

Eine neoklassische Variante des Malthus Wachstumsmodells

Claudius Gräbner

4/14/2020

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
2	Das Malthus-Wachstumsmodell ohne Kapitalakkumulation.	1
2.1	Die Bevölkerungsdynamik	1
2.2	Produktion	2
2.3	Allgemeines Gleichgewicht	3
2.4	Statische Gleichgewichtsanalyse	7

1 Einführung

Dieses Dokument beschreibt eine neoklassische Variante des Malthus Wachstumsmodells. Dabei folge ich im Groben der Darstellung in @txtbook und führe das Modell ohne den Kapitalakkumulationsprozess ein.

Neben der Einführung in das Modell soll dabei auch die Implementierung in R vermittelt werden. Das in diesem Text eingeführte Modell bildet auch die Grundlage für die Shiny-App, welche die Vorlesung zum Malthus ergänzt.

Die folgenden R-Pakete werden dabei im Text verwendet:

```
library(tidyverse)
library(latex2exp)
```

2 Das Malthus-Wachstumsmodell ohne Kapitalakkumulation.

2.1 Die Bevölkerungsdynamik

Wir nehmen an, dass die Bevölkerung zum Zeitpunkt t gegeben ist durch N_t . Die Veränderung der Bevölkerung über die Zeit hängt von der Geburten- und Sterberate ab. Die Geburtenrate sei konstant und gegeben durch $b = 0.03$. Die Sterberate ist abhängig vom Konsum c_t und sei gegeben durch $d(c_t) = 0.01 - \log(c_t)$. Die Veränderung der Bevölkerung ergibt sich aus der Differenz von Geburten- und Sterberate und sei damit gegeben durch: $g(c_t) = b - d(c_t) = 0.01 - \log(c_t)$, bzw. $G(c_t) = 1 + g(c_t)$ Wir haben also:

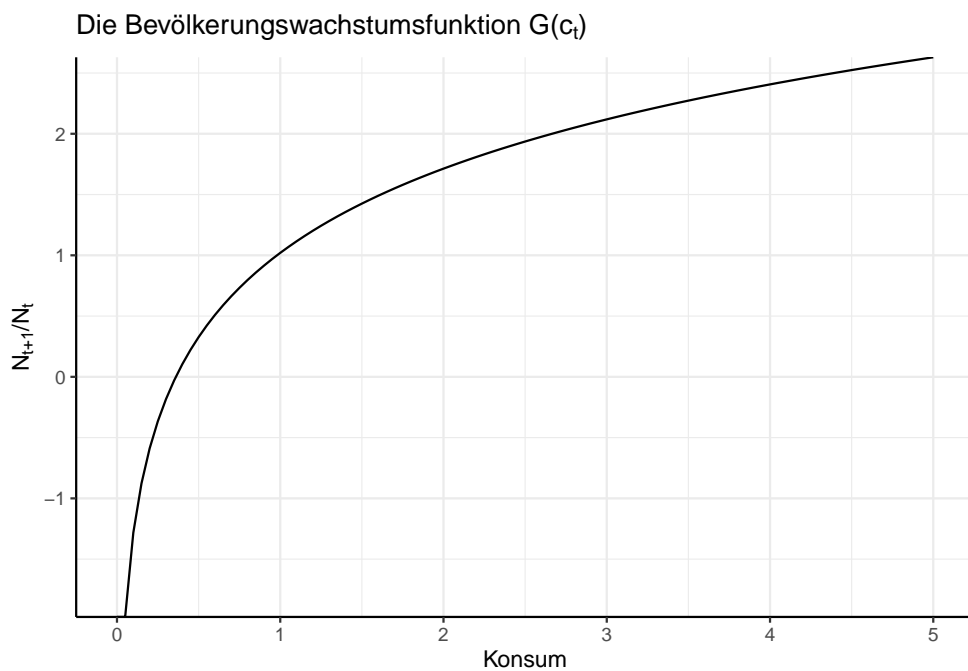
$$N_{t+1} = N_t(1 + g(c_t)) \quad (1)$$

$$N_{t+1} = N_t G(c_t) \quad (2)$$

```
birth_rate <- 0.03
death_rate <- function(consumption){0.01-log(consumption)}
g_c <- function(consumption, birthrate){birthrate - death_rate(consumption)}
G_c <- function(consumption, birthrate){1 + g_c(consumption, birthrate)}
```

Grafisch sieht die Funktion folgendermaßen aus:

```
ggplot(data.frame(x=c(0,5)), aes(x)) +
  stat_function(fun=G_c, args = list(birthrate = birth_rate)) +
  ggtitle(TeX("Die Bevölkerungswachstumsfunktion $G(c_t)$")) +
  xlab("Konsum") + ylab(TeX("$N_{t+1}/N_t$")) +
  scale_y_continuous(expand = expansion()) +
  theme_bw() + theme(panel.border = element_blank(),
    axis.line = element_line())
```



2.2 Produktion

Wir nehmen eine typische neoklassische Produktionsfunktion mit konstanten Skalenerträgen und abnehmendem Grenzertrag für jeden separaten Produktionsfaktor an. Die Produktionsfaktoren sind für Jetzt Arbeit und Boden, wobei letzterer fix durch $L = L_t \forall t$ und erster durch die Bevölkerung N_t gegeben ist. Entsprechend sei die Produktionsfunktion gegeben durch:

$$Y_t = AL^\alpha N_t^{1-\alpha}$$

wobei A einen Parameter für die *totale Faktorproduktivität* (TFP) darstellt. Die TFP können wir als ein allgemeines Maß für technischen Fortschritt interpretieren.

In R:

```

L_0 <- 1
N_0 <- 1
tfp <- 1.0
alpha_used <- 0.75

production <- function(total_factor_productivity, land, population, alpha_value){
  total_factor_productivity * land**alpha_value * population**(1-alpha_value)
}

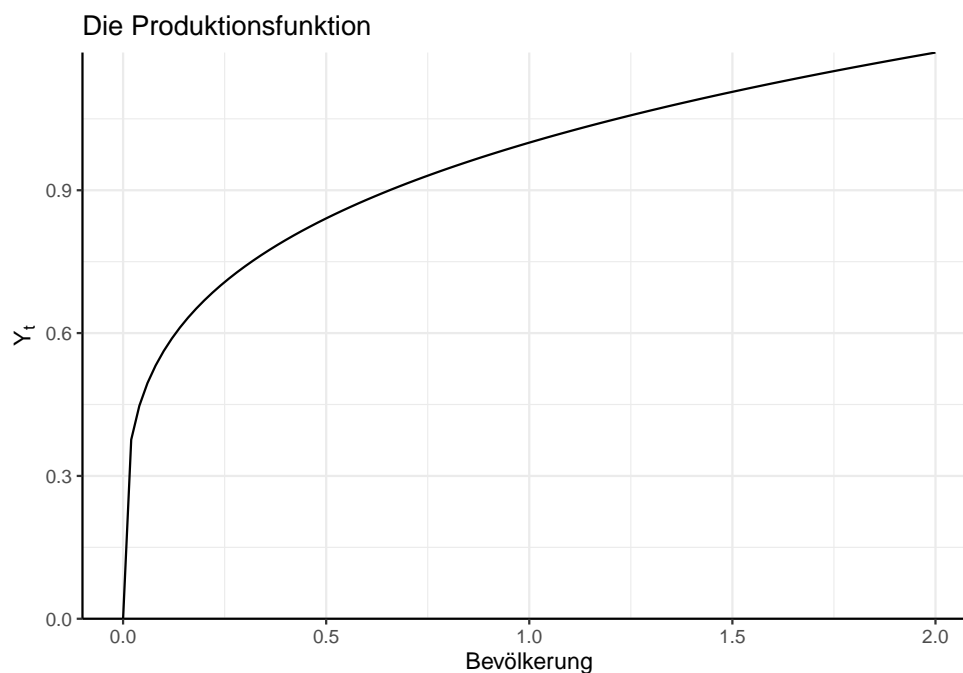
```

Die Produktionsfunktion sieht dabei folgendermaßen aus:

```

ggplot(data.frame(x=c(0,2)), aes(x)) +
  stat_function(fun=production, args = list(total_factor_productivity = tfp,
                                           land=L_0, alpha_value=alpha_used)) +
  ggtitle("Die Produktionsfunktion") +
  scale_y_continuous(expand = expansion()) +
  xlab("Bevölkerung") + ylab(TeX("$Y_t$")) +
  theme_bw() + theme(panel.border = element_blank(),
                    axis.line = element_line())

```



2.3 Allgemeines Gleichgewicht

2.3.1 Gleichgewichtsbedingungen

Die Modellökonomie besteht aus drei Märkten, die simultan im Gleichgewicht sein müssen: dem Gütermarkt, dem Landmarkt und dem Arbeitsmarkt. Da wir davon ausgehen, dass jede Person ihre gesamte Arbeitskraft (die wir als 1 normieren) anbietet und das angebotene Land mit L fixiert ist, sind diese beiden Gleichgewichtswerte bereits gegeben.

Der Gütermarkt ist im Gleichgewicht wenn der gesamte Output konsumiert wird, also gilt:

$$N_t c_t = Y_t$$

Es fehlen nun noch die Faktorpreise für Land (r_t) und Arbeit (w_t). Diese ergeben sich aus dem

Optimierungsproblem der repräsentativen Firma. Erinnern wir uns, dass eine profitmaximierende Firma die Produktionsfaktoren zum Preis ihres Grenzertrags nachfragt. Um diese Werte zu bekommen leiten wir die Profitfunktion

$$AL^\alpha N_t^{1-\alpha} - w_t N_t - r_t L_t$$

nach den beiden Produktionsfaktoren ab und setzen sie gleich Null:

$$\frac{\partial AL^\alpha N_t^{1-\alpha} - w_t N_t - r_t L_t}{\partial N} = (1 - \alpha) AL_t^\alpha N_t^{-\alpha} - w_t = (1 - \alpha) \frac{Y_t}{N_t} - w_t \stackrel{!}{=} 0$$

sowie

$$\frac{\partial AL^\alpha N_t^{1-\alpha} - w_t N_t - r_t L_t}{\partial L} = \alpha AL_t^{\alpha-1} N_t^{1-\alpha} - r_t = \alpha \frac{Y_t}{L_t} - r_t \stackrel{!}{=} 0$$

Daraus ergeben sich dann die Werte für w_t^* und r_t^* :

$$w_t^* = (1 - \alpha) \frac{Y_t}{N_t}$$

und

$$r_t^* = \alpha \frac{Y_t}{L_t}$$

Diese Berechnung halten wir auch in Form einer R-Funktion fest:

```
get_w_ss <- function(alpha_values, y_t, n_t){
  (1-alpha_values) * (y_t/n_t)
}

get_r_ss <- function(alpha_values, y_t, l_t){
  alpha_values*(y_t/l_t)
}
```

2.3.2 Gleichgewicht

Da die Bevölkerung im Gleichgewichtspfad konstant ist muss gelten:

$$N_{t+1} = N_t = N^*$$

Da das Bevölkerungswachstum $G(c_t)$ am Ende eine Funktion vom Konsum ist, können wir den Konsum im Gleichgewicht, c^* , über die Bedingung

$$G(c^*) = \frac{N_{t+1}}{N_t} \stackrel{!}{=} 1$$

erhalten. In R verwenden wir dazu die Funktion `uniroot`, mit der wir recht einfach die Nullstellen einer Funktion finden können.

```
test_f <- function(x){
  x - 1
}
uniroot(test_f, interval = c(-5, 5), extendInt = "yes")
```

```

#> $root
#> [1] 1
#>
#> $f.root
#> [1] 0
#>
#> $iter
#> [1] 1
#>
#> $init.it
#> [1] NA
#>
#> $estim.prec
#> [1] 6

```

Da wir hier aber den Input suchen für den $G(c)$ den Wert 1 annimmt definieren wir eine Hilfsfunktion:

```

get_c_ss <- function(birth_rate){
  g_c_1 <- function(consumption, birthrate){G_c(consumption, birthrate) - 1}
  uniroot(g_c_1, interval = c(0, 10), birthrate=birth_rate)$root
}

```

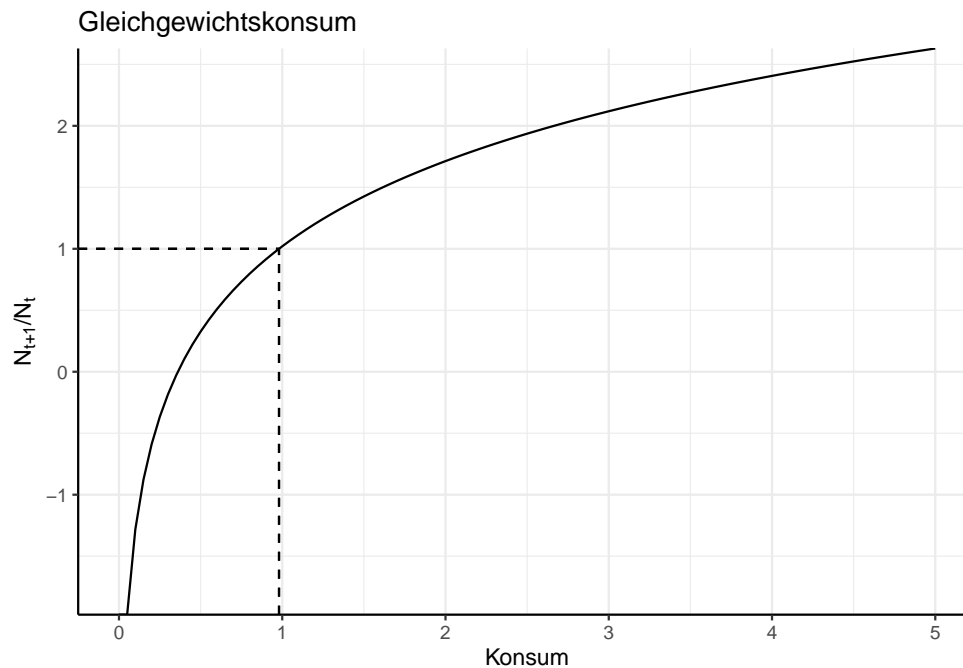
Damit hätten wir schon einmal den Konsum im Gleichgewicht:

```

c_ss <- get_c_ss(birth_rate)

ggplot(data.frame(x=c(0,5)), aes(x)) +
  stat_function(fun=G_c, args = list(birthrate = birth_rate)) +
  ggtitle("Gleichgewichtskonsum") +
  scale_y_continuous(expand = expansion()) +
  xlab("Konsum") + ylab(TeX("$N_{t+1}/N_t$")) +
  geom_segment(aes(x = -Inf, y = 1, xend = c_ss, yend = 1),
    linetype="dashed") +
  geom_segment(aes(x = c_ss, y = -Inf, xend = c_ss, yend = 1),
    linetype="dashed") +
  theme_bw() + theme(panel.border = element_blank(),
    axis.line = element_line())

```



Den Bevölkerungswert im Gleichgewicht erhalten wir durch den Schnittpunkt von $N_t c^*$ und $AL^\alpha N_t^{1-\alpha}$, da wir ja annehmen, dass der Gütermarkt im Gleichgewicht ist.

Damit wir den Schnittpunkt gleich korrekt einzeichnen können berechnen wir ihn wieder mit der Funktion `uniroot`:

```
interval_check <- seq(0, 2, 0.05)

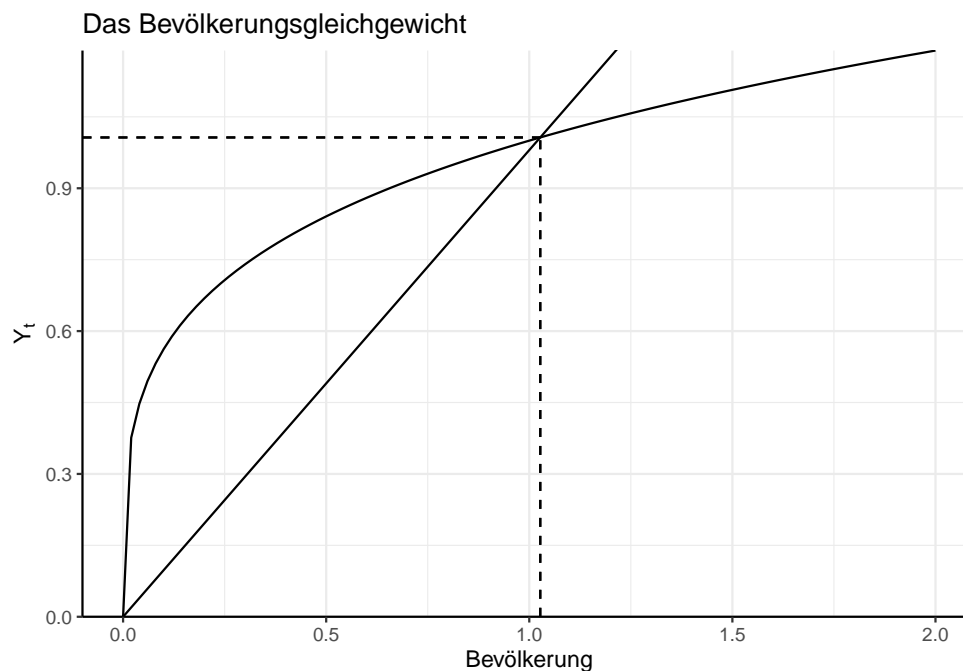
total_consumption <- function(pop_total, consumption_total){
  pop_total*consumption_total
}

n_ss <- uniroot(function(x) total_consumption(
  x, consumption_total=c_ss)-production(
    population=x,
    total_factor_productivity=tfp,
    land=L_0,
    alpha_value = alpha_used),
  c(0.5, 1.5), extendInt = "yes")$root

y_ss <- production(
  population=n_ss,
  total_factor_productivity=tfp,
  land=L_0,
  alpha_value = alpha_used)

ggplot(data.frame(x=c(0, 2)), aes(x)) +
  stat_function(fun=production, args = list(total_factor_productivity = tfp,
                                           land=L_0, alpha_value=alpha_used)) +
  ggtitle("Das Bevölkerungsgleichgewicht") +
  scale_y_continuous(expand = expansion()) +
  xlab("Bevölkerung") + ylab(TeX("$Y_t$")) +
  geom_segment(aes(x = -Inf, y = y_ss, xend = n_ss, yend = y_ss),
    linetype="dashed") +
  geom_segment(aes(x = n_ss, y = -Inf, xend = n_ss, yend = y_ss),
    linetype="dashed") +
```

```
geom_abline(intercept = 0, slope = c_ss) +
theme_bw() + theme(panel.border = element_blank(),
axis.line = element_line())
```



Nun können wir die noch fehlenden Faktorpreise berechnen:

```
w_ss <- get_w_ss(alpha_used, y_ss, n_ss)
w_ss
```

```
#> [1] 0.2450503
```

```
r_ss <- get_r_ss(alpha_used, y_ss, L_0)
r_ss
```

```
#> [1] 0.7550161
```

2.4 Statische Gleichgewichtsanalyse

Der Übersicht halber sammeln wir hier noch einmal alle relevanten Parameter im Modell:

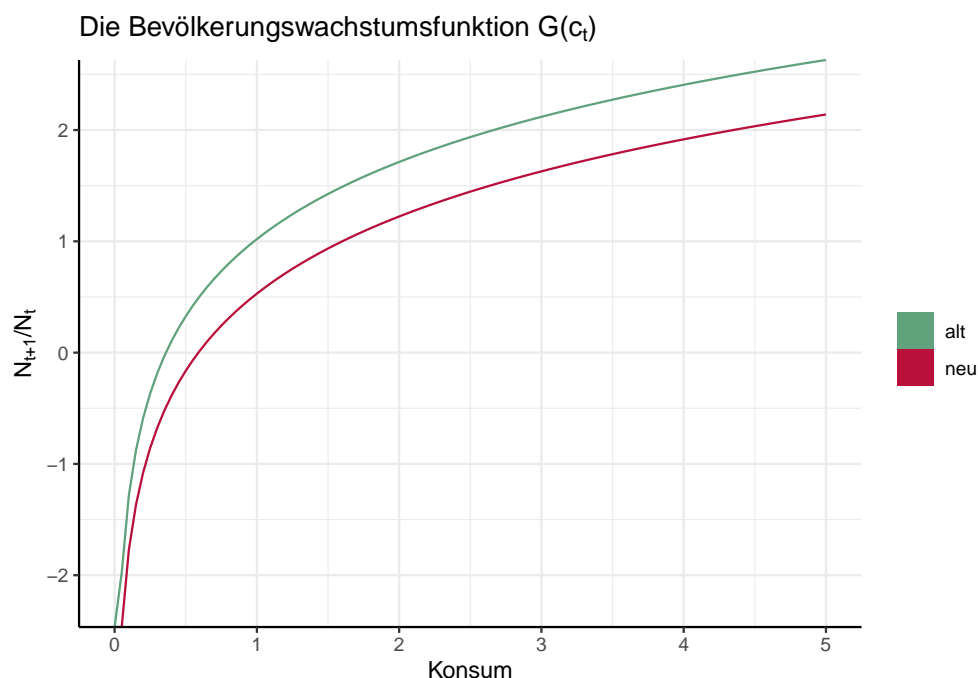
```
N_0 <- 1
L_0 <- 1
birth_rate <- 0.03
death_rate <- function(consumption){0.01-log(consumption)}
g_c <- function(consumption, birthrate){birthrate - death_rate(consumption)}
G_c <- function(consumption, birthrate){1 + g_c(consumption, birthrate)}
tfp <- 1.0
alpha_used <- 0.75
```

2.4.1 Effekt von erhöhter Sterblichkeit

Eine erhöhte Sterblichkeit hat unmittelbare Auswirkungen auf $G(c_t)$: für jedes Konsumlevel wächst die Bevölkerung weniger stark, da mehr Menschen sterben:

```
death_rate_new <- function(consumption){0.5-log(consumption)}
g_c_new <- function(consumption, birthrate){birthrate - death_rate_new(consumption)}
G_c_new <- function(consumption, birthrate){1 + g_c_new(consumption, birthrate)}
```

```
ggplot(data.frame(x=c(0,5)), aes(x)) +
  stat_function(fun=G_c, args = list(birthrate = birth_rate),
    aes(color="alt"), key_glyph = "rect") +
  stat_function(fun=G_c_new, args = list(birthrate = birth_rate),
    aes(color="neu"), key_glyph = "rect") +
  scale_colour_manual(values = c("#61a27c", "#b8103b")) +
  ggtitle(TeX("Die Bevölkerungswachstumsfunktion  $G(c_t)$ ")) +
  xlab("Konsum") + ylab(TeX(" $N_{t+1}/N_t$ ")) +
  scale_y_continuous(expand = expansion()) +
  theme_bw() + theme(panel.border = element_blank(),
    axis.line = element_line(),
    legend.title = element_blank())
```



Damit einher geht natürlich ein höheres Konsumlevel:

```
get_c_ss_new <- function(birth_rate){
  g_c_1 <- function(consumption, birthrate){G_c_new(consumption, birthrate) - 1}
  uniroot(g_c_1, interval = c(0, 10), birthrate=birth_rate)$root
}
```

```
c_ss_new <- get_c_ss_new(birth_rate)
print(paste0("Konsum alt: ", c_ss, " Konsum neu: ", c_ss_new))
```

```
#> [1] "Konsum alt: 0.980197248194107 Konsum neu: 1.59996985065887"
```

Das sehen wir hier auch grafisch:

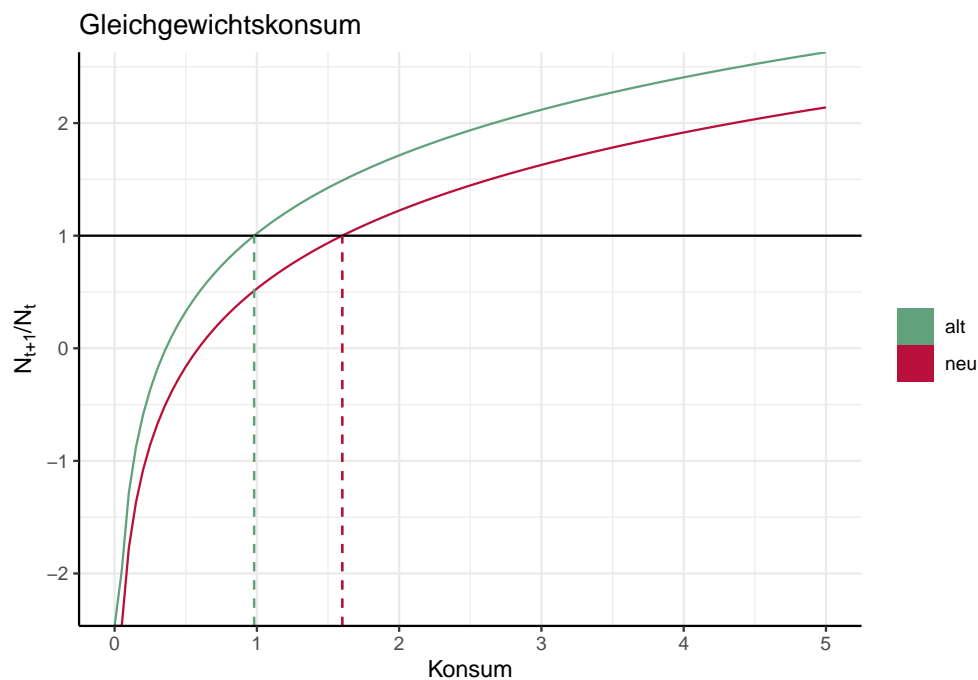
```
ggplot(data.frame(x=c(0,5)), aes(x)) +
  stat_function(fun=G_c, args = list(birthrate = birth_rate),
    aes(color="alt"), key_glyph = "rect") +
  stat_function(fun=G_c_new, args = list(birthrate = birth_rate),
    aes(color="neu"), key_glyph = "rect") +
```



```

scale_colour_manual(values = c("#61a27c", "#b8103b")) +
ggtitle("Gleichgewichtskonsum") +
scale_y_continuous(expand = expansion()) +
xlab("Konsum") + ylab(TeX("$N_{t+1}/N_t$")) +
geom_hline(yintercept = 1) +
geom_segment(aes(x = c_ss, y = -Inf, xend = c_ss, yend = 1),
             linetype="dashed", color="#61a27c") +
geom_segment(aes(x = c_ss_new, y = -Inf, xend = c_ss_new, yend = 1),
             linetype="dashed", color="#b8103b") +
theme_bw() + theme(panel.border = element_blank(),
                  axis.line = element_line(),
                  legend.title = element_blank())

```



Und ein geringeres Populationsniveau im Gleichgewicht:

```

n_ss_new <- uniroot(function(x) total_consumption(
  x, consumption_total=c_ss_new)-production(
    population=x,
    total_factor_productivity=tfp,
    land=L_0,
    alpha_value = alpha_used),
  c(0.5, 1.5), extendInt = "yes")$root

```

```

y_ss_new <- production(
  population=n_ss_new,
  total_factor_productivity=tfp,
  land=L_0,
  alpha_value = alpha_used)

```

```

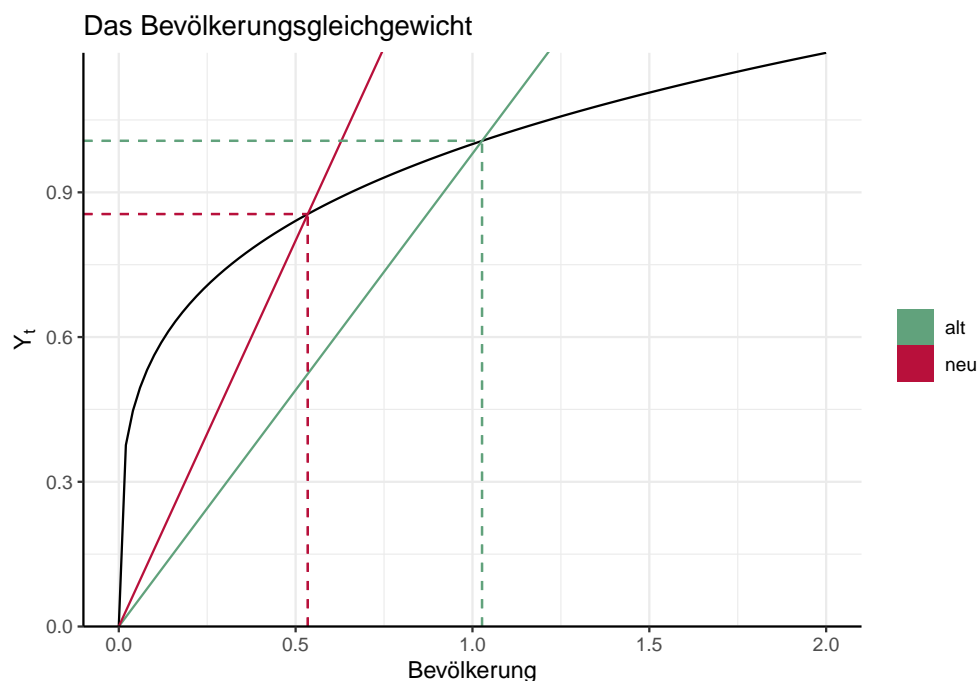
ggplot(data.frame(x=c(0,2)), aes(x)) +
  stat_function(fun=production, args = list(total_factor_productivity = tfp,
                                           land=L_0, alpha_value=alpha_used)) +
ggtitle("Das Bevölkerungsgleichgewicht") +
scale_y_continuous(expand = expansion()) +
xlab("Bevölkerung") + ylab(TeX("$Y_t$")) +

```

```

geom_abline(aes(intercept = 0, slope = c_ss, color="alt"),
            key_glyph = "rect") +
geom_abline(aes(intercept = 0, slope = c_ss_new, color="neu"),
            key_glyph = "rect") +
scale_colour_manual(values = c("#61a27c", "#b8103b")) +
geom_segment(aes(x = -Inf, y = y_ss, xend = n_ss, yend = y_ss),
             linetype="dashed", color="#61a27c") +
geom_segment(aes(x = n_ss, y = -Inf, xend = n_ss, yend = y_ss),
             linetype="dashed", color="#61a27c") +
geom_segment(aes(x = -Inf, y = y_ss_new, xend = n_ss_new, yend = y_ss_new),
             linetype="dashed", color="#b8103b") +
geom_segment(aes(x = n_ss_new, y = -Inf, xend = n_ss_new, yend = y_ss_new),
             linetype="dashed", color="#b8103b") +
theme_bw() + theme(panel.border = element_blank(),
                  axis.line = element_line(),
                  legend.title = element_blank())

```



Insgesamt führt eine erhöhte Sterblichkeitsrate also zu einer kleineren, aber im Sinne des Konsums reicheren Bevölkerung.

2.4.2 Effekt von technologischer Innovation

Unmittelbar können wir bei einer technologischen Innovation keinen Effekt auf die Bevölkerungsentwicklung beobachten. Daraus ergibt sich auch, dass sich am Konsum im Gleichgewicht nichts ändert. Allerdings verschiebt sich die Produktionskurve nach oben, weswegen wir im Gleichgewicht ein höheres Bevölkerungslevel erreichen:

```

tfp_new <- tfp+0.25
n_ss_new2 <- uniroot(function(x) total_consumption(
  x, consumption_total=c_ss)-production(
    population=x,
    total_factor_productivity=tfp_new,
    land=L_0,
    alpha_value = alpha_used),

```

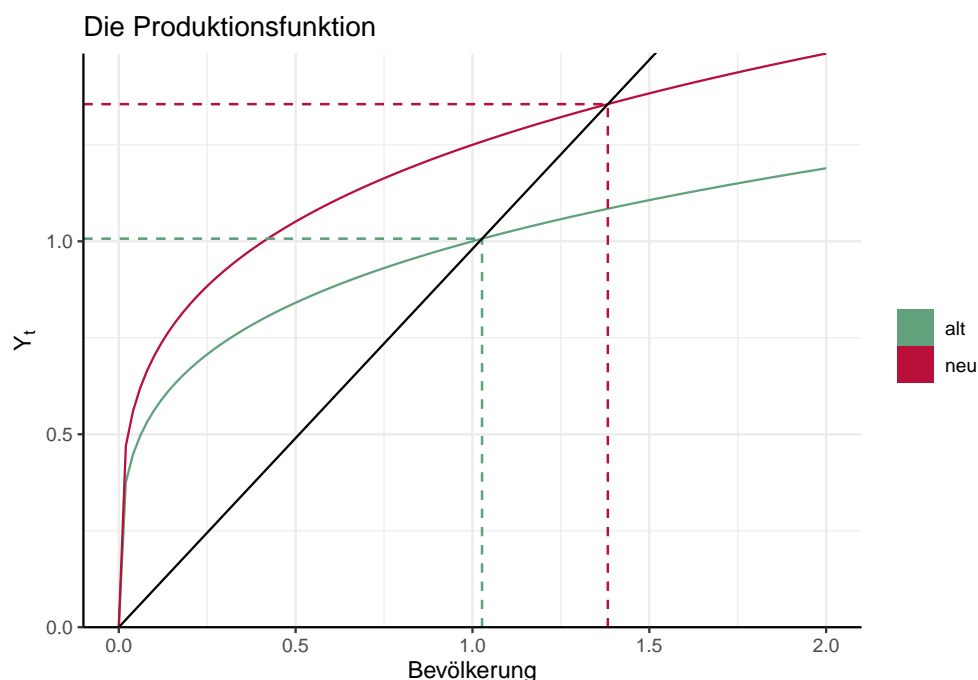
```

c(0.5, 1.5), extendInt = "yes")$root

y_ss_new2 <- production(
  population=n_ss_new2,
  total_factor_productivity=tfp_new,
  land=L_0,
  alpha_value = alpha_used)

ggplot(data.frame(x=c(0,2)), aes(x)) +
  stat_function(fun=production, args = list(total_factor_productivity = tfp,
                                           land=L_0, alpha_value=alpha_used),
              aes(color="alt"), key_glyph = "rect") +
  stat_function(fun=production, args = list(total_factor_productivity = tfp_new,
                                           land=L_0, alpha_value=alpha_used),
              aes(color="neu"), key_glyph = "rect") +
  scale_colour_manual(values = c("#61a27c", "#b8103b")) +
  geom_segment(aes(x = -Inf, y = y_ss, xend = n_ss, yend = y_ss),
              linetype="dashed", color="#61a27c") +
  geom_segment(aes(x = n_ss, y = -Inf, xend = n_ss, yend = y_ss),
              linetype="dashed", color="#61a27c") +
  geom_segment(aes(x = -Inf, y = y_ss_new2, xend = n_ss_new2, yend = y_ss_new2),
              linetype="dashed", color="#b8103b") +
  geom_segment(aes(x = n_ss_new2, y = -Inf, xend = n_ss_new2, yend = y_ss_new2),
              linetype="dashed", color="#b8103b") +
  ggtitle("Die Produktionsfunktion") +
  scale_y_continuous(expand = expansion()) +
  xlab("Bevölkerung") + ylab(TeX("$Y_t$")) +
  geom_abline(intercept = 0, slope = c_ss, color="black") +
  theme_bw() + theme(panel.border = element_blank(),
                    axis.line = element_line(),
                    legend.title = element_blank())

```



Insgesamt führt technologische Innovation hier also zu einem Bevölkerungswachstum ohne den pro-Kopf-Wohlstand zu erhöhen.