烟幕干扰弹的投放策略

摘要

图表如果有多条线，建议不要仅靠颜色区分——因为全国评阅为黑白打印论文格式数模的论文摘要，一般比普通论文要长得多，可能会写大半页到一页要写上重要的实现方法因为有的评委可能只看摘要论文正文尽量不要少于 15 页——但是重要的是要有内容，不要硬撑字数

1 问题重述

1.1 问题背景

在当今时代无人机正引领低空经济飞速发展，军事领域中也存在其强大的应用价值和潜力，无人机攻防愈发成为当今军事学家的关注焦点、军事技术的研究重点。在干扰导弹袭击时，投放烟幕干扰弹，在特定位置爆炸形成一定范围内的球状烟幕，能够精确遮蔽目标，且具备效费比优势。利用无人机可以精确控制烟幕干扰弹的投放，而如何规划烟幕干扰弹的投放位置和起爆时间便成了值得研究和规划的问题。

1.2 问题重述

现通过一个实战例子模拟无人机的轨迹策略，探讨其投放烟幕干扰弹和其引爆时间的规划。具体地，雷达发现三枚位于不同位置的导弹：M1$(20000, 0, 2000)$、M2$(19000, 600, 2100)$、M3$(18000, -600, 1900)$。并立即派出五架无人机执行干扰弹的投放任务，初始位置为：FY1$(17800, 0, 1800)$、FY2$(12000, 1400, 1400)$、FY3$(6000, -3000, 700)$、FY4$(11000, 2000, 1800)$、FY5$(13000, -2000, 1300)$。现需建立数学模型，针对不同的干扰任务，计算有效遮蔽时长，或给出无人机派遣和烟幕干扰弹的投放策略，使得烟幕干扰弹对真目标的有效遮蔽时长尽可能长：

问题 1： 无人机 FY1 对导弹 M1 进行干扰，投放 1 枚干扰弹，FY1 的飞行角度和速度、烟幕干扰弹的投放点和起爆点已经给出。建立烟幕遮蔽模型，求出 FY1 对 M1 的有效遮蔽时长。

问题 2： 无人机 FY1 对导弹 M1 进行干扰，投放 1 枚干扰弹。建立策略优化模型，规划出 FY1 的飞行方向及速度、烟幕干扰弹的投放点和起爆点，使得有效遮蔽时长尽可能长。

问题 3： 在问题 2 的基础上，无人机 FY1 将投放 3 枚烟幕干扰弹，建立策略优化模型，在问题 2 上，考虑 3 枚干扰弹的协同作用，规划出 FY1 的飞行方向及速度、3 枚不同干扰弹的投放点和起爆点。

问题 4： 现派遣 3 架无人机 FY1、FY2、FY3，实施对导弹 M1 的干扰，每架无人机仅能投放一枚烟幕干扰弹。在问题 3 的基础上，需考虑三台无人机的协同配合以及三个烟幕干扰弹的协同配合，规划出有效遮蔽时长最长的策略。

问题 5： 实现最终的干扰策略的规划，即调度五台无人机 FY1、FY2、FY3、FY4、FY5，各能至多投放 3 枚烟幕干扰弹干扰 3 枚导弹 M1、M2、M3，规划出所有策略，并指明其投放烟幕干扰弹的干扰对象。

2 模型假设

1. 假设导弹体积可以忽略，视作理想质点；

2. 对导弹 $\mathrm{M}_i\,(i=1,2,3)$ 有效遮挡，当且仅当导弹这一质点出发的视线均不能到达真目标，即需利用烟幕干扰弹将真目标完全遮蔽；
3. 无人机投放烟幕干扰弹之后，由于烟幕干扰弹的惯性，其将在水平方向保持原有无人机的速度，垂直方向自由落体，直至起爆。由于烟幕干扰弹体积小，此过程中忽略空气阻力的影响。
4. 有效遮盖时长仅针对某个特定的导弹 M_i 而言，即若同时存在多个导弹，总有效遮蔽时长为对每个导弹的有效遮蔽时长之和，而不要求在同一时间对所有导弹均有效遮蔽；
5. 同一枚烟幕干扰弹可以干扰一个或多个导弹；
6. 假设球状烟幕中心 10m 以外不存在烟幕，或者烟幕非常稀薄，无法通过与其他稀薄烟幕叠加的方式形成有效遮蔽。

3 符号说明

对文中使用到的重要符号作如下说明：

符号	说明	单位	备注
v_{FY_j}	无人机 FY_j 的运动速度	m/s	
θ_j	无人机 FY_j 的运动方向	m/s	
t_drop_k	第 k 枚烟幕干扰弹的投放时间	s	
t_ignit_k	第 k 枚烟幕干扰弹的起爆时间	s	
P_{M_i}	导弹 M_i 位置	m	坐标
P_{S_k}	烟幕干扰弹 S_k 位置	m	坐标
P_0	目标点位置	m	坐标
t_0	有效遮蔽的起始时间	s	
Δt	有效遮蔽的时长	s	
s	向量比例	/	
g	重力加速度	m/s^2	
v_{sink}	烟雾沉降速度	m/s	
R_{smoke}	烟雾覆盖半径	m	
dt	时间步长	s	
θ	无人机的飞行角度	度	决策变量
$\mathbf{v}$	无人机的飞行速度	m/s	决策变量
τ_1	烟幕干扰弹的投放时刻	s	决策变量
τ_2	烟幕干扰弹的引爆时刻	s	决策变量
$\mathbf{B}_l$	第 l 个时刻点真目标是否被有效遮蔽	/	决策变量
$\mathbf{b}_{l,k}$	第 l 个时刻点第 k 个采样点是否被有效遮蔽	/	决策变量
$\tau_{n,1}$	第 n 枚烟幕干扰弹的投放时刻	s	决策变量
$\tau_{n,2}$	第 n 枚烟幕干扰弹的引爆时刻	s	决策变量

4 基础模型建立

4.1 视线遮挡判定

不失一般性，这里仅就导弹 M_i 进行分析，对于其他导弹情况同理。

从导弹质点发出的视线经烟幕干扰弹遮挡形成一个圆锥（称作视线圆锥），如图所示，其母线为导弹所在点到球状烟幕的切线。锥体内烟幕干扰弹下方区域为被有效遮蔽的区域，真目标圆柱体只需完全包裹在该区域中即可。

为进一步分析和简化判定模型，引入投影逻辑。以导弹质点所在位置作为透视点，将真目标圆柱体、烟幕干扰弹在地面上进行投影，由此易知，真目标完全被有效遮蔽，当仅当烟幕干扰弹投影区域完全覆盖真目标投影。

根据圆锥曲线相关知识，烟幕干扰弹投影（即视线圆锥被地面所在平面截得的图形），始终为一个椭圆。考虑到导弹质点和球状烟幕云团中心的运动，形成的视线圆锥始终会变动，投影椭圆的大小和位置也随之发生变化。

对一个烟幕干扰弹而言，能有效遮蔽圆柱体真目标，当且仅当能遮蔽其上表面和下表面，因此，为简化模型，在 $z = 0m$ 和 $z = 10m$ 处分别处理其上表面投影和下表面投影（即在处理上表面的遮蔽问题时，将投影投至 $z = 10m$ 的平面上，下表面以此投影到 $z = 0m$ 的平面上），由此所得真目标待检测投影始终为一个圆，而视线圆锥仅需在两个平行平面上取截交线，省去了对真目标投影的过程，得到的圆形更易处理。

4.2 判定计算

4.2.1 导弹和烟幕干扰弹的运动

不失一般性，仍对一个导弹 M_i 进行分析。设其初始坐标为 (x_0, y_0, z_0)，t 时刻运动坐标为 $P_{M_i}(t) = (x(t), y(t), z(t))$，运动方程为：

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \cdot t \\ y(t) = y_0 + \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot t & ,t > 0 \\ z(t) = z_0 + \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \cdot t \end{cases}$$

对于无人机 $FY_j\,(j = 1,2,3,4,5)$ 投放的第 k 枚烟幕干扰弹，设其无人机的初始坐标为 (x'_0, y'_0, z'_0)，运动朝向为 θ_j（以 +x 轴为零值，逆时针方向为正向），运动速度为 v_{FY_j}，在运动 t_{drop_k} 时间后丢下该烟幕干扰弹，并在 t_{ignit_k} 时刻引爆，则设该烟幕干扰弹 t 时刻运动坐标为 $P_{S_k}(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$，其运动方程为：

$$\begin{cases} x'(t) = x'_0 + v_{FY_j}\cos\theta_j \cdot t_{ignit_k} \\ y'(t) = y'_0 + v_{FY_j}\ \sin\theta_j \cdot t_{ignit_k} & , t > t_{ignit_k} \\ z'(t) = z'_0 - \dfrac{1}{2}g \cdot (t_{ignit_k} - t_{drop_k})^2 - v_{sink} \cdot (t - t_{ignit_k}) \end{cases}$$

投放点坐标 $(x'_0 + v_{FY_j}\cos\theta_j \cdot t_{drop_k},\ y'_0 + v_{FY_j}\sin\theta_j \cdot t_{drop_k},\ z'_0)$，起爆点坐标 $(x'_0 + v_{FY_j}\cos\theta_j \cdot t_{ignit_k},\ y'_0 + v_{FY_j}\sin\theta_j \cdot t_{ignit_k},\ z'_0 - \frac{1}{2}g \cdot (t_{ignit_k} - t_{drop_k})^2)$

4.2.2 遮蔽计算

下面分析圆柱体真目标下表面的遮蔽情况计算，基于之前的分析，对于上表面只需考虑 $z = 10$，情况同理可得。

目标点 $P_0 = (r\cos\varphi, r\sin\varphi + 200, 0)\,, \varphi \in [0, 2\pi), r \in [0, 7]$。

现计算线段 $P_0P_{M_i}$ 距离烟幕中心点的最近距离。限于实际情况考虑，烟幕能产生有效遮挡，当且仅当烟幕覆盖范围与线段 $P_0P_{M_i}$ 产生交点。

设线段 $P_0P_{M_i}$ 上距离烟幕中心点最近点为 P，则 $\overrightarrow{P_{M_i}P} = s \cdot \overrightarrow{P_{M_i}P_0}$，为保证 P 点在线段上，要求 $s \in [0, 1]$，根据空间向量运算，于是：

$$s = \begin{cases} 0 & , \overrightarrow{P_{M_i}P_{S_k}} \cdot \overrightarrow{P_{M_i}P_0} \leqslant 0 \\ 1 & , \overrightarrow{P_0P_{S_k}} \cdot \overrightarrow{P_0P_{M_i}} \leqslant 0 \\ \left| \frac{\overrightarrow{P_{M_i}P_{S_k}} \cdot \overrightarrow{P_{M_i}P_0}}{\overrightarrow{P_{M_i}P_0}} \right| & , else \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_{M_i}} + \overrightarrow{P_{M_i}P} = \overrightarrow{OP_{M_i}} + s \cdot \overrightarrow{P_{M_i}P_0}$$

该目标点被有效遮蔽当且仅当 $\left|\overrightarrow{PP_{S_k}}\right| \leqslant R_{smoke}$，则真目标被有效遮盖的充要条件为 $\forall\varphi \in [0, 2\pi), r \in [0, 7]$, $\left|\overrightarrow{PP_{S_k}}\right| \leqslant R_{smoke}$ 对于 $z = 0, z = 10$ 两个表面均成立，由此可解有效遮蔽时长：

$$\begin{aligned} \max_{t_0} \quad & \Delta t \\ \text{s.t.} \quad & \left|\overrightarrow{PP_{S_k}}\right| \leqslant R_{smoke}, \quad \varphi \in [0, 2\pi), r \in [0, 7], t \in [t_0, t_0 + \Delta t] \end{aligned}$$

5 问题 1 的建模与求解

本小题给定了无人机的飞行方向和速度、烟幕干扰弹的投放时间和起爆延时，要求我们计算出有效遮蔽时长。

首先，基于基础模型的公式，可以算出**烟幕干扰弹投放点坐标为 (17620, 0, 1800)**，

起爆点坐标为 (17188, 0, 1736.496)，分别对真目标圆柱体上下两个求解模型

$$\begin{aligned} &\max_{t_0} \quad \Delta t \\ &\text{s.t.} \quad \left|\overrightarrow{PP_{S_k}}\right| \leqslant R_{smoke}, \quad \varphi \in [0, 2\pi), r \in [0, 7], t \in [t_0, t_0 + \Delta t] \end{aligned}$$

取两个解得的时间区间 $[t_0, t_0 + \Delta t]$ 的交集，可得有效遮蔽时间范围。由于考虑到之后的题目会出现**多个烟幕干扰弹协同遮蔽的情况**，利用解析求法会使题目复杂度超出想象，不能求解，为便于计算，我们将连续变量离散化，解得有效遮蔽时间起止点为 8.056s -> 9.448s（精确到四位有效数字），**有效遮蔽时长为 1.392s**（精确到四位有效数字）。

6 问题 2 的建模与求解

本小题仅需规划一架无人机及其携带的一枚烟幕干扰弹的策略，实乃整个问题规划的基础，有鉴于此，我们采用**数学规划**的方式求解问题 2，以期求得尽可能好的策略。

6.1 数学规划建模

本部分将首先确定待规划的决策变量，其次利用约束条件判定有效遮蔽情况，并最后利用辅助变量求得目标函数。

6.1.1 决策变量定义

主要决策变量包括无人机的飞行方向和速度、烟幕干扰弹的投放时间和起爆时间四个变量。为计算最终目标函数，我们还引入了一系列的辅助变量，均在此处声明。

- θ：无人机 FY1 的飞行角度，以 +x 轴为零值，逆时针方向为正向；
- **v**：无人机 FY1 的飞行速度；
- τ_1：烟幕干扰弹的投放时刻；
- τ_2：烟幕干扰弹的引爆时刻，即从零时刻开始到引爆时刻的时间间隔；
- $\mathbf{B}_l$ (l = 0, 1, 2, ..., 20/dt)：0-1 变量，烟幕干扰弹生效期间（20s），在第 l 个时刻点处真目标是否被有效遮蔽，dt 是将时间离散化的步长，即最小可计算时间间隔；
- $\mathbf{b}_{l,k}$ (t = 0, 1, 2, ..., 20/dt, k = 0, 1, ..., N)：0-1 变量，烟幕干扰弹生效期间，在 t 时刻，真目标上第 k 个采样点是否被有效遮蔽，N 为采样点个数，dt 与上述相同。

6.1.2 约束条件设定

约束条件主要为起爆时间、物理模型、遮挡判定限制。在本部分，不作特殊说明下，决策变量和中间辅助变量均加粗显示，常量均用斜体表示。

约束 1：起爆时间限制

$$\tau_1 <= \tau_2$$

起爆时间需在投放时间之后，$\tau_2 - \tau_1$ 是起爆延时。

约束 2：物理模型约束

（1）无人机速度分量

$$\mathbf{v_x} = \mathbf{v} \cdot \cos\theta$$
$$\mathbf{v_y} = \mathbf{v} \cdot \sin\theta$$

其中 $\mathbf{v_x}, \mathbf{v_y}$ 分别为无人机在 x, y 方向的速度分量。

（2）烟雾投放位置

$$\begin{aligned}
\mathbf{r_x} &= uav_{\text{init}}[0] + \mathbf{v_x} \cdot \tau_1 \\
\mathbf{r_y} &= uav_{\text{init}}[1] + \mathbf{v_y} \cdot \tau_1 \\
\mathbf{r_z} &= uav_{\text{init}}[2]
\end{aligned}$$

其中 $uav_{\text{init}} = [uav_{\text{init}}[0], uav_{\text{init}}[1], uav_{\text{init}}[2]]$ 为无人机初始位置。

（3）烟雾爆炸位置

$$\begin{aligned}
\mathbf{t_d} &= \tau_2 - \tau_1 \\
\mathbf{t_d^2} &= \mathbf{t_d}^2 \\
\mathbf{e_x} &= \mathbf{r_x} + \mathbf{v_x} \cdot \mathbf{t_d} \\
\mathbf{e_y} &= \mathbf{r_y} + \mathbf{v_y} \cdot \mathbf{t_d} \\
\mathbf{e_z} &= \mathbf{r_z} - \frac{1}{2} g \cdot \mathbf{t_d^2}
\end{aligned}$$

其中 $g = 9.8$ 为重力加速度，$\mathbf{t_d}$ 为投放至引爆的时间差。

（4）烟雾实时位置考虑烟雾沉降速度：

$$\begin{aligned}
\mathbf{t_l} &= l \cdot dt \quad , l = 1, 2, \ldots, 20/dt \\
\mathbf{s_x} &= \mathbf{e_x} \\
\mathbf{s_y} &= \mathbf{e_y} \\
\mathbf{s_z} &= \mathbf{e_z} - v_{\text{sink}} \cdot \mathbf{t_l}
\end{aligned}$$

其中 $v_{\text{sink}} = 3.0$ 为烟雾沉降速度，$\mathbf{t_l}$ 为引爆后的时间差，$dt = 0.1$ 为时间步长。

（5）导弹实时位置

$$
\begin{aligned}
\mathbf{m_x} &= missile_{\text{init}}[0] + v_M[0] \cdot (\tau_2 + \mathbf{t_l}) \\
\mathbf{m_y} &= missile_{\text{init}}[1] + v_M[1] \cdot (\tau_2 + \mathbf{t_l}) \\
\mathbf{m_z} &= missile_{\text{init}}[2] + v_M[2] \cdot (\tau_2 + \mathbf{t_l})
\end{aligned}
$$

其中：$missile_{\text{init}} = [missile_{\text{init}}[0], missile_{\text{init}}[1], missile_{\text{init}}[2]]$ 为导弹初始位置 $v_M = [v_M[0], v_M[1], v_M[2]]$ 为导弹速度向量（由目标方向与速度大小确定）

约束 3：遮蔽判断约束

对每个时间步 l 和每个采样点 k（坐标 $p_k = [p_k^x, p_k^y, p_k^z]$）成立：

（1）向量与距离计算

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{AB_x} = p_i^x - \mathbf{m_x}, \quad \mathbf{AB_y} = p_i^y - \mathbf{m_y}, \quad \mathbf{AB_z} = p_i^z - \mathbf{m_z} \\
&\mathbf{AP_x} = \mathbf{s_x} - \mathbf{m_x}, \quad \mathbf{AP_y} = \mathbf{s_y} - \mathbf{m_y}, \quad \mathbf{AP_z} = \mathbf{s_z} - \mathbf{m_z} \\
&\mathbf{AB_x^2} = \mathbf{AB_x}^2, \quad \mathbf{AB_y^2} = \mathbf{AB_y}^2, \quad \mathbf{AB_z^2} = \mathbf{AB_z}^2 \\
&\mathbf{AB^2} = \mathbf{AB_x^2} + \mathbf{AB_y^2} + \mathbf{AB_z^2} \\
&\mathbf{dot_{AP,AB}} = \mathbf{AB_x} \cdot \mathbf{AP_x} + \mathbf{AB_y} \cdot \mathbf{AP_y} + \mathbf{AB_z} \cdot \mathbf{AP_z}
\end{aligned}
$$

其中 AB 为“导弹-采样点”向量，AP 为“导弹-烟雾中心”向量。

（2）投影参数约束

限制烟雾中心在“导弹-采样点”线段上的投影位置：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{mul_{s,AB^2}} &= \mathbf{s} \cdot \mathbf{AB^2} \\
\mathbf{mul_{s,AB^2}} - \mathbf{dot_{AP,AB}} &\le M \cdot (1 - \mathbf{b}_{l,k}) \\
\mathbf{mul_{s,AB^2}} - \mathbf{dot_{AP,AB}} &\ge -M \cdot (1 - \mathbf{b}_{l,k})
\end{aligned}
$$

其中 $M = 10^{10}$ 为足够大的松弛常数，s 为投影参数（$s = 0$ 对应导弹位置，$s = 1$ 对应采样点位置）。通过 M，可以满足 s 在 [0,1] 的限制，当 $\mathbf{b}_{l,k} = 1$，即采样点被遮蔽时，约束计算得到的 s 在 [0,1] 范围内；当 $\mathbf{b}_{l,k} = 0$，即未遮蔽时，约束放松（M 存在几乎不限制 s）。而由于目标函数最大化尽可能要求更多的点被遮蔽，则被遮蔽的点受到该约束影响，而不对未受遮蔽点进行约束的逻辑正确。

（3）距离约束

判断烟雾是否覆盖投影点:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{Qx}=\mathbf{m_x}+\mathbf{s}\cdot\mathbf{AB_x},\quad \mathbf{Qy}=\mathbf{m_y}+\mathbf{s}\cdot\mathbf{AB_y},\quad \mathbf{Qz}=\mathbf{m_z}+\mathbf{s}\cdot\mathbf{AB_z}\\
&\mathbf{d_x}=\mathbf{s_x}-\mathbf{Qx},\quad \mathbf{d_y}=\mathbf{s_y}-\mathbf{Qy},\quad \mathbf{d_z}=\mathbf{s_z}-\mathbf{Qz}\\
&\mathbf{d^2}=\mathbf{d_x}^2+\mathbf{d_y}^2+\mathbf{d_z}^2\\
&\mathbf{d^2}-R_{\text{smoke}}^2\le M\cdot(1-\mathbf{b}_{l,k})
\end{aligned}$$

其中 Q 为投影点，$R_{\text{smoke}}=10.0$ 为烟雾覆盖半径。当 $\mathbf{b}_{l,k}=1$，即采样点被遮蔽时，需满足遮挡判定约束；当 $\mathbf{b}_{l,k}=0$，即未遮蔽时，约束放松（M 存在几乎不限制 s）。

（4）全局遮蔽约束

时间步 l 完全遮蔽的前提是所有采样点均被遮蔽:

$$\mathbf{B}_l\le\mathbf{b}_{l,k},\quad \forall k$$

约束 4：变量约束

（1）决策变量约束

$$\theta\in[0,360)\quad \mathbf{v}\in[70,140]\quad \tau_1,\tau_2\in[0,100]\quad \mathbf{B}_l,\mathbf{b}_{l,k}\in\{0,1\},\forall l,k$$

（2）辅助变量约束

$$\mathbf{s}\in[0,1]\quad \mathbf{B}_l,\mathbf{b}_{l,k}\in\{0,1\},\forall l,k$$

6.1.3 目标函数表示

$$\max\quad \sum_{l=0}^{20/dt}\mathbf{B}_l\cdot dt$$

最大化烟雾对目标区域的总遮蔽时间，其中 $dt=0.01$ 为时间步长，总和表示所有完全遮蔽时间步的累计时长。

6.1.4 模型汇总

综上，模型汇总为:

$$\max\quad \sum_{l=0}^{20/dt}\mathbf{B}_l\cdot dt$$

$$
\text{s.t.}\begin{cases}
\tau_1 <= \tau_2 \\
\mathbf{v_x} = \mathbf{v}\cdot\cos\theta \quad \mathbf{v_y} = \mathbf{v}\cdot\sin\theta \\
\begin{cases} \mathbf{r_x} &= uav_{\text{init}}[0] + \mathbf{v_x}\cdot\tau_1 \\ \mathbf{r_y} &= uav_{\text{init}}[1] + \mathbf{v_y}\cdot\tau_1 \\ \mathbf{r_z} &= uav_{\text{init}}[2] \end{cases}
\qquad
\begin{cases} \mathbf{m_x} &= missile_{\text{init}}[0] + v_M[0]\cdot(\tau_2 + \mathbf{t_l}) \\ \mathbf{m_y} &= missile_{\text{init}}[1] + v_M[1]\cdot(\tau_2 + \mathbf{t_l}) \\ \mathbf{m_z} &= missile_{\text{init}}[2] + v_M[2]\cdot(\tau_2 + \mathbf{t_l}) \end{cases} \\
\begin{cases} \mathbf{t_d} &= \tau_2 - \tau_1 \\ \mathbf{t_d^2} &= \mathbf{t_d}^2 \\ \mathbf{e_x} &= \mathbf{r_x} + \mathbf{v_x}\cdot\mathbf{t_d} \\ \mathbf{e_y} &= \mathbf{r_y} + \mathbf{v_y}\cdot\mathbf{t_d} \\ \mathbf{e_z} &= \mathbf{r_z} - \frac{1}{2}g\cdot\mathbf{t_d^2} \end{cases}
\qquad
\begin{cases} \mathbf{t_l} &= l\cdot dt \quad , l = 1, 2, \ldots, 20/dt \\ \mathbf{s_x} &= \mathbf{e_x} \\ \mathbf{s_y} &= \mathbf{e_y} \\ \mathbf{s_z} &= \mathbf{e_z} - v_{\text{sink}}\cdot\mathbf{t_l} \end{cases} \\
\begin{cases} \mathbf{AB_x} = p_i^x - \mathbf{m_x}, \quad \mathbf{AB_y} = p_i^y - \mathbf{m_y}, \quad \mathbf{AB_z} = p_i^z - \mathbf{m_z} \\ \mathbf{AP_x} = \mathbf{s_x} - \mathbf{m_x}, \quad \mathbf{AP_y} = \mathbf{s_y} - \mathbf{m_y}, \quad \mathbf{AP_z} = \mathbf{s_z} - \mathbf{m_z} \\ \mathbf{AB_x^2} = \mathbf{AB_x}^2, \quad \mathbf{AB_y^2} = \mathbf{AB_y}^2, \quad \mathbf{AB_z^2} = \mathbf{AB_z}^2 \\ \mathbf{AB^2} = \mathbf{AB_x^2} + \mathbf{AB_y^2} + \mathbf{AB_z^2} \\ \mathbf{dot_{AP,AB}} = \mathbf{AB_x}\cdot\mathbf{AP_x} + \mathbf{AB_y}\cdot\mathbf{AP_y} + \mathbf{AB_z}\cdot\mathbf{AP_z} \end{cases} \\
\begin{cases} \mathbf{mul_{s,AB^2}} = \mathbf{s}\cdot\mathbf{AB^2} \\ \mathbf{mul_{s,AB^2}} - \mathbf{dot_{AP,AB}} \le M\cdot(1 - \mathbf{b}_{l,k}) \\ \mathbf{mul_{s,AB^2}} - \mathbf{dot_{AP,AB}} \ge -M\cdot(1 - \mathbf{b}_{l,k}) \end{cases} \\
\begin{cases} \mathbf{Qx} = \mathbf{m_x} + \mathbf{s}\cdot\mathbf{AB_x}, \quad \mathbf{Qy} = \mathbf{m_y} + \mathbf{s}\cdot\mathbf{AB_y}, \quad \mathbf{Qz} = \mathbf{m_z} + \mathbf{s}\cdot\mathbf{AB_z} \\ \mathbf{d_x} = \mathbf{s_x} - \mathbf{Qx}, \quad \mathbf{d_y} = \mathbf{s_y} - \mathbf{Qy}, \quad \mathbf{d_z} = \mathbf{s_z} - \mathbf{Qz} \\ \mathbf{d^2} = \mathbf{d_x}^2 + \mathbf{d_y}^2 + \mathbf{d_z}^2 \\ \mathbf{d^2} - R_{\text{smoke}}^2 \le M\cdot(1 - \mathbf{b}_{l,k}) \end{cases} \\
\mathbf{B}_l \le \mathbf{b}_{l,k}, \quad \forall k \\
\theta \in [0, 360) \quad \mathbf{v} \in [70, 140] \quad \tau_1, \tau_2 \in [0, 100] \quad \mathbf{B}_l, \mathbf{b}_{l,k} \in \{0, 1\}, \forall l, k \\
\mathbf{s} \in [0, 1] \quad \mathbf{B}_l, \mathbf{b}_{l,k} \in \{0, 1\}, \forall l, k
\end{cases}
$$

6.2 求解与结果分析

我们在该小题中调用 gurobi 求解器求解，代码在附录中给出，求得数据结果为：

$$\theta = 176.98, \quad \mathbf{v} = 72.33, \quad \tau_1 = 0.07, \quad \tau_2 = 2.63$$

所得**有效遮蔽时长为: 4.54s**（精确到三位有效数字）。

7　问题 3 的建模与求解

7.1　模型调整

在本小题中，无人机 FY1 可以投下 3 枚烟幕干扰弹，需要对问题 2 的模型进行调整。

7.1.1　增加决策变量

需对每个烟幕干扰弹建立决策变量：

- $\tau_{n,1}$, $n = 1, 2, 3$：分别代表 3 枚烟幕干扰弹的投放时刻；
- $\tau_{n,2}$, $n = 1, 2, 3$：分别代表 3 枚烟幕干扰弹的引爆时刻。

7.1.2　增加约束条件

增加约束：投放时间间隔

$$\tau_{2,1} - \tau_{1,1} >= 1, \quad \tau_{3,1} - \tau_{2,1} >= 1$$

每架无人机投放两枚烟幕干扰弹至少间隔 1s。

此外，对于每个采样点的有效遮蔽情况，需对目前存在的烟幕干扰弹均进行分析，只需存在烟幕干扰弹有效遮蔽便该离散采样点认为被有效遮蔽，与问题 2 中约束同理，这里限于篇幅略去相关约束。

7.2　求解与结果分析

由于上述数学规划规模庞大，无法采用 gurobi 求解器求解，我们换用协方差矩阵自适应演化 (CMAES) 算法求解上述规划。

7.2.1　求解算法

CMAES 可以自适应地调整搜索分布。在传统的进化算法中，变异通常是沿着坐标轴进行的，或者使用各向同性的高斯扰动，而 CMAES 通过一个协方差矩阵（C）来解决这个问题。这个矩阵描述了种群中成功个体之间的相关性，从而使得算法能够学习到一个更优的搜索方向和分布形状。

其核心操作在于最大似然更新：通过最大化找到成功后代的概率来更新分布的参数，让分布向着产生更好解的方向移动和变形。其步骤如下：

Step0. 初始化：设置初始均值向量 m，初始步长 σ。初始化协方差矩阵 C 为单位矩阵，即初始化各变量相互独立。

Step1. 生成新种群：从多元正态分布 $N(\mathrm{m}, \sigma^2\mathrm{C})$ 中采样 λ 个新的候选解。$x_i = m + \sigma * y_i$，其中 y_i 是从 $N(0, \mathrm{C})$ 中采样的。

Step2. 评估候选解：计算每个候选解 x_i 的目标函数值，即适应度。

Step3. 排序和选择：根据适应度对 λ 个候选解进行排序。选择其中最好的 μ 个个体作为父代，用于更新分布参数。

Step4. 更新参数：

(1) 更新均值向量 m: 计算 μ 个最优个体的加权平均值，作为下一代的均值。$m_{new} = \sum_{i=1}^{\mu} w_i \cdot x_i$，其中 w_i 是权重，适应度越高的个体权重越大。

(2) 更新演化路径 p_σ: 这个向量记录了步长 σ 的演化历史，用于判断搜索方向是随机的还是持续的，从而调整步长。

(3) 更新步长 σ: 根据演化路径 p_σ 的长度来调整 σ。如果连续的移动方向一致，则增快速度，增大 σ；如果方向随机，则应减慢速度，减小 σ。

(4) 更新协方差矩阵的演化路径 p_c: 这个向量记录了均值 m 的移动历史，用于协方差矩阵的秩一更新。

(5) 更新协方差矩阵 C: 秩一更新：利用演化路径 p_c 的信息。秩 μ 更新：利用当前代最好的 μ 个个体与上一代均值 m 的偏差信息。将两者结合，得到新的协方差矩阵 C_{new}。

Step5. 迭代：重复步骤 1 到 4，直到满足终止条件。

7.2.2 结果分析

8 问题 4 的建模与求解

8.1 模型调整

在本小题中，我们将规划 3 架无人机各投放 1 枚烟幕干扰弹，对导弹 M1 进行干扰。

由于协方差矩阵自适应演化算法受初值的影响较大，我们首先用问题 2 的模型为每架无人机求出了其最优解，将该解作为协方差算法的初值。该算法将在此基础上，通过寻求三枚烟幕干扰弹弹的相互配合与协作，寻求整体最优解。

9 问题 5 的建模与求解

10 模型的评价、改进与推广

10.1 模型的优点

1. 由于模型采用的是对真目标离散采样的方式求解，因而**不受真目标形状的限制**；
2. 模型能够考虑**多个烟幕干扰弹协同遮蔽**真目标的情况；
3. 利用**数学规划**将策略求解的数学模型清晰建模，求得结果正确性和可行性高；
4. 利用**协方差矩阵自适应演化算法**求解复杂模型，收敛速度快；

10.2 模型的不足

1. 由于存在**多个烟幕干扰弹协同遮蔽**的情况，我们未利用投影的方式求得遮蔽时长的解析解；
2. 采用数学规划调用求解器求解时，虽解较为精确，正确性高，但求解速度较慢。

10.3 模型的改进

1. 在求解过程中，我们发现多个烟幕干扰弹协同遮蔽真目标的情况较少，数量级大概在 0.1s，如若可以忽略这部分影响，可以求得一枚烟幕干扰弹完全遮蔽真目标时的解析解，从而提高求解速度，但如是也面临着**牺牲多个烟幕干扰弹协同遮蔽真目标情况**的权衡；
2. 可以探索其他模型求解算法，以期加快解的收敛速度。

10.4 模型的推广

1. 由于模型采用的是对真目标离散采样的方式求解，不受真目标形状的限制，因此真目标可以推广为一般目标；

2. 采用投影法求解析解时，对于烟幕云团的形状和真目标形状均没有要求，在不考虑协同遮蔽的情况下均可以求得解析解；

3. 不受导弹和无人机位置的约束，可以推广到一般情形，并可以任意增加其数量，甚至可以面向实际情况进行规划。因而本文提供的模型对实战中无人机的调度规划、烟幕干扰弹的投放规划具有借鉴意义。