Econometria | 2023/2024

Lezione 10: Modelli per probabilità

Giuseppe Ragusa
https://gragusa.org

Roma, marzo 2023

Sommario

Variabili dipendenti binarie: qual è la differenza?

Variabile dipendente (Y) continua:

- punteggio nei test medio a livello di tutto il distretto
- tasso di mortalità stradale

Che cosa succede se Y è binaria?

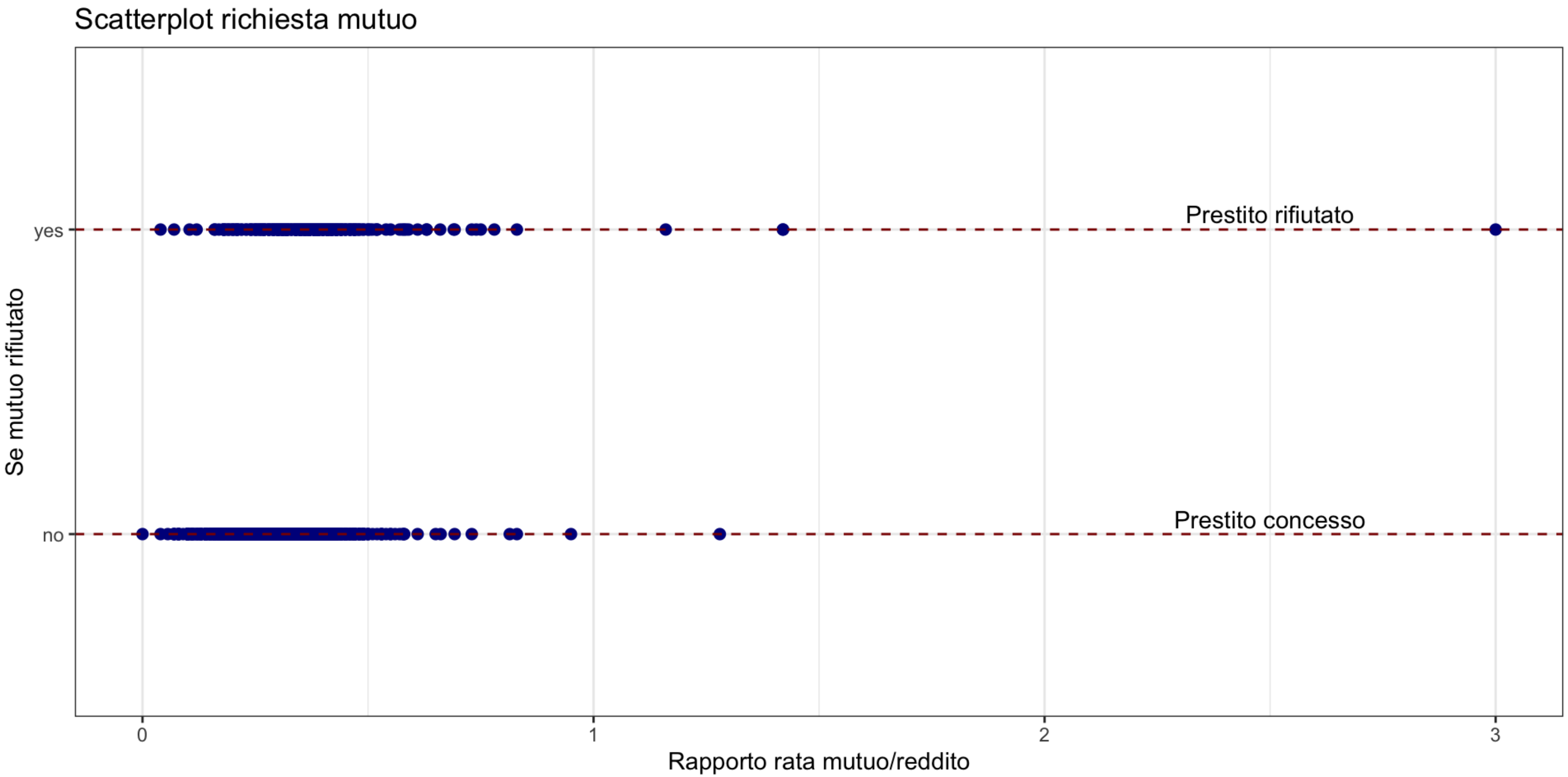
- $Y=$ frequentare università oppure no; $X=$ voti del liceo, punteggi SAT, variabili demografiche
- $Y=$ la persona fuma oppure no; $X=$ imposte sulle sigarette, reddito, variabili demografiche
- $Y=$ domanda di mutuo accettata oppure no; $X=$ etnicity, reddito, caratteristiche della casa, stato civile

Esempio: Boston Fed HMDA

- Domande individuali per mutui unifamiliari effettuate nel 1990 nell'area della città di Boston
- 2380 osservazioni, raccolte ai sensi della legge Home Mortgage Disclosure Act (HMDA)

Variabili

- Variabile dipendente:
  - il mutuo è concesso o negato?
- Variabili indipendenti:
  - reddito, ricchezza, stato occupazionale
  - altro prestito, caratteristiche della proprietà
  - etnia del richiedente



Cosa significa adattare una retta di regressione ad una variabile dipendente che può assumere solo valori zero e uno?

Modello lineare di probabilità (Paragrafo 11.1)

Consideriamo modello di regressione lineare con un singolo regressore e Y binaria:

$$ Y_i= \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i $$

Interpretazione di:

- β_1
- $\beta_0 + \beta_1 X_i$
- $\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$

Il modello lineare di probabilità (continua)

Modello lineare di probabilità: $$ Y_i= \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i $$

$$ E(Y|X)=1 \times \Pr(Y=1|X) + 0 \times \Pr(Y=0|X)= \Pr(Y=1|X)$$

Sotto l'assunzione $E(u_i|X_i)=0$:

$$ E(Y_i|X_i)=E(\beta_0 + \beta_1 X_i + u_i|X_i)=\beta_0 + \beta_1 X_i $$

$$ \implies \Pr(Y=1|X)= \beta_0 + \beta_1 X_i $$

Il modello lineare di probabilità (continua)

Il modello lineare di regressione

$$Y_i= \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i$$

è chiamato modello lineare di probabilità quando Y è binaria perchè

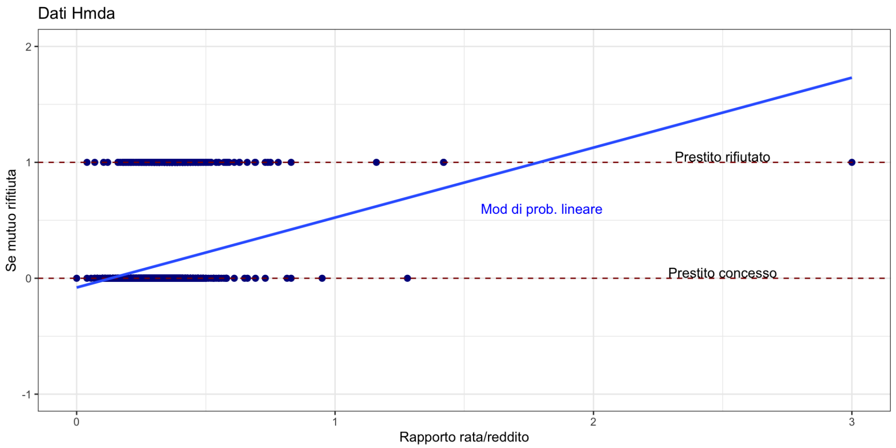
$$Pr(Y=1|X)= \beta_0 + \beta_1 X_i$$

- Implicazioni:
  - $E(Y|X=x) = Pr(Y=1|X=x)$: prob. che $Y= 1$ data X
  - $\beta_1=$ variazione della probabilità che $Y= 1$ per una variazione unitaria in X, o più generalmente $$\beta_1=\frac{Pr(Y=1|X=x+\Delta x)-Pr(Y=1|X=x)}{\Delta x}$$
  - $\hat{Y}=$ probabilità attesa stimata che $Y_i= 1$, data X

Esempio: modello lineare di probabilità, dati HMDA

```r
Hmda <- Hmda %>%
  mutate(denied = ifelse(deny=="yes", 1, 0))

ggplot(Hmda, aes(x = dir, y = denied)) +
  geom_point(size=2, col = 'darkblue') +
  theme_bw() +
  labs(x = "Rapporto rata/reddito",
       y = "Se mutuo rifitiuta",
       title = "Dati Hmda") +
  ylim(c(-1,2)) +
  geom_hline(yintercept=1, lty = 2,
             col = "darkred") +
  geom_hline(yintercept=0, lty = 2,
             col = "darkred")  +
  annotate("text", x = 2.5, y = 1.05,
           label = "Prestito rifiutato") +
  annotate("text", x = 2.5, y = 0.05,
           label = "Prestito concesso") +
  geom_smooth(method='lm',
              formula= y~x, se=FALSE) +
  annotate("text", x = 1.8, y = 0.6,
           label = "Mod di prob. lineare",
           col="blue")
```



Modello lineare di probabilità: Hmda

```r
lpm1 <- feols(denied ~ dir, data=Hmda, vcov = "hetero")
lpm1
```

```
OLS estimation, Dep. Var.: denied
Observations: 2,381
Standard-errors: Heteroskedasticity-robust
            Estimate Std. Error t value   Pr(>|t|)
(Intercept)   -0.080     0.0320   -2.50 1.2436e-02 *
dir            0.604     0.0985    6.13 1.0353e-09 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
RMSE: 0.318093   Adj. R2: 0.039332
```

- Probabilità stimata quando $dir=0.3$ (rata pari al 30% del reddito)?

$$ \Pr(deny=1|dir=0.3)= -0.08 + 0.604 \times 0.3 = 0.101 = 10.1\% $$

- Probabilità stimata quando $dir=0.4$ (rata pari al 40% del reddito)?

$$ \Pr(deny=1|dir=0.4)= -0.08 + 0.604 \times 0.4= 0.162=16.2\% $$

- L'effetto di un aumento del rapporto mutuo/reddito, dir, di 0.1 è un aumento della probabilità che il muuo venga rigettato di 0.061 (o 6.1 punti percentuali)

Modello lineare di probabilità: Hmda, ctd.

```r
lpm2 <- feols(denied ~ dir+black, data=Hmda, vcov = "hetero")
lpm2
```

```
OLS estimation, Dep. Var.: denied
Observations: 2,381
Standard-errors: Heteroskedasticity-robust
             Estimate Std. Error t value   Pr(>|t|)
(Intercept)  -0.0906     0.0286   -3.17 1.5626e-03 **
dir           0.5592     0.0887    6.31 3.3839e-10 ***
blackyes      0.1775     0.0249    7.11 1.4801e-12 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
RMSE: 0.312025   Adj. R2: 0.075244
```

- Probabilità stimata quando $dir=0.3$ (rata pari al 30% del reddito) e $black=1$

$$Pr(denied=1|dir=0.3, black=1)= -0.091 + 0.559 \times 0.3+0.177 \times 1= 0.254$$

- Probabilità stimata quando $dir=0.4$ (rata pari al 40% del reddito) e $black=1$

$$Pr(denied=1|dir=0.3, black=1)= -0.091 + 0.559 \times 0.3+0.177\times0= 0.077$$

- differenza $0.254-0.077=0.177=17.7$ punti percentuali

Modello lineare di probabilità: riepilogo

Nel modello lineare di probabilità, $\Pr(Y=1|X)$ è lineare in X

- Vantaggi:
  - semplice da stimare e interpretare
  - l'inferenza è la stessa della regressione multipla (occorrono errori standard robusti all'eteroschedasticità)
- Svantaggi:
  - Le probabilità previste possono essere <0 o >1!
  - Implicazioni del modello lineare per la probabilità che $Y=1$ poco sensate
- Alternativa: modello non lineare di probabilità: probit e logit

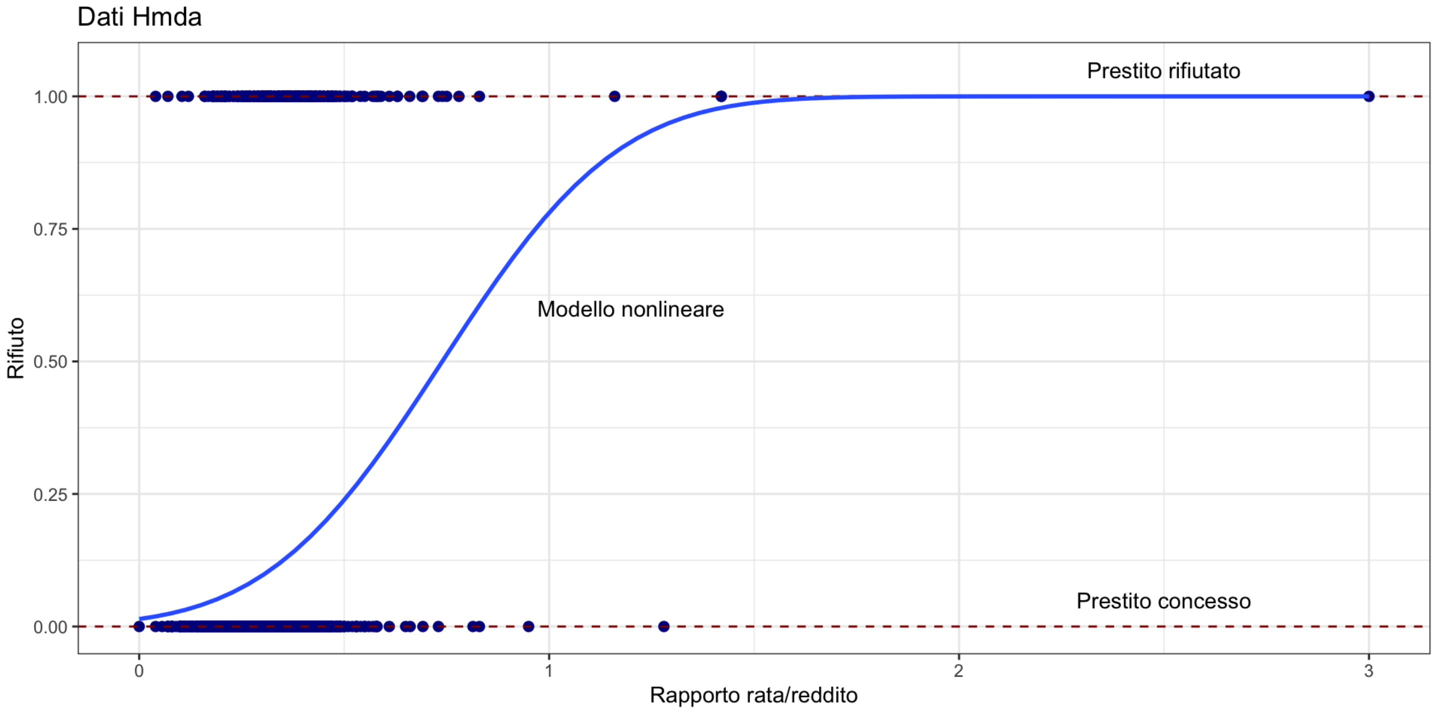
Regressioni probit e logit (Paragrafo 11.2)

Desiderata:

a. $Pr(Y= 1|X)$ crescente in X per $\beta_1>0$ e

b. $0 \leq Pr(Y= 1|X) \leq 1$ per tutte le X

Ciò richiede l'utilizzo di una forma funzionale non lineare per la probabilità



Regressione probit

- Il modello `probit` è:

  $$\Pr(Y= 1|X) = \Phi(\beta_0+\beta_1 X)$$ dove $\Phi(\cdot)$ è la funzione di ripartizione normale

Esempio:

Se $\beta_0=-2$, $\beta_1=3$, and $X=0.4$, allora:

$$\Pr(Y= 1|X=0.4) = \Phi(-2 + 3 \times 0.4) = \Phi(-0.8) = 0.212$$

Regressione probit (continua)

- La funzione di ripartizione normale ha una forma a S e, quindi,
  a. $Pr(Y= 1|X)$ crescente in X per $\beta_1>0$ e
  b. $0 \leq Pr(Y= 1|X) \leq 1$ per tutte le X
- Legame con modelli economici di scelta ottima
- Interpretazione di β_1 $$\frac{d\Pr(Y=1|X)}{dX}=\frac{d\Phi(\beta_{0}+\beta_{1}X)}{dX}=\phi(\beta_{0}+\beta_{1}X)\beta_{1}$$ β_1 determina il segno dell'effetto di una variazione di X su $\Pr(Y=1|X)$

Esempio in R: dati HMDA

```r
probit1 <- feglm(denied ~ dir, family = binomial("probit"), data=Hmda)
probit1
```

```
GLM estimation, family = binomial, Dep. Var.: denied
Observations: 2,381
Standard-errors: IID
            Estimate Std. Error z value   Pr(>|z|)
(Intercept)    -2.19      0.138  -15.93  < 2.2e-16 ***
dir             2.97      0.386    7.69 1.4442e-14 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
Log-Likelihood:  -831.9   Adj. Pseudo R2: 0.045059
           BIC: 1,679.4     Squared Cor.: 0.051522
```

$$\Pr(deny=1|dir)=\Phi(-2.19+2.97 \times dir)$$

- Coefficiente positivo: maggiore dir maggiore è la probabilità che il mutuo sia rifiutato

Esempio in R: Hmda, ctd.

```
GLM estimation, family = binomial, Dep. Var.: denied
Observations: 2,381
Standard-errors: IID
            Estimate Std. Error z value   Pr(>|z|)
(Intercept)    -2.19      0.138  -15.93  < 2.2e-16 ***
dir             2.97      0.386    7.69 1.4442e-14 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
Log-Likelihood:  -831.9   Adj. Pseudo R2: 0.045059
           BIC: 1,679.4     Squared Cor.: 0.051522
```

- Probabilità prevista quando \(dir=0.3\):

\[\Pr(deny=1|dir=0.3) = \Phi(-2.19+2.97 \times 0.3) =\Phi(-1.30)=0.097 \]

- Probabilità stimate quando \(dir=0.4\): \[\Pr(deny=1|dir=0.4)=\Phi(-2.19+2.97 \times 0.4) = \Phi(-1.00)=0.159 \]

La probabilità prevista di rifiuto passa da 0.097 a 0.159

Regressione probit con regressori multipli

$$ Pr(Y= 1|X_1,X_2) = \Phi(\beta_0+\beta_1 X_1+\beta_2 X_2) $$

- $\Phi(\cdot)$ è la funzione di ripartizione normale
- Interpretazione coefficienti: $$ \frac{\partial\Pr(Y=1|X_1, X_2)}{\partial X_1}=\frac{d\Phi(\beta_{0}+\beta_{1}X_1+\beta_2X_2)}{dX}=\phi(\beta_{0}+\beta_{1}X_1+\beta_2X_2)\beta_{1} $$ β_1 cattura effetto ceteris paribus sul segno

Esempio in R: Dati HMDA

```
GLM estimation, family = binomial, Dep. Var.: denied
Observations: 2,381
Standard-errors: IID
             Estimate Std. Error z value   Pr(>|z|)
(Intercept)   -2.259     0.1368   -16.5  < 2.2e-16 ***
dir            2.742     0.3807     7.2 5.8682e-13 ***
blackyes       0.708     0.0834     8.5  < 2.2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
Log-Likelihood:  -797.2   Adj. Pseudo R2: 0.083677
           BIC: 1,617.8     Squared Cor.: 0.087201
```

- Il coefficiente di $black$ è statisticamente significativo?

$$\begin{aligned} \Pr(deny=1|dir=0.3, black=1)&=\Phi(-2.26+2.74 \times 0.3 +0.71 \times 1) \\ &=\Phi(-0.728)=0.233 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr(deny=1|dir=0.3, black=0)&=\Phi(-2.26+2.74 \times 0.3 +0.71 \times 0)\\ &=\Phi(-1.438)=0.075 \end{aligned}$$

- Differenza nelle probabilità di rifiuto= 0.158 (15.8 punti percentuali)
- Ancora molto spazio per distorsione da variabili omesse!

Esempio in R (continua): probabilità probit previste

```r
## Differenza probability black/nonblack per dir=0.3
predict(probit2, newdata=data.frame(dir=0.3, black="yes"), type = "response") -
  predict(probit2, newdata=data.frame(dir=0.3, black="no"), type = "response")
```

```
[1] 0.158
```

Effetti marginali

Valori diversi di dir danno valori diversi della variazione di $\Pr(Y=1|X)$…

Two approaches:

- Calcolare l'effetto per un valore rappresentativo di dir, e.g., $\bar{dir}$

```
## Differenza probability black/nonblack per dir=media(dir)
dirbar <- mean(Hmda$dir)
predict(probit2, newdata=data.frame(dir=dirbar, black="yes"), type = "response") -
  predict(probit2, newdata=data.frame(dir=dirbar, black="no"), type = "response")
```

```
[1] 0.172
```

- Calcolare gli effetto per i valori dir_i, $i=1,\ldots,n$ e calcolare la media

```
## Differenza probability black/nonblack per dir=dir_i
effetti <- predict(probit2, newdata=data.frame(dir=Hmda$dir, black="yes"), type = "response") -
  predict(probit2, newdata=data.frame(dir=Hmda$dir, black="no"), type = "response")
mean(effetti)
```

```
[1] 0.17
```

Effetti marginali

```r
library(marginaleffects)
## Valuta effetti alla media (avg) per e calcola standard error
avg_slopes(probit2, newdata = "mean")
```

```
  Term Contrast Estimate Std. Error    z Pr(>|z|)    S 2.5 % 97.5 %
 black yes - no    0.172     0.0247 6.95   <0.001 38.0 0.123  0.220
 dir   dY/dX       0.439     0.0625 7.02   <0.001 38.7 0.316  0.561

Columns: term, contrast, estimate, std.error, statistic, p.value, s.value, conf.low, conf.high
Type:  response
```

```r
## Valuta la media degli effetti (AME) e calcola standard error
avg_slopes(probit2)
```

```
  Term Contrast Estimate Std. Error    z Pr(>|z|)    S 2.5 % 97.5 %
 black yes - no    0.170     0.0243 6.99   <0.001 38.5 0.122  0.217
 dir   dY/dX       0.501     0.0690 7.26   <0.001 41.3 0.366  0.637

Columns: term, contrast, estimate, std.error, statistic, p.value, s.value, conf.low, conf.high
Type:  response
```

Regressione logit

- Modella la probabilità di $Y=1$, data X, come funzione di ripartizione logistica standard, valutata in $z=\beta_0+\beta_1 X$:

$$Pr(Y=1|X)=F(\beta_0+\beta_1 X)$$ dove F è la funzione di ripartizione logistica:

$$F(\beta_0+\beta_1 X)=\frac{1}{1+e^{-(\beta_0+\beta_1 X)}}$$

Poiché le regressioni logit e probit utilizzano funzioni di probabilità diverse, i coefficienti (β) sono diversi nelle regressioni logit e probit.

Regressione logit (continua)

$$ Pr(Y=1|X)=F(\beta_0+\beta_1 X) $$

dove:

$$ F(\beta_0+\beta_1 X)=\frac{1}{1+e^{-(\beta_0+\beta_1 X)}} $$

Esempio: $\beta_0=3, \; \beta_1=2, \; X=0.4$

- quindi $\beta_0+\beta_1 X=-3+2 \times 0.4=-2.2$
- perciò $Pr(Y=1|X=0.4)=\frac{1}{1+e^{-(-2.2)}}=0.0998$

A che scopo utilizzare logit se disponiamo di probit?

- Il motivo principale è storico: dal punto di vista del calcolo, logit è più veloce
- `logit` e `probit` danno risultati spesso simili

Esempio in R: Dati HMDA

```r
logit2 <- feglm(denied ~ dir+black, family = binomial("logit"), data=Hmda)
logit2
```

```
GLM estimation, family = binomial, Dep. Var.: denied
Observations: 2,381
Standard-errors: IID
            Estimate Std. Error z value   Pr(>|z|)
(Intercept)    -4.13      0.269  -15.37  < 2.2e-16 ***
dir             5.37      0.729    7.37 1.6925e-13 ***
blackyes        1.27      0.146    8.71  < 2.2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
Log-Likelihood:  -795.8   Adj. Pseudo R2: 0.085331
           BIC: 1,614.9     Squared Cor.: 0.088796
```

```r
predict(logit2, newdata= data.frame(dir=0.3, black="no"), type = "response")
```

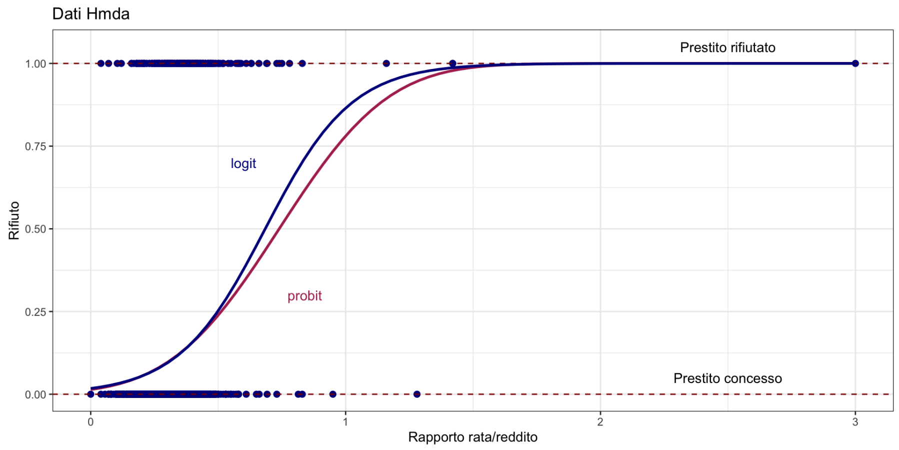
```
[1] 0.0748
```

```r
predict(probit2, newdata= data.frame(dir=0.3, black="no"), type = "response")
```

```
[1] 0.0754
```

Confronto grafico probit e logit

```
ggplot(Hmda, aes(x = dir, y = denied)) +
  geom_point(size=2, col = 'darkblue') +
  theme_bw() +
  labs(x = "Rapporto rata/reddito") +
  labs(y = "Rifiuto", title = "Dati Hmda") +
  geom_hline(yintercept=0, lty = 2,
             col = "darkred") +
  geom_hline(yintercept=1, lty = 2,
             col = "darkred") +
  annotate("text", x = 2.5, y = 1.05,
           label = "Prestito rifiutato") +
  annotate("text", x = 2.5, y = 0.05,
           label = "Prestito concesso") +
  stat_smooth(method="glm", se=FALSE,
              col = "maroon",
              method.args = list(family=
               binomial(link = "probit"))) +
  stat_smooth(method="glm", se=FALSE,
              col = "darkblue",
              method.args = list(family=
               binomial(link = "logit"))) +
  annotate("text", x = .6, y = 0.7,
           color = "darkblue",
           label = "logit") +
  annotate("text", x = 0.84, y = 0.3,
           color = "maroon",
           label = "probit")
```



Stima e inferenza nei modelli logit e probit (Paragrafo 11.3)

Ci concentriamo sul modello probit:

$$ Pr(Y=1|X)=\Phi(\beta_0+\beta_1X) $$

- Stima e inferenza
  - Come possiamo stimare β_0 e β_1?
  - Qual è la distribuzione campionaria degli stimatori?
  - Perché possiamo utilizzare i metodi usuali di inferenza?
- Anzitutto motiviamo tramite i minimi quadrati non lineari
- Quindi discutiamo della stima di massima verosimiglianza (ciò che effettivamente è fatto nella pratica)

Stima probit mediante i minimi quadrati non lineari

Ricordiamo OLS: $\min_{\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1} \sum_{i=1}^n \left[Y_i-(\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1) \right]^2$

- Il risultato sono gli stimatori OLS $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$

I minimi quadrati non lineari estendono l'idea di OLS ai modelli nei quali i parametri entrano in modo non lineare:

$$\min_{\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1} \sum_{i=1}^n \left[Y_i-\Phi(\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1) \right]^2$$

- Come risolvere questo problema di minimizzazione?
  - Il calcolo non offre una soluzione esplicita.
  - Risolto numericamente mediante il computer (algoritmi di minimizzazione speciali)
  - In pratica, i minimi quadrati non lineari non sono utilizzati. Uno stimatore più efficiente (varianza più piccola) è

Stimatore di massima verosimiglianza

La funzione di verosimiglianza è la distribuzione di $Y_1,\dots,Y_n$ condizionata a $X_1,\dots,X_n$ trattata come funzione dei parametri ignoti β_0,β_1.

- Lo stimatore di massima verosimiglianza (MLE) è il valore di (β_0,β_1) che massimizza la funzione di verosimiglianza.
- MLE sceglie i parametri per massimizzare la probabilità di estrarre i dati effettivamente osservati.
- MLE è il valore di (β_0,β_1, cioè i parametri che “più verosimilmente” hanno generato i dati.
- In grandi campioni, MLE è:
  - consistente
  - normalmente distribuito
  - efficiente (ha la più piccola varianza di tutti gli stimatori)

Caso speciale: MLE probit senza alcuna X

Distribuzione di Bernoulli:

$$ Y = \left\{\begin{array}{rl}1 & \text{con probabilità } p, \\0 & \text{con probabilità } (1-p).\end{array} \right. $$

Dati: $Y_1,\dots,Y_n$ i.i.d.

La derivazione della verosimiglianza inizia con la distribuzione di Y_1:

$$ Pr(Y_1=y_1)=p^{y_1} (1-p)^{1-y_1} $$

Distribuzione congiunta di (Y_1,Y_2): poiché Y_1 e Y_2 sono indipendenti:

$$\begin{align*} Pr(Y_1=y_1,Y_2=y_2) &= Pr(Y_1=y_1) \times Pr(Y_2=y_2)=\\ &= [p^{y_1} (1-p)^{1-y_1}] \times [p^{y_2} (1-p)^{1-y_2}]=\\ &= p^{(y_1+y_2)} (1-p)^{2-(y_1+y_2)} \end{align*}$$

Distribuzione congiunta di $(Y_1,\dots,Y_n)$: poiché $Y_1,\dots,Y_n$ sono indipendenti:

$$\begin{eqnarray} Pr(Y_1=y_1,Y_2=y_2,\dots,Y_n=y_n)&=&Pr(Y_1=y_1) \times Pr(Y_2=y_2) \times \\ && \dots \times Pr(Y_n=y_n)\\ &=& [p^{y_1} (1-p)^{1-y_1}] \times [p^{y_2} (1-p)^{1-y_2}] \times\\ && \dots \times[p^{y_n} (1-p)^{1-y_n}]\\ &=& p^{\sum_{i=1}^n y_i} (1-p)^{\left(n-\sum_{i=1}^n y_i \right)} \end{eqnarray}$$

La verosimiglianza è la distribuzione congiunta, trattata come funzione dei parametri non noti, che qui è p:

$$f(p; Y_1,\dots,Y_n)= p^{\sum_{i=1}^n y_i} (1-p)^{\left(n-\sum_{i=1}^n y_i \right)}$$

MLE massimizza la verosimiglianza. È più facile lavorare con il logaritmo della verosimiglianza, $\ln [f(p; Y_1,\dots,Y_n)]$:

$$\ln [f(p; Y_1,\dots,Y_n)]=\left(\sum_{i=1}^n y_i \right) \ln(p) + \left(n-\sum_{i=1}^n y_i \right) \ln(1-p)$$

Massimizzare la verosimiglianza impostando la derivata =0:

$$\frac{d \ln [f(p; Y_1,\dots,Y_n)]}{dp}= \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)\frac{1}{p}+ \left(n-\sum_{i=1}^n y_i \right) \left(\frac{-1}{1-p}\right)=0$$

Risolvendo per p si ottiene lo stimatore di massima verosimiglianza.

Ovvero, $\hat{p}^{MLE}$ soddisfa:

$$\left(\sum_{i=1}^n y_i \right)\frac{1}{\hat{p}^{MLE}}+ \left(n-\sum_{i=1}^n y_i \right) \left(\frac{-1}{1-\hat{p}^{MLE}}\right)=0$$ oppure:

$$\left(\sum_{i=1}^n y_i \right)\frac{1}{\hat{p}^{MLE}}=\left(n-\sum_{i=1}^n y_i \right) \left(\frac{1}{1-\hat{p}^{MLE}}\right)$$ oppure:

$$\frac{\bar{Y}}{1-\bar{Y}}= \frac{\hat{p}^{MLE}}{1-\hat{p}^{MLE}}$$ quindi:

$$\hat{p}^{MLE}=\bar{Y}=\text{frazione di 1}$$

MLE nel caso “No-X”, ctd,

$$\hat{p}^{MLE}=\bar{Y}=\text{frazione di 1}$$

- Per Y_i i.i.d. di Bernoulli, MLE è lo stimatore “naturale” di p, la frazione di 1, che è $\bar{Y}$
- Conosciamo già i fondamenti dell’inferenza:
  - Per n grande, la distribuzione campionaria di $\hat{p}^{MLE}=\bar{Y}$ è normale
  - Perciò l’inferenza è “come di consueto”: verifica di ipotesi tramite statistica t, intervallo di confidenza come $\pm 1.96SE$

MLE nel caso “No-X” (distribuzione di Bernoulli), continua:

- La teoria della stima di massima verosimiglianza dice che è lo stimatore più efficiente di p - di tutti i possibili stimatori! - almeno per n grande (molto più forte del teorema di Gauss-Markov).
- Per questo motivo MLE è il principale stimatore utilizzato per i modelli nei quali i parametri (coefficienti) entrano in modo non lineare.

Siamo ora pronti a passarea MLE dei coefficienti probit, nel quale la probabilità è condizionata a X.

La verosimiglianza probit con una X

La derivazione inizia con la distribuzione di Y_1, data X_1 è:

$$\begin{aligned} Pr(Y_1=1|X_1)=\Phi (\beta_0+\beta_1 X_1)\\ Pr(Y_1=0|X_1)=1-\Phi (\beta_0+\beta_1 X_1) \end{aligned}$$

quindi:

$$Pr(Y_1=y_1|X_1)= \Phi (\beta_0+\beta_1 X_1)^{y_1} \left[1-\Phi (\beta_0+\beta_1 X_1)\right]^{1-y_1}$$

La funzione di verosimiglianza probit è la distribuzione congiunta di $Y_1,\dots,Y_n$ dati $X_1,\dots,X_n$, come funzione di β_0, β_1

$$\begin{aligned} f(\beta_0,\beta_1; Y_1,\dots,Y_n|X_1,\dots,X_n)&=\Phi (\beta_0+\beta_1 X_1)^{y_1} \left[1-\Phi (\beta_0+\beta_1 X_1)\right]^{1-y_1} \times\\ &\dots \times \Phi (\beta_0+\beta_1 X_n)^{y_n} \left[1-\Phi (\beta_0+\beta_1 X_n)\right]^{1-y_n} \end{aligned}$$

La funzione di verosimiglianza probit

$$\begin{eqnarray} f(\beta_0,\beta_1; Y_1,\dots,Y_n|X_1,\dots,X_n)&=&\Phi (\beta_0+\beta_1 X_1)^{y_1} \left[1-\Phi (\beta_0+\beta_1 X_1)\right]^{1-y_1} \times\\ &&\dots \times \Phi (\beta_0+\beta_1 X_n)^{y_n} \left[1-\Phi (\beta_0+\beta_1 X_n)\right]^{1-y_n} \end{eqnarray}$$

- $\hat{\beta}_0^{MLE}, \hat{\beta}_1^{MLE}$ massimizzano questa funzione di verosimiglianza
- Ma non possiamo risolvere esplicitamente per il massimo! Così MLE deve essere massimizzato mediante metodi numerici
- Come nel caso di nessuna X, in grandi campioni:
  - $\hat{\beta}_0^{MLE}, \hat{\beta}_1^{MLE}$ sono consistenti e normalmente distribuiti e asintoticamente efficienti
- Gli errori standard di $\hat{\beta}_0^{MLE}, \hat{\beta}_1^{MLE}$ vengono calcolati automaticamente
- La verifica degli intervalli di confidenza procede nel modo consueto
- Tutto ciò si estende a X multiple, per i dettagli si veda l'Appendice 11.2

La verosimiglianza logit con una X

- L'unica differenza tra probit e logit è a forma condizionale utilizzata per la probabilità: Φ è sostituita dalla funzione di ripartizione logistica
- Altrimenti, la verosimiglianza è simile; per i dettagli si veda l'Appendice 11.2
- Come nel caso probit:
  - $\hat{\beta}_0^{MLE}, \hat{\beta}_1^{MLE}$ sono consistenti
  - $\hat{\beta}_0^{MLE}, \hat{\beta}_1^{MLE}$ sono normalmente distribuiti
  - I loro errori standard possono essere calcolati
  - La verifica degli intervalli di confidenza procede nel modo consueto

Conclusione

- Se Y_i è binaria, allora $E(Y|X)=Pr(Y=1|X)$
- Tre modelli:
  - modelli lineare di probabilità (regressione lineare multipla)
  - probit (funzione di ripartizione normale standard)
  - logit (funzione di ripartizione logistica standard)
- LPM, probit, logit tutti producono probabilità predette
- L'effetto di ΔX è la variazione nella probabilità condizionata che $Y=1$. Per logit e probit, ciò dipende dalla X iniziale
- Probit e logit vengono stimati tramite la massima verosimiglianza
  - I coefficienti hanno distribuzione normale per n grande
  - La verifica di ipotesi e gli intervalli di confidenza per ngrande sono come di consueto