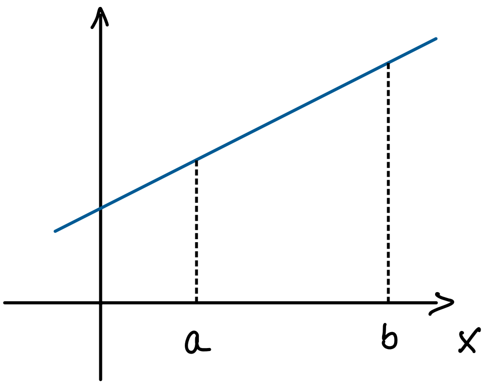
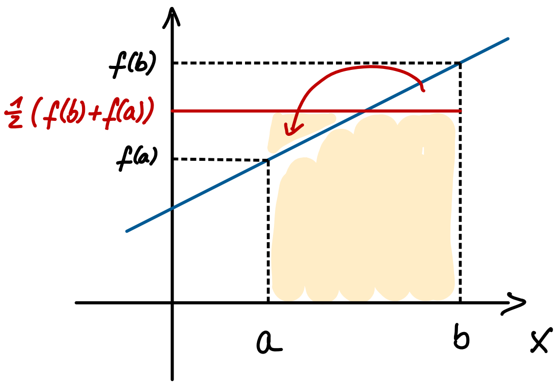
Aufgabe 2.2

Berechnen Sie den Mittelwert $\overline{f}$ der linearen Funktion $f(x) = m \cdot x + n$ auf einem beliebigen Intervall $[a, b]$. Interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch.

Die Funktion $f(x) = m \cdot x + n$ ist eine lineare Funktion mit der Steigung m und dem Achsenabschnitt n. Der Graph dieser Funktion ist eine Gerade und könnte beispielsweise so aussehen:

geometrische Interpretation





Der Mittelwert wird berechnet, indem die Funktion $f(x) = mx+n$ in die Formel $\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ eingesetzt wird, also

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b mx+n\,dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{2}mx^2 - nx\right]_a^b =$$

$$= \frac{1}{b-a}\cdot\left(\left(\frac{1}{2}mb^2 - nb\right) - \left(\frac{1}{2}ma^2 - na\right)\right) =$$ $\frac{1}{2}m$ und n werden ausgeklammert

$$= \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{2}m\,(b^2-a^2) - n\,(b-a)\right) =$$ der Faktor $\frac{1}{b-a}$ wird ausmultipliziert

$$= \frac{1}{2}m\cdot\frac{(b^2-a^2)}{b-a} - n\cdot\frac{(b-a)}{b-a} =$$ Brüche kürzen; zur Erinnerung $(b+a)\cdot(b-a) = b^2-a^2$ 3. bin. Formel

$$= \frac{1}{2}m\,(b+a) - n =$$ Trick: $-n = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}n$

$$= \frac{1}{2}m\cdot b - \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}ma - \frac{1}{2}n =$$ in beiden Summanden ½ ausklammern

$$= \frac{1}{2}(mb-n) + \frac{1}{2}(ma-n) = \frac{1}{2}f(b) + \frac{1}{2}f(a)$$

Der Mittelwert der linearen Funktion ist gleich dem arithmetischen Mittel der beiden Funktionswerte $f(a)$ und $f(b)$.