ИТМО. МатАн. Лекция.

11.09.2023

§ 8. Производная от функции, заданной неявно.

Вступление

$y = y(x) : F(x, y) = 0$

Пример

$e^y - e^x + xy = 0$, тогда $(e^y - e^x + xy)_x^{'} = 0$, где $y = y(x)$. Тогда $e^y * y^{'} - e^x + y + xy^{'} = 0 \to (e^y + x)y^{'} = e^x - y \to y^{'} = \frac{e^x - y}{e^y + x}$.

Формула

$$y^{'} = -\frac{F_x^{'}(x,y)}{F_y^{'}(x,y)}.$$

$F_x^{'}(x, y) = -e^x + y, F_y^{'} = e^y + x \to y^{'} = -\frac{-e^x + y}{e^y + x} = \frac{e^x - y}{e^y - x}$.

Th

Теорема о производной функции, заданной неявно

$y = y(x)$ - непрерывная. $F(x, y) = 0$. $F, F_x^{'}, F_y^{'}$ - непрерывны в окрестности $(x, y) \Rightarrow y^{'} = -\frac{F_x^{'}(x,y)}{F_y^{'}(x,y)}, \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\delta F}{\delta x}(x,y)}{\frac{\delta F}{\delta y}(x,y)}$.

Доказательство

$x, y(x), F(x, y) = 0$ и $\Delta x, \Delta y, F(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0$.

$\Rightarrow \Delta F = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = 0$. Тогда $\Delta F = \frac{\delta F}{\delta x}\Delta x + \frac{\delta F}{\delta y}\Delta y + \alpha(\Delta\rho)$, где $\Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

$\Delta F = \frac{\delta F}{\delta x}\Delta x + \frac{\delta F}{\delta y}\Delta y + \alpha(\Delta\rho)\Delta x + \beta(\Delta\rho)\Delta y = 0$. Разделим на Δx и получим $\frac{\delta F}{\delta x} + \frac{\delta F}{\delta y} * \frac{\Delta y}{\Delta x = -(\frac{\delta f}{\delta x} + \alpha(\Delta\rho))} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\frac{\delta F}{\delta x} + \alpha(\Delta\rho)}{\frac{\delta F}{\delta y} + \beta(\Delta\rho)}$. Тогда $\Delta x \to 0 \overset{\text{непр. у}}{=} \Delta y \to 0$ и $\Delta\rho \to 0$.

Тогда получаем $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\delta F}{\delta x}}{\frac{\delta F}{\delta y}}$, чтд.

Пример

$z = z(x,y)$, $F(x,y,z) = 0$, $\frac{\delta z}{\delta x}, \frac{\delta z}{\delta y} = ?$.

$\frac{\delta z}{\delta x} = -\frac{\frac{\delta F}{\delta x}}{\frac{\delta F}{\delta z}}$ и $\frac{\delta z}{\delta y} = -\frac{\frac{\delta F}{\delta y}}{\frac{\delta F}{\delta z}}$. $z = z(x,y)$ непр, $F, F^{'}_x, F^{'}_y, F^{'}_z$ непр и $F^{'}_z \neq 0$.

Пример

$x^2 + y^2 + z^2 = R$. Пусть $z = z(x,y)$.

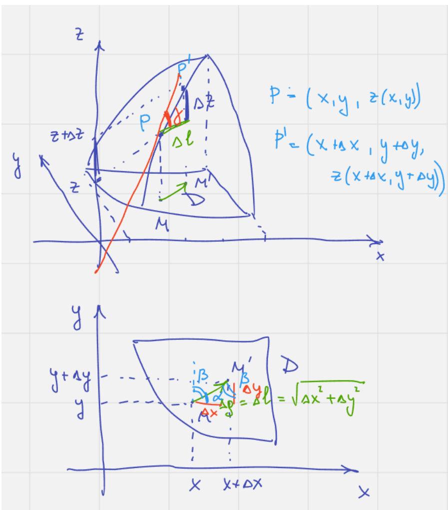
Тогда $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$. Отсюда $\frac{\delta F}{\delta x} = 2x$, $\frac{\delta F}{\delta y} = 2y$, $\frac{\delta F}{\delta z} = 2z \Rightarrow z^{'}_x = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z}$ и $z^{'}_y = -\frac{2y}{2z} = -\frac{y}{z}$. Так же $z^{'}_x = \frac{-x}{\pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$ и $z^{'}_y = \frac{-y}{\pm\sqrt{R^2 - x^2 + y^2}}$.

§ 9. Производная по направлению.

Вступление

$z = z(x,y), M(x,y), \vec{l}(x,y)$.

$\Delta x, \Delta y$ вдоль $\vec{l} \Rightarrow M^{'}(x + \Delta x, y + \Delta y)$ и $\Delta_l z = z(M^{'}) - z(M)$, $\frac{\Delta_l z}{\Delta l} \xrightarrow{\Delta l \to 0} \frac{\delta z}{\delta l} = \operatorname{tg}\gamma$.



Th

Теорема о производной функции по направлению

$z = z(x,y). z, z'_x$ и $'_y$ непр. Тогда $\frac{\delta z}{\delta x} = \frac{\delta z}{\delta x}\cos\alpha + \frac{\delta z}{\delta y}\cos\beta$, где $(\cos\alpha, \cos\beta) = \vec{l^\circ} = \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}$.

Доказательство

$\Delta_l z = \frac{\delta z}{\delta x}\Delta x + \frac{\delta z}{\delta y}\Delta y + \alpha(\Delta l)\Delta x + \beta(\Delta l)\Delta y$. Разделим на Δl и получим $\frac{\Delta_l z}{\Delta l} = \frac{\delta z}{\delta x}\frac{\Delta x}{\Delta l} + \frac{\delta z}{\delta y}\frac{\Delta y}{\Delta l} + \alpha(\Delta l)\frac{\Delta x}{\Delta l} + \beta(\Delta l)\frac{\Delta y}{\Delta l}$. Заметим, что $\frac{\Delta x}{\Delta l} = \cos\alpha$, $\frac{\Delta y}{\Delta l} = \cos\beta, \alpha + \beta = \frac{\Pi}{2}$. Тогда $\Delta l \to 0 \Rightarrow \Delta x \to 0, \Delta y \to 0$, $\frac{\delta z}{\delta l} = \frac{\delta z}{\delta x} * \cos\alpha + \frac{\delta z}{\delta y} * \cos\beta$.

Рассмотрим

$\vec{l} = \vec{i} = (1,0), \frac{\delta z}{\delta x} * 1 + \frac{\delta z}{\delta y} * 0 = \frac{\delta z}{\delta x}$.

На функцию 3 переменных:$u = u(x,y,z), \vec{l} = (l_x, l_y, l_z), \vec{l^\circ} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

$\frac{\delta u}{\delta l} = \frac{\delta u}{\delta x} * \cos\alpha + \frac{\delta u}{\delta y} * \cos\beta + \frac{\delta u}{\delta z} * \cos\gamma$.

Пример

$u = x^2 + y^2 + z^2, M(1;1;1), \vec{l} = (2'1'3)$. Тогда $\vec{l^\circ} = \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|} = (\frac{2}{\sqrt{14}}; \frac{1}{\sqrt{14}}; \frac{3}{\sqrt{14}})$. $\frac{\delta u}{\delta x} = 2x, \frac{\delta u}{\delta y} = 2y, \frac{\delta u}{\delta z} = 2z$. Тогда $\frac{\delta u}{\delta x}(M) = \frac{\delta u}{\delta y}(M) = \frac{\delta u}{\delta z}(M) = 2$. Тогда $\frac{\delta u}{\delta l} = 2 * \frac{2}{\sqrt{14}} + 2 * \frac{1}{\sqrt{14}} + 2 * \frac{3}{\sqrt{14}} = \frac{12}{\sqrt{14}}$.

§ 10. Частные производные высших порядков.

Вступление

$z = z(x,y). \frac{\delta z}{\delta x} = z^{'}_x(x;y)$ и $\frac{\delta z}{\delta y} = z^{'}_y(x;y)$. Тогда $\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} = \frac{\delta}{\delta x} * (\frac{\delta z}{\delta x}) = (z'_x)'_x = z_{xx}"(x;y)$ и $\frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y} = \frac{\delta}{\delta y} * (\frac{\delta z}{\delta x}) = (z'_x)'_y = z_{xy}"(x;y)$. А вторая смешанная производная 2 порядка имеет вид $\frac{\delta^2 z}{\delta y \delta x} = \frac{\delta}{\delta x}(\frac{\delta z}{\delta y}) = (z'_y)'_x = z_{yx}"(x;y)$ и тд.

Пример

$z = x^2 y + y^3$. Найти $z_{xx}\, z_{xy}\, z_{yx}\, z_{yy}$−?.

$z'_x = 2xy, z_{xx} - (2xy)'_x = 2y$. $z'_y = x^2 + 3y^2, z_{xy} - (2xy)'_y = 2x$. $z_{yx} - (x^2 + 3y^2)'_x = 2x$.

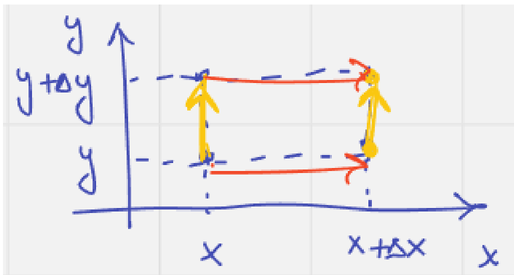
Th

Теорема о смешанных производных

$z = z(x;y).z, z'_x, z'_y, z'_z, z_{xy}\ z_{yx}$" - непр в окр $M(x;y)$. Тогда $\frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y} = \frac{\delta^2 z}{\delta y \delta x}$.

Доказательство

$A = z(x + \Delta x; y + \Delta y) - z(x + \Delta x; y) - z(x; y + \Delta y) + z(x; y)$.



1)$A = (z(x+\Delta x; y+\Delta y) - z(x+\Delta x; y)) - (z(x; y+\Delta y) - z(x; y)).\phi(x) = z(x; y+\Delta y) - z(x; y)$. Тогда $A = \phi(x+\Delta x) - \phi(x) = \Delta\phi$. По теоерема Лагранжа $\exists \overline{x} : \Delta\phi = \phi'(\overline{x})\Delta x$. Таким образом, $A = \phi'(\overline{x})\Delta x = (z'(\overline{x}; y + \Delta y) - z'(\overline{x}; y))\Delta x$. Тогда по теореме Лагранжа $(z'_x)'_y(\overline{x}; \overline{y})\Delta y = (z'(\overline{x}; y + \Delta y) - z'(\overline{x}; y))\Delta x$.

Таким образом, $A = z_{xy}$"$(\overline{x}; \overline{y})\Delta x \Delta y$.

2)$A = (z(x + \Delta x; y + \Delta y) - z(x; y + \Delta y)) - (z(x + \Delta x; y).A = \psi(y + \Delta y) - \psi(y) = \Delta\psi$, где $\psi(y + \Delta y) = (z(x + \Delta x; y + \Delta y) - z(x; y + \Delta y)), \psi(y) = (z(x + \Delta x; y)$.

Тогда по теореме Лагранжа $\exists \overline{\overline{y}} : \Delta\psi = \psi'_y(\overline{\overline{y}})\Delta y$. Тогда $A = \psi'_y(\overline{\overline{y}})\Delta y = (z'_y(x + \Delta x; \overline{\overline{y}}) - z'_y())$,дописать слева $A = z_{yx}$"$(\overline{\overline{x}}; \overline{\overline{y}})\Delta x \Delta y$.

Отсюда z_{xy}"$(\overline{x}; \overline{y}) = z_{xy}$"$(\overline{\overline{x}}; \overline{\overline{y}})$. Тогда при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ получаем, что $\overline{x}$ и $\overline{\overline{x}} \to x$ и $\overline{y}$ и $\overline{\overline{y}} \to 0$. Тогда z_{xy}"$(x; y) = z_{yx}$"$(x; y)$, чтд.

Пример

$\frac{\delta^3 z}{\delta y^2 \delta x} = \frac{\delta^3 z}{\delta x \delta y^2} = \frac{\delta^3 z}{\delta y \delta x \delta y}$.