Mathematik 3

Simone Gramsch

November 13, 2025

Contents

0.1 Rechnen mit Matrizen . . . 1
  0.1.1 Was ist eine Matrix? . . . 2
  0.1.2 Besondere Matrizen . . . 5
  0.1.3 Matrizenaddition . . . 7
  0.1.4 Skalarmultiplikation . . . 9
  0.1.5 Matrizenmultiplikation . . . 12
  0.1.6 Transponierte und symmetrische Matrizen . . . 15
0.2 Determinante und Inverse . . . 18
  0.2.1 Inverse Matrizen . . . 19
  0.2.2 Rechenregeln inverse Matrizen . . . 21
  0.2.3 Lineare Gleichungssysteme mit Matrizenrechnung lösen . . . 23
  0.2.4 Determinanten . . . 26
  0.2.5 Laplacescher Entwicklungssatz . . . 27
  0.2.6 Eigenschaften von Determinanten . . . 28
0.3 Lineare Abbildungen . . . 29
  0.3.1 Orthogonale Matrizen . . . 30
0.4 Eigenwerte und Eigenvektoren . . . 32
  0.4.1 Matrizen / Anwendung (Teil 2) . . . 33
0.5 Anwendungen Matrizen . . . 34
  0.5.1 Matrizen / Anwendung (Teil 3) . . . 35
0.6 DGL 1 (Teil 1) . . . 36
  0.6.1 DGL 1 (Teil 1) . . . 37
0.7 DGL 1 (Teil 2) . . . 38
  0.7.1 DGL 1 (Teil 2) . . . 39
0.8 DGL 1 (Teil 3) . . . 40
  0.8.1 DGL 1 (Teil 3) . . . 41
0.9 DGL 2 (Teil 1) . . . 42
  0.9.1 DGL 2 (Teil 1) . . . 43
0.10 DGL 2 (Teil 2) . . . 44
  0.10.1 DGL 2 (Teil 1) . . . 45
0.11 DGL 2 (Teil 3) . . . 46
  0.11.1 DGL 2 (Teil 2) . . . 47
0.12 Fourierreihen (Teil 1) . . . 48
  0.12.1 DGL 2 (Teil 3) . . . 49
0.13 Fourierreihen (Teil 2) . . . 50
  0.13.1 Fourierreihen (Teil 2) . . . 51

0.1 Rechnen mit Matrizen

0.1.1 Was ist eine Matrix?

In diesem Kapitel werden wir zunächst den Begriff **Matrix** und die verschiedenen Bestandteile einer Matrix kennenlernen.

Lernziele

Lernziele

- Sie wissen, was eine **Matrix** ist.
- Sie kennen den Unterschied zwischen einem **Zeilenvektor** und einem **Spaltenvektor**.
- Sie können die Teile einer Matrix benennen, d.h. Sie wissen, was die folgenden Begriffe bedeuten:
  - **Element**,
  - **Zeilenindex**,
  - **Spaltenindex** und
  - **Hauptdiagonale**.
- Sie wissen, was die **Dimension** einer Matrix ist und wann zwei Matrizen **gleich** sind.
- Sie können beurteilen, ob eine Matrix **quadratisch** ist.

Matrix

Im Alltag werden häufig Tabellen benutzt, um Daten zu erfassen. Beispielsweise könnte man eine Tabelle nutzen, um die Einnahmen und Ausgaben eines jeden Monats zu protokollieren. In den Zeilen stehen die Kategorien wie beispielsweise BAFöG, Miete, Abo für das Fitnessstudio oder die Gesamtausgaben für Essen in dem jeweiligen Monat. Spaltenweise werden nun die Gesamtsumme an Ausgaben oder Einnahmen für diese Kategorie augfeführt. Positive Zahlen stehen für die Einnahmen, negative Zahlen für Ausgaben.

	Januar	Februar	März	April
BAFöG	956.00	956.00	956.00	956.00
Miete	-530.00	-530.00	-530.00	-530.00
Fitnessstudio	-24.99	-24.99	-24.99	-24.99
Essen	-108.74	-90.56	-110.50	-95.80
Netflix	-12.99	-12.99	-17.99	-17.99

der Mathematik schreibt man solche Tabellen etwas kürzer, indem die Beschriftungen der Zeilen und Spalten sowie Einheiten weggelassen werden. Die Zahlen werden stattdessen rechteckig angeordnet und mit runden Klammern umrandet:

$$\begin{pmatrix} 956 & 956 & 956 & 956 \\ -530 & -530 & -530 & -530 \\ -24.99 & -24.99 & -24.99 & -24.99 \\ -108.74 & -90.56 & -110.50 & -95.80 \\ -12.99 & -12.99 & -17.99 & -17.99 \end{pmatrix}.$$

Im englischsprachigen Raum werden auch eckige Klammern verwendet:

$$\begin{bmatrix} 956 & 956 & 956 & 956 \\ -530 & -530 & -530 & -530 \\ -24.99 & -24.99 & -24.99 & -24.99 \\ -108.74 & -90.56 & -110.50 & -95.80 \\ -12.99 & -12.99 & -17.99 & -17.99 \end{bmatrix}$$

In diesem Vorlesungsskript wird die Notation mit runden Klammern verwendet. Damit kommen wir zum Fachbegriff Matrix. Eine solche rechteckige Anordnung von Zahlen nennen wir **Matrix**. Die Mehrzahl des Wortes Matrix lautet **Matrizen**. Der Plural ist unregelmäβig.

Was ist ... eine Matrix?
Ein rechteckig angeordnetes Zahlenschema wird in der Mathematik Matrix genannt.

Bestandteile einer Matrix

Wir werden später noch sehen, dass Matrizen eine sehr kompakte Art und Weise sind, Informationen zu kodieren. Mit Matrizen kann aber auch gerechnet werden. Beispielsweise könne man nun in jeder Zeile der Matrix den Mittelwert bilden, um die durchschnittlichen Eingaben und Ausgaben über das Jahr hinweg analysieren zu können. Bevor wir jedoch zum Rechnen mit Matrizen kommen, lernen wir zunächst die Fachbegriffe für die einzelnen Bestandteile einer Matrix kennen.

Ein wichtiges Merkmal einer Matrix ist die Anzahl ihrer Zeilen und die Anzahl ihrer Spalten. In unserem obigen Beispiel hatten wir fünf Zeilen und vier Spalten. Die Einträge in der Matrix sind reelle Zahlen. Wir schreiben daher

$$\begin{pmatrix} 956 & 956 & 956 & 956 \\ -530 & -530 & -530 & -530 \\ -24.99 & -24.99 & -24.99 & -24.99 \\ -108.74 & -90.56 & -110.50 & -95.80 \\ -12.99 & -12.99 & -17.99 & -17.99 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 4}$$

und sagen, dass diese Matrix eine 5×4-Matrix ist (sprich: 5 Kreuz 4). Die kombinierte Angabe der Anzahl Zeilen und Anzahl Spalten nennen wir **Dimension** der Matrix oder **Format** der Matrix. Bei der Angabe der Dimension kommt immer die Anzahl der Zeilen zuerst.

Um über einzelne Zahlen in der Matrix reden zu können, können wir ihre Position in der Matrix angeben. Beispielsweise steht in 5. Zeile und in der 2. Spalte die Zahl -12.99. Anstatt Position wird in der Mathematik der Fachbegriff **Index** verwendet und der Eintrag an dieser Stelle heiβt **Element**. Wir schreiben das Element mit Zeilenindex 5 und Spaltenindex 2 als

$$a_{52} = -12.99.$$

Der Zeilenindex und der Spaltenindex werden klein an den Variablennamen geschrieben, der üblicherweise mit einem kleinen Buchstaben bezeichnet wird. Die Angabe

$$a_{53}$$

bedeutet also, dass das Element der Matrix in der 5. Zeile und 3. Spalte gemeint ist und wir lesen ab, dass

$$a_{53} = -17.99.$$

Das Netflix-Abo ist also teurer geworden. Vergleichen wir zwei Matrizen, dann sind die beiden Matrizen **gleich**, wenn jedes Element a_{ij} der ersten Matrix A mit jedem Element b_{ij} der zweiten Matrix B übereinstimmt.

Üblicherweise werden Matrizen mit einem groβen fettgedrucktem Buchstaben bezeichnet, so dass beispielsweise eine 3×2-Matrix die folgende allgemeine Struktur hat:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

Schneiden wir aus der Matrix eine ganze Zeile aus, z.B. die 4. Zeile, erhalten wir einen Vektor

$$\vec{z}_4 = (-108.74 \;\; -90.56 \;\; -110.50 \;\; -95.80),$$

der auch als **Zeilenvektor** bezeichnet wird. Ein **Spaltenvektor** ist eine ganze Spalte der Matrix, z.B. die erste Spalte

$$\vec{s}_1 = \begin{pmatrix} 956 \\ -530 \\ -24.99 \\ -108.74 \\ -12.99 \end{pmatrix}.$$

Die letzte Bezeichnung eines Bestandteils einer Matrix, die wir hier an dieser Stelle einführen, ist der Begriff der Hauptdiagonalen. Die **Hauptdiagonale** einer Matrix sind die Elemente, bei der Zeilenindex und Spaltenindex übereinstimmen. In dem obigen Beispiel sind das die Elemente a_{11}, a_{22}, a_{33} und a_{44}, also die Zahlen 956, -530, -24.99 und -95.8.

Die folgende Grafik fasst die Bezeichnungen der Bestandteile einer Matrix übersichtlich zusammen.

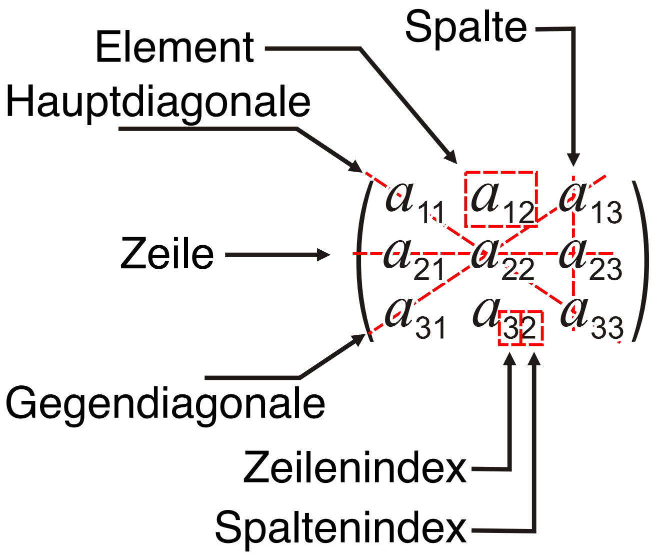

Figure 1: Bezeichnungen einer Matrix, Quelle: Ralf Pfeifer Wikimedia Commons, Lizenz: CC BY-SA 3.0

Quadratische Matrizen

Wir werden noch einige spezielle Matrizen kennenlernen. Eine spezielle Art von Matrix ist die **quadratische Matrix**. Bei einer quadratischen Matrix ist die Anzahl der Zeilen m gleich der Anzahl der Spalten n, also $m = n$. Beispielsweise ist die 2×2-Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0.5 & 17 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

eine quadratische Matrix.

In dem folgenden Video werden der Begriff Matrix, die Bestandteile einer Matrix und quadratische Matrizen erläutert.

Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Kapitel haben wir Fachbegriffe eingeführt, um eine Matrix zu beschreiben. Mit der quadratischen Matrix haben wir einen ersten speziellen Typ einer Matrix kennegelernt. In den nächsten Kapiteln werden wir weitere spezielle Matrizen betrachten, bevor wir zu den Rechenoperationen für Matrizen kommen.

0.1.2 Besondere Matrizen

Einige Matrizen haben eine besondere Struktur oder spezielle Zahlenwerte und werden so häufig in Rechnungen gebraucht, dass besondere Bezeichnungen für diese Matrizen eingeführt worden sind. In diesem Kapitel geht es um die Nullmatrix, um die Diagonalmatrix und die Einheitsmatrix.

Lernziele

Lernziele

- Sie kennen die besonderen Matrizen
  - **Nullmatrix**,
  - **Diagonalmatrix** und
  - **Einheitsmatrix**.

Nullmatrix

Eine Matrix, bei der jeder Eintrag Null ist, kann sehr nützlich sein. Sollen beispielsweise während eines Fuβballspiels die Pässe eines Spielers zu jedem anderen Spieler gezählt werden, dann ist es sinnvoll mit einer Matrix zu starten, bei der jeder Eintrag Null ist. Sobald ein Spieler zu einem anderen Spieler gepasst hat, wird an der entsprechenden Position der Wert um Eins hochgezählt. Aber zu Beginn des Fuβballspiels sieht die Matrix folgendermaβen aus:

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0
\end{pmatrix}.$$

Um eine Nullmatrix kürzer zu beschreiben, hat sich die folgende Notation eingebürgert: $\mathbf{0}_{2\times 3}$. Eine fettgedruckte Null mit der Dimension als Index, also eine Nullmatrix mit zwei Zeilen und drei Spalten. Damit würde die obige Fuβballmatrix als $\mathbf{0}_{11\times 11}$ notiert werden.

Diagonalmatrix

Im vorherigen Kapitel haben wir den Fachbegriff Hauptdiagonale kennengelernt. Damit sind die Einträge einer Matrix gemeint, bei denen die Zeilenposition gleich der Spaltenposition ist, also a_{11}, a_{22}, a_{33}, und so weiter. Eine Diagonalmatrix wird über alle anderen Elemente definiert.

Eine *quadratische* Matrix, bei der alle Elemente auβerhalb der Hauptdiagonalen Null sind, wird **Diagonalmatrix** genannt. In dem Beispiel

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

sind die Elemente $a_{12} = 0$ und $a_{21} = 0$, die nicht auf der Hauptdiagonalen liegen, Null. Also ist **A** eine Diagonalmatrix.

Einheitsmatrix

Eine besondere Diagonalmatrix ist die sogenannte **Einheitsmatrix**. Eine Einheitsmatrix ist zunächst einmal eine Diagonalmatrix. Damit ist zie also quadratisch und alle Elemente auβerhalb der Hauptdiagonalen sind Null. Damit eine Diagonalmatrix zu einer Einheitsmatrix wird, müssen zusätzlich alle Elemente auf der Hauptdiagonalen gleich der Zahl Eins sein. Oft wird sie mit einem groβen, fettegdrucktem E oder I gekennzeichnet. An den Variablennamen wird als tiefgestelltes Zeichen die Dimension der Matrix geschrieben. Und da die Matrix quadratisch sein muss, reicht auch nur die Anzahl der Zeilen, wie die folgenden Beispiele zeigen. Die Einheitsmatrix der Dimension 2×2 ist

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

während die Einheitsmatrix der Dimension 4×4 folgendermaβen geschrieben wird:

$$\mathbf{E}_4 = \mathbf{I}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Das folgende Video stellt diese speziellen Matrizen noch einmal vor.

Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Kapitel haben wir Matrizen kennengelernt, die einen besonderen Aufbau haben oder bei denen die Zahlen 0 und 1 an bestimmten Positionen stehen. Es gibt noch mehr Matrizen, die einen besonderen Aufbau haben wie beispielsweise transponierte oder symmetrische Matrizen. Diese lernen wir in einem späteren Kapitel kennen. Zunächst beschäftigen wir uns mit der Addition von Matrizen.

0.1.3 Matrizenaddition

In den letzten beiden Kapiteln haben wir gelernt, was Matrizen sind, und ausgewählte besondere Matrizen kennengelernt. In diesem Kapitel werden wir zum ersten Mal mit Matrizen rechnen.

Lernziele

> **Lernziele**
> Sie können zwei Matrizen **addieren**, also die Summe zweier Matrizen bilden.

Addition zwei Matrizen

Wir greifen das Beispiel auf, ein Fuβballspiel statistisch auszuwerten, um im darauffolgenden Training Defizite der Mannschaft zu reduzieren. Dazu wird das Passspiel der ersten fünf Minuten in einer Tabelle protokolliert (wir zeigen hier nur das Passspiel von vier Spielern):

	Spieler 1	Spieler 2	Spieler 3	Spieler 4
Spieler 1	0	8	3	20
Spieler 2	2	0	6	9
Spieler 3	17	4	0	2
Spieler 4	0	3	1	0

Tabelle lesen wir folgendermaβen. In der ersten Zeile stehen die Pässe des Spielers 1 an die anderen Spieler. Spieler 1 hat also 0-mal sich selbst angespielt, 8-mal Spieler 2 angespielt, 3-mal Spieler 3 und am häufigsten Spieler 4, den 20-mal von Spieler 1 angespielt wurde. Wir speichern diese Informationen etwas kompakter in der Matrix $\mathbf{P}_1$

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 3 & 20 \\ 2 & 0 & 6 & 9 \\ 17 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

In den nächsten 5 Minuten werden die folgenden Pässe mitprotokolliert

	Spieler 1	Spieler 2	Spieler 3	Spieler 4
Spieler 1	0	6	8	15
Spieler 2	4	0	6	9
Spieler 3	7	4	0	3
Spieler 4	0	4	0	0

als Matrix gespeichert:

$$\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 8 & 15 \\ 4 & 0 & 6 & 9 \\ 7 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Wenn wir jetzt wissen wollen, wie viele Pässe in den ersten 10 Minuten insgesamt von einem Spieler zu den anderen gespielt wurden, müssen wir jede Pässe addieren:

	Spieler 1	Spieler 2	Spieler 3	Spieler 4
Spieler 1	0	8+6	3+8	20+15
Spieler 2	2+4	0	6+6	9+9
Spieler 3	17+7	4+4	0	2+3
Spieler 4	0	3+4	1+0	0

ausgedrückt wird jedes Element der Matrix zu dem Element addiert, das die gleiche Position hat. Das setzt natürlich voraus, dass die beiden Matrizen die gleiche Dimension haben.

$$\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 3 & 20 \\ 2 & 0 & 6 & 9 \\ 17 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 6 & 8 & 15 \\ 4 & 0 & 6 & 9 \\ 7 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0 & 8+6 & 3+8 & 20+15 \\ 2+4 & 0+0 & 6+6 & 9+9 \\ 17+7 & 4+4 & 0+0 & 2+3 \\ 0+0 & 3+4 & 1+0 & 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 14 & 11 & 35 \\ 6 & 0 & 12 & 18 \\ 24 & 8 & 0 & 5 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Zusammenfassung und Ausblick

Nachdem wir in diesem Kapitel die Addition zweier Matrizen gelernt haben, wird es im nächsten Kapitel darum gehen, eine Matrix mit einem Skalar zu multiplizieren.

0.1.4 Skalarmultiplikation

Anstatt eine Matrix mehrfach zu sich selbst zu addieren, können wir dies durch die Multiplikation mit einem Skalar vereinfachen. In diesem Kapitel betrachten wir daher die Skalarmultiplikation und die dazugehörigen Rechenregeln.

Lernziele

Lernziele

- Sie sind in der Lage, eine Matrix mit einem Skalar multiplizieren, also eine **Skalarmultiplikation** durchführen.
- Sie können die **Differenz zweier Matrizen** berechnen, also Matrizen subtrahieren.
- Sie beherrschen die Rechenregeln für die Addition von Matrizen und für die Skalarmultiplikation, insbesondere
  - das **Kommutativgesetz**:
  $$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$
  - das **Assoziativgesetz**:
  $$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}),$$
  - und das **Distributivgesetz** für die Skalarmultiplikation:
  $$(s + t) \cdot \mathbf{A} = s \cdot \mathbf{A} + t \cdot \mathbf{A}$$
  $$s \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = s \cdot \mathbf{A} + s \cdot \mathbf{B}$$

Skalar mal Matrix

Wir greifen erneut das Beispiel auf, bei dem Fu*β*ballspieler sich gegenseitig Pässe zuspielen und die Pässe mitprotokolliert werden, damit die Spielerleistungen statistisch ausgewertet werden können. Diesmal betrachten wir jedoch die Pässe während des Trainings. Im Training werden die Spieler in Vierergruppen aufgeteilt, und jeder Spieler soll jedem anderen fünfmal den Ball zuspielen. Die aufgezeichneten Pässe sind in der folgenden Matrix kodiert:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 0 & 5 & 5 \\ 5 & 4 & 0 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Zur Erinnerung: Eine 5 in der ersten Zeile und in der zweiten Spalte (also $a_{12} = 5$) bedeutet, dass der 1. Spieler dem 2. Spieler fünfmal den Ball zugespielt hat. Es fällt jedoch auf, dass die Übung nicht korrekt ausgeführt wurde, da der 3. Spieler den 2. Spieler nur viermal angespielt hat ($a_{32} = 4$), während der 2. Spieler den 3. Spieler wie gefordert fünfmal angespielt hat ($a_{23} = 5$).

Nun soll diese Übung zwei weitere Male korrekt wiederholt werden. Diesmal verläuft die Übung fehlerfrei, und die neue Matrix zeigt die korrekten Pässe des zweiten und dritten Durchgangs:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 0 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 0 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Nach Abschluss der drei Übungen sollen alle Pässe insgesamt summiert werden. Wir könnten jedes Element einzeln addieren, indem wir die Anzahl der Pässe für jede Übung zusammenzählen:

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0+0+0 & 5+5+5 & 5+5+5 & 5+5+5\\ 5+5+5 & 0+5+5 & 5+5+5 & 5+5+5\\ 5+5+5 & 4+5+5 & 0+5+5 & 5+5+5\\ 5+5+5 & 5+5+5 & 5+5+5 & 0+5+5\end{pmatrix} \tag{8}$$

Da die zweite und dritte Übung identisch abliefen, können wir die Pässe der zweiten und dritten Übung auch direkt verdoppeln:

$$\mathbf{B}+\mathbf{B}=2\cdot\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2\cdot 0 & 2\cdot 5 & 2\cdot 5 & 2\cdot 5\\ 2\cdot 5 & 2\cdot 0 & 2\cdot 5 & 2\cdot 5\\ 2\cdot 5 & 2\cdot 5 & 2\cdot 0 & 2\cdot 5\\ 2\cdot 5 & 2\cdot 5 & 2\cdot 5 & 2\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 10 & 10 & 10\\ 10 & 0 & 10 & 10\\ 10 & 10 & 0 & 10\\ 10 & 10 & 10 & 0\end{pmatrix} \tag{9}$$

Allgemein wird bei einer Skalarmultiplikation eine Matrix mit einer reellen Zahl (Skalar) multipliziert, indem jedes Element der Matrix mit dem Skalar multipliziert wird.

Was ist ... die Skalarmultiplikation?
Bei der Skalarmultiplikation wird ein Skalar mit einer Matrix multipliziert, indem jedes Element der Matrix mit diesem Skalar multipliziert wird.

Ein weiteres Beispiel für eine Skalarmultiplikation ist die folgende Rechnung, bei der jedes Element der Matrix mit dem Bruch 1/2 multipliziert wird:

$$\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2 & 7\\ -10 & \frac{3}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3.5\\ -5 & \frac{3}{10}\end{pmatrix}. \tag{10}$$

Das folgende Video veranschaulicht ein weiteres Beispiel zur Skalarmultiplikation.

Rechengesetze für die Addition und Skalarmultiplikation von Matrizen

Bei der Berechnung der Summe der Pässe aus den drei Übungen haben wir intuitiv genutzt, dass die zweite und dritte Übung identisch abgelaufen sind, und uns daher zunächst mit der Berechnung von zwei gleichen Matrizen befasst. Für die vollständige Summe fehlt jedoch noch die Addition der Pässe aus der ersten Übung:

$$2\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 10 & 10 & 10\\ 10 & 0 & 10 & 10\\ 10 & 10 & 0 & 10\\ 10 & 10 & 10 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 5 & 5 & 5\\ 5 & 0 & 5 & 5\\ 5 & 4 & 0 & 5\\ 5 & 5 & 5 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 15 & 15 & 15\\ 15 & 0 & 15 & 15\\ 15 & 14 & 0 & 15\\ 15 & 15 & 15 & 0\end{pmatrix}. \tag{11}$$

Ist diese Vorgehensweise überhaupt erlaubt? Gilt also

$$2\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\stackrel{?}{=}\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{B}\,? \tag{12}$$

Ja, denn sowohl die Addition als auch die Skalarmultiplikation werden *elementweise* mit reellen Zahlen durchgeführt. Für reelle Zahlen gelten das Kommutativgesetz, das besagt, dass die Reihenfolge der Summanden keine Rolle spielt, sowie das Assoziativgesetz, das sicherstellt, dass die Reihenfolge der Gruppierungen bei der Addition ebenfalls irrelevant ist.

Da die Vektoraddition elementweise ausgeführt wird, überträgt sich das Kommutativgesetz der reellen Zahlen auf Matrizen. Das bedeutet, dass die Addition zweier Matrizen unabhängig von der Reihenfolge der Matrizen ist, wie die folgende allgemeine Rechnung zeigt:

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1}+b_{m2} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_{11}+a_{11} & b_{12}+a_{12} & \dots & b_{1n}+a_{1n}\\ b_{21}+a_{21} & b_{22}+a_{22} & \dots & b_{2n}+a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{m1}+a_{m1} & b_{m2}+a_{m2} & \dots & b_{mn}+a_{mn}\end{pmatrix}=\mathbf{B}+\mathbf{A}. \tag{13}$$

Auf dieselbe Weise kann auch das Assoziativgesetz angewendet werden: Es spielt keine Rolle, ob man zuerst zwei Matrizen addiert und dann die dritte dazu nimmt oder ob man zuerst eine Summe bildet und anschlieβend die verbleibenden Matrizen addiert. Dies erlaubt es uns, die Berechnung zu vereinfachen, indem wir z. B. direkt die Addition durch eine Skalarmultiplikation ersetzen. Anstatt $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{B}$ zu berechnen ist es erlaubt $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{B}) = \mathbf{A} + 2\mathbf{B}$ zu verwenden.

Ebenso überträgt sich das Distributivgesetz von reellen Zahlen auf die Addition von Matrizen und die Skalarmultiplikation. Dabei gibt es zwei Möglichkeiten:

1. Ein Skalar wird mit der Summe zweier Matrizen multipliziert. Das entspricht der Verteilung des Skalars auf beide Matrizen, sodass jede Matrix einzeln mit dem Skalar multipliziert wird, also

$$s \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = s \cdot \mathbf{A} + s \cdot \mathbf{B}. \tag{14}$$

2. Zwei Skalare werden addiert und die resultierende Summe wird mit einer Matrix multipliziert. Dies entspricht der Multiplikation der Matrix mit jedem Skalar einzeln und der anschlieβenden Addition der Ergebnisse, also

$$(s + t) \cdot \mathbf{A} = s \cdot \mathbf{A} + t \cdot \mathbf{A}. \tag{15}$$

Differenz von Matrizen

Die Subtraktion zweier Matrizen ist streng genommen keine eigene Rechenoperation, sondern eine Kombination der Vektoraddition und der Skalarmultiplikation mit dem Faktor -1. Um Berechnungen zu vereinfachen führen wir dennoch die **Subtraktion zweier Matrizen** als elementweise Subtraktion der Einträge ein:

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \dots & a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \dots & a_{2n} - b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} - b_{m1} & a_{m2} - b_{m2} & \dots & a_{mn} - b_{mn} \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Soll beispielsweise die Differenz der folgenden zwei Matrizen gebildet werden, werden die entsprechenden Einträge der beiden Matrizen elementweise voneinander subtrahiert:

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1.5 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 1.5 & 11 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Wie bei der Vektoraddition kann die Differenz zweier Matrizen nur gebildet werden, wenn die Dimension der beiden Matrizen übereinstimmt, d.h. die Anzahl an Zeilen und Spalten übereinstimmt.

Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Kapitel haben wir die Skalarmultiplikation kennengelernt, bei der jeder Eintrag einer Matrix mit einem Skalar multipliziert wird. Die Rechengesetze der reellen Zahlen, wie das Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz, lassen sich auf die Vektoraddition und die Skalarmultiplikation übertragen. Im nächsten Kapitel werden wir die Multiplikation zweier Matrizen erlernen.

0.1.5 Matrizenmultiplikation

Nachdem wir in den vorangegangenen Kapiteln die Addition von Matrizen und die Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar behandelt haben, wenden wir uns nun der Matrizenmultiplikation zu. Im Gegensatz zu den zuvor genannten Operationen erfolgt die Matrizenmultiplikation nicht elementweise *nicht elementweise*.

Lernziele

Lernziele

- Sie können zwei Matrizen miteinander multiplizieren.
- Sie wissen, dass die Matrixmultiplikation *nicht kommutativ* ist, d.h. dass im Allgemeinen $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ gilt.
- Sie können die Rechenregeln der Matrizenmultiplikation anwenden, insbesondere
  - Assoziativgesetz und
  - Distributivgesetz.

Matrix mal Matrix

Anders als man vielleicht erwarten würde, erfolgt die Matrizenmultiplikation nicht elementweise. Daher müssen die Matrizen auch nicht die gleiche Dimension haben. Stattdessen muss die Anzahl der Spalten der ersten Matrix mit der Anzahl der Zeilen der zweiten Matrix übereinstimmen. Das Ergebnis ist dann eine Matrix mit der Zeilenanzahl der ersten und der Spaltenanzahl der zweiten Matrix. Sie wird **Produktmatrix** genannt. Hat die erste Matrix **A** fünf Zeilen und drei Spalten und die zweite Matrix **B** drei Zeilen und vier Spalten, dann hat die Produktmatrix **C** fünf Zeilen und vier Spalten. Dieses Prinzip wird in der folgenden Skizze verdeutlicht.

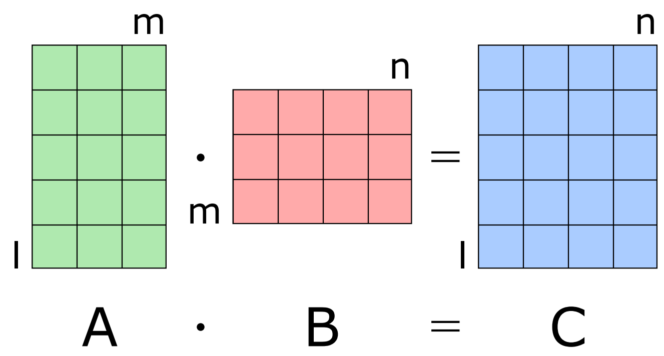

Figure 2: Anforderungen an Spaltenanzahl der ersten Matrix und Zeilenanzahl der zweiten Matrix, Quelle: Quartl [Wikimedia Commons] (Datei:Matrix multiplication qtl1.svg), Lizenz: CC BY-SA 3.0

Nun kennen wir die Bedingungen, unter denen zwei Matrizen multipliziert werden dürfen, und wissen, welche Dimension die Produktmatrix hat. Aber wie wird die Matrizenmultiplikation tatsächlich durchgeführt? Dazu betrachten wir ein Beispiel. Gegeben seien die beiden Matrizen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Zunächst überprüfen wir, ob wir die beiden Matrizen multiplizieren dürfen. Da die Spaltenanzahl der ersten Matrix **A** zwei und die Zeilenanzahl der zweiten Matrix **B** ebenfalls zwei ist, dürfen wir das Matrixprodukt berechnen. Die Produktmatrix wird die Dimension 4×3 haben und die folgende Form annehmen:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Um das Element in der ersten Zeile und ersten Spalte, also c_{11}, zu berechnen, nehmen wir die erste Zeile von $\mathbf{A}$ und die erste Spalte von $\mathbf{B}$ und bilden das *Skalarprodukt* dieser beiden Vektoren:

$$c_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 = -1. \tag{20}$$

Dann berechnen wir das Element c_{12}, indem wir die erste Zeile von $\mathbf{A}$ mit der zweiten Spalte von $\mathbf{B}$ elementweise multiplizieren und aufaddieren:

$$c_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 = 0. \tag{21}$$

Das Element c_{13} berechnen wir analog aus dem Skalarprodukt der ersten Zeile von $\mathbf{A}$ mit der dritten Spalte von $\mathbf{B}$:

$$c_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 5 = 2. \tag{22}$$

Damit haben wir die ersten drei Elemente der Produktmatrix $\mathbf{C}$ berechnet:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Um die zweite Zeile der Produktmatrix zu berechnen, berechnen wir das Skalarprodukt der zweiten Zeile von $\mathbf{A}$ mit der ersten, zweiten und dritten Spalte von $\mathbf{B}$:

$$\begin{aligned} c_{21} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 = -4, \\ c_{22} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 3 = -3, \\ c_{23} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 5 = -1. \end{aligned}$$

Damit haben wir die Hälfte der Elemente von $\mathbf{C}$ berechnet:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -4 & -3 & -1 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Für die dritte Zeile von $\mathbf{C}$ berechnen wir die Skalarprodukte der dritten Zeile von $\mathbf{A}$ mit der ersten, zweiten und dritten Spalte von $\mathbf{B}$. Und zuletzt berechnen wir noch die vierte Zeile von $\mathbf{C}$ auf die gleiche Weise. Insgesamt erhalten wir

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -4 & -3 & -1 \\ 3 & 9 & 21 \\ -2 & 3 & 13 \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Um den Überblick bei der Matrizenmultiplikation zu behalten, kann das sogenannte **Falk-Schema** genutzt werden. Es hilft, die einzelnen Skalarprodukte übersichtlich zu organisieren und ist besonders in der Zwischenrechnung nützlich. Wichtig ist jedoch, dass das endgültige Ergebnis, die Produktmatrix, separat notiert wird und nicht nur die Zahlen im Falk-Schema stehen bleiben.

Rechenregeln für die Matrizenmultiplikation

Bei der Vektoraddition und der Skalarmultiplikation haben sich die Rechenregeln aus der Addition und Multiplikation reeller Zahlen direkt auf die entsprechenden Matrizenoperationen übertragen, da diese elementweise ausgeführt werden. Das ist bei der Matrizenmultiplikation nicht der Fall, weshalb das Kommutativgesetz nicht gilt. Es gibt zwar Ausnahmen, in denen $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ gilt, doch in den meisten Fällen ist das nicht so.

Im obigen Beispiel haben wir berechnet:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -4 & -3 & -1 \\ 3 & 9 & 21 \\ -2 & 3 & 13 \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Wenn wir jedoch $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ berechnen wollen, also

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \tag{27}$$

wäre das gar nicht möglich, da die Anzahl der Spalten der ersten Matrix drei und die Anzahl der Zeilen der zweiten Matrix vier ist. Selbst wenn die Dimensionen der beiden Matrizen passen würden, gilt das Kommutativgesetz meist nicht, wie das folgende Beispiel zeigt. Es gilt:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \tag{28}$$

doch für $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ erhalten wir:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Glücklicherweise gelten für die Matrizenmultiplikation das Assoziativgesetz und das Distributivgesetz, die uns das Rechnen mit Matrizen häufig erleichtern:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} &= \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \\ \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \\ (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \end{aligned}$$

Diese Regeln sind besonders nützlich, wenn es darum geht, komplexere Matrizenprodukte zu berechnen. In den folgenden Videos wird auf die Rechenregeln für Matrizen ausführlich eingegangen.

Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Kapitel haben wir uns mit der Matrizenmultiplikation beschäftigt und die dazugehörigen Rechenregeln kennengelernt. Wir haben verstanden, dass die Matrizenmultiplikation nicht elementweise erfolgt und das Kommutativgesetz in der Regel nicht gilt. Dafür gelten jedoch das Assoziativ- und das Distributivgesetz, die uns helfen, komplexere Berechnungen zu vereinfachen.

Damit sind die grundlegenden Rechenoperationen für Matrizen abgeschlossen. Im nächsten Kapitel wenden wir uns besonderen Matrizenarten zu, wie z. B. transponierten Matrizen, Dreiecksmatrizen und symmetrischen Matrizen.

0.1.6 Transponierte und symmetrische Matrizen

Die Nullmatrix, Diagonalmatrix und die Einheitsmatrix haben wir bereits kennengelernt. Nun lernen wir weitere besondere Matrizen kennen, die transponierte Matrix und die symmetrische Matrix.

Lernziele

Lernziele

- Sie wissen, was eine **transponierte Matrix** ist und können zu einer gegebenen Matrix die transponierte Matrix berechnen.
- Sie kennen die **Rechenregeln für transponierte Matrizen**.
- Sie können überprüfen, ob eine Matrix **symmetrisch** oder **antisymmetrisch/schiefsymmetrisch** oder nichts davon ist.
- Sie können eine Matrix in einen symmetrischen und antisymmetrischen Teil zerlegen.

Transponierte Matrix

Eine **transponierte Matrix** entsteht, indem man die Zeilen und die Spalten einer Matrix vertauscht. Gegeben sei beispielsweise die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Diese Matrix hat die Dimension 3×2, also drei Zeilen und zwei Spalten. Die ttansponierte Matrix hat dann zwei Zeilen und drei Spalten. Die erste Zeile wird zur ersten Spalte, die zweite Zeile zur zweiten Spalte und die dritte Zeile zur dritten Spalte. Insgesamt erhalten wir fúr die transponierte Matrix den Ausdruck

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Die transponierte Matrix von $\mathbf{A}$ wird mit einem groβen "T" bezeichnet, also als $\mathbf{A}^T$. Manchmal wird auch ein kleines "t" verwendet, also $\mathbf{A}^t$. Der Vorgang des Zeilen-Spalten-Tauschens wird **Transponieren** genannt.

Transponieren wir $\mathbf{A}^T$ erneut, erhalten wir die ursprüngliche Matrix $\mathbf{A}$, wie die folgende Animation zeigt.

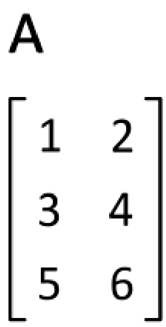

Figure 3: Transponieren einer Matrix, Quelle: Von Lucas Vieira, Wikimedia Commons, Lizenz: gemeinfrei

Rechenregeln für transponierte Matrizen

Eine Rechenregel für das zweifache Transponieren einer Matrix haben wir oben schon als Animation gesehen. Wir halten fest: wird eine Matrix zweimal transponiert, so ist das Ergebnis die ursprüngliche Matrix, also

$$\left(\mathbf{A}^T\right)^T = \mathbf{A}. \tag{32}$$

Als nächstes betrachten wir die Matrizenaddition und die Skalarmultiplikation in Verbindung mit dem Transponieren. Transponieren wir eine Summe von Matrizen, können wir auch erst die Matrizen einzeln transponieren und dann die Summe berechnen. In Formelschreibweise gilt also

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T. \tag{33}$$

Auch bei der Skalarmultiplikation ist es irrelevant, ob von dem Ergebnis nach der Skalarmultiplikation die transponierte Matrix berechnet wird oder vor der Skalarmultiplikation:

$$(s \cdot \mathbf{A})^T = s \cdot \mathbf{A}^T. \tag{34}$$

Wiederum ist es die Matrizenmultiplikation, die sich besonders verhält. Bei der Matrizenmultiplikation ändert sich die Reihenfolge beim Multiplizieren:

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T. \tag{35}$$

Symmetrische und antisymmetrische Matrizen

Eine weitere besondere Matrix ist die **symmetrische Matrix**. Man nennt eine quadratische Matrix $\mathbf{A}$ symmetrisch, wenn das Element a_{ij} der i-ten Zeile und der j-ten Spalte mit dem Element a_{ji} der j-ten Zeile und der i-ten Spalte übereinstimmt. Eine symmetrische Matrix ist also spiegelsymmetrisch bezüglich der Hauptdiagonalen. Beispielsweise ist die folgende Matrix symmetrisch:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3.5 & -1 \\ 3.5 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 17 \end{pmatrix}. \tag{36}$$

Mit Hilfe der Definition der transponierten Matrix können wir eine symmetrische Matrix auch folgendermaβen spezifizieren.

Was ist ... eine symmetrische Matrix?
Eine quadratische Matrix $\mathbf{A}$ ist symmetrisch, wenn

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A} \tag{37}$$

gilt, wobei $\mathbf{A}^T$ die transponierte Matrix von $\mathbf{A}$ bezeichnet.

Oder anders ausgedrückt: der Prozess des Transponieren ändert die Matrix nicht.
Sind zwei Matrizen symmetrisch, dann ist auch ihre Summe wieder symmetrisch, denn es gilt

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T = \mathbf{A}+\mathbf{B}. \tag{38}$$

Das gilt auch für eine Matrix, die mit einem Skalar multipliziert wird. Bei der Skalarmultiplikation bleibt die Symmetrie erhalten. Anders sieht es wieder einmal aus, wenn wir die Matrizenmultiplikation betrachten.

Im Allgemeinen gilt für symmetrische Matrizen

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \overset{i.Allg.}{\neq} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}. \tag{39}$$

Nur wenn für die beiden Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ *zufälligerweise* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ gilt, ist auch die Produktmatrix symmetrisch.

Der Gegenpart zu einer symmetrischen Matrix ist die **antisymmetrische Matrix**. Eine Matrix wird antisymmetrisch genannt, wenn die Eigenschaft

$$\mathbf{A}^T = -\mathbf{A} \tag{40}$$

erfüllt ist. Für alle Elemente der Matrix gilt also $a_{ij} = -a_{ji}$. Manchmal wird eine solche Matrix auch **schiefsymmetrische Matrix** genannt.

Ein Beispiel für eine schiefsymmetrische Matrix ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 3.5 & -1 \\ -3.5 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 17 \end{pmatrix}. \tag{41}$$

Zerlegung in symmetrische und antisymmetrische Matrix

Für quadratische Matrizen können wir eine Zerlegung der Matrix in ihren symmetrischen Anteil und ihren antisymmetrischen Anteil vornehmen. Zunächst aber halten wir fest: wird eine quadratische Matrix $\mathbf{A}$ zu ihrer eigenen Transponierten addiert, dann ist das Ergebnis eine symmetrische Matrix. In Formeln notieren wir Folgendes: Wenn $\mathbf{A}$ eine quadratische Matrix ist, dann ist $\mathbf{A} + \mathbf{A}^T$ eine symmetrische Matrix.

Dass diese Aussage wahr ist, können wir folgendermaβen zeigen. Wir starten mit dem Ausdruck $(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)^T$ und vereinfachen ihn gemäβ der obigen Rechenregeln:

$$\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\right)^T = \mathbf{A}^T + \left(\mathbf{A}^T\right)^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{A} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^T. \tag{42}$$

Das ist aber genau die Eigenschaft, die eine quadratische Matrix zu einer symmetrischen Matrix macht.

Analog dazu können wir zeigen, dass $\mathbf{A} - \mathbf{A}^T$ eine antisymmetrische Matrix ist:

$$\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\right)^T = \mathbf{A}^T - \left(\mathbf{A}^T\right)^T = \mathbf{A}^T - \mathbf{A} = -\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\right). \tag{43}$$

Wir wissen also, dass $\mathbf{A}+\mathbf{A}^T$ eine symmetrische Matrix und $\mathbf{A}-\mathbf{A}^T$ eine antisymmetrische Matrix ist. Addieren wir die beiden, erhalten wir

$$\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\right) + \left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\right) = 2 \cdot \mathbf{A}. \tag{44}$$

Teilen wir auf beiden Seiten der Gleichung durch 2 erhalten wir

$$\mathbf{A} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\right)}_{\text{symmetrisch}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\right)}_{\text{antisymmetrisch}} \tag{45}$$

und haben so die quadratische Matrix $\mathbf{A}$ in eine symmetrischen und einen antisymmetrischen Teil zerlegt.

Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Kapitel haben wir symmetrische Matrizen kennengelernt, die sich beim Transponieren nicht verändern. Symmetrische Matrizen sind eines der wichtigsten Hilfsmittel der Linearen Algebra und werden uns aber auch in der Analysis wieder begegnen, wenn es um die Bestimmung von Extrema zweidimensionaler reellwertiger Funktionen gehen wird.

0.2 Determinante und Inverse

0.2.1 Inverse Matrizen

In dem vorangegangenen Kapitel haben wir die Determinante kennengelernt. Mit Hilfe der Determinante können wir beispielsweise entscheiden, ob ein lineares Gleichungssystem eindeutig lösbar ist oder nicht. Dazu behandeln wir in diesem Kapitel das Thema inverse Matrizen.

Lernziele

> **Lernziele**
>
> - Sie wissen, wann es erlaubt ist, die **inverse Matrix** einer quadratischen Matrix zu berechnen und welche Rolle die Determinante dabei spielt.
> - Sie können die **Inverse einer** 2×2**-Matrix** berechnen.
> - Sie können die **Inverse einer** $n \times n$**-Matrix** für $n > 2$ berechnen.
> - Sie kennen die **Rechenregeln für inverse Matrizen** und können sie anwenden.

Inverse Matrix von 2×2**-Matrizen**

Anhand der Überschrift können Sie schon erahnen, dass auch der Fachbegriff **inverse Matrix** nur für quadratische Matrizen definiert ist. Wir beginnen mit der Inversen einer 2×2-Matrix, also allgemein einer Matrix der Form

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \tag{46}$$

Wenn die Determinante dieser Matrix *ungleich Null* ist, können wir die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ mit der Definition

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{47}$$

bilden. Jetzt ist auch ersichtlich, warum wir $\det(\mathbf{A})$ gefordert haben, denn das Teilen durch Null ist strikt verboten.

Betrachten wir als Beispiel die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}. \tag{48}$$

Die Determinante lautet

$$\det(\mathbf{A}) = 2 \cdot 5 - 1 \cdot 3 = 10 - 3 = 7 \neq 0. \tag{49}$$

Da die Determinante ungleich null ist, können wir die Inverse der Matrix berechnen. Wir setzen die Werte in die allgemeine Formel ein:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{50}$$

Das ergibt die Inverse:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & \frac{-3}{7} \\ \frac{-1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}. \tag{51}$$

Warum ist die Inverse so interessant? Wir berechnen das Matrizenprodukt $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{52}$$

Das Ergebnis ist die Einheitsmatrix der Dimension 2×2. Tatsächlich ist das auch die Definition der inversen Matrix.

Was ist ... die inverse Matrix?
Die inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ einer quadratischen Matrix $\mathbf{A}$ ist ebenfalls eine quadratische Matrix, die wenn sie mit der ursprünglichen Matrix multipliziert wird, die Einheitsmatrix $\mathbf{E}$ ergibt:

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}. \tag{53}$$

Inverse Matrix von $n \times n$-Matrizen

Die obige Definition einer inversen Matrix ist für alle quadratischen Matrizen gültig. Auch bei einer quadratischen $n \times n$-Matrix $\mathbf{A}$ ist also die inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ diejenige Matrix, für die dann $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$ gilt. Leider gibt es keine so schöne einfache Formel zur Berechnung der Inversen. Die Berechnung der Inversen einer $n \times n$-Matrix ist aufwändiger als bei 2×2-Matrizen und erfordert in der Regel eine systematische Methode. Eines der bekanntesten Verfahren ist der Gauβ-Algorithmus, den wir auch schon zur Lösung eines linearen Gleichungssystems kennengelernt haben.

Das Gauβ-Verfahren funktioniert durch das Anwenden von elementaren Zeilenumformungen auf die Matrix $\mathbf{A}$, bis sie in die Einheitsmatrix $\mathbf{E}$ umgewandelt ist. Dieselben Umformungen werden parallel auf eine Einheitsmatrix der gleichen Dimension angewendet, um schlieβlich die Inverse zu erhalten. Der Algorithmus verläuft in den folgenden Schritten:

1. Gegeben ist eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
2. Füge rechts neben $\mathbf{A}$ die Einheitsmatrix $\mathbf{E}$ dazu.
3. Wende elementare Zeilenumformungen an, um $\mathbf{A}$ in die Einheitsmatrix $\mathbf{E}$ zu überführen.
4. Führe die gleichen Zeilenumformungen mit der Einheitsmatrix $\mathbf{E}$ rechts daneben durch.
5. Ist die ursprüngliche Matrix $\mathbf{A}$ in die Einheitsmatrix umgeformt, dann ist die ursprüngliche Einheitsmatrix rechts daneben nun die gesuchte inverse Matrix.

Am einfachsten ist es, sich den Gauβ-Algorithmus im folgenden Video anzusehen.

0.2.2 Rechenregeln inverse Matrizen

TODO

Eigenschaften und Rechenregeln für inverse Matrizen

Die Inverse einer Matrix hat mehrere nützliche Eigenschaften, die häufig in der linearen Algebra und in Anwendungen wie der Lösung von linearen Gleichungssystemen verwendet werden. Im Folgenden listen wir die wichtigsten Eigenschaften der Inversen einer Matrix auf.

Inverse der Einheitsmatrix Die Einheitsmatrix $\mathbf{E}$ ist immer invertierbar, und ihre Inverse ist sie selbst:

$$\mathbf{E}^{-1} = \mathbf{E}. \tag{54}$$

Dies gilt für jede quadratische Einheitsmatrix beliebiger Dimension.

Inverse des Produkts zweier Matrizen Wenn $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ zwei invertierbare Matrizen der gleichen Dimension sind, dann ist auch das Produkt $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ invertierbar, und es gilt:

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}. \tag{55}$$

Die Reihenfolge wird bei der Multiplikation der Inversen umgekehrt. Eine Eselsbrücke für diese Rechenregel wird in dem folgenden Video gezeigt.

Inverse der inversen Matrix Die Inverse einer Matrix ist eindeutig, und die Inverse der inversen Matrix ist die ursprüngliche Matrix:

$$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A}. \tag{56}$$

Inverse der Transponierten Die Inverse der transponierten Matrix $\mathbf{A}^T$ ist die Transponierte der Inversen von $\mathbf{A}$:

$$\left(\mathbf{A}^T\right)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T. \tag{57}$$

Das bedeutet, dass die Operationen der Inversion und der Transposition miteinander vertauschbar sind.

Inverse bei Skalarmultiplikation Ist s ein Skalar und $\mathbf{A}$ eine $n \times n$-Matrix, dann gilt für die Inverse des Produkts von s und $\mathbf{A}$:

$$(s \cdot \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{s} \cdot \mathbf{A}^{-1}, \quad s \neq 0. \tag{58}$$

Das bedeutet, dass wenn der Skalar s aus der Inversenoperation herausgezogen wird, mit dem Kehrwert multipliziert werden muss.

Inverse bei symmetrischen Matrizen Ist eine Matrix symmetrisch, ist ihre inverse Matrix ebenfalls symmetrisch.

Die oben genannten Rechenregeln werden auch in dem folgenden Video erläutert.

Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Kapitel haben wir die Berechnung und Eigenschaften der Inversen von Matrizen behandelt. Dabei haben wir gesehen, dass die Inverse existiert, wenn die Determinante ungleich null ist, und wie man sie mit dem Gauβ-Algorithmus berechnet.

Im nächsten Kapitel werden wir orthogonale Matrizen untersuchen, die besondere Eigenschaften haben, wie die Gleichheit von Transponierter und Inverser. Diese Matrizen werden beispielsweise in der Robotik eingesetzt, um Rotationen zu beschreiben.

0.2.3 Lineare Gleichungssysteme mit Matrizenrechnung lösen

Die Lösung linearer Gleichungssysteme haben wir im 5. Part kennengelernt als es darum ging, Schnitte von Geraden und Ebenen zu bestimmen. Da wir dreidimensionale Räume betrachtet haben, bestanden die linearen Gleichungssyteme aus drei Gleichungen. Mit Hilfe der Matrizenrechnung können auch gröβere Systeme effizient und systematisch gelöst werden. In diesem Kapitel lernen wir, wie lineare Gleichungssysteme durch die Anwendung von Matrizen und deren Inversen gelöst werden können.

Lernziele

Lernziele

- Sie verstehen, wie lineare Gleichungssysteme mit Hilfe von Matrizen dargestellt werden können.
- Sie können eine inverse Matrix dazu benutzen, ein lineares Gleichungssystem zu lösen.
- Sie können den **Gauβ-Algorithmus in Matrix-Darstellung** zur Lösung von linearen Gleichungssystemen anwenden.

Matrixdarstellung eines linearen Gleichungssystems

Ein lineares Gleichungssystem kann kompakt in Matrixform dargestellt werden. Betrachten wir ein allgemeines lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen und n Unbekannten:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n.
\end{aligned}$$

Dies lässt sich in kompakter Matrixschreibweise darstellen als:

$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}, \tag{59}$$

wobei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die **Koeffizientenmatrix**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{60}$$

ist und $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ der **Vektor der Unbekannten** mit

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{61}$$

Die rechte Seite des linearen Gleichungssystems wird im **Ergebnisvektor** $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ zusammengefasst:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \tag{62}$$

Betrachten wir das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 - 4x_3 &= -4 \\ 6x_1 - 6x_2 - 7x_3 &= -11 \\ -3x_1 + 6x_2 + 7x_3 &= 11 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem können wir in Matrixform darstellen. Die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ ist:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -4 \\ 6 & -6 & -7 \\ -3 & 6 & 7 \end{pmatrix}. \tag{63}$$

Der Vektor der Unbekannten $\vec{x}$ ist:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{64}$$

und der Ergebnisvektor $\vec{b}$ ist:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -11 \\ 11 \end{pmatrix}. \tag{65}$$

Das gesamte lineare Gleichungssystem lässt sich nun in Matrixform schreiben als $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$, also

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & -4 \\ 6 & -6 & -7 \\ -3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -11 \\ 11 \end{pmatrix}. \tag{66}$$

Lösung des linearen Gleichungssystems mit Hilfe der inversen Matrix

Um das zuvor dargestellte lineare Gleichungssystem zu lösen, können wir die Inverse der Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ berechnen, sofern $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ ist. Die Lösung eines linearen Gleichungssystems der Form

$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b} \tag{67}$$

kann dann durch die folgende Gleichung bestimmt werden:

$$\vec{x} = \mathbf{A}^{-1}\vec{b} \tag{68}$$

Diese Rechnung führen wir nun für das Beispiel aus.

Zuerst überprüfen wir, ob die Matrix $\mathbf{A}$ eine Inverse besitzt, indem wir ihre Determinante berechnen. Die Determinante von $\mathbf{A}$ berechnet sich wie folgt:

$$\det(\mathbf{A}) = 3 \cdot \det \begin{pmatrix} -6 & -7 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} - (-4) \cdot \det \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} - 4 \cdot \det \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}. \tag{69}$$

Dies ergibt:

$$\det(\mathbf{A}) = 3 \cdot (-42 + 42) + 4 \cdot (42 - 21) - 4 \cdot (36 - 18) = 12. \tag{70}$$

Da $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ gilt, hat die Koeffizientenmatrix eine Inverse. Wir rechnen die inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ mit dem Gauβ-Algorithmus aus und erhalten

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ -21 & 9 & -3 \\ 18 & -6 & 6 \end{pmatrix}. \tag{71}$$

Die gesuchte Lösung des linearen Gleichungssystems erhalten wir nun, indem wir die Inverse mit dem Ergebnisvektor multiplizieren:

$$\vec{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \vec{b} = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ -21 & 9 & -3 \\ 18 & -6 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -11 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}. \tag{72}$$

Die gesuchte Lösung ist also $x_1 = 0$, $x_2 = -4$ und $x_3 = 5$.

Haben wir einmal die inverse Marix bestimmt, können wir sie immer wieder benutzen. Sollte nun ein anderes Gleichungssystem gelöst werden, bei dem die Koeffizientenmatrix gleich bleibt, sich aber der Ergebnisvektor ändert, brauchen wir nur die Inverse mit dem neuen Ergebnisvektor zu multiplizieren.

Sollten wir sicher sein, dass wir nur für einen einzigen Ergebnisvektor das lineare Gleichungssystem lösen wollen, können wir den Gauβ-Algorithmus auch direkt mit der Koeefizientenmatrix und dem Ergebnisvektor durchführen. Diese Kurzschreibweise nennt man **erweiterte Koeffizientenweise**. Sie wird in dem folgenden Video vorgestellt.

Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Kapitel haben wir eine alternative Darstellung kennengelernt, lineare Gleichungssysteme mit Matrizen zu lösen. Insbesondere Computerprogramme und Verfahren der Künstlichen Intelligenz nutzen diese kompakte und effiziente Art und Weise, Informationen darzustellen und zu verarbeiten. Im nächsten Kapitel werden wir Eigenschaften von Matrizen lernen, die zur Beschreibung von schwingenden Systemen essentiell sind.

0.2.4 Determinanten

In den vorangegangenen Kapiteln haben wir Matrizen kennengelernt, die eine besondere Struktur haben. In diesem Kapitel geht es um eine Eigenschaft von quadratischen Matrizen, die durch eine Zahl gemessen wird und nützliche Anwendungen hat, die sogenannte Determinante.

Lernziele

Lernziele

- Sie können die **Determinante** einer 2×2-Matrix berechnen.
- Sie können die Determinante einer $n \times n$-Matrix mit $n > 2$ berechnen, indem Sie den **Laplaceschen Entwicklungssatz** anwenden.

Determinante von 2×2-Matrizen

Die Determinante gibt es nur für quadratische Matrizen. Für eine 2×2-Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{73}$$

wird die Determinante durch den Ausdruck $a \cdot d - c \cdot b$ berechnet.Die Determinante ordnet jeder quadratischen Matrix eine reelle Zahl zu. Diese Eigenschaft ist also eine Funktion und wird in der Regel mit det abgekürzt. Es gilt also

$$\det(\mathbf{A}) = a \cdot d - c \cdot b. \tag{74}$$

Manchmal werden auch zwei senkrechte Striche genommen, die die Matrixklammern ersetzen, um die Determinante einer Matrix zu kennzeichnen:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - c \cdot b. \tag{75}$$

Wir betrachten ein Beispiel:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 1 \cdot 3 = 7. \tag{76}$$

Determinante von 3×3-Matrizen

TODO: Sarrus

0.2.5 Laplacescher Entwicklungssatz

Hat die Matrix eine höhere Dimension, wird die Determinante rekursiv aus den Determinanten von kleineren Teilmatrizen berechnet. Dazu verwenden wir den sogenannten **Laplaceschen Entwicklungssatz**.

Bei der Determinantenberechnung mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz entwickeln wir die Determinante nach einer Zeile oder einer Spalte. Wenn wir die Determinante der Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nach der i-ten Zeile entwickeln, gilt

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot \det(\mathbf{A}_{ij}), \tag{77}$$

wobei $\mathbf{A_{ij}}$ diejenige Matrix ist, die entsteht, wenn die i-te Zeile und j-te Spalte gestrichen werden.

Wird hingegen nach der j-ten Spalte entwickelt, lautet die Formel folgendermaβen:

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot \det(\mathbf{A}_{ij}). \tag{78}$$

Auch hier bezeichnet $\mathbf{A}_{ij}$ die Untermatrix, die durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht.

Die Formeln sind trocken und schwer zu merken. Am einfachsten ist es, vorab die Matrixelemente mit einem Schachbrettmuster von Plus und Minus zu versehen, wie in dem folgenden Video demonstriert wird.

Übung "Berechnung von 3x3-Matrizen"

Berechnen Sie auf der Internetseite https://matex.mint-kolleg.kit.edu/MATeX/ solange Determinanten von 3×3-Matrizen, bis Sie dreimal hintereinander eine Aufgabe korrekt gelöst haben.

Hinweis: Die Frage nach der Invertierbarkeit können Sie (voererst) ignorieren.

Übung "Berechnung von 4x4-Matrizen"

Berechnen Sie auf der Internetseite https://matex.mint-kolleg.kit.edu/MATeX/ solange Determinanten von 4×4-Matrizen, bis Sie dreimal hintereinander eine Aufgabe korrekt gelöst haben.

Hinweis: Die Frage nach der Invertierbarkeit können Sie (voererst) ignorieren.

0.2.6 Eigenschaften von Determinanten

Die Determinante ist eine Eigenschaft von quadratischen Matrizen, aber sie selbst hat auch wiederum Eigenschaften und Besonderheiten, die wir hier notieren.

1. Die Determinante der Einheitmatrix ist Eins.
2. Die Determinante der transponierten Marix ist gleich der Determinanten der ursprünglichen Matrix.
3. Für quadratische Matrizen gleicher Dimension gilt:
$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B}). \tag{79}$$
4. Multipliziert man eine Zeile der Matrix mit einem Skalar, so wird auch die Determinante mit diesen Skalar multipliziert.
5. Ist s ein Skalar und $\mathbf{A}$ eine quadratische Matrix der Dimension $n \times n$, dann gilt:
$$\det(s \cdot \mathbf{A}) = s^n \cdot \det(\mathbf{A}). \tag{80}$$
6. Hat die Matrix eine Zeile oder eine Spalte, die komplett aus Nullen besteht, dann ist die Determinante Null.
7. Sind zwei Zeilen gleich, ist die Determinante Null.
8. Sind zwei Spalten gleich, ist die Determinante Null.
9. Vertauscht man zwei Zeilen, dann wechselt das Vorzeichen der Determinante.
10. Vertauscht man zwei Spalten, dann wechselt das Vorzeichen der Determinante.
11. Addiert man das Vielfache einer anderen Zeile(Spalte) zu einer anderen Zeile, dann ändert sich die Determinante nicht. Das kann man ausnutzen, um die Determinante einer Matrix beispielsweise mit dem Gauβ-Algorithmus zu berechnen oder viele Nullen in der Matrix zu erzeugen.

Diese und weitere Rechenregeln werden auch in dem folgenden Video erläutert.

Zusammenfassung und Ausblick

Zunächst ist die Determinante nur eine Kennzahl einer quadratischen Matrix. Wir haben uns in diesem Kapitel mit der Definition und den Rechenregeln beschäftigt. In den nächsten Kapiteln werden wir die Determinante anwenden um beispielsweise zu entscheiden, ob eine Matrix invertierbar ist oder um die Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen zu berechnen.

0.3 Lineare Abbildungen

0.3.1 Orthogonale Matrizen

Orthogonale Matrizen spielen eine wichtige Rolle zur Beschreibung von Drehungen und Spiegelungen in der Geometrie. In diesem Kapitel werden die Definition und Eigenschaften orthogonaler Matrizen vorgestellt sowie deren Anwendungsmöglichkeiten erläutert.

Lernziele

Lernziele

- Sie wissen, was eine **orthogonale** Matrix ist.
- Sie kennen die wichtigsten **Eigenschaften von orthogonalen Matrizen**.

Orthogonale Matrix

Eine quadratische Matrix $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heiβt orthogonal, wenn sie die Bedingung erfüllt:

$$\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{E},$$

wobei $\mathbf{Q}^T$ die Transponierte von $\mathbf{Q}$ ist. Mit $\mathbf{E}$ bezeichnen wir wie üblich die Einheitsmatrix.

Eine orthogonale Matrix hat die Eigenschaft, dass ihre Zeilen- und Spaltenvektoren paarweise orthonormal sind, d.h. sie sind orthogonal zueinander und haben jeweils die Länge 1.

Ein Beispiel für eine orthogonale Matrix ist

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Um zu überprüfen, ob $\mathbf{A}$ orthogonal ist, müssen wir die Definition anwenden und zeigen, dass $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$ gilt. Wir berechnen zunächst die transponierte Matrix:

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann multiplizieren wir $\mathbf{A}^T$ mit $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das ergibt

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} (0 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1)) & (0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0) \\ (1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1)) & (1 \cdot 1 + 0 \cdot 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das Ergebnis ist die Einheitsmatrix der Dimension 2×2. Ein weiteres sehr bekanntes Beispiel einer orthogonalen Matrix ist die 2×2-Rotationsmatrix

$$\mathbf{R}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix},$$

die für jeden Winkel φ orthogonal ist. Wir bilden zuerst die Transponierte:

$$\mathbf{R}^T(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Das ergibt

$$\mathbf{R}^T(\varphi)\cdot\mathbf{R}(\varphi) =$$
$$= \begin{pmatrix} \cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi) & \cos(\varphi)(-\sin(\varphi))+\sin(\varphi)\cos(\varphi) \\ (-\sin(\varphi))\cos(\varphi)+\cos(\varphi)\sin(\varphi) & \sin^2(\varphi)+\cos^2(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Die trigonometrischen Terme können weiter vereinfacht werden, denn es gelten:

- $\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi) = 1$ (trigonometrische Identität)
- $\cos(\varphi)(-\sin(\varphi))+\sin(\varphi)\cos(\varphi) = 0$
- $(-\sin(\varphi))\cos(\varphi)+\cos(\varphi)\sin(\varphi) = 0$
- $\sin^2(\varphi)+\cos^2(\varphi) = 1$

Somit erhalten wir erneut die 2×2-Einheitsmatrix

$$\mathbf{R}^T(\varphi)\cdot\mathbf{R}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eigenschaften von orthogonalen Matrizen

Längen- und Winkeltreue Wird eine orthogonale Matrix $\mathbf{Q}$ mit einem Vektor multipliziert, ändert sich seine Länge nicht. Es gilt also

$$\|\mathbf{Q}\cdot\vec{x}\| = \|\vec{x}\|.$$

Auch der Winkel zwischen zwei Vektoren bleibt erhalten. Es gilt

$$(\mathbf{Q}\cdot\vec{x})\cdot(\mathbf{Q}\cdot\vec{y}) = \vec{x}\cdot\vec{y}.$$

Gemäβ der geometrischen Interpretation des Skalarproduktes bleibt der Winkel also gleich. Diese Eigenschaften von orthogonalen Matrizen werden ausgenutzt, um Drehungen und Spiegelungen zu beschreiben.

Determinante orthogonaler Matrizen ist Eins Die Determinante einer orthogonalen Matrix ist immer ± 1. Eine Determinante von 1 bedeutet, dass die Transformation eine Drehung ist, während -1 auf eine Spiegelung hinweist.

Invertierbarkeit Jede orthogonale Matrix ist invertierbar, und ihre Inverse ist gleich ihrer Transponierten:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T.$$

Diese Eigenschaft und auch die anderen werden in dem folgenden Video demonstriert.

Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Kapitel haben wir die Definition und Eigenschaften orthogonaler Matrizen kennengelernt. Orthogonale Matrizen werden insbesondere dann verwendet, wenn Längen und Winkel unverändert bleiben müssen. Im nächsten Kapitel werden wir erneut auf das Thema Lösen von linearen Gleichungssystemen zuwenden, diesmal aber die Matrizenschreibweise benutzen.

0.4 Eigenwerte und Eigenvektoren

0.4.1 Matrizen / Anwendung (Teil 2)

0.5 Anwendungen Matrizen

0.5.1 Matrizen / Anwendung (Teil 3)

0.6 DGL 1 (Teil 1)

0.6.1 DGL 1 (Teil 1)

0.7 DGL 1 (Teil 2)

0.7.1 DGL 1 (Teil 2)

0.8 DGL 1 (Teil 3)

0.8.1 DGL 1 (Teil 3)

0.9 DGL 2 (Teil 1)

0.9.1 DGL 2 (Teil 1)

0.10 DGL 2 (Teil 2)

0.10.1 DGL 2 (Teil 1)

0.11 DGL 2 (Teil 3)

0.11.1 DGL 2 (Teil 2)

0.12 Fourierreihen (Teil 1)

0.12.1 DGL 2 (Teil 3)

0.13 Fourierreihen (Teil 2)

0.13.1 Fourierreihen (Teil 2)