Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное

учреждение высшего образования «Национальный исследовательский

университет ИТМО»

Факультет Программной инженерии и компьютерной техники

20.03.2024

Лабораторная работа №3
Методы оптимизации
Вариант 9

Раевский Григорий, группа P3221

Содержание

Задание

Найти экстремум функции на отрезке методом квадратичной аппроксимации. Три итерации метода выполнить вручную + написать программу на одном из языков программирования. $\epsilon = 0.0001$ у всех.

Функция: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x + x * \ln x$, $[a; b] = [1.5; 2], \epsilon = 0.02$

Итеративное решение

Формулы

1. $\bar{x} = \frac{1}{2}\frac{(x_2^2-x_3^2)f_1+(x_3^2-x_1^2)f_2+(x_1^2-x_2^2)f_3}{(x_2-x_3)f_1+(x_3-x_1)f_2+(x_1-x_2)f_3}$ - минимум квадратичного интерполяционного полинома

2. $|\frac{F_{min}-f(\bar{x})}{f(\bar{x})}| < \epsilon$ и $|\frac{x_{min}-\bar{x}}{\bar{x}}| < \epsilon$ - условия окончания расчета

Возьмем начальную точку $x_1 = 1.5$, $\delta x = 0.001$

1 Итерация

2) $x_2 = 1.5 + 0.001 = 1.501$

3) $f_1 = f(x_1) = -5.767$ и $f_2 = f(x_2) = -5.768$

4) Так как $f_1 > f_2$, то $x_3 = 1.502$

5) $f_3 = f(x_3) = -5.769$

6) Тогда $F_{min} = -5.769$, $x_{min} = x_3$

7) $\bar{x} = \frac{1}{2}\frac{(1.501^2-1.502^2)\cdot(-5.767)+(1.502^2-1.5^2)\cdot(-5.768)+(1.5^2-1.501^2)\cdot(-5.769)}{(1.501-1.502)\cdot(-5.767)+(1.502-1.5)\cdot(-5.768)+(1.5-1.501)\cdot(-5.769)} = 1.851$, а $f(\bar{x}) = -6.001$

8) Проверка $|\frac{-5.769-(-6.001)}{-6.001}| = 0.0386 > 0.0001$ и $|\frac{1.502-1.851}{1.851}| = 0.1887 > 0.0001$. Так как $\bar{x} \notin [x_1; x_3]$, то $x_1 = \bar{x}$.

Переходим к следующей итерации

2 Итерация

2) $x_1 = 1.851$, $x_2 = 1.852$

3) $f_1 = -6.001$, $f_2 = -6.0012$

4) Так как $f_1 \leq f_2$, то $x_3 = 1.850$

5) $f_3 = -6.0013$

6) $F_{min} = -6.0013.$, $x_{min} = x_3$

7) $\bar{x} = \frac{1}{2}\frac{(1.852^2-1.850^2)\cdot(-6.001)+(1.850^2-1.851^2)\cdot(-6.0012)+(1.851^2-1.852^2)\cdot(-6.0013)}{(1.852-1.850)\cdot(-6.001)+(1.850-1.851)\cdot(-6.0012)+(1.851-1.852)\cdot(-6.0013)} = 1.857, f(\bar{x}) = -6.0009$

8) Значение $|\frac{F_{min}-f(\bar{x})}{f(\bar{x})}| < 0.0001$, однако $|\frac{1.850-1.857}{1.857}| = 0.0036 > 0.0001$, то есть, не удовлетворяет критерию точности. При этом, $\bar{x} \notin [x_1; x_3]$, поэтому $x_1 = \bar{x}$. Переходим к следующей итерации.

3 Итерация

2) $x_1 = 1.857$, $x_2 = 1.858$

3) $f_1 = -6.00098$, $f_2 = -6.00091$

4) Так как $f_1 \leq f_2$, то $x_3 = 1.859$

5) $f_3 = -6.00084$

6) $F_{min} = -6.00098$, $x_{min} = x_1$

7) $\bar{x} = \frac{1}{2}\frac{(1.858^2-1.859^2)\cdot(-6.00098)+(1.859^2-1.857^2)\cdot(-6.00091)+(1.857^2-1.858^2)\cdot(-6.00084)}{(1.858-1.859)\cdot(-6.00098)+(1.859-1.857)\cdot(-6.00091)+(1.857-1.858)\cdot(-6.00084)} = 1.826, f(\bar{x}) = -6.0010$

8) Значение $|\frac{F_{min}-f(\bar{x})}{f(\bar{x})}| < \epsilon$, однако $|\frac{1.857-1.826}{1.826}| = 0.0172 > \epsilon$, то есть, не удовлетворяет критерию точности. При этом, $\bar{x} \notin [x_1; x_3]$, поэтому $x_1 = \bar{x}$.

Код

```
import math
import numpy as np


def f(x):
    return (1 / 3) * pow(x, 3) - 5 * x + x * np.log(x)


def solution(x1, del_x, e):
    i = 0
    calculate = True
    while True:
        i += 1
        if (calculate):
            x2 = x1 + del_x

        f1 = f(x1)
```

```python
        f2 = f(x2)

        if (calculate):
            if f1 > f2:
                x3 = x1 + 2 * del_x
            else:
                x3 = x1 - del_x

        f3 = f(x3)

        f_min = min(f1, f2, f3)
        if f_min == f1:
            x_min = x1
        elif f_min == f2:
            x_min = x2
        else:
            x_min = x3
        num = (x2 ** 2 - x3 ** 2) * f1 + (x3 ** 2 - x1 ** 2) * f2 + (x1 ** 2 - x2 ** 2) * f3
        den = (x2 - x3) * f1 + (x3 - x1) * f2 + (x1 - x2) * f3

        if den == 0:
            x1 = x_min
            continue

        x_over = 0.5 * num / den
        f_over = f(x_over)

        if abs((f_min - f_over) / f_over) < e and abs((x_min - x_over) / x_over) < e:
            return round(x_over, 5)

        if min(x1, x3) < x_over < max(x1, x3):

            fun_x = [(f1, x1), (f2, x2), (f3, x3), (f_over, x_over)]
            minimal_f, x2 = min(fun_x, key=lambda x: x[0])

            all_x = [x[1] for x in fun_x]
            all_x.sort()
```

```

            x1 = all_x[all_x.index(x2) - 1]
            x3 = all_x[all_x.index(x2) + 1]
            calculate = False
        else:
            x1 = x_over
            calculate = True



# f(x) = (1 / 3) * pow(x, 3) - 5 * x + x * np.log(x)

# inp_x = 1
# inp_dx = 0.001
# inp_e = 0.0001

print(
    "For f(x) = (1 / 3) * pow(x, 3) - 5 * x + x * np.log(x) enter starting x, delta x, epsilon:"
)

inp_x = input()
inp_dx = input()
inp_e = input()


res_x = solution(inp_x,inp_dx,inp_e)

print("Min x: ", res_x, " and min f(x): ", round(f(res_x), 5))
```

Листинг 1: Квадратичная аппроксимация

Тестирование кода

Входные данные

```
1
0.001
```

```
0.0001
```

результат

```
Min x:  1.8411  and min f(x):  -6.00153
```

Выводы

В процессе лабораторной работы было рассмотрено задание на поиск экстремума функции $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x + x\ln x$ на интервале $[1.5; 2]$ с заданной точностью $\epsilon = 0.02$ с помощью метода квадратичной аппроксимации. В ручную были выполнены 3 итерации, в каждой из них значение $x*$ постепенно изменялось и с каждым шагом мы медленно, но уверенно приближались к минимуму, найденному программой (1.8411).