Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное

учреждение высшего образования «Национальный исследовательский

университет ИТМО»

Факультет Программной инженерии и компьютерной техники

09.04.2024

Лабораторная работа №5
Методы оптимизации
Вариант 9

Раевский Григорий, группа P3221

Содержание

Задания

Задание 1. Решить задачу линейного программирования графическим методом.

Задание 2. Даны матрицы A и векторы c и b. Решить каноническую задачу линейного программирования $f(x) = cx \longrightarrow max$ при ограничениях $Ax = b, x \geq 0$ с помощью симплекс-метода.

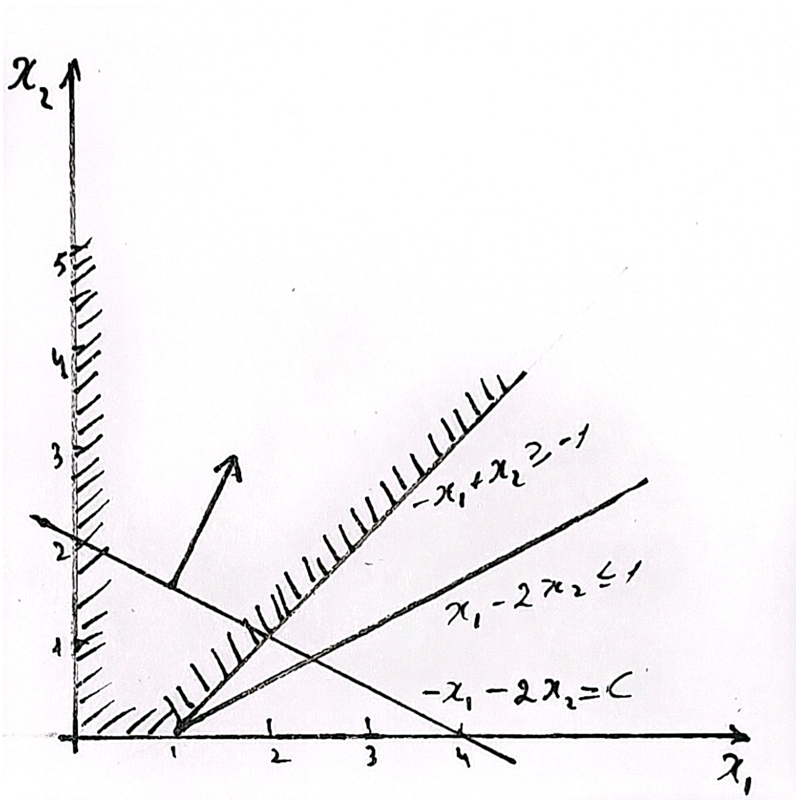
Задание 3. Даны матрица A и векторы c и b. Решить каноническую задачу линейного программирования $f(x) = cx \longrightarrow max$ при ограничениях $Ax = b, x \geq 0$ с помощью симплекс-метода для двойственной задачи.

Задание 1. Графический метод.

Дано

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 \longrightarrow min \\ -x_1 + x_2 \geq -1 \\ x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Решение



На плоскости (x_1, x_2) изображено допустимое множество X. Оно представляет собой неограниченное многоугольное множество. Так же изобразим одну из линий уровня $-x_1 - 2x_2 = C$ целевой функции. Антиградиент $\vec{e}$ изображает направление убывания функции. При параллельном переносе линии уровня $-x_1 - 2x_2 = C$ вдоль направления $\vec{e}$ она всегда пересекает множество X, а целевая функция неограниченно убывает $\Rightarrow$ задача решения не имеет.

Задание 2. Симплекс метод.

Дано

c = (-8, -1, -1, 1, 0); b = (5,9,3), A = $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 6 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Решение

$f(x) = -8x_1 - x_2 - x_3 + x_4$. Система: $\begin{cases} -2x_1 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 5 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 6x_4 + 2x_5 = 9 \\ -x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3 \end{cases}$.

Исходная симплекс-таблица:

-	x_4	x_5	b
x_1	5	-4	-1
x_2	-24	13	11
x_3	3	-3	1
f	-18	22	-4

В столбце b имеется отрицательный элемент в 1 строке. В 1 строке максимальный элемент по модулю - 5. Значит меняем x_4 и x_1.

Новая симплекс-таблица:

-	x_1	x_5	b
x_4	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
x_2	$-\frac{24}{5}$	$-\frac{31}{5}$	$\frac{31}{5}$
x_3	$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{8}{5}$
f	$-\frac{18}{5}$	$\frac{38}{5}$	$\frac{38}{5}$

Так как в строке f не все элементы отрицательные, то план не оптимален. Выбираем 2 столбец (он идентичен 3, но идет раньше). Для выбора элемента для замены $\{-1; 1; \frac{8}{3}\}$. Выбираем минимальный положительный элемент и меняем x_5 и x_2. Новая симплекс-таблица:

-	x_1	x_2	b
x_4	$-\frac{13}{31}$	$-\frac{4}{31}$	1
x_5	$-\frac{24}{31}$	$-\frac{5}{31}$	1
x_3	$\frac{33}{5}$	$\frac{3}{31}$	1
f	$-\frac{294}{31}$	$-\frac{38}{31}$	0

Все значения f отрицательны, то есть план оптимален.

План $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 1, 1, 1)$ и максимальное значение $f = 0$.

Задание 3. Симплекс-метод двойственной задачи.

Дано

$$c = (-1, 0, -\tfrac{1}{4}, 0, 0),\ b = (-1, -7, -39),\ A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ -64 & 0 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Решение

Для начала транспонируем матрицу A: $A^T = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -64 \\ 4 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Двойственная задача $g(y) = by \longrightarrow min$ при $c \leq A^T y$. $g(y) = -y_1 - 7y_2 - 39y_3$. Система $\begin{cases} 4y_1 - 4_y - 64y_3 \geq -1 \\ 4y_1 \geq 0 \\ -4y_1 - 4y_2 + 4y_3 \geq -0.25 \\ 4y_2 \geq 0 \\ 4y_3 \geq 0 \end{cases}$. Решим с помощью метода искусственного базиса: $\begin{cases} y_4 = -4y_1 + 4y_2 + 64y_3 - 1 \\ y_5 = -4y_1 \\ y_6 = 4y_1 + 4y_2 - 4y_3 - 0.25 \\ y_7 = -4y_2 \\ y_8 = -4y_3 \end{cases}$

Исходная симплекс-таблица:

-	y_1	y_2	y_3	b
y_4	-4	4	64	-1
y_5	-4	0	0	0
y_6	4	4	-4	-0.25
y_7	0	-4	0	0
y_8	0	0	-4	0
g	-1	-7	-39	0

План не оптимален, так как в строке g имеются отрицательные элементы. Наименьший из них -39. Выбираем по формуле $-\frac{x_l^0}{ik}$ из $\{\frac{1}{64}, \infty, -\frac{1}{16}, \infty, 0\}$. Выбираем наименьший положительный элемент $\frac{1}{64}$ и меняем y_3 с y_4.

Новая симплекс-таблица:

-	y_1	y_2	y_4	b
y_3	$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{16}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$
y_5	4	0	0	0
y_6	$-\frac{15}{4}$	$-\frac{17}{4}$	$-\frac{1}{16}$	$\frac{5}{16}$
y_7	0	4	0	0
y_8	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
g	$-\frac{55}{1}$	$-\frac{73}{16}$	$\frac{39}{64}$	$\frac{39}{64}$

План не оптимален, так как в строке g имеются отрицательные элементы. Наименьший из них $-\frac{73}{16}$. Выбираем по формуле $-\frac{x_l^0}{ik}$ из $\{\frac{1}{4}, \infty, \frac{5}{68}, \infty, \frac{1}{4}\}$. Выбираем наименьший положительный элемент $\frac{5}{68}$ и меняем y_2 с y_6.

Новая симплекс-таблица:

-	y_1	y_6	y_4	b
y_3	$\frac{2}{17}$	$\frac{1}{68}$	$-\frac{1}{68}$	$\frac{3}{272}$
y_5	4	0	0	0
y_2	$-\frac{15}{17}$	$-\frac{4}{17}$	$-\frac{1}{68}$	$\frac{5}{68}$
y_7	$-\frac{60}{17}$	$-\frac{16}{17}$	$-\frac{1}{17}$	$\frac{5}{17}$
y_8	$\frac{8}{17}$	$\frac{1}{17}$	$-\frac{1}{17}$	$\frac{3}{68}$
g	$\frac{10}{17}$	$\frac{23}{34}$	$\frac{73}{68}$	$-\frac{257}{272}$

Все значения g положительны, то есть план оптимален.

План $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8) = (0, \frac{5}{68}, \frac{3}{272}, 0, 0, 0, \frac{5}{17}, \frac{3}{68})$ и минимальное значение $g = -\frac{257}{272}$.

Выводы

В процессе выполнения работы я познакомился с различными методами решения задач линейного программирования и узнал, как использовать симплекс-метод и симплекс-таблицу.