Ganzrationale Funktionen

1. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^4$.

   a. Untersuchen Sie das Schaubild K von f auf Symmetrie, Schnittpunkte mit der x-Achse, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnen Sie K in ein Koordinatensystem im Intervall $-2 < x \leq 4{,}5$.

   b. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an K, die durch den Ursprung geht.

   c. Ein Dreieck wird durch die Eckpunkte $O(0 \mid 0)$, $P(u \mid 0)$ und $Q(u \mid f(u))$, $0 < u < 4$, definiert. Bestimmen Sie u so, dass der Flächeninhalt maximiert wird. Wie groß ist dieser Flächeninhalt?

2. Der Graph einer Funktion 3. Grades hat einen Tiefpunkt in $T(1 \mid 0)$ und geht durch die Punkte $P(2 \mid 2)$ und $Q(-1 \mid 1)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

3. Der Graph einer Funktion 4. Grades ist y-achsensymmetrisch und hat in $W(2 \mid 1)$ einen Wendepunkt. Die Normale zur Kurve im Wendepunkt geht durch den Ursprung. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

4. Durch $f_t(x) = \frac{t}{8}\left(x^3 - 12x^2 + 36x\right)$ ist für $t > 0$ eine Funktionenschar gegeben.

   a. Bestimmen Sie die Nullstellen und Extrempunkte des Schaubilds von f_t und zeigen Sie, dass $W(4 \mid 2t)$ der einzige Wendepunkt ist.

   b. Stellen Sie die Gleichungen der Tangente und Normalen im Wendepunkt auf.

   c. Für $t = 1$ ist die Gleichung der Wendetangente $y = 8 - \frac{3}{2}x$. Fertigen Sie eine Skizze mit dem Schaubild K_1 von f_1 und der Wendetangente an.

   d. Berechnen Sie die Größe der Fläche, die von dieser Wendetangente, der y-Achse und der Kurve K_1 eingeschlossen wird.

   e. Wie groß muss t sein, damit der Inhalt der eingeschlossenen Fläche zwischen der Kurve K_t und der x-Achse 81 FE beträgt?