ИТМО. МатАн. Практика.

11.09.2023

Производная неявно заданной функции

3147

$xe^y + ye^x - e^{xy} = 0, y = y(x), y^{'} = ?$

$(xe^y - e^{xy})^{'} = 0^{'}$ тогда $e^y + xy^y * y^{'} + y^{'}x + ye^x - e^{xy}(y + xy^{'}) = 0$. И $(xe^y + e^x - xe^{xy})y^{'} = -e^y - ye^x + ye^{xy}$ $((e^{fg})^{'} = e^{fg} * (fg)^{'})$. Отсюда $y^{'} = \frac{e^y + ye^x - ye^{xy}}{e^x + xe^y - xe^{xy}}$.

Формула, дающая тот же результат. Представим $xe^y + ye^x - e^{xy}$ как $F(x, y) = 0$, где $\begin{cases} x = t \\ y = y(t) \end{cases}$. Тогда получим формулу $y^{'}(x) = \frac{F_x^{'}(x,y)}{F_y^{'}(x,y)}$. Тогда для исходного уровнения получаем $F_x^{'} = e^y + ye^x - ye^{xy}$ и $F_y^{'} = xe^y + e^x - xe^{xy}$. Тогда по формуле $y^{'}(x) - \frac{e^y + ye^x - ye^{xy}}{e^x + xe^y - xe^{xy}}$.

Согласно следствию $z = z(x, y)$ и $F(x, y, z) = 0 \to z_x^{'} = -\frac{F_x^{'}}{F_z^{'}}$ и $z_y^{'} = -\frac{F_y^{'}}{F_z^{'}}$.

3163

Условие

$z^3 + 3xyz = a^3, a \in \mathbb{R}$, a - константа. Найти $z_x^{'}, z_y^{'}$.

Решение

$F(x,y,z)=z^y+3xyz-a^3$. $F_x^{'}=3yz, F_y^{'}=3xz, F_z^{'}=3z^2+3xy$. Тогда $z_x^{'}=-\frac{3yz}{3z^2+3xy}, z_y^{'}=-\frac{3xz}{3z^2-3xy}$.

3164

Условие

$e^z-xyz=0, \frac{\delta z}{\delta x}, \frac{\delta z}{\delta y}=?$

Решение

$\frac{\delta z}{\delta x}=z_x^{'}=\frac{yz}{e^z-xy}$ и $\frac{\delta z}{\delta y}=z_y^{'}=\frac{xz}{e^z-xy}$.

Частная производная второго и высших порядков

$y(x), y^{''}(x)=(y_x^{'})^{'}$. Тогда $z=z(x,y), (z_x^{'})_y^{'}=z_{xy}^{''}, (z_y^{'})_x^{'}=z_{yx}^{''}=z_{xy}^{''}$

3182

Условие

$z=x^y$, проверить, что $\frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y}\stackrel{?}{=}\frac{\delta^2 z}{\delta y \delta x}$.

Решение

$\frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y}=(x^2)_{xy}^{''}=((y)*x^{y-1})_y^{'}=x^{y-1}+y*\ln x*x^{y-1}.\frac{\delta^2 z}{\delta y \delta x}=((x^y)_y^{'})^{'}=(x^y*\ln x)_x^{'}=yx^{x-1}*\ln x+x^{y-1}$

3219

Условие

$z=xy^2-x^2y, d^2z=?$

Решение

$d^2z = d(dz) = d(\frac{\delta z}{\delta x}dx + \frac{\delta z}{\delta y}dy) = d(\frac{\delta z}{\delta x}dx) + d(\frac{\delta z}{\delta y}dy) = d(\frac{\delta z}{\delta x})dx + d(\frac{\delta z}{\delta y})dy = (\frac{\delta z^2}{\delta^2 x}dx + \frac{\delta z^2}{\delta x \delta y}dy)dx + (\frac{\delta z^2}{\delta x \delta y}dx + \frac{\delta z^2}{\delta^2 y}dy)dy =$

...