1.1 Was ist eine Matrix?

In diesem Kapitel werden wir zunächst den Begriff **Matrix** und die verschiedenen Bestandteile einer Matrix kennenlernen.

Lernziele

> **Lernziele**
>
> - Sie wissen, was eine **Matrix** ist.
> - Sie kennen den Unterschied zwischen einem **Zeilenvektor** und einem **Spaltenvektor**.
> - Sie können die Teile einer Matrix benennen, d.h. Sie wissen, was die folgenden Begriffe bedeuten:
>   - **Element**,
>   - **Zeilenindex**,
>   - **Spaltenindex** und
>   - **Hauptdiagonale**.
> - Sie wissen, was die **Dimension** einer Matrix ist und wann zwei Matrizen **gleich** sind.
> - Sie können beurteilen, ob eine Matrix **quadratisch** ist.

Matrix

Im Alltag werden häufig Tabellen benutzt, um Daten zu erfassen. Beispielsweise könnte man eine Tabelle nutzen, um die Einnahmen und Ausgaben eines jeden Monats zu protokollieren. In den Zeilen stehen die Kategorien wie beispielsweise BAFöG, Miete, Abo für das Fitnessstudio oder die Gesamtausgaben für Essen in dem jeweiligen Monat. Spaltenweise werden nun die Gesamtsumme an Ausgaben oder Einnahmen für diese Kategorie aufgeführt. Positive Zahlen stehen für die Einnahmen, negative Zahlen für Ausgaben.

	Januar	Februar	März	April
BAFöG	956.00 €	956.00 €	956.00 €	956.00 €
Miete	-530.00 €	-530.00 €	-530.00 €	-530.00 €
Fitnessstudio	-24.99 €	-24.99 €	-24.99 €	-24.99 €
Essen	-108.74 €	-90.56 €	-110.50 €	-95.80 €
Netflix	-12.99 €	-12.99 €	-17.99 €	-17.99 €

In der Mathematik schreibt man solche Tabellen etwas kürzer, indem die Beschriftungen der Zeilen und Spalten sowie Einheiten weggelassen werden. Die Zahlen werden stattdessen rechteckig angeordnet und mit runden Klammern umrandet:

$$\begin{pmatrix} 956 & 956 & 956 & 956 \\ -530 & -530 & -530 & -530 \\ -24.99 & -24.99 & -24.99 & -24.99 \\ -108.74 & -90.56 & -110.50 & -95.80 \\ -12.99 & -12.99 & -17.99 & -17.99 \end{pmatrix}.$$

Im englischsprachigen Raum werden auch eckige Klammern verwendet:

$$\begin{bmatrix} 956 & 956 & 956 & 956 \\ -530 & -530 & -530 & -530 \\ -24.99 & -24.99 & -24.99 & -24.99 \\ -108.74 & -90.56 & -110.50 & -95.80 \\ -12.99 & -12.99 & -17.99 & -17.99 \end{bmatrix}$$

In diesem Vorlesungsskript wird die Notation mit runden Klammern verwendet. Damit kommen wir zum Fachbegriff Matrix. Eine solche rechteckige Anordnung von Zahlen nennen wir **Matrix**. Die Mehrzahl des Wortes Matrix lautet **Matrizen**. Der Plural ist unregelmäßig.

> **Was ist ... eine Matrix?**
>
> Ein rechteckig angeordnetes Zahlenschema wird in der Mathematik Matrix genannt.

Bestandteile einer Matrix

Wir werden später noch sehen, dass Matrizen eine sehr kompakte Art und Weise sind, Informationen zu kodieren. Mit Matrizen kann aber auch gerechnet werden. Beispielsweise könnten wir nun in jeder Zeile der Matrix den Mittelwert bilden, um die durchschnittlichen Eingaben und Ausgaben über das Jahr hinweg zu analysieren. Bevor wir jedoch zum Rechnen mit Matrizen kommen, lernen wir zunächst die Fachbegriffe für die einzelnen Bestandteile einer Matrix kennen.

Ein wichtiges Merkmal einer Matrix ist die Anzahl ihrer Zeilen und die Anzahl ihrer Spalten. Im obigen Beispiel hatten wir fünf Zeilen und vier Spalten. Die Einträge in der Matrix sind reelle Zahlen. Wir schreiben daher

$$\begin{pmatrix} 956 & 956 & 956 & 956 \\ -530 & -530 & -530 & -530 \\ -24.99 & -24.99 & -24.99 & -24.99 \\ -108.74 & -90.56 & -110.50 & -95.80 \\ -12.99 & -12.99 & -17.99 & -17.99 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 4}$$

und sagen, dass diese Matrix eine 5×4-Matrix ist (sprich: 5 Kreuz 4). Die kombinierte Angabe der Anzahl Zeilen und Anzahl Spalten nennen wir **Dimension** der Matrix. Bei der Angabe der Dimension kommt immer die Anzahl der Zeilen zuerst und die Angabe der Spalten als zweites.

Um über einzelne Zahlen in der Matrix reden zu können, können wir ihre Position in der Matrix angeben. Beispielsweise steht in 5. Zeile und in der 2. Spalte die Zahl -12.99. Anstatt Position wird in der Mathematik der Fachbegriff **Index** verwendet und der Eintrag an dieser Stelle heißt **Element**. Wir schreiben das Element mit Zeilenindex 5 und Spaltenindex 2 als

$$a_{52} = -12.99.$$

Der Zeilenindex und der Spaltenindex werden klein an den Variablennamen geschrieben, der üblicherweise mit einem kleinen Buchstaben bezeichnet wird. Die Angabe

$$a_{53}$$

bedeutet also, dass das Element der Matrix in der 5. Zeile und 3. Spalte gemeint ist und wir lesen ab, dass

$$a_{53} = -17.99.$$

Das Netflix-Abo ist also teurer geworden. Vergleichen wir zwei Matrizen, dann sind die beiden Matrizen **gleich**, wenn jedes Element a_{ij} der ersten Matrix A mit jedem Element b_{ij} der zweiten Matrix B übereinstimmt.

Üblicherweise werden Matrizen mit einem großen fettgedrucktem Buchstaben bezeichnet, so dass beispielsweise eine 3×2-Matrix die folgende allgemeine Struktur hat:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

Schneiden wir aus der Matrix eine ganze Zeile aus, z.B. die 4. Zeile, erhalten wir einen Vektor

$$\vec{z}_4 = \begin{pmatrix} -108.74 & -90.56 & -110.50 & -95.80 \end{pmatrix}.$$

Dieser Vektor wird **Zeilenvektor** genannt. Ein **Spaltenvektor** ist eine ganze Spalte der Matrix, z.B. die erste Spalte

$$\vec{s}_1 = \begin{pmatrix} 956 \\ -530 \\ -24.99 \\ -108.74 \\ -12.99 \end{pmatrix}.$$

Die letzte Bezeichnung eines Bestandteils einer Matrix, die wir hier an dieser Stelle einführen, ist der Begriff der Hauptdiagonalen. Die **Hauptdiagonale** einer Matrix sind die Elemente, bei der Zeilenindex und Spaltenindex übereinstimmen. In dem obigen

Beispiel sind das die Elemente a_{11}, a_{22}, a_{33} und a_{44}, also die Zahlen 956, -530, -24.99 und -95.8.

Die folgende Grafik fasst die Bezeichnungen der Bestandteile einer Matrix übersichtlich zusammen.

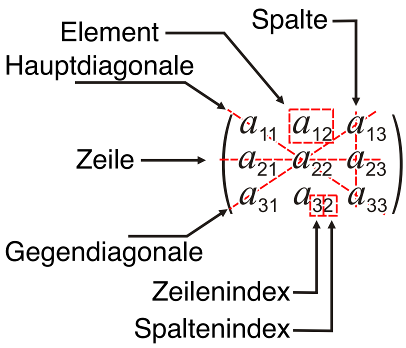

Abbildung 1: Bezeichnungen einer Matrix (Quelle: Ralf Pfeifer Wikimedia Commons, Lizenz: CC BY-SA 3.0)

Quadratische Matrizen

Wir werden noch einige besondere Matrizen kennenlernen. Eine besondere Art von Matrix ist die **quadratische Matrix**. Bei einer quadratischen Matrix ist die Anzahl der Zeilen m gleich der Anzahl der Spalten n, also $m = n$. Beispielsweise ist die 2×2-Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0.5 & 17 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

eine quadratische Matrix.

Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Kapitel haben wir Fachbegriffe eingeführt, um eine Matrix zu beschreiben. Mit der quadratischen Matrix haben wir einen ersten speziellen Typ einer Matrix kennengelernt. In den nächsten Kapiteln werden wir weitere besondere Matrizen betrachten, bevor wir zu den Rechenoperationen für Matrizen kommen.