は
· 捻率テンソル $T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$ が 0 になること
· スカラー関数 $f: M \to \mathbf{R}$ の共変微分は可換である　$(\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) f = 0$
· Christoffel 記号の下 2 つの添え字が対称になること　$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\nu\mu}$
という表記を用いることがあるがこれらは**全て同値な条件**であることが計算により分かる.

補足 3: これら以外にも一般相対論やゲージ場の物理は数学としての微分幾何学やゲージ理路と密接な関係がある. 一般相対論は Riemann 幾何学で定式化されているので自明だが, ゲージ理論 (物理) やその先の理論物理学ではファイバーバンドルの理論やゲージ理論 (数学), ホモロジーに出てくる式を簡略化して用いていることがよくある印象がある.

1.4 ファイバー束

Definition 2.19　E に同伴する主ファイバー束 P

点 $x \in M$ を固定してファイバー E_x の標構全体の集合 P_x を考える.
ファイバーの自然な基から他の基を選ぶのは同型写像 $u : \mathbf{R}^r \to E_x$ という写像で与えられる. また, この同型写像を 1 つ固定すると他の同型写像は

$$u = u_0 \circ a \qquad a \in GL(r;\mathbf{R})$$

という合成で必ず与えられるため, ファイバー E_x の標構全体の集合 P_x は以下のような 1 対 1 対応

$$a \in GL(r;\mathbf{R}) \to u = u_0 \circ a \in P_x$$

によって得られるが, この a の選び方は固定する u_0 に依存する.
次に

$$P = \bigcup_{x \in M} P_x$$

を定義する. また, 点 $x \in U$ 上に標構場を取るような対応 $\sigma_U(x)$ を

$$\sigma_U(x) : \mathbf{R}^r \to E_x$$

とする. ここで $\mathbf{R}^r$ は U 上の局所座標表示である.
このとき, 1 対 1 の対応

$$\varphi_U : P = \bigcup_{x \in M} P_x \to U \times GL(r;\mathbf{R}) \qquad \sigma_U(x) \circ s \mapsto (x, s)$$

を考えることで, P 上に $U \times GL(r;\mathbf{R})$ の多様体構造を入れる. また, 射影 $\pi : P \to M \quad , \pi(P_x) = x$ で定義することで主ファイバー束 P が得られる.
このように定義されたファイバー束 P を E に同伴する主ファイバー束 P と定義する.

Definition 2.20　主 G ファイバー束

Lie 群 G を構造群とする M 上の主ファイバー束 P とは次のような性質をもつ多様体である.
(1) 微分可能な写像 $\pi : P \to M$ が与えられていて

$$\pi(P_x) = x$$

(2) 群 G が P に右から作用しており
　(2,1)$\pi(us) = \pi(u)$
　(2,2)$\pi(u) = \pi(u')$ ならば $u' = us$ となる元 s が一意的に存在する
　(2,3)M に開被覆 U_α があり, 各 U_α 上に微分可能切断 $U_\alpha \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ が存在する.
このようなときに, (P, π, M, G) あるいは P は G を構造群とする主ファイバー束であるという.

(2,1) は群作用が同じファイバー $\pi^{-1}(x)$ に移すこと. (2,1)(2,2) を合わせて G がファイバー $\pi^{-1}(x)$ 上に単純推移的である, またはファイバー $\pi^{-1}(x)$ は G の等質空間であるという.
ベクトルバンドルのときと同様に, 自明化を行うことで変換関数 $\psi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G \quad , \quad \psi_{\alpha\beta}(x) \in G$ を定義でき, これはコサイクル条件　$\psi_{\alpha\beta}(x)\psi_{\beta\gamma}(x) = \psi_{\alpha\gamma}(x) \quad ; \quad x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ を満たす.

Defifnition 2.21　P に同伴するベクトル束

主ファイバー束 P とその構造群 G の表現 $\rho : G \to GL(r, \mathbf{R})$ を考える
$G \times (P \times \mathbf{R}^r) \to P \times \mathbf{R}^r$ という群作用

$$s : (u, y) \mapsto (us, \rho(s)^{-1}y) \qquad s \in G\ , (u, y) \in P \times \mathbf{R}^r$$

が作る軌道と 1 対 1 対応する商空間 $(P \times \mathbf{R}^r)/G$ を $P \times_\rho \mathbf{R}^r$ という.
$P \times_\rho \mathbf{R}^r$ は $\mathbf{R}^r$ がファイバーとなるベクトル束となり, これを P に同伴するベクトル束という.

M の開被覆 U_α に関する P の変換関数 $\psi_{\alpha\beta}$ を使うと, $E = P \times_\rho \mathbf{R}^r$ は変換関数 $\{\rho \circ \psi_{\alpha\beta}\}$ によって与えられるベクトル束であることも示せる.

Example 2.22　主 $GL(r)$ 束に同伴するベクトル束の例

構造群は $GL(r, \mathbf{R})$ となるので, 表現 $\rho : GL(r, \mathbf{R}) \to GL(r, \mathbf{R})$ となる.
(1)$\rho(s) = s$ のとき, $P \times_\rho \mathbf{R}^r = E$
(2)$\rho(s) =^t s^{-1}$ のとき, $P \times_\rho \mathbf{R}^r = E^*$
(3)$\rho(s) = s \otimes s$ のとき, $P \times_\rho \mathbf{R}^r = E \otimes E$ となる.

Defifnition 2.23　ベクトル束 $P \times_{Ad} \mathfrak{g}$

随伴表現によって定義される群作用

$$\mathfrak{g} \times G \to \mathfrak{g} \qquad Ad(s)X = sXs^{-1} \qquad (s \in G,\ X \in \mathfrak{g})$$

を考える. 随伴表現によってつくられる $\mathfrak{g}$ をファイバーとし P に同伴するベクトル束を

$$P \times_{Ad} \mathfrak{g} = (P \times \mathfrak{g})/G$$

で定義する. この商空間は

$$s : (u, X) \mapsto (us, Ad(s^{-1})X) \qquad s \in G,\ (u, X) \in P \times \mathfrak{g}$$

で与えられる G の作用によりつくった商空間である.
また, $\{Ad\ \psi_{\alpha\beta}\}$ を変換関数としてもつベクトル束としても構成できる.

P 上の曲率形式は変換関数への共役作用によって同一視されるので, 曲率形式が M 上 $P \times_{Ad} \mathfrak{g}$ に値を持つ 2 次微分形式を与えることが分かる. これを曲率 R といい, $R \in A^2(M; P \times_{Ad} \mathfrak{g})$ となる.

Definition 2.24　P 上の基本ベクトル場

P を主 G 束とする. 各 $A \in \mathfrak{g}$ によって生成される G の 1 助変数部分群を e^{tA} あるいは $\exp tA$ と表す.
$\exp tA$ を P に右から作用させると, 各 $u \in P$ に対し, 軌道 $u \exp tA$ の $t = 0$ $(u \in P)$ における接ベクトルを定義でき, これを $A_u^* = uA \in T_uP$ とする.
このような接ベクトル $A_u^* \in T_uP$ と点 $u \in P$ を対応付けるような P 上ベクトル場 A^* を $A \in \mathfrak{g}$ に対応する**基本ベクトル場**という.

これまで定義したベクトル束の接続形式はどれも U 上でのみ定義されているものだったが, 次は接続形式を P 上に拡張する. 主 G 束 P の接続, 接続形式を再定義することによって, P の接続形式を構造群 G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ に値をもつ P

上の 1 次微分形式である条件を満たすものとすることができる.

1.5 主ファイバー束の接続形式

Definition 2.25 P で定義された $\mathfrak{g}$ 値の接続形式 ω

P は Lie 群 G を構造群とする M 上の主ファイバー束, $s_\alpha \in G$ とする.
$\pi^{-1}(U_\alpha)$ 上で ω を

$$\omega = s_\alpha^{-1}\omega_\alpha s_\alpha + s_\alpha ds_\alpha$$

とすると, ω は P 全体で定義された $\mathfrak{g}$ に値を取る 1 次微分形式である. これを P 上 $\mathfrak{g}$ 値の接続形式という.

実際, 変換関数を用いて $\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ 上でも計算すると

$$\omega_\beta = \psi_{\alpha\beta}^{-1}(x)\omega_\alpha\psi_{\alpha\beta}(x) + \psi_{\alpha\beta}^{-1}(x)d\psi_{\alpha\beta}(x) \qquad s_\beta = \psi_{\beta\alpha}(x)s_\alpha$$

を代入して $\pi^{-1}(U_\alpha)$ 上でも $\pi^{-1}(U_\beta)$ 上でも σ は変わらないことが確認できる.
また, G による右作用 $P \times G \to G$ を $R_a : P \to P \quad u \mapsto ua$ で定義する.
このとき,

$$R_a^*\omega = a^{-1}\omega a \qquad a \in G$$

$$\omega(A^*) = A \qquad A \in \mathfrak{g}$$

を満たすことが証明できる.(小林微分幾何 P61,62)
また, これは逆も成り立つことが知られている. つまり, 以下の定理が成り立つ.

Theorem 2.26 接続の一意性

主 G 束 P に接続が与えられると, 全空間 P 上に接続形式 ω が定まり
(i) 任意の $A \in \mathfrak{g}$ に対し, $\omega(A^*) = A$
(ii) 任意の $a \in G$ に対し, $R_a^*\omega = a^{-1}\omega a$
を満たす. 逆に, 上の 2 つの条件を満たすような P 上 $\mathfrak{g}$ 値 1 形式が与えられると, それを接続形式とするような接続が一意的に定義される. この接続を **Ehresmann 接続**という.

また, 任意の主 G 束 P は接続を持つことが保証されている.(森田微分幾何 P285 命題 6.38)
以降はこれを P の接続, 接続形式の定義として使う.
また, 主 G ファイバー束 P の接続は水平部分分解を用いて定義できることが知られている. 一般に微分幾何の文脈ではそれらの定義を用いる場合がよくあり, その定義を用いた方が計算や証明が楽になることもある.

Definition 2.27 主ファイバー束の接続

主 G 束 P 上の接続とは, 各点 $u \in P$ において T_uP の部分空間 H_u を対応させ,
(i)$T_uP = H_u \oplus V_u$ と直和分解される.
　つまり任意の $X \in T_uP$ に対して $X = X^H + X^V$ と分解できる.
(ii)H_u は右作用に関して不変, すなわち $H_{ua} = (R_a)_*H_u$
(iii)H_u は u について微分可能
を満たすものである.

このような接続が定められると, 一意に Theorem 2.26 の条件式を満たすような接続形式 (Ehresmann 接続) が対応することが確かめられる. また, H_u, V_u を Ehresmann 接続の ω から定めることで, Definition2.27 のような接続を

満たすことが分かる. その構成は以下のようになる.

Definition 2.28　垂直部分空間

主 G 束 P のファイバーに沿った接ベクトル全体を V_u とすると

$$V_u = \{X \in T_uP \ ; \ \pi_* X = 0\}$$

となり, この T_uP の部分空間を T_uP の**垂直部分空間**という.

また, 各 $A \in \mathfrak{g}$ の定義する基本ベクトル場 A^* は主 G 束と基本ベクトル場の定義よりいたるところ垂直で

$$V_u = \{A_u^* \ ; \ A \in \mathfrak{g}\}$$

となる. また, 各点 $u \in P$ での線形写像 $\omega_u : T_uP \to \mathfrak{g}$ を用いて写像

$$A \mapsto A_u^* \mapsto \omega_u(A_u^*) = A$$

を構成することにより, ω_u は単射であることが分かる. 一方, $\dim V_u = \dim \mathfrak{g}$ であるので以下のような同型対応が存在する.

Proposition 2.29　垂直部分空間

任意の点 $u \in P$ において $\omega_u : T_uP \to \mathfrak{g}$ による

$$V_u \cong \mathfrak{g}$$

という自然な同一視が存在する.

以上より, 次のような定理が存在する.

Theorem 2.30　主ファイバー束の接続

T_uP の**水平部分空間** H_u を Ehresmann 接続 ω の核

$$H_u = \{X \in T_uP \ ; \ \omega_u(X) = 0\}$$

で定義すると, $T_uP = V_u \oplus H_u$ のように直和分解でき, H_u は右作用に関して不変で u について微分可能となる. よって, この構成は P **上に接続を定める**.

逆に, Definition2.27 のような直和分解による接続が与えられるならば, その接続は一意に Ehresmann 接続形式 ω を定める.Ehresmann 接続形式 ω からファイバー束の接続 (直和分解) を一意に定めることも, ファイバー束の接続 (直和分解) から Ehresmann 接続形式を一意に定めることもできるので, これらは**同値な定義**である.
ベクトル束の接続 ∇ の定義や Ehresmann 接続の定義は代数的だが (少なくとも幾何学的ではない), 各点 u に対して行う T_uP の直和分解はファイバーに対して水平な空間 H_u と垂直な空間 V_u を定める**幾何学的な定義**である.

接続を定義できたので, この接続が入る空間を考えたい. ここで, 一般に次のことが知られている.

Proposition 2.31　随伴ベクトル束の同型関係

P 上 $\mathfrak{g}$ に値を取る k 次微分形式 $\alpha \in A^k(\mathfrak{g}; P)$ のうち
(1) 水平: 任意の $X_1, \cdots X_k \in V_u$ に対して $\alpha(X_1, \cdots X_k) = 0$
(2) G 同変: $R_g^* \alpha = \mathrm{Ad}(g^{-1})\alpha$
を満たす $A^k(\mathfrak{g}; P)$ の部分空間を $A^k_{\mathrm{hor,Ad}}(\mathfrak{g}, P)$ とすると自然な同型

$$A^k_{\mathrm{hor,Ad}}(\mathfrak{g}, P) \simeq A^k(P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g})$$

が成り立つ.

例えば, P 上 $\mathfrak{g}$ に値を取る接続形式は 2 つの条件を満たすので

$$\omega \in A^1(\mathfrak{g}, P) \subset A^1(P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g})$$

となる. 実際, 接続形式全体の空間が $A^1(P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g})$ になることが知られている.(小林微分幾何 5.1 章).
また, 接続形式 ω から曲率形式 Ω を構成でき, これも水平かつ G 同変なので

$$\Omega \in A^2(\mathfrak{g}, P) \subset A^2(P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g})$$

となる.

1.6 主ファイバー束の曲率

Definition 2.31 曲率形式

P 上の $\mathfrak{g}$ 上に値をとる 1 形式 ω を用いて P 上の曲率形式を

$$\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = d\omega + \omega \wedge \omega$$

で定義する. 曲率形式は P 上の $\mathfrak{g}$ 値 2 次微分形式である.

ここで、U 上の微分形式 ω_α の交換子は

$$[\omega_\alpha, \omega_\alpha](X, Y) = [\omega_\alpha(X), \omega_\alpha(Y)]$$

で定義する.
また, V に値を取る M 上の微分形式 $\xi, \eta \in A^1(V, M)$ に対しては V の基底を v_i で取ると, $\xi = \sum \xi_i v_i$, $\eta = \sum \eta_j v_j$ と一意的に $\xi_i, \eta_j \in A^1(M)$ を用いて表せる. このとき,V に値を取る M 上の微分形式の交換子は

$$[\xi, \eta] = \sum_{i,j} \xi_i \wedge \eta_j [v_i, v_j]$$

となる. よって、$\omega|_U \in A^1(\mathfrak{g}, M)$ の交換子は

$$(\omega|_U \wedge \omega|_U)(X, Y) = \frac{1}{2}(\omega|_U(X)\omega|_U(Y) - \omega|_U(Y)\omega|_U(X)) = \frac{1}{2}[\omega|_U, \omega|_U](X, Y)$$

が成立する. よって, P 上 $\mathfrak{g}$ 値の 1 形式 $\omega = s_\alpha^{-1}\omega_\alpha s_\alpha + s_\alpha ds_\alpha$ に対しても

$$\frac{1}{2}[\omega, \omega] = \omega \wedge \omega$$

が成立するので, 2.26 の等式は成立する. 一般の P 上微分形式にはこれは当てはまらない場合に注意する必要がある.
実際, k, l 次微分形式の交換子は $[\xi, \eta] = (-1)^{kl+1}[\eta, \xi]$ となる.
より詳しい説明は森田微分幾何 §2.4 にある.

Proposition 2.32 曲率形式の性質

ω を主 G 束 P の接続形式, Ω をその曲率とする. このとき

(i) 任意の $a \in G$ に対し, $R_a^*\Omega = a^{-1}\Omega a$.
(ii) 任意の $X, Y \in T_u P$ に対し, $\Omega(X, Y) = d\omega(X_h, Y_h)$ が成立.
(iii) ベクトル場が水平なベクトル場 $X, Y \in H$ ならば $\Omega(X, Y) = -\frac{1}{2}\omega([X, Y])$
(iv)$D\Omega = d\Omega + [\omega, \Omega] = 0$ (Bianchi の恒等式)

が成立する.

2　Yang-Mills の接続

2.1　接続全体の集合

ファイバー束 P の接続全体の集合 $\mathscr{C} = \mathscr{C}(P)$ の性質を考える.

Proposition 2.28　ベクトル束 E の接続全体

接続全体の集合を $\mathscr{C}(E)$ とする.
$\mathscr{C}(E)$ は原点を固定すると $A^1(\mathrm{End}\ E)$ と見なせ, $\mathscr{C}(E)$ はアフィン空間となる.

$\nabla, \nabla_0 \in \mathscr{C}$ に対して, $\alpha = \nabla - \nabla_0$ としたとき, $\alpha \in A^1(\mathrm{End}\ E)$ となる.
逆に, $\nabla_0 \in \mathscr{C}$ に対して, 任意の $\alpha \in A^1(\mathrm{End}\ E)$ を考えると $\alpha + \nabla_0 \in \mathscr{C}$ となる.
以上より, $\nabla_0 \in \mathscr{C}(E)$ を 1 つ選べばそれを原点として $\mathscr{C}(E)$ はベクトル空間 $A^1(\mathrm{End}\ E)$ と見なせる.
よって, $\mathscr{C}(E)$ はアフィン空間である.

Proposition 2.29　内積 h が入るベクトル束 E の接続全体

内積 h を保つ接続全体の集合を $\mathscr{C}(E, h)$ とする.
$\mathscr{C}(E, h)$ は原点を固定すると $A^1(\mathrm{End}\ (E, h))$ と見なせ, $\mathscr{C}(E, h)$ はアフィン空間となる.

$\nabla, \nabla_0 \in \mathscr{C}(E, h)$ に対して, $\alpha = \nabla - \nabla_0$ としたとき, $\alpha \in A^1(\mathrm{End}\ E)$ となる.
また, $\alpha(h) = \nabla h - \nabla_0 h = 0 - 0 = 0$ より,α の条件として

$$h(\alpha\xi, \eta) + h(\xi, \alpha\eta) = 0$$

が得られる.
このような α を各点 x に対して集めてファイバーを束ねることを考える.

$$\mathrm{End}(E, h)_x = \{A \in \mathrm{End}(E_x);\ h(A\xi, \eta) + h(\xi, A\eta) = 0, \forall \xi, \eta \in E_x\}$$

このような $\mathrm{End}(E, h)_x$ を点 $x \in M$ におけるファイバーとするベクトル束を End E とする.

$$\mathrm{End}\ (E, h) = \bigcup_x \mathrm{End}(E, h)_x$$

これは $\mathrm{End}(E)$ の部分ベクトル束であり,

$$\alpha \in A^1(\mathrm{End}\ (E, h))$$

となる.
以上より, $\nabla_0 \in \mathscr{C}(E, h)$ を 1 つ選べばそれを原点として $\mathscr{C}(E, h)$ は $A^1(\mathrm{End}\ (E, h))$ と見なせる.
よって $\mathscr{C}(E, h)$ はアフィン空間である.

Proposition 2.30　主 G 束 P の接続全体

主 G 束 P の接続全体の集合を $\mathscr{C}(P)$ とする.
$\mathscr{C}(P)$ は原点 $\omega_0 \in \mathscr{C}(P)$ を固定すると $A^1(P \times_{Ad} \mathfrak{g})$ と見なせ, $\mathscr{C}(P)$ はアフィン空間となる.

実際, P がベクトル束 E に同伴する主 $GL(r;\mathbf{R})$ 束である場合は $P \times_{Ad} \mathfrak{g} = \mathrm{End}\ E$, E に内積が与えられた場合, Q を (E,h) に同伴する主 $O(r)$ 束である場合は $P \times_{Ad} \mathfrak{g} = \mathrm{End}(E,h)$ となり, 命題 2.28,29 と一致する.

2.2　ゲージ変換全体の集合

Definition 2.31　E のゲージ変換 1

M 上ベクトル束 E のゲージ変換 $\varphi : E \to E$ がファイバー E_x を E_x にベクトル空間の同型写像として移すとき, φ を E のゲージ変換という. また, E のゲージ変換全体が作る群を $\mathscr{G}(E)$ と表す.

ベクトル束 E に同伴する主 $GL(r,\mathbf{R})$ 束 P に $\mathscr{G}(E)$ は

$$\varphi \circ u : \mathbf{R}^r \to E_x \to E_x \qquad u : \mathbf{R}^r \to E_x \in P \quad \varphi \in \mathscr{G}(E)$$

で与えられる.

$$\varphi(u) = \varphi \circ u \in P$$

と定義することで, φ は P の C^∞ 級同相写像で, 任意の $a \in GL(r;\mathbf{R})$ に対して

$$\varphi(ua) = \varphi(u) \cdot a$$

となる. 逆に P の変換 φ がこれを満たすならば $u \in E_x$ の表示によらず $\varphi = \varphi(u) \circ u^{-1} = \varphi(ua) \circ (ua)^{-1}$ という同型写像が定義できる. これは内積 h が与えられているときに内積を保つような変換のみを考えた場合にも成立する.

Definition 2.32　主 G 束 P のゲージ変換

主 G 束 P に対して

$$\varphi(ua) = \varphi(u)a \qquad u \in P, \quad a \in G$$

となるような P の自己同型群を P の**ゲージ変換**, ゲージ変換全体のつくる群を**ゲージ変換群**よび, $\mathscr{G} = \mathscr{G}(P)$ と表す.

次にゲージ変換群の性質を考える.
群作用 $(P \times G) \times G \to P \times G$ を

$$b : (u,a) \to (ub, b^{-1}ab) \qquad u \in P \quad a,b \in G$$

で定義して, 同じ軌道を同一視した商空間を G をファイバーとするファイバー束 $P \times_{Ad} G$ とする.
$(u,a) \in P \times G$ で代表される $P \times_{Ad} G$ の元は $x = \pi(u)$ におけるファイバー P_x の同型写像かつゲージ変換 φ

$$\varphi_x(v) = \varphi \circ v = u \circ a \circ u^{-1} \circ v \in P_z \qquad v \in P_x$$

を与える. これが $P \times_{Ad} G$ の代表元の取り方に依存しないことは

$$(ub) \circ (b^{-1}ab) \circ (ub)^{-1} \circ v = u \circ a \circ u^{-1} \circ v$$

から分かる. よって, $P \times_{Ad} G$ の切断とゲージ変換群は対応するので, P のゲージ変換をファイバー束の切断 $\Gamma(P \times_{Ad} G)$ とすることができる.
以上より次の命題が成り立つ.

Proposition 2.33 主 G 束 P のゲージ変換群 $\mathscr{G}(P)$

主 G 束 P のゲージ変換群 $\mathscr{G}(P)$ は

$$\mathscr{G}(P) = \Gamma(P \times_{Ad} G)$$

としてとらえることができる. また, その Lie 環と指数写像 $\exp : \mathfrak{g} \to G$ を考えることによって,

$$\exp : A^0(P \times_{Ad} \mathfrak{g})) \to \Gamma(P \times_{Ad} G) = \mathscr{G}(P)$$

が得られる.

2.3 接続全体の空間に作用するゲージ変換群

2.4 Yang-Mills の方程式

2.5 弱安定な Yang-Mills 接続