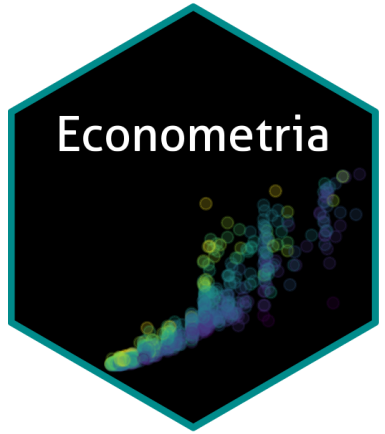
Econometria | 2023/2024



Lezione 14: Variabili strumentali

Sommario :::{.border} 1. Regressione IV: cosa e perché; minimi quadrati in due stadi

2. Il modello generale di regressione IV
3. Verifica della validità degli strumenti
    a. Strumenti deboli e forti
    b. Esogeneità degli strumenti
4. Applicazione: domanda di sigarette
5. Esempi: dove troviamo gli strumenti?

:::

Giuseppe Ragusa
Dipartimento di Economia e Diritto
Sapienza Università di Roma
https://gragusa.org

Roma, maggio 2024

Regressione IV: perché?

Tre importanti minacce alla validità interna sono:

1. Distorsione da variabili omesse per una variabile correlata con X ma inosservata (perciò non può essere inclusa nella regressione) e per cui vi sono variabili di controllo inadeguate;
2. Distorsione da causalità simultanea (X causa Y, Y causa X);
3. Distorsione da errori nelle variabili (X è misurata con errore)

Tutti e tre i problemi comportano $E(u|X) \neq 0$.

- La regressione con variabili strumentali può eliminare la distorsione quando $E(u|X) \neq 0$ – usando una variabile strumentale (IV), Z.

Lo stimatore IV con un singolo regressore e un singolo strumento (Paragrafo 12.1)

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i$$

- La regressione IV divide X in due parti:
  - una che potrebbe essere correlata con u, e
  - una che non lo è.

Isolando la parte che non è correlata con u, è possibile stimare β_1.

- Per fare questo si utilizza una variabile strumentale, Z_i, che è correlata con X_i ma incorrelata con u_i

Terminologia: endogeneità ed esogeneità

- Una variabile endogena è una variabile correlata con u.
- Una variabile esogena è una variabile incorrelata con u.

Nella regressione IV ci concentriamo sul caso in cui X è endogena ed esiste uno strumento, Z, esogeno.

Digressione sulla terminologia: "endogeno" significa letteralmente "determinato all'interno del sistema". Se X è congiuntamente determinata con Y, allora una regressione di Y su X è soggetta a distorsione da causalità simultanea. Ma questa definizione di endogeneità è troppo stretta perché sia possibile usare la regressione IV per risolvere i problemi di distorsione da variabili omesse e da errori nelle variabili, quindi usiamo la definizione più ampia fornita sopra.

Due condizioni per avere uno strumento valido

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i$$

Perché una variabile strumentale (uno "strumento") Z sia valida, deve soddisfare due condizioni:

1. Rilevanza: $cor(Z_i, X_i) \neq 0$
2. Esogeneità: $cor(Z_i, u_i) = 0$

Supponiamo per ora di avere un tale Z_i (vedremo più avanti come trovare variabili strumentali); come possiamo usarlo per stimare β_1?

Lo stimatore IV con una X e una Z

Spiegazione 1: minimi quadrati in due stadi (TSLS)

Ci sono due stadi - due regressioni:

1. Si isola la parte di X che non è correlata con u mediante la regressione di X su Z usando gli OLS:

$$X_i = \pi_0 + \pi_1 Z_i + \nu_i \quad (1)$$

- Poiché Z_i non è correlato con u_i, $\pi_0 + \pi_1 Z_i$ non è correlato con u_i. Non conosciamo π_0 o π_1 ma li abbiamo stimati, perciò…
- Si calcolano i valori predetti di X_i, $\hat{X}_i$

$$\hat{X}_i = \hat{\pi}_0 + \hat{\pi}_1 Z_i \quad i = 1, \ldots, n$$

Minimi quadrati in due stadi (continua)

2. Si sostituisce X_i con $\hat{X}_i$ nella regressione di interesse e si esegue la regressione di Y su usando gli OLS:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \hat{X}_i + u_i$$

- Poiché $\hat{X}_i$ è incorrelato con u_i, la prima assunzione dei minimi quadrati vale per la regressione (2). (Ciò richiede che n sia grande in modo che π_0 e π_1 siano stimati con precisione)
- Quindi, in grandi campioni, β_1 può essere stimato con gli OLS usando la regressione (2)
- Lo stimatore risultante è detto stimatore dei minimi quadrati in due stadi (TSLS), $\hat{\beta}_1^{TSLS}$

Minimi quadrati in due stadi: riepilogo

Supponiamo che Z_i, soddisfi le due condizioni per uno strumento valido:

1. Rilevanza: $cor(Z_i, X_i) \neq 0$
2. Esogeneità: $cor(Z_i, u_i) = 0$

Minimi quadrati in due stadi:

Stadio 1: Regressione di X_i su Z_i (inclusa intercetta), ottenendo i valori predetti $\hat{X}_i$

Stadio 2: Regressione di Y_i su (inclusa intercetta); il coefficiente di $\hat{X}_i$ è lo stimatore TSLS, $\hat{\beta}_1^{TSLS}$.

$\hat{\beta}_1^{TSLS}$ è uno stimatore consistente di β_1.

Lo stimatore IV, una X e una Z (continua)

Spiegazione 2: derivazione algebrica diretta

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i$$

Allora:

$$\begin{aligned} cov(Y_i, Z_i) &= cov(\beta_0 + \beta_1 X_i + u_i, Z_i) = \\ &= \underbrace{cov(\beta_0, Z_i)}_{0} + cov(\beta_1 X_i, Z_i) + \underbrace{cov(u_i, Z_i)}_{0} = \\ &= cov(\beta_1 X_i, Z_i) = \\ &= \beta_1 cov(X_i, Z_i) \end{aligned}$$

dove $cov(u_i, Z_i) = 0$ per l'esogeneità dello strumento; quindi:

$$\beta_1 = \frac{cov(Y_i, Z_i)}{cov(X_i, Z_i)}$$

Lo stimatore IV, una X e una Z (continua)

$$\beta_1 = \frac{cov(Y_i, Z_i)}{cov(X_i, Z_i)}$$

Lo stimatore IV sostituisce queste covarianze della popolazione con covarianze campionarie:

$$\hat{\beta}_1^{TSLS} = \frac{s_{YZ}}{s_{XZ}}$$

s_{YZ} e s_{XZ} sono covarianze campionarie. Questo è lo stimatore TSLS - con una derivazione diversa!

Lo stimatore IV, una X e una Z (continua)

Spiegazione 3: derivazione dalla “forma ridotta”

$$
\begin{aligned}
Y_i &= \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i \\
X_i &= \pi_0 + \pi_1 Z_i + \nu_i
\end{aligned}
$$

Sostituiamo X nell’equazione di Y:

$$
\begin{aligned}
Y_i &= \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i = \\
&= \beta_0 + \beta_1 \left[\pi_0 + \pi_1 Z_i + \nu_i\right] + u_i = \\
&= \underbrace{\left[\beta_0 + \beta_1 \pi_0\right]}_{\gamma_0} + \underbrace{\left(\beta_1 \pi_1\right)}_{\gamma_1} Z_i + \underbrace{\left[\beta_1 \nu_i + u_i\right]}_{\omega_i} = \\
&= \gamma_0 + \gamma_1 Z_i + \omega_i
\end{aligned}
$$

- Visto che $\beta_1 \pi_1 = \gamma_1, \beta = \gamma_1 / \pi_1$
- Possiamo stimare π_1 ($\hat{\pi_1}$) e γ_1 ($\hat{\gamma}_1$) con OLS, uno stimatore di β_1 è $\hat{\beta}_1 = \hat{\gamma}_1 / \hat{\pi}_1$

Effetto dello studio sui voti

Stinebrickner, Ralph and Stinebrickner, Todd R. (2008) "The Causal Effect of Studying on Academic Performance," The B.E. Journal of Economic Analysis & Policy: Vol. 8

$$X_i = \pi_0 + \pi_1 Z_i + \nu_i$$
$$Y_i = \gamma_0 + \gamma_1 Z_i + \omega_i$$

$$Y = \text{media voti (scala 4 punti)}$$
$$X = \text{tempo di studio (ore al giorno)}$$
$$Z = 1 \text{ se il compagno ha portato un videogioco, } = 0 \text{ altrimenti}$$

- $n = 210$ studenti del primo anno al Berea College (Kentucky) nel 2001
- Y = media voti del primo semestre
- X = media ore di studi al giorno (sondaggio)
- I compagni di stanza sono stati assegnati a caso
- $Z = 1$ se il compagno di stanza ha portato un videogioco, $= 0$ altrimenti

Effetto dello studio sui voti

$$
\begin{aligned}
X_i &= \pi_0 + \pi_1 Z_i + \nu_i \\
Y_i &= \gamma_0 + \gamma_1 Z_i + \omega_i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y &= \text{media voti (scala 4 punti)} \\
X &= \text{tempo di studio (ore al giorno)} \\
Z &= 1 \text{ se il compagno ha portato un videogioco, } = 0 \text{ altrimenti}
\end{aligned}
$$

Pensate che Z_i (indica se un compagno ha portato un videogioco) sia uno strumento valido?

1. È rilevante (correlato con X)?
2. È esogeno (incorrelato con u)?

Effetto dello studio sui voti (continua)

$$X_i = \pi_0 + \pi_1 Z_i + \nu_i$$
$$Y_i = \gamma_0 + \gamma_1 Z_i + \omega_i$$

$$Y = \text{media voti (scala 4 punti)}$$
$$X = \text{tempo di studio (ore al giorno)}$$
$$Z = 1 \text{ se il compagno ha portato un videogioco, } = 0 \text{ altrimenti}$$

Risultati di Stinebrinckner e Stinebrinckneri:

$$\hat{\pi}_1 = -0.668$$
$$\hat{\gamma}_1 = -0.241$$
$$\hat{\beta}_1^{IV} = \frac{\hat{\gamma}_1}{\hat{\pi}_1} = \frac{-0.241}{-0.668} = 0.360$$

- Quali sono le unità? Queste stime hanno senso nel mondo reale?

Consistenza dello stimatore TSLS

$$\hat{\beta}_1^{TSLS} = \frac{s_{YZ}}{s_{XZ}}$$

Le covarianze campionarie sono consistenti:

$$s_{YZ} \xrightarrow{p} cov(Y, Z) \text{ e } s_{XZ} \xrightarrow{p} cov(X, Z)$$

$$\hat{\beta}_1^{TSLS} = \frac{s_{YZ}}{s_{XZ}} \xrightarrow{p} \frac{cov(Y, Z)}{cov(X, Z)} = \beta_1$$

- La condizione di rilevanza dello strumento, $cov(X, Z) \neq 0$, assicura che non stiamo dividendo per zero.

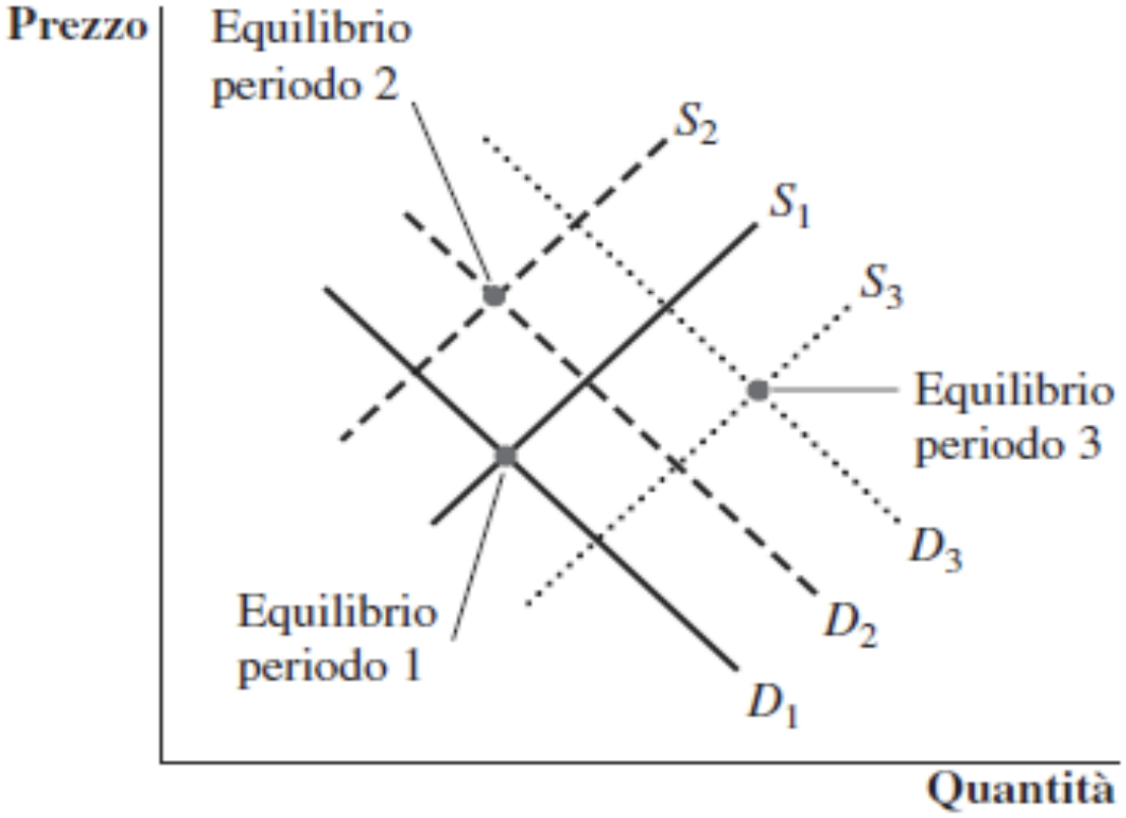
Esempio 2: offerta e domanda di burro

La regressione IV è stata sviluppata in origine per stimare l'elasticità della domanda per beni agricoli, per esempio il burro:

$$\ln(Q_i^{butter}) = \beta_0 + \beta_1 \ln(P_i^{butter}) + u_i$$

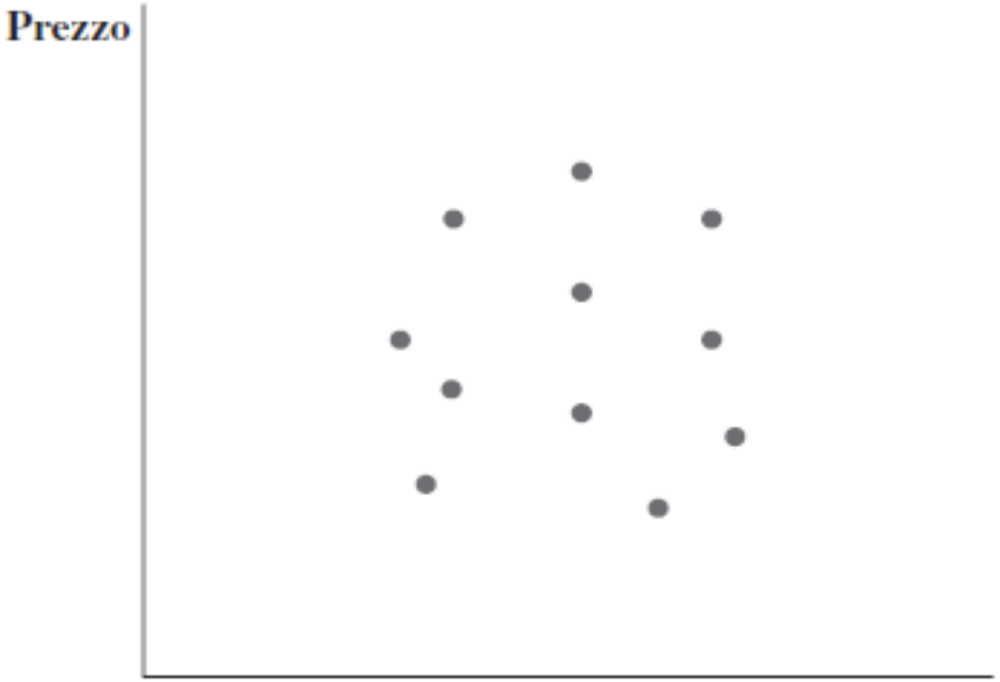
- $\beta_1 =$ elasticità del burro = variazione percentuale in quantità per una variazione dell'1% in prezzo (si ricordi la discussione sulla specifica log-log)
- Dati: osservazioni su prezzo e quantità di burro per diversi anni
- La regressione OLS di $\ln(P_i^{butter})$ su $\ln(Q_i^{butter})$ soffre di distorsione da causalità simultanea (perché?)

La distorsione da causalità simultanea nella regressione OLS di $\ln(Q_i^{butter})$ su $\ln(P_i^{butter})$ nasce perché prezzo e quantità sono determinati dall'interazione di domanda e offerta:



(a) Domanda e offerta in tre periodi

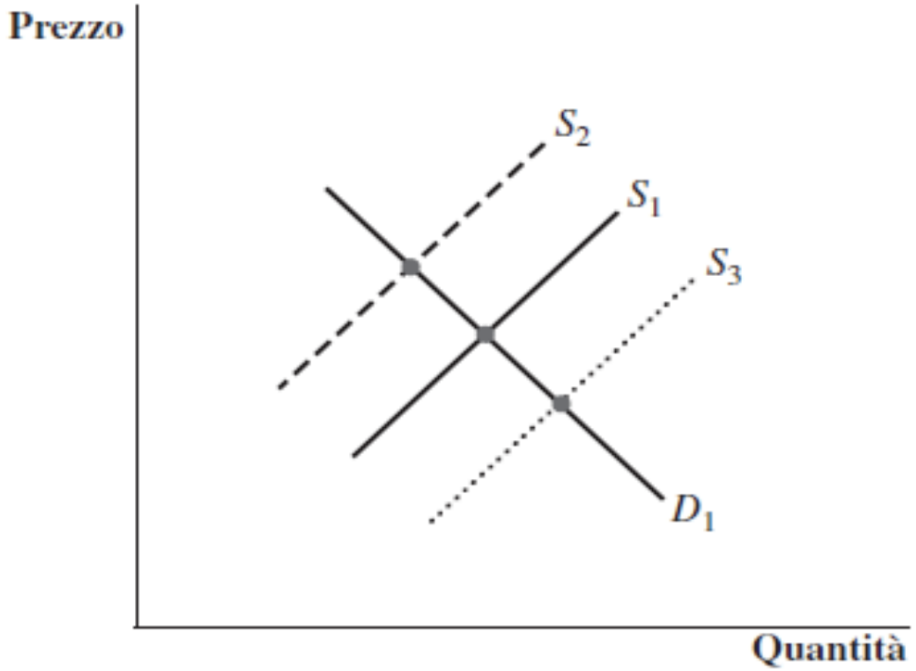
Questa interazione di domanda e offerta produce dati come…



(b) Prezzo e quantità di equilibrio per 11 periodi

Una regressione con questi dati produrrebbe la curva di domanda?

E se si spostasse solo l'offerta?



(c) Prezzo e quantità di equilibrio quando solo la curva di offerta si sposta

- TSLS stima la curva di domanda isolando gli spostamenti di prezzo e quantità conseguenti a spostamenti dell'offerta
- Z è una variabile che sposta l'offerta ma non la domanda

TSLS nell'esempio di domanda e offerta:

$$\ln(Q_i^{butter}) = \beta_0 + \beta_1 \ln(P_i^{butter}) + u_i$$

Sia $Z = pioggia$ nelle aree di produzione lattiera. Z è uno strumento valido?

1. Rilevante? $cor(rain_i, \ln(P_i^{butter})) \neq 0$?

   Plausibilmente: pioggia insufficiente significa meno pascolo quindi meno burro e quindi prezzi più alti

2. Esogeno? $cor(rain_i, u_i) = 0$?

   Plausibilmente: la pioggia nelle aree di produzione lattiera non dovrebbe influenzare la domanda di burro

TSLS nell'esempio di domanda e offerta (continua)

$$\ln(Q_i^{butter}) = \beta_0 + \beta_1 \ln(P_i^{butter}) + u_i$$

$Z_i = rain_i =$ pioggia nelle aree di produzione lattiera

Stadio 1: regressione di $\ln(P_i^{butter})$ su $rain_i \Rightarrow \ln(\widehat{P_i^{butter}})$

$\ln(\widehat{P_i^{butter}})$ isola le variazioni nel log del prezzo conseguenti all'offerta (o almeno a parte di essa)

Stadio 2: regressione di $\ln(Q_i^{butter})$ su $\ln(\widehat{P_i^{butter}})$

Controparte dell'uso degli spostamenti della curva di offerta per tracciare la curva di domanda.

Esempio 3: punteggi nei test e dimensioni delle classi

Le regressioni per punteggi nei test/dimensioni delle classi in California potrebbero avere distorsione da variabili omesse (per esempio per interessamento dei genitori).

- In linea di principio questa distorsione può essere eliminata dalla regressione IV (TSLS).
- La regressione IV richiede uno strumento valido, cioè che sia:

1. rilevante: $cor(Z_i, STR_i) \neq 0$
2. esogeno: $cor(Z_i, u_i) = 0$

Esempio 3: punteggi nei test e dimensioni delle classi (continua)

Ecco uno strumento ipotetico: - alcuni distretti, colpiti casualmente da un terremoto, “raddoppiano” le classi:

$$Z_i = Quake_i = 1 \text{ se colpito da terremoto}, \quad = 0 \text{ altrimenti}$$

- Valgono le due condizioni per la validità dello strumento?
- Il terremoto crea una situazione come se i distretti rientrassero in un esperimento con assegnazione casuale. Quindi, la variazione in STR conseguente al terremoto è esogena.
- Il primo stadio del TSLS prevede la regressione di STR su $Quake$, isolando così la parte esogena di STR (la parte “come se” fosse assegnata casualmente)

Inferenza con TSLS

- In grandi campioni, la distribuzione campionaria dello stimatore TSLS è normale
- L'inferenza (verifiche di ipotesi, intervalli di confidenza) procede nel modo consueto, ovvero $\pm 1.96SE$
- Il concetto alla base della distribuzione normale in grandi campioni dello stimatore TSLS è che - come tutti gli altri stimatori che abbiamo considerato – comporta variabili casuali i.i.d. con media nulla, a cui possiamo applicare il TLC.

Dimostrazione (si veda l'Appendice 12.3 per i dettagli)…

$$\beta_1^{TSLS} = \frac{s_{YZ}}{s_{XZ}} = \frac{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})(Z_i - \bar{Z})}{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Z_i - \bar{Z})} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i(Z_i - \bar{Z})}{\sum_{i=1}^{n} X_i(Z_i - \bar{Z})}$$

Sostituendo $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i$ e semplificando:

$$\beta_1^{TSLS} = \frac{\beta_1 \sum_{i=1}^{n} X_i(Z_i - \bar{Z}) + \sum_{i=1}^{n} u_i(Z_i - \bar{Z})}{\sum_{i=1}^{n} X_i(Z_i - \bar{Z})}$$

quindi, $\beta_1^{TSLS} - \beta_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i(Z_i - \bar{Z})}{\sum_{i=1}^{n} X_i(Z_i - \bar{Z})}$. Moltiplicando entrambi i membri per $\sqrt{n}$:

$$\sqrt{n}\beta_1^{TSLS} - \beta_1 = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} u_i(Z_i - \bar{Z})}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i(Z_i - \bar{Z})}$$

dove:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i(Z_i - \bar{Z}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Z_i - \bar{Z})$$

$$\sqrt{n}(\beta_1^{TSLS} - \beta_1) = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} u_i(Z_i - \bar{Z})}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i(Z_i - \bar{Z})}$$

- denominatore:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i(Z_i - \bar{Z}) \xrightarrow{p} cov(X, Z) \neq 0$$

- numeratore:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} u_i(Z_i - \bar{Z}) \xrightarrow{d} N\left(0, [var(Z - \mu_Z)u]\right), (\text{TLC})$$

$$\implies \beta_1^{TSLS} \xrightarrow{d} N\left(\beta_1, \sigma^2_{\hat{\beta}_1^{TSLS}}\right), \text{dove } \sigma^2_{\hat{\beta}_1^{TSLS}} = \frac{1}{n} \frac{[var(Z_i - \mu_Z)u_i]}{[cov(X_i, Z_i)]^2}$$

NB: $cov(X, Z) \neq 0$ perché lo strumento è RILEVANTE!

Inferenza con TSLS (continua)

β_1^{TSLS} ha distribuzione approssimata $N\left(\beta_1, \sigma^2_{\hat{\beta}_1^{TSLS}}\right)$

- L'inferenza statistica procede nel modo consueto.
- La giustificazione è (come di consueto) basata su grandi campioni
- Tutto questo assume che gli strumenti siano validi - vedremo tra breve che cosa accade se non lo sono.
- Nota importante sugli errori standard:
  - Gli errori standard OLS dalla regressione del secondo stadio non sono corretti - non tengono conto della stima al primo stadio ($\hat{X}_i$ è stimata).
  - Si utilizza invece un singolo comando apposito che calcola lo stimatore TSLS e gli errori standard corretti.
  - Come di consueto, si usano errori standard robusti all'eteroschedasticità

Esempio 4: domanda di sigarette

$$\ln(Q_i^{cigarettes}) = \beta_0 + \beta_1 \ln(P_i^{cigarettes}) + u_i$$

Perché lo stimatore OLS di β_1 è probabilmente distorto?

- Data set: dati panel sul consumo annuo e i prezzi medi (comprese le imposte) delle sigarette, per stato, per i 48 stati contigui USA, 1985-1995.
- Variabile strumentale proposta:

$$Z_i = \text{ imposta generale sulle vendite nello stato} = SalesTax_i$$

- Pensate che questo strumento sia valido?

1. Rilevante? $cor(SalesTax_i, ln(P_i^{cigarettes})) \neq 0$?
2. Esogeno? $cor(SalesTax_i, u_i) = 0$?

Domanda di sigarette (continua) - TSLS

```r
library(Ecdat)
library(fixest)
library(dplyr)
data("Cigarette")

Cigarette <- Cigarette |> mutate(rprice = avgprs/cpi,
                     rtax = tax/cpi,
                     rtaxs = taxs/cpi,
                     rincome = income/pop/cpi,
                     rsaletax = (taxs - tax) / cpi)
C1995 <- Cigarette |> filter(year==1995)
## Regressione primo stadio
fs <- lm(log(rprice)~rsaletax, data=C1995)
logrpricehat <- fitted(fs)
## Regressione secondo stadio
ss <- lm(log(packpc)~logrpricehat, data=C1995)

ss
```

```
Call:
lm(formula = log(packpc) ~ logrpricehat, data = C1995)

Coefficients:
 (Intercept)  logrpricehat
       9.720        -1.084
```

- Questi coefficienti sono le stime TSLS
- Gli errori standard sono sbagliati (anche se avessimo usato `feols`) perché ignorano la stima al primo stadio

Domanda di sigarette (continua) - IV

```
1 feols(log(packpc)~1|log(rprice)~rsaletax, data=C1995, vcov = "hetero")
```

```
TSLS estimation, Dep. Var.: log(packpc), Endo.: log(rprice), Instr.: rsaletax
Second stage: Dep. Var.: log(packpc)
Observations: 48
Standard-errors: Heteroskedasticity-robust
                Estimate Std. Error  t value   Pr(>|t|)
(Intercept)      9.71988   1.528322  6.35984 8.3462e-08 ***
fit_log(rprice) -1.08359   0.318918 -3.39769 1.4114e-03 **
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
RMSE: 0.186346   Adj. R2: 0.38811
F-test (1st stage), log(rprice): stat = 41.0     , p = 7.271e-8, on 1 and 46 DoF.
                     Wu-Hausman: stat =  0.313803, p = 0.578134, on 1 and 45 DoF.
```

- Gli errori standard sono corretti — tengono conto della stima al primo stadio

Il modello generale di regressione IV (Paragrafo 12.2)

- Finora abbiamo considerato la regressione IV con un singolo regressore endogeno (X) e un singolo strumento (Z).
- Dobbiamo estenderla a:
  - più regressori endogeni ($X_1, \ldots, X_k$)
  - più variabili incluse esogene ($W_1, \ldots, W_r$) o variabili di controllo, che devono essere incluse per il consueto motivo delle variabili omesse
  - più variabili strumentali ($Z_1, \ldots, Z_m$). Più strumenti (rilevanti) possono produrre una minore varianza del TSLS: l'R^2 del primo stadio aumenta, perciò si ha maggiore variazione in $\hat{X}$.
- Nuovi termini: identificazione e sovraidentificazione

Identificazione

- In generale si dice che un parametro è identificato se diversi valori del parametro producono distribuzioni diverse dei dati.
- Nella regressione IV, il fatto che i coefficienti siano identificati dipende dalla relazione tra il numero di strumenti (m) e il numero di regressori endogeni (k)
- Intuitivamente, se ci sono meno strumenti che regressori endogeni, non possiamo stimare $\beta_1, \ldots, \beta_k$
- Per esempio, supponiamo $k = 14$ ma $m = 0$ (nessuno strumento)!

Identificazione (continua)

I coefficienti $\beta_1, \ldots, \beta_k$ si dicono:

- esattamente identificati se $m = k$.

  Ci sono esattamente gli strumenti sufficienti per stimare $\beta_1, \ldots, \beta_k$

- sovraidentificati se $m > k$.

  Ci sono più strumenti di quelli necessari per stimare $\beta_1, \ldots, \beta_k$. In questo caso si può verificare se gli strumenti sono validi (test delle "restrizioni sovraidentificanti") - torneremo sul tema in seguito

- sottoidentificati se $m < k$.

  Ci sono troppo pochi strumenti per stimare $\beta_1, \ldots, \beta_k$. In questo caso occorre procurarsi più strumenti!

Il modello generale di regressione IV: riepilogo della terminologia

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \cdots + \beta_{ki} X_{ki} + \beta_{k+1} W_{1i} + \cdots + \beta_{k+r} W_{ri} + u_i$$

- Y_i è la variabile dipendente
- $X_{1i}, \ldots, X_{ki}$ sono i regressori endogeni (potenzialmente correlati con u_i)
- $W_{1i}, \ldots, W_{ri}$ sono i sono i regressori esogeni inclusi (incorrelati con u_i) o variabili di controllo (inclusi in modo che Z_i sia incorrelata con u_i, una volta inclusi i W)
- $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{k+r}$ sono i coefficienti di regressione ignoti
- $Z_{1i}, \ldots, Z_{mi}$ sono le m variabili strumentali (variabili esogene escluse)
- I coefficienti sono sovraidentificati se $m > k$; esattamente identificati se $m = k$; sottoidentificati se $m < k$.

TSLS con un singolo regressore endogeno

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 W_{1i} + \ldots + \beta_{1+r} W_{ri} + u_i$$

- m strumenti: $Z_{1i}, \ldots, Z_m$
- Primo stadio:
  - Regressione di X_1 su tutti i regressori esogeni: regressione di X_1 su $W_1, \ldots, W_r, Z_1, \ldots, Z_m$, e un'intercetta, usando OLS
  - Calcolo dei valori predetti $\hat{X}_{1i}, i = 1, \ldots, n$
- Secondo stadio:
  - Regressione di Y_i su $\hat{X}_{1i}, W_1, \ldots, W_r$, e un'intercetta, usando OLS
  - I coefficienti di questa regressione del secondo stadio sono gli stimatori TSLS, ma gli errori standard sono sbagliati :::{.fborder} Per ottenere errori standard corretti, occorre procedere in un singolo pasasggio con il software di regressione :::

W come variabili di controllo

- In molti casi le W sono incluse allo scopo di controllare per fattori omessi, cosicché, una volta incluse le W, Z è incorrelata con u.
- Tecnicamente, la condizione perché le W siano variabili di controllo effettive è che la media condizionata degli u_i non dipenda da Z_i, date W_i:

$$E(u_i|W_i, Z_i) = E(u_i|W_i)$$

Questa è la versione IV dell'assunzione dell'indipendenza in media condizionata.

Ecco il punto chiave: in molte applicazioni occorre includere variabili di controllo (W) affinché Z sia verosimilmente esogena (incorrelata con u). (Per i dettagli si veda l'Appendice 12.6)

Esempio 4: ancora la domanda di sigarette

Si supponga che il reddito sia esogeno (è plausibile?), e di voler anche stimare l'elasticità:

$$\ln(Q_i^{cigarettes}) = \beta_0 + \beta_1 \ln(P_i^{Cigarettes}) + \beta_2 \ln(Income_i) + u_i$$

- Una variabile endogena: $X_{1i} = \ln(P_i^{Cigarettes})$
- Una variabile esogena inclusa: $W_{1i} = \ln(Income_i)$
- Due strumenti:
  1. Z_{1i} = imposta generale sulle vendite
  2. Z_{2i} = imposta specifica sulle sigarette

Domanda di sigarette: uno strumento

```r
#Stima via variabili strumentali
cig_ivreg <- feols(log(packpc)~log(rincome)|log(rprice)~log(rincome)+rsaletax, data=C1995, vcov = "hetero")
summary(cig_ivreg, stage = 2)
```

```
TSLS estimation, Dep. Var.: log(packpc), Endo.: log(rprice), Instr.: log(rincome), rsaletax
Second stage: Dep. Var.: log(packpc)
Observations: 48
Standard-errors: Heteroskedasticity-robust
                 Estimate Std. Error   t value   Pr(>|t|)
(Intercept)      9.430658   1.259393  7.488260 1.9347e-09 ***
fit_log(rprice) -1.143375   0.372303 -3.071090 3.6113e-03 **
log(rincome)     0.214515   0.311747  0.688107 4.9492e-01
... 1 variable was removed because of collinearity (log(rincome))
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
RMSE: 0.183555   Adj. R2: 0.393109
F-test (1st stage), log(rprice): stat = 22.6      , p = 1.621e-7, on 2 and 45 DoF.
                     Wu-Hausman: stat =  1.102    , p = 0.299559, on 1 and 44 DoF.
                         Sargan: stat = -1.066e-14, p = 1       , on 1 DoF.
```

Domanda di sigarette: due strumenti

```
cig_ivreg2 <- feols(log(packpc)~log(rincome)|log(rprice)~log(rincome)+rsaletax+rtax,data=C1995, vcov = "hete
summary(cig_ivreg2,stage=2)
```

```
TSLS estimation, Dep. Var.: log(packpc), Endo.: log(rprice), Instr.: log(rincome), rsaletax, rtax
Second stage: Dep. Var.: log(packpc)
Observations: 48
Standard-errors: Heteroskedasticity-robust
                 Estimate Std. Error  t value   Pr(>|t|)
(Intercept)      9.894956   0.959217 10.31566 1.9467e-13 ***
fit_log(rprice) -1.277424   0.249610 -5.11768 6.2107e-06 ***
log(rincome)     0.280405   0.253890  1.10444 2.7527e-01
... 1 variable was removed because of collinearity (log(rincome))
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
RMSE: 0.181891   Adj. R2: 0.404063
F-test (1st stage), log(rprice): stat = 163.2     , p < 2.2e-16 , on 3 and 44 DoF.
                     Wu-Hausman: stat =   3.06782 , p = 0.086825, on 1 and 44 DoF.
                         Sargan: stat =   0.332622, p = 0.846783, on 2 DoF.
```

Risultati stime IV uno vs due strumenti

- Errori standard minori per $m = 2$. Con 2 strumenti si hanno più informazioni, più "variazione come se casuale"
- Bassa elasticità al reddito (non è un bene di lusso); elasticità al reddito non significativamente diversa da zero a livello statistico
- Elasticità al prezzo sorprendentemente elevata

Assunzioni generali per la validità di uno strumento

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \ldots + \beta_{ki} X_{ki} + \beta_{k+1} W_{1i} + \ldots + \beta_{k+r} W_{ri} + u_i$$

1. Esogeneità: $cor(Z_{1i}, u_i) = 0, \ldots, cor(Z_{mi}, u_i) = 0$
2. Rilevanza: caso generale, più X
    a. almeno uno strumento deve entrare nella controparte della regressione del primo stadio; e
    b. i W non sono perfettamente collineari.

Assunzioni della regressione IV

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \ldots + \beta_{ki} X_{ki} + \beta_{k+1} W_{1i} + \ldots + \beta_{k+r} W_{ri} + u_i$$

1. $E(u_i | W_{1i}, \ldots, W_{ri}) = 0$
   - l'assunzione 1 dice "i regressori esogeni sono esogeni"
2. $(Y_i, X_{1i}, \ldots, X_{ki}, W_{1i}, \ldots, W_{ri}, Z_{1i}, \ldots, Z_{mi})$ sono i.i.d.
   - l'assunzione 2 non è nuova
3. X, W, Z, Y hanno momenti quarti finiti non nulli
   - l'assunzione 2 non è nuova
4. Gli strumenti $(Z_{1i}, \ldots, Z_{mi})$ sono validi.
   - Ne abbiamo parlato

Sotto le assunzioni 1-4, il TSLS e la sua statistica t hanno distribuzione normale

effetto dello studio sui voti (continua)

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i$$

- Y = media voti del primo semestre
- X = media di ore di studio al giorno
- Z = 1 se il compagno di stanza ha portato un videogioco, = 0 altrimenti

I compagni di stanza sono stati assegnati a caso

Conoscete un motivo per cui Z potrebbe essere correlata con u - anche se è assegnata casualmente? Che cos'altro entra nel termine d'errore, quali sono altri determinanti dei voti, oltre al tempo speso studiando?

Effetto dello studio sui voti (continua)

Perché Z potrebbe essere correlata u?

- Ecco una ipotetica possibilità: il genere. Supponiamo:
  - le donne ottengono voti migliori degli uomini, a parità di ore di studio
  - gli uomini hanno più probabilità di portare un videogioco, rispetto alle donne
  - Allora $cor(Z_i, u_i) < 0$ (i maschi hanno più probabilità di avere un compagno di stanza [maschio] che porti un videogioco, ma i maschi tendono anche ad avere voti inferiori, a parità di tempo di studio).
- È solo un altro caso di distorsione da variabili omesse. La soluzione sta nel controllare per (o includere) la variabile omessa, in questo caso il genere.
- Questa logica porta a includere W = genere come variabile di controllo nella regressione IV:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 W_i + u_i$$

Verifica della validità degli strumenti (Paragrafo 12.3)

Ricordiamo i due requisiti per strumenti validi:

1. Rilevanza (caso speciale di una sola X)

Almeno uno strumento deve spiegare la variabile endogena nella regressione del primo stadio.

2. Esogeneità

Tutti gli strumenti devono essere incorrelati con il termine d'errore:

$$cor(Z_{1i}, u_i) = 0, \ldots, cor(Z_{mi}, u_i) = 0$$

1. Che cosa accade se uno di questi requisiti non è soddisfatto? Come si può verificare? Che cosa occorre fare?
2. Se si hanno più strumenti, quale si deve usare?

Verifica dell'assunzione 1: rilevanza dello strumento

Ci concentreremo su un singolo regressore incluso:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 W_{1i} + \ldots + \beta_{1+r} W_{ri} + u_i$$

Regressione del primo stadio:

$$X_i = \pi_0 + \pi_1 Z_{1i} + \ldots + \pi_m Z_{mi} + \pi_{m+1} W_{1i} + \ldots + \pi_{m+k} W_{ki} + u_i$$

- Gli strumenti sono rilevanti se almeno uno dei $\pi_1, \ldots, \pi_m$ è diverso da zero.
- Gli strumenti si dicono deboli se i coefficienti $\pi_1, \ldots, \pi_m$ non sono abbastanza grandi …
- Gli strumenti deboli spiegano una parte della variazione di X troppo piccola per poter spiegare accuratamente β_1

Quali sono le conseguenze di strumenti deboli?

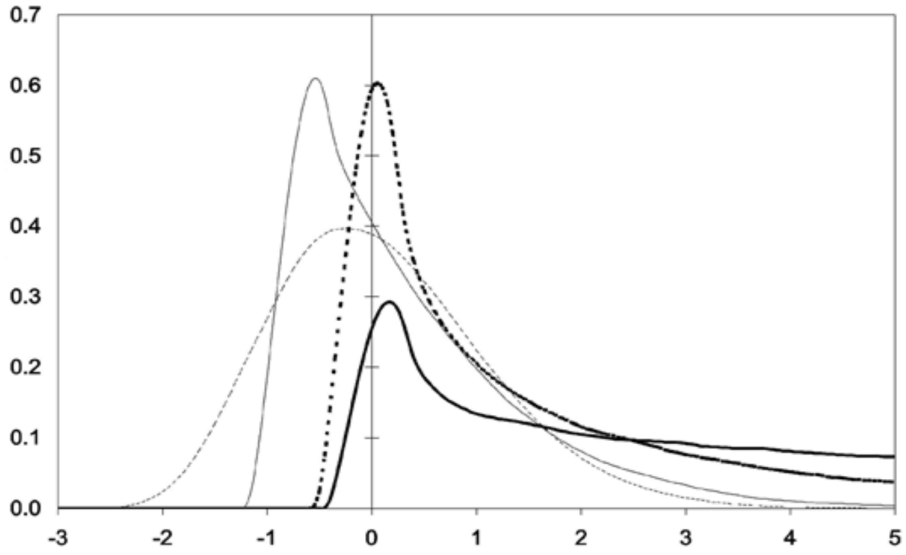
Se gli strumenti sono deboli, la distribuzione campionaria del TSLS e della sua statistica t non è normale, anche con n grande.

Consideriamo il caso più semplice:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i$$
$$X_i = \pi_0 + \pi_1 Z_i + \nu_i$$

- Lo stimatore IV è $\hat{\beta}_1^{TSLS} = \frac{s_{YZ}}{s_{XZ}}$
- Se $cov(X, Z)$ è zero o vicino, allora s_{XZ} sarà piccolo: con strumenti deboli, il denominatore è quasi zero.
- In questo caso, la distribuzione campionaria di (e la sua statistica t) non è ben approssimata da una normale per n grande…

La distribuzione campionaria della statistica t del TSLS con strumenti deboli



- Linea scura = strumenti non rilevanti
- Linea chiara tratteggiata = strumenti forti

Se gli strumenti sono deboli, i consueti metodi di inferenza sono inaffidabili - potenzialmente molto inaffidabili!

Misurazione della forza degli strumenti in pratica: la statistica $Wald$ del primo stadio

- La regressione del primo stadio (una sola X):
- Regressione di X su $Z_1, \ldots, Z_m, W_1, \ldots, W_k$.
- Strumenti totalmente irrilevanti $\Rightarrow$ tutti i coefficienti di $Z_1, \ldots, Z_m$ sono zero.
- La statistica Wald del primo stadio verifica l'ipotesi che $Z_1, \ldots, Z_m$ non entrino nella regressione del primo stadio.
- Strumenti deboli implicano un valore basso della statistica Wald del primo stadio.

Verifica di strumenti deboli con una singola X

- Si calcola la statistica Wald del primo stadio.

  Regola empirica: se la statistica Wald del primo stadio è minore di $m \times 10$, allora l'insieme di strumenti è debole.

- In questo caso, lo stimatore TSLS sarà distorto, e le inferenze statistiche (errori standard, verifiche di ipotesi, intervalli di confidenza) possono essere fuorvianti.
- Non è sufficiente respingere l'ipotesi nulla che i coefficienti delle Z siano zero, ma serve un contenuto predittivo sostanziale per una buona approssimazione normale.
- Se la $Wald$ è minore di $10 \times m$, la distorsione relativa è superiore al 10%, cioè il TSLS può avere una distorsione sostanziale (si veda l'Appendice 12.5).
- Nota: $Wald = F \times m$

```r
library(car)
## First stage
fs <- feols(log(rprice) ~ log(rincome) + rsaletax + rtax, data = C1995, vcov = "hetero")
linearHypothesis(fs, c("rsaletax=0", "rtax=0"))
```

```
Linear hypothesis test

Hypothesis:
rsaletax = 0
rtax = 0

Model 1: restricted model
Model 2: log(rprice) ~ log(rincome) + rsaletax + rtax

  Df  Chisq Pr(>Chisq)
1
2  2 419.35  < 2.2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```r
linearHypothesis(fs, c("rsaletax=0", "rtax=0"), test="F")
```

```
Linear hypothesis test

Hypothesis:
rsaletax = 0
rtax = 0

Model 1: restricted model
Model 2: log(rprice) ~ log(rincome) + rsaletax + rtax

  Df  Chisq Pr(>Chisq)
1
2  2 419.35  < 2.2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Verifica dell'assunzione 2: esogeneità dello strumento

- Esogeneità dello strumento: Tutti gli strumenti non sono correlati con il termine d'errore:

$$cor(Z_{1i}, u_i) = 0, \ldots, cor(Z_{mi}, u_i) = 0$$

- Se gli strumenti sono correlati con il termine d'errore, il primo stadio del TSLS non può isolare una componente di X incorrelata con il termine d'errore, perciò $\hat{X}$ è correlata con u e il TSLS è inconsistente.
- Se ci sono più strumenti che regressori endogeni, è possibile verificare - parzialmente - l'esogeneità dello strumento.

Verifica di restrizioni di sovraidentificazione

Consideriamo il caso più semplice:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i$$

- Supponiamo che vi siano due strumenti validi: Z_{1i}, Z_{2i}
- Allora potremmo calcolare due stime TSLS separate.
- Intuitivamente, se queste due stime TSLS sono molto diverse tra loro, ci dev'essere qualcosa di sbagliato: uno strumento o l'altro (o entrambi) devono essere non validi.
- Il test J di restrizioni sovraidentificanti esegue questo confronto in un modo statisticamente preciso.
- Si può fare soltanto se il numero di Z è maggiore del numero di X (sovraidentificazione).

Il test J di restrizioni di sovraidentificazione

Supponiamo che il numero di strumenti = $m >$ numero di $X = k$ (sovraidentificazione)

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \cdots + \beta_{ki} X_{ki} + \beta_{k+1} W_{1i} + \ldots + \beta_{k+r} W_{ri} + u_i$$

Procedura:

1. Prima si stima l'equazione di interesse usando TSLS e tutti gli m strumenti; si calcolano i valori predetti $\hat{Y}_i$, usando le X effettive (non le $\hat{X}$ usate per stimare il secondo stadio)
2. Si calcolano i residui $\hat{u}_i = Y_i - \hat{Y}_i$
3. Si esegue la regressione rispetto a $Z_{1i}, \ldots, Z_{mi}, W_{1i}, \ldots, W_{ri}$
4. Si calcola la statistica Wald che verifica l'ipotesi che i coefficienti di $Z_{1i}, \ldots, Z_{mi}$ siano tutti zero;
5. La statistica J è $J = Wald$

Il test J (continua)

$J = Wald$, dove $Wald$ = la statistica Wald che verifica i coefficienti di $Z_{1i}, \ldots, Z_{mi}$ in una regressione dei residui TSLS rispetto a $Z_{1i}, \ldots, Z_{mi}, W_{1i}, \ldots, W_{ri}$

Distribuzione della statistica J

- Sotto l'ipotesi nulla che tutti gli strumenti siano esogeni, J ha una distribuzione χ^2 con $m–k$ gradi di libertà
- Se $m = k$, $J = 0$ (ha senso?)
- Se alcuni strumenti sono esogeni e altri sono endogeni, la statistica J sarà grande, e l'ipotesi nulla che tutti gli strumenti sono esogenisarà rifiutata.

J test

```r
cig_ivreg2 <- feols(log(packpc) ~  log(rincome) |
                           log(rprice)~log(rincome) + rsaletax + rtax, data = C1995, vcov = "hetero")
C1995 <- C1995 |> mutate(uhat = log(packpc) - cig_ivreg2$fitted.values)
Jlm <- feols(uhat~log(rincome) + rsaletax + rtax, data = C1995, vcov = "hetero")
J <- linearHypothesis(Jlm, c("rsaletax=0", "rtax=0"))
J
```

```
Linear hypothesis test

Hypothesis:
rsaletax = 0
rtax = 0

Model 1: restricted model
Model 2: uhat ~ log(rincome) + rsaletax + rtax

  Df  Chisq Pr(>Chisq)
1
2  2 0.2565     0.8796
```

I p-value è errato perché è calcolato usando $m = 2$ gradi di libertá anzichè $m - k = 1$.

```r
## Calcolo pvalue con df corretto
pchisq(J$Chisq[2], df = 1, lower.tail = FALSE)
```

```
[1] 0.6125548
```

Verifica della validità degli strumenti: riepilogo

Questo riepilogo considera il caso di una singola X. I due requisiti per la validità degli strumenti sono:

1. Rilevanza

- Almeno uno strumento deve entrare nella controparte della regressione del primo stadio.
- Se gli strumenti sono deboli, allora lo stimatore TSLS è distorto e la statistica t ha una distribuzione non normale
- Per verificare strumenti deboli con un singolo regressore endogeno incluso, si verifica la statistica F del primo stadio:
  - Se $Wald > 10 \times m$, gli strumenti sono forti - si usa il TSLS
  - Se $Wald < 10 \times m$, gli strumenti sono deboli.

Verifica della validità degli strumenti: riepilogo

2. Esogeneità

- Tutti gli strumenti devono essere incorrelati con il termine d'errore: $cor(Z_{1i}, u_i) = 0, \ldots, cor(Z_{mi}, u_i) = 0$
- Possiamo eseguire una verifica parziale di esogeneità: se $m > 1$, possiamo verificare l'ipotesi nulla che tutti gli strumenti siano esogeni contro l'alternativa che al massimo $m - 1$ siano endogeni (correlati con u)
- Si usa il test J, realizzato usando i residui TSLS.
- Se il J respinge l'ipotesi, allora almeno alcuni degli strumenti sono endogeni, perciò occorre prendere una decisione difficile e scartare alcuni (o tutti) gli strumenti.

Esercizio

Calcolate e interpretate la statistica del primo statio e il test J della seguente stima basata sulle differenze.

```r
DCig <- Cigarette |> filter(year==1995 | year==1985) |>
  arrange(state, year) |>
  group_by(state) |>
  mutate(Drsaletax = rsaletax - lag(rsaletax),
         Drtax = rtax - lag(rtax),
         Dlogrincome = log(rincome) - lag(log(rincome)),
         Dlogrprice = log(rprice) - lag(log(rprice)),
         Dlogpackpc = log(packpc) - lag(log(packpc))
         )
summary(feols(Dlogpackpc ~  Dlogrincome|
                         Dlogrprice~Drsaletax + Drtax,
                       data = DCig), stage = 2)
```

```
TSLS estimation, Dep. Var.: Dlogpackpc, Endo.: Dlogrprice, Instr.: Drsaletax, Drtax
Second stage: Dep. Var.: Dlogpackpc
Observations: 48
Standard-errors: IID
               Estimate Std. Error   t value   Pr(>|t|)
(Intercept)    -0.052003   0.060495 -0.859636 3.9455e-01
fit_Dlogrprice -1.202403   0.171193 -7.023677 9.3986e-09 ***
Dlogrincome     0.462030   0.308101  1.499604 1.4070e-01
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
RMSE: 0.088356   Adj. R2: 0.526441
F-test (1st stage), Dlogrprice: stat = 75.7    , p = 5.758e-15, on 2 and 44 DoF.
                  Wu-Hausman: stat =  3.50149, p = 0.067972 , on 1 and 44 DoF.
                      Sargan: stat =  4.83805, p = 0.027838 , on 1 DoF.
```