MA205快速指导手册

BY 余星佑

注意. 本手册实质上是一本解题手册, 如果你只是想在MA205这门课上拿高分而已的话，那么本手册是很好的选择。但是如果你想深入了解微分方程的话, 切勿依赖本手册, 因为它并不会教你微分方程详细的知识, 而只是教你怎么做题而已。所以, 请根据自己实际需要使用它。

鸣谢. 感谢网络, Wilfrid Laurier University的教授以及中国大陆地区的教授, 我的同学提供给本人详细的材料能撰写出这本手册。感谢名单如下：

1. Anne-Marie Allison教授
2. Nasir Sohail教授
3. 刘兴波教授
4. 维基百科
5. Pauls Online Math Notes
6. Math24
7. 数学问答网
8. 微分方程与边界值问题（原书第五版）
9. 数学乐
10. 程金川先生
11. 赖永真教授

目录

1 微分方程的一些基本知识

1.1 常微分方程的定义和相关概念 1.1

常微分方程(Ordinary Differential Equation)定义：未知函数只含有一个自变量，且不存在偏导数(这是区别常微分方程和偏微分方程的关键点)的微分方程.

（1）**阶数**(Order)：是方程中导数的最高次数.

例如

$$\frac{dy}{dx}+y^2=5x$$

这是一阶的，因为它只有一阶导数$\frac{dy}{dx}$，所以为一阶.

再比如

$$\frac{d^3y}{dx^3}+x\frac{dy}{dx}+y=e^x$$

这个是三阶的，因为它有三阶导数$\frac{d^3y}{dx^3}$，所以为三阶.

（2）**次数**(Degree)：是方程中最高阶导数的指数.

例如

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y=5x^2$$

最高次导数是$\frac{dy}{dx}$，它的指数为2，所以次数为2.

$$\frac{d^3y}{dx^3}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y=5x^2$$

最高次导数是$\frac{d^3y}{dx^3}$，但它的指数为1(隐式)，所以次数为1。

（3）**线性**(Linearity)：如果方程关于因变量及其导数是一次函数关系的话，那么为线性，否则为非线性.

例如

$\frac{dy}{dx}=\sin(x)y$是线性的.

$\frac{dy}{dx}=y^2$是非线性的.

注意三点：

1. y'前的系数不能含有y，但可以含有x，如：

   $yy'=2$是非线性的.

   $yx=2$是线性的.

2. y前的系数也不能含有y，但可以含有x，如：

   $y' = \sin(x) y$是线性的.

   $y' = \sin(y) y$是非线性的.

3. 整个方程中，只能出现y, y'，不能出现$y^2, y^3, \sqrt{y}, \sin(y), \ln(y), (y')^n$等非一次函数等，例如：

   $y' = y$是线性的.

   $y' = y^2$是非线性的.

1.2 微分方程的种类

方程名	一般形式
可分离 Separable	$y'(x) = f(x) g(y)$
齐次 Homogeneous	$y'(x) = f\left(\frac{x}{y(x)}\right)$
一阶线性 Linear	$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x) y = b(x)$
伯努利 Bernoulli	$y'(x) + P(x) y(x) = Q(x) y(x)^n$,如果$n \geqslant 2$。
全微分 Exact	$Mdx + Ndy = 0$，如果$\frac{\delta M}{\delta y} = \frac{\delta N}{\delta x}$。

1.3 存在唯一性定理 [1]1.1

现在，我们知道我们可以解微分方程来获得通解，但如果我们要求出满足特定点的解，如

$$\begin{aligned} y' = 0.85y, y(0) &= 19 \\ y' + 3y = 6t + 5, y(0) &= 3 \end{aligned}$$

那么我们正在解微分方程中的一个重要问题-**初值问题**(Initial Value Problem)。上述微分方程中的

$$\begin{aligned} y(0) &= 19 \\ y(0) &= 3 \end{aligned}$$

被称为**初值条件**(Initial Value Condition).

不是所有的初值问题都有解。所以如何保证初值问题有一个解，且要保证存在唯一解的话，就需要使用**存在性和唯一性定理**(Existence and Uniqueness Theorem)验证微分方程是否能找到给定的初值条件下的解.

定理 1. 存在唯一性定理

考虑初值问题

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), y(x_0) = y_0$$

若f和$\frac{\delta f}{\delta y}$在点$(x_0, y_0)$上连续，那么初值问题在区间$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$上拥有唯一解$\Phi(x)$，其中$\delta$是一正整数。

1. 目前所教授的情况都是满足利普希茨连续(Lipschitz continuity)的。若所给函数不满足上述条件之一， 则该定理无法适用。这时应该证实系统的李雅普诺夫函数存在。

例 2.

$\frac{dy}{dx}=y^4-x^4$，给出初值条件$y(0)=7$，该微分方程是否能满足该初值条件？

解：$\frac{dy}{dx}=f(x,y)=y^4-x^4$

$\frac{\delta f}{\delta y}=4y^3$

很明显f和$\frac{\delta f}{\delta y}$都在点$(0,7)$上连续，所以该微分方程能满足该初值条件.

例 3.

$y'=\ln(y)+\frac{1}{y^2}, y(0)=3$

解：$\frac{\delta f}{\delta y}=\frac{1}{y}-\frac{1}{y^2}$

f和$\frac{\delta f}{\delta y}$都不在点$(0,3)$上连续，所以该初值问题无解.

1.4 方向场/斜率场 1.3

1.4.1 基本概念

设$y=y(x)$为$\frac{dy}{dx}(x)=f(x,y)$解的的曲线

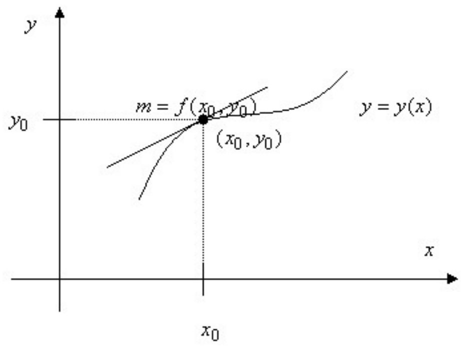
令$\frac{dy}{dx}(x_0)=f(x_0,y_0)$，以$x=x_0$代入$\frac{dy}{dx}(x)=f(x,y(x))$

得$\frac{dy}{dx}(x_0)=f(x_0,y_0)$

即在解的曲线上$y=y(x)$上一点(x_0,y_0)的切线斜率为$f(x_0,y_0)$。

用途：在没有解出微分方程前可以看出解的曲线形状，特别是微分方程很难解时。

图例：



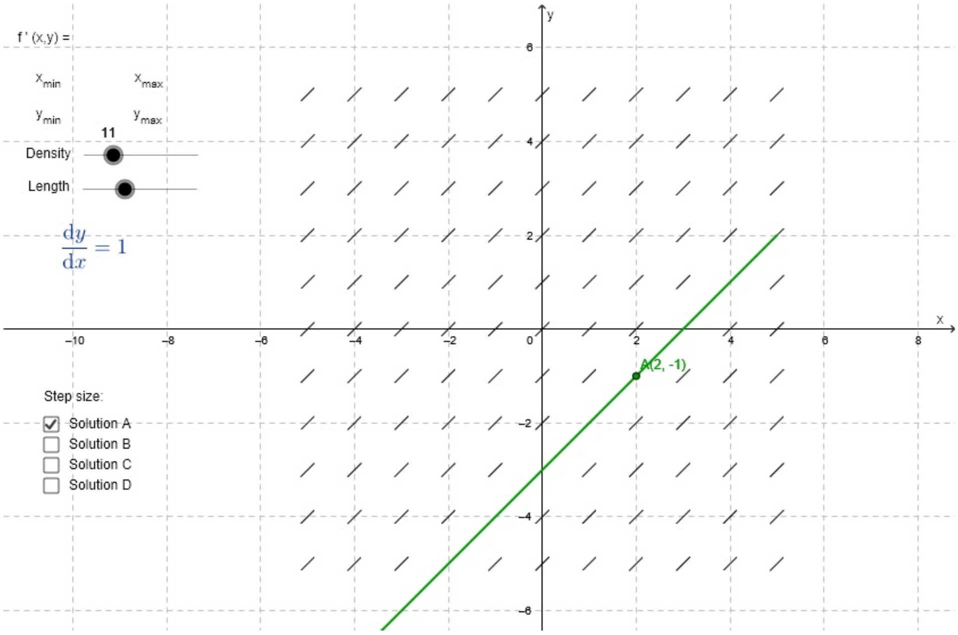
1.4.2 画方向场/斜率场的方法

1. 在平面上任取一点(x_0,y_0)，代入$\frac{dy}{dx}(x)=f(x,y)$中得$\frac{dy}{dx}(x_0)=f(x_0,y_0)$

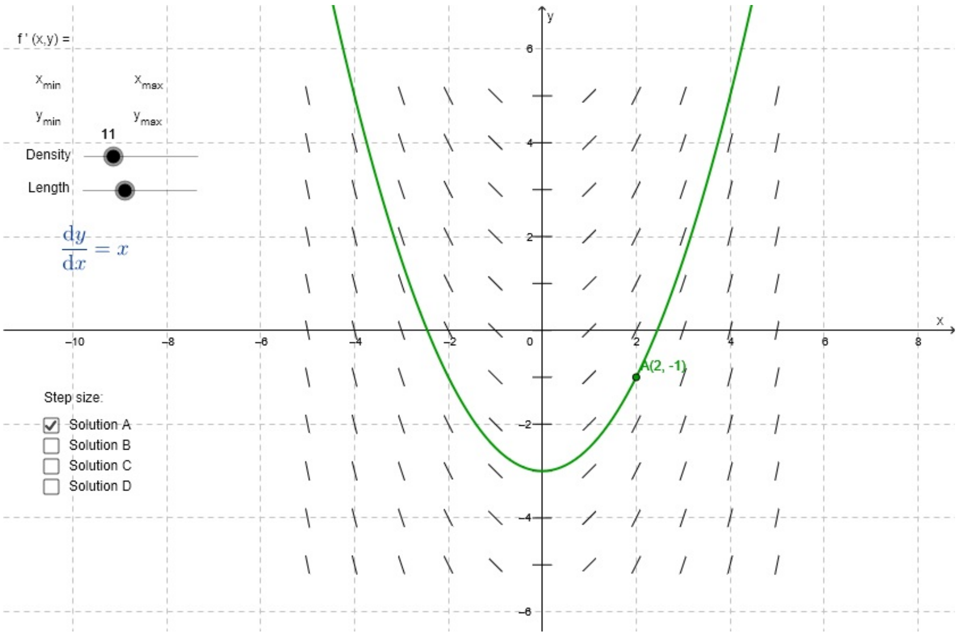
2. 以点(x_0,y_0)为起点（或中点），画斜率为$f(x_0,y_0)$的射线（箭头指右）（若是斜率场，则为线段），可得$\frac{dy}{dx}(x)=f(x,y(x))$之方向场（斜率场）

3. 重复以上的步骤得到平面上许多射线所成之方向场（斜率场）

例：$\frac{dy}{dx} = 1$之方向场[2]



$\frac{dy}{dx} = x$的方向场



1.4.3 判断方向场对称性的方法

考虑微分方程$\frac{dy}{dx} = g(x, y)$

1. 若将x以$-x$代入上式，上式没有改变，则方向场对称于y轴。

2. 若将y以$-y$ 代入上式，上式没有改变，则方向场对称于x轴

3. 若将x以$-x$代入上式，y以$-y$代入上式，上式没有改变，则方向场对称于原点。

2. 所有方向场均使用Geogebra生成。

2 一阶常微分方程

2.1 可分离方程 [3]2.2

定义：形如$y'(x)=f(x)g(y)$的微分方程。

等价定义：可化为$g(y)dy=f(x)dx$的方程。

解法：使用变量分离法。

若$g(y)\neq 0$

对$g(y)dy=f(x)dx$也是一样的解法。

例：求解满足初值条件的微分方程

$$\frac{dy}{dx}=6y^2x, y(1)=\frac{1}{25}$$

解：先求不定积分

$$\begin{aligned}\int\frac{dy}{y^2} &= \int 6x\,dx\\ \int y^{-2}dy &= \int 6x\,dx\\ -\frac{1}{y} &= 3x^2+c\end{aligned}$$

代入初值条件：

$$\begin{aligned}-\frac{1}{\frac{1}{25}} &= 3(1^2)+c\\ c &= -28\end{aligned}$$

所以最后解为

$$-\frac{1}{y}=3x^2-28$$

或者显式解(explicit solution)为

$$y=\frac{1}{28-3x^2}$$

2.2 一阶线性方程 [4]2.3

定义：形如$a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=b(x)$的方程

标准形式：$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$

解法：寻找积分因子来求解。

积分因子求法：$\mu(x)=e^{\int P(x)dx}$，其中$\mu(x)$即为积分因子。

然后将求到的积分因子乘到原方程。将左边转换为$y(x)\mu(x)$积的导数，即$\frac{d}{dx}[\mu(x)y]$，得到$\frac{d}{dx}[\mu(x)y]=\mu(x)Q(x)$。两边积分得到$y=\frac{1}{\mu(x)}[\int\mu(x)Q(x)dx+c]$;或者

3. 于1691年被戈特弗里德·莱布尼茨发现。
4. 于1694年被戈特弗里德·莱布尼茨发现。

得到一般通解为：$y = \frac{\int \mu(x)Q(x)dx + c}{\mu(x)}$，其中$c$是任意常数。

例：求解一阶线性方程

$$y' - y - xe^x = 0$$

解：先将其转换为标准形式

$$y' - y = xe^x$$

再求出它的积分因子：

$$\mu(x) = e^{\int -1dx} = e^{-x}$$

然后得到

$$\frac{d}{dx}[e^{-x}y] = e^x x e^{-x}$$

对两边积分：

$$e^{-x}y = \frac{x^2}{2} + c$$

将两边都除去积分因子，得到通解：

$$y = e^x\left(\frac{x^2}{2} + c_1\right)$$

2.3 全微分方程 [5]2.4

定义：形如$Mdx + Ndy = 0$，如果$\frac{\delta M}{\delta y} = \frac{\delta N}{\delta x}$的微分方程。

解法：通解一般形式为$u(x,y) = \int M(x,y)dx + \psi(y) = c$，其中$c$为任意常数。

接下来对$u(x,y)$求偏y的导数，即：$\frac{\delta u}{\delta y} = \frac{\delta}{\delta y}[\int M(x,y)dx + \psi(y) = N(x,y)$，得到

$\psi'(y) = N(x,y) - \frac{\delta}{\delta y}[\int M(x,y)dx]$。

例：求解满足下列初值条件的全微分方程

$$\frac{1}{y} - \frac{2}{x} = \frac{2xy'}{y^3}, y(1) = 1$$

解：先将其变为全微分方程的一般形式

$$\left(\frac{1}{y^2} - \frac{2}{x}\right)dx - \frac{2x}{y^3}dy = 0$$

求出

$$u(x,y) = \int\left(\frac{1}{y^2} - \frac{2}{x}\right)dx + \psi(y) = \frac{x}{y^2} - 2\ln(x) + \psi(y)$$

接下来对$u(x,y)$求偏y的导数

$$\frac{\delta u}{\delta y} = \frac{\delta}{\delta y}\left[\frac{x}{y^2} - 2\ln(x) + \psi(y)\right] = \frac{-2x}{y^3} + \psi'(y)$$

5. 于1734年被莱昂哈德·欧拉发现。

求出$\psi(y)=0$

通解为

$$u(x,y)=\frac{x}{y^2}-2\ln(x)=c$$

代入初值条件

$$\frac{1}{1^2}-2\ln(1)=c$$
$$c=1$$

最后精确解为

$$\frac{x}{y^2}-2\ln(x)=1$$

注记 4. 特殊的积分因子

如果方程

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

不是全微分方程，如果存在连续可微函数$\mu(x,y)\neq 0$，使得

$$\mu(x,y)M(x,y)+\mu(x,y)N(x,y)=0$$

为全微分方程，则称$\mu(x,y)$为该方程的积分因子。寻找该积分因子也分为两种情况：

1. 如果存在只与x有关的积分因子$\mu=\mu(x)$, 则有$\frac{\delta\mu}{\delta y}=0$, 于是上式成为

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{M'_y(x,y)-N'_x(x,y)}{N(x,y)}dx$$

由此可见, 为了使得方程存在只与x有关的积分因子$\mu=\mu(x)$, 当且仅当上式右端dx的系数仅与x有关, 即

$$\frac{M'_y(x,y)-N'_x(x,y)}{N(x,y)}=\varphi(x)$$

如果该条件成立, 得到一个只与x有关的积分因子

$$\mu(x)=e^{\int\varphi(x)dx}$$

2. 同理, 为使方程存在只与y有关的积分因子$\mu=\mu(y)$, 当且仅当表达式

$$\frac{N'_x(x,y)-M'_y(x,y)}{M(x,y)}=\varphi(y)$$

仅与y有关, 如果这个条件成立，得

$$\mu(y)=e^{\int\varphi(y)dy}$$

例 5. 求解方程

$$(x^4+y^4)dx-xy^3dy=0$$

解：设$M=x^4+y^4, N=xy^3$, 由此算出

$$(M_y-N_x)/N=\frac{-5}{x}$$

所以可得到只与x有关的积分因子

$$\mu(x)=e^{\int -5x^{-1}dx}=x^{-5}$$

将此积分因子乘原方程即可得到全微分方程

$$\frac{1}{y}dx+\left(\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\right)dy=0$$

得到通解

$$\frac{x}{y}+\ln(cy)=0$$

注意使积分因子为无穷大时的$y=0$也是解，它不包含在通解中.

2.4 齐次方程 2.6[6]

定义：形如$y'(x)=f\left(\frac{x}{y(x)}\right)$的微分方程。[7]

解法：使用变量分离法和建立中间变量$v=\frac{y}{x}$，然后得到等式$y'=v+xv'=F(v)$。很明显$xv'=F(v)-v\rightarrow\frac{dv}{F(v)-v}=\frac{dx}{x}$，接下来使用分离变量法解出$v$，即可得到$y$的解。

例：解满足下列初值条件的的齐次方程

$$xyy'+4x^2+y^2=0, y(2)=-7$$

解：先将整式除x^2，得到下式：

$$\frac{y}{x}y'=-4-\frac{y^2}{x^2}=-4-\left(\frac{y}{x}\right)^2$$

设$v=\frac{y}{x}, y'=(vx)'=v'x+v$，则上式变成

$$\begin{aligned}
v(v+xv') &= -4-v^2\\
vxv' &= -4-2v^2\\
xv' &= \frac{-4+2v^2}{v}\\
v' &= \frac{-4+2v^2}{v}\frac{1}{x}
\end{aligned}$$

使用变量分离法解出v：

$$v^2=\frac{1}{2}\left(\frac{c}{x^4}-4\right)$$

代换回$\frac{y}{x}$，得到

$$y^2=\frac{c-4x^4}{2x^2}$$

6. 为了简便的缘故，一般齐次性指的是函数齐次性这个便利性在过去并不会引起混淆。但是现在用电脑处理数学知识的趋势，使得越来越多的学生和老师只是形式上以为齐次性只是微分方程的等式右边等于0，并且也错误的把一些非线性方程也看成是齐次的。关键一点在于，齐次可分离， 而非齐次不可分离.

7. 于1691年被戈特弗里德·莱布尼茨发现。

代入初值条件

$$\begin{aligned}49 &= \frac{c-4\,16}{2\cdot 4}\\ c &= 456\\ y^2 &= \frac{228-2x^4}{x^2}\end{aligned}$$

给出的初值条件的值为负数，所以得到的显式解为$y(x)=-\sqrt{\frac{228-2x^4}{x^2}}$。

注记 6. 一类特殊的换元法（可用于$y'=G(ax+by)$）
解法：设$v=ax+by\Rightarrow v'=a+by'$

$$\begin{aligned}y' &= \frac{v'-a}{b}\\ \frac{dv}{a+bv'} &= dx\end{aligned}$$

该方程可用变量分离法来解。
例：求解符合下列初值条件的微分方程

$$y'-(4x-y+1)^2=0, y(0)=2$$

解法1：使用换元法对$4x-y$换元：

$$v=4x-y, v'=4-y'$$

将v和v'代换回原方程：

$$\begin{aligned}4-v'-(v+1)^2 &= 0\\ v' &= v^2-2v+3\\ \frac{dv}{(v+1)^2-4} &= -dx\end{aligned}$$

使用变量分离法解出v：

$$\begin{aligned}v &= \frac{1+3ce^{-4x}}{1-ce^{-4x}}\\ 4x-y &= \frac{1+3ce^{-4x}}{1-ce^{-4x}}\\ y &= 4x-\frac{1+3ce^{-4x}}{1-ce^{-4x}}\end{aligned}$$

代入初值条件：

$$\begin{aligned}2=y(0) &= -\frac{1+3c}{1-c}\\ c &= -3\end{aligned}$$

因此最后该微分方程的精确解为

$$y=4x-\frac{1-9e^{-4x}}{1+3e^{-4x}}$$

解法2：将其当成里卡蒂方程[8]来求解：

8. 一种非线性微分方程，一般形式为$y'=f(x)+g(x)y+h(x)y^2$，该方程无奇异解。

先将方程整理

$$y' = (4x - y + 1)^2$$

设$v = -4x - y - 1$, 则$y = 4x + v + 1, y' = 4 + v'$

将v, y都代换回原方程，得到：

$$v' + 4 = v^2$$

使用变量分离法对v求解，得出$v = \frac{-2e^{4(x+c_1)} + 2}{e^{4(x+c_1)} + 1}$

将y代换回去：

$$y = 4x + \frac{-2e^{4(x+c_1)} + 2}{e^{4(x+c_1)} + 1} + 1$$

代入初值条件，得到

$$y = \frac{12x + e^{4x}(4x - 1) + 9}{e^{4x} + 3}$$

2.5 伯努利微分方程 2.6[9]

定义：形如$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x)y(x)^n$的微分方程, 如果$n \geqslant 2$。

解法：设$w = y^{1-n}\left(注意w' = \frac{1-n}{y^n}y'\right)$，方程变为$\frac{w'}{1-n} + P(x)w = Q(x)$。

此方程可用积分因子求解。

例：解以下伯努利微分方程

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^2y^2$$

解：首先改写原方程

$$y' + \frac{1}{x}y = x^2y^2$$

将上式除去y^2, 得到

$$\begin{aligned} y' \cdot y^{-2} + \frac{1}{x} * y^{-1} &= x^2 \\ w = y^{1-2} &= y^{-1} \\ w' &= -y^{-2} \cdot y' \end{aligned}$$

该式变为,

$$\begin{aligned} -w' + \frac{1}{x}w &= x^2 \\ w' - \frac{1}{x}w &= -x^2 \end{aligned}$$

解出积分因子，上式变为

$$x^{-1}w = \frac{-x^2}{2} + c$$

9. 于1695年被雅各布·伯努利发现。

将w代换回去

$$\begin{aligned} x^{-1}\frac{1}{y} &= \frac{-x^2}{2}+c \\ y &= \frac{2}{cx-x^3} \end{aligned}$$

2.6 自治方程

自治方程(Autonomou equation)是指，如果微分方程里不显含有自变量，即微分方程有以下形式的话：

$$\frac{d^n y}{dx^n} = F(y, y', ...y^n)$$

自治方程的例子如下：

$$\begin{aligned} y'' &= 1+(y')^2 \\ y' &= 2y \\ y' &= 3+y \end{aligned}$$

这类方程的解法一般是用变量分离法来求解，次数高的话可能还需换元。

例 求解微分方程

$$y'' = 1+(y')^2$$

解：设$y'=u, y''=u'$,则原方程变为

$$u' = 1+u^2$$

使用变量分离法对方程求解：

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{1+u^2} &= \int 1dx \\ \tan^{-1}(u) &= x+c_1 \\ u &= \tan(x+c_1) \end{aligned}$$

对u求不定积分：

$$\int \tan(x+c_1)dx = -\ln(\cos(x+c_1))+c_2$$

所以原方程的解为

$$y = -\ln(\cos(x+c_1))+c_2$$

2.7 求初值问题所在解区间的方法

定理：考虑初值问题$y'+P(t)y=G(t), y(t_0)=y_0$

若$P(t)$和$G(t)$在开区间上连续且区间包含有t_0，那么在该区间存在一个唯一解。

例：求解以下初值问题的有效区间。

$$(t^2-9)y'+2y = \ln(20-4t), y(4) = -3$$

解：先将其变形

$$y' + \frac{2}{t^2-9}y = \frac{\ln(20-4t)}{t^2-9}$$

很明显t有以下有效区间：

$$(-\infty,-3),(-3,3),(3,5),(5,\infty)$$

很明显4在上述的$(3,5)$中。

所以，该初值问题的有效区间为$(3,5)$。

3 二阶常微分方程

3.1 二阶常微分方程的基础知识

二阶常微分方程一般有两种形式：

$$\begin{aligned} p(t)y''+q(t)y'+r(t)y&=g(t) \qquad \text{变系数 Variable coefficient}\\ ay''+by'+cy&=g(t) \qquad \text{常系数 Constant coefficient}\end{aligned}$$

MA205该课教授的是第一种，该方程又分为两类：

- 常系数齐次 Constant coefficient homogeneous，如果$g(t)=0$的话。
- 常系数非齐次 Constant coefficient nonhomogeneous，如果$g(t)\neq 0$的话。

下面将接下来详细介绍这两类方程。

3.2 常系数齐次线性微分方程 4.2,4.3

一种解线性微分方程的方法是欧拉发现的，他意识到这类方程的解都具有e^{rx}的形式。所以，对于一般的该形式方程，可以假设$y=e^{rx}$，然后依次求出y',y'',y'''...的值，拿二阶的微分方程为例：

$$\begin{aligned} y=e^{rx},y'=re^{rx},y''&=r^2e^{rx}\\ a(r^2e^{rx})+b(re^{rx})+c(e^{rx})&=0\\ e^{rx}(ar^2+br+c)&=0\end{aligned}$$

因此该问题简化为解下列一元二次方程：

$$ar^2+br+c=0$$

该方程也被称为特征方程(characteristic equation)。在解出这个特征方程后，我们将引入一条非常重要的原理：叠加原理。

叠加原理(Principle of Superposition)

如果$y_1(x),y_2(x)$，$y_3(x)...y_n(x)$都是常系数齐次线性微分方程的解，那么该微分方程的解为

$$y(x)=\sum c_n y_n(x)$$

该原理可适用于任何线性齐次微分方程上。

3.2.1 常系数齐次线性微分方程的解

对于特征方程的解，即解一个基础的n元一次方程而言，会碰到以下情况：

1. n个根完全不相同，那么该微分方程的通解为$y=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}+\cdots+c_ne^{r_nx}$。
2. n个根中有两个或多个相同的，如果r是特征方程的m_r重根，那么对于$k\in\{0,1,...m_z-1\}$，$y=x^ke^{rx}$就是微分方程的一个解。对每个特征根r，都能得到m_r个解。
3. 复数根。这种情况一定是成对的。如果$a+bi$是特征方程的根，那么它的共轭复数，即$a-bi$也一定是特征方程的一个根。根据叠加原理，$y=e^{(a+bi)x}$和$y=e^{(a-bi)x}$都是微分方程的解。根据欧拉公式，得到$y=e^{ax}\cos(bx)$和$y=e^{ax}\sin(bx)$。于是$y=c_1e^{ax}\cos(bx)+c_2e^{ax}\sin(bx)$就是微分方程的通解。

我们来用一个表格来总结特征方程解对应的微分方程解的情况：

特征根情况	特解形式
n个相异实根$r_1, r_2 ... r_n$	$y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x} + \cdots + c_ne^{r_nx}$
n个相同实根r	$y = c_1e^{rx} + c_2xe^{rx} + \cdots + c_nx^{n-1}e^{rx}$
共轭复根	$y = c_1e^{\alpha x}\cos(\beta x) + c_2e^{\alpha x}\sin(\beta x)$

下面将通过几道例题来说明这三种情况。

1. $y'' - 4y = 0$

   解：先求特征方程

$$\begin{aligned} r^2 - 4 &= 0 \\ r &= \pm 2 \end{aligned}$$

   该特征方程有2个不同的实数根，所以该方程的通解为

$$y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$$

2. $y'' - 6y' + 9y = 0$

   解：先求特征方程

$$\begin{aligned} r^2 - 6r + 9 &= 0 \\ (r-3)^2 &= 0 \\ r &= 3, 3 \end{aligned}$$

   该特征方程有2个相同的实数根，所以该方程的通解为

$$y = c_1e^{3x} + c_2e^{3x}x$$

3. $y'' - 3y' + 18y = 0$

   解：先求特征方程

$$\begin{aligned} r^2 - 3r + 18 &= 0 \\ r &= \frac{3}{2} \pm \frac{3i\sqrt{7}}{2} \end{aligned}$$

   该特征方程有2个不同的复数根，$a = \frac{3}{2}, b = \frac{3\sqrt{7}}{2}$。所以该特征方程的解为

$$y = c_1e^{\frac{3}{2}x}\sin\left(\frac{3\sqrt{7}x}{2}\right) + c_1e^{\frac{3}{2}x}\cos\left(\frac{3\sqrt{7}x}{2}\right)$$

3.3 常系数非齐次线性微分方程

对于常系数非齐次线性微分方程

$$p(t)y'' + q(t)y' + r(t)y = g(t)$$

而言，这类方程无法使用特征方程来求解。但对于任何常系数非齐次线性微分方程而言，通解由两部分组成：辅解(Complementary solution)和特解(Particular solution)，其中辅解即为对应的齐次微分方程

$$p(t)y'' + q(t)y' + r(t)y = 0$$

的解。那么剩下来的特解应该如何求出呢？我们一般使用两种方法：待定系数法和常数变易法。

3.3.1 待定系数-叠加法 4.4,4.5,6.2

待定系数法(Underdetermined coefficients)是用来解常系数非齐次微分方程的方法之一，通常情况下它只用来求出特解。这种方法适用于一些非常简单的函数以及非常常见的函数。

该方法的核心思想是：猜测非齐次项对应的特解，即方程右侧$g(t)$的一般形式并留下未确定的系数。之后再将猜测的解插入微分方程，看看是否可以确定系数，将求到的系数代回特解，即得到最后通解。

猜测的特解形式也分为2种情况：

1. $f(x)=P_m(x)e^{ax}$.其中$P_m(x)$为m次多项式, 那么那么该方程的特解一般形式为

$$y_p = x^s Q_m(x) e^{ax}$$

其中$Q_m(x)=a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0$为$m$次多项式，然后代入方程求出$Q_m(x)$. s为该方程拥有重根的数量。a不是特征方程解的时候（即0重根），$y_p=Q_m(x)e^{ax}$。是一个单根（即为1重根)的时候为$y_p=xQ_m(x)e^{ax}$。有重根的时候为$y_p=x^2Q_m(x)e^{ax}$。

2. $f(x)=P_m(x)e^{ax}\cos(\beta x)$或者$f(x)=P_m(x)e^{ax}\sin(\beta x)$.其中$P_m(x)$为$m$次多项式,

那么那么该方程的特解一般形式为

$$y_p = x^s e^{ax}(c_1Q_m(x)\sin(\beta x)+c_2R_m(x)\cos(\beta x))$$

s为该方程拥有重根的数量。$a+bi$不是特征方程解的时候（即0重根），$y_p=e^{ax}(c_1Q_m(x)\sin(\beta x)+c_2R_m(x)\cos(\beta x))$; $a+bi$是特征方程解的时候（即1重根）的时候，$y_p=xe^{ax}(c_1Q_m(x)\sin(\beta x)+c_2R_m(x)\cos(\beta x))$。

接下来通过例题来说明待定系数法的使用。

例：用待定系数法解满足下列初值条件的常系数非齐次线性微分方程：

$$y''-y=12te^t+2e^t+3t-2, y(0)=2, y'(0)=-7$$

解：先求出对应的齐次方程的解

$$\begin{aligned} y''-y &= 0 \\ r^2-1 &= 0 \\ r &= \pm 1 \\ y_c &= c_1e^x+c_2e^{-x} \end{aligned}$$

接下来求特解。先将该方程简化

$$y''-y=-2+3t+2e^t(6t+1)$$

很明显该方程的特解必须分为两部分来求解：$y''-y=-2+3t$和$y''-y=2e^t(6t+1)$。

先来求解第一个, 很明显

$$y_{p_1}=a_1+a_2t$$

再来求y_{p_2}。很明显$a=1$，正好它为辅解之一，所以该特解的形式应该为

$$y_{p_2}=t(a_3t+a_4)e^t$$

根据叠加原理, 得到特解为

$$y_p = a_1 + a_2 t + a_3 e^t\, t + a_4\, e^t t^2$$

接下来计算y_p'':

$$y_p'' = a_3(2e^t + e^t t) + a_4(2e^t + e^t t^2 + 4e^t t)$$

将y_p, y_p''都代换回原方程, 原方程变为

$$a_3(2e^t + e^t t) + a_4(2e^t + e^t t^2 + 4e^t t) - (a_1 + a_2 t + a_3 e^t t + a_4 e^t t^2) = 2e^t + 3t + 12e^t t - 2$$

将上式简化:

$$\begin{aligned} -a_1 + (2a_3 + 2a_4)e^t - a_2 t + 4a_4 e^t t &= -2 + 2e^t + 3t + 12e^t t \\ -a_1 &= -2 \\ 2a_3 + 2a_4 &= 2 \\ -a_2 &= 3 \\ 4a_4 &= 12 \end{aligned}$$

得到$a_1 = 2, a_2 = -3, a_3 = -2, a_4 = 3$, 所以特解为

$$y_p = 3e^t t^2 - 3t - 2e^t t + 2$$

通解为

$$y = y_c + y_p = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + 3e^t t^2 - 3t - 2e^t t + 2$$

代入两个初值条件，得到$c_1 = 1, c_2 = -1$。

所以该微分方程的解为

$$y = e^{-t} - 3t + e^t(3t^2 - 2t - 1) + 2$$

3.3.2 待定系数-零化子法 6.3

n阶微分方程可以写成

$$a_n D^n y + a_{n-1} D^{n-1} y + \cdots + a_1 D y + a_0 y = g(x)$$

这里$D^k y = \frac{d^k y}{dx^k}, k = 0, 1..., n$。出于我们的需求, (1)式可以写为$L(y) = g(x)$, 这里$L$表示线性$n$阶微分算子(Differential operator)

$$L = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0$$

算子符号不但非常方便， 而且可以使我们非常容易得到某些类型的非齐次线性微分方程的特解，在开始讨论之前，我们先看两个概念。

分解算子 当$a_i, i = 0, 1, ...n$都是常实数时，线性微分算子可以通过特征方程$a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \cdots + a_1 m + a_0 = 0$进行因式分解。换句话说，如果$r_1$是辅助方程

$$a_n m^n + a_{n-1} m^{^{n-1}} + \cdots + a_1 m + a_0 = 0$$

的根，那么$L = (D - r_1)P(D)$, 这里多项式$P(D)$是$n-1$阶线性微分算子。若把D看作是一个普通变量$D^2 + 5D + 6$可以做因式分解$(D+2)(D+3)$或$(D+3)(D+2)$。因此如果函数$y = f(x)$存在二阶导数，则

$$(D^2 + 5D + 6)y = (D+2)(D+3)y = (D+3)(D+2)y$$

从中可以得出一个一般的性质:

常系数线性微分算子的因子可以互相交换。

形如$y''+4y'+4y=0$的微分方程可以写为

$$(D^2+4D+4)y=0\text{或}(D+2)(D+2)y=0\text{或}(D+2)^2y=0$$

零化算子 若L是常系数微分算子，f是充分可微函数，并使得

$$L(f(x))=0$$

则L称为是函数的零化算子(Annihilator)。例如，常函数$y=k$可以用$Dk=0$。函数$y=x$可以被微分算子D^2零化，因为x的一阶和二阶导数分别是1和0。类似地， $D^3x^2=0$等等。

微分算子D^n可以把如下的每个函数零化:

$$1,x,x^2,...,x^{n-1}$$

作为上述的一个直接结果可知,由于微分运算可以逐项进行，所以可以找到一个使得x的最高次幂零化的算子把多项式

$$c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_{n-1}x^{n-1}$$

零化。

被线性n阶微分算子L零化的函数仅仅限于那些可以从齐次微分方程$L(y)=0$中求出的通解。

微分算子$(D-a)^n$可以把如下的每个函数零化:

$$e^{ax},xe^{ax},x^2e^{ax},...x^{n-1}e^{ax}$$

现在来证明这个结论，注意到齐次方程$(D-\alpha)^ny=0$的辅助方程为$(m-\alpha)^n=0$。因为α是多项式的n重根，所以通解为

$$y=c_1e^{\alpha x}+c_2xe^{\alpha x}+\cdots+c_nx^{n-1}e^{\alpha x}$$

例1 零化算子

求使得如下函数零化的微分算子

a) $1-5x^2+8x^3$

解 由$D^4x^3=0$可知

$$D^4(1-5x^2+8x^3)=0$$

b) e^{-3x}

解 可知$\alpha=-3,n=0$。所以零化算子为

$$(D+3)e^{-3x}=0$$

c) $4e^{2x}-10xe^{2x}$

解 可知$\alpha=2,n=1$。所以零化算子为

$$(D-2)^2(4e^{2x}-10xe^{2x})=0$$

当α,β都是实数，且$\beta>0$时，由二次求根公式可知$[m^2-2\alpha D+(\alpha^2+\beta^2)]^n=0$有复根$\alpha+\beta i,\alpha-\beta i$,它们都是$n$重根。由此可知道微分算子$[D^2-2\alpha D+(\alpha^2+\beta^2)]^n$可以零化如下每个函数:

$e^{\alpha x}\cos(\beta x), x e^{\alpha x}\cos(\beta x), x^2 e^{\alpha x}\cos(\beta x), ..., x^{n-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x)$

$e^{\alpha x}\sin(\beta x), x e^{\alpha x}\sin(\beta x), x^2 e^{\alpha x}\sin(\beta x), ..., x^{n-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x)$

例2 求下面函数的零化算子

$$5e^{-x}\cos(2x) - 9e^{-x}\sin(2x)$$

解 很明显$\alpha = -1, \beta = 2, n = 0$，所以该函数的零化算子为

$$\begin{aligned}[D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2)]^{n+1} &= [D^2 + 2D + (1^2 + 2^2)]^1 \\ &= D^2 + 2D + 5\end{aligned}$$

因为$D^2 + 2D + 5$是线性算子，所以它可以零化这两个函数任意的线性组合，即$5e^{-x}\cos(2x) - 9e^{-x}\sin(2x)$。

当$\alpha = 0, n = 1$，该种零化算子的一个特例是

$$(D^2 + \beta^2)\begin{cases}\cos(\beta x) \\ \sin(\beta x)\end{cases} = 0$$

例如，$D^2 + 16$可以零化$\sin(4x)$和$\cos(4x)$的任何一个线性组合。

不管上述情况细分, 一共有2种情况的零化算子:

$f(x)$	零化算子
$x^n e^{\alpha x}$	$(D - \alpha)^{n+1}$
$x^n e^{\alpha x}\cos(\beta x), x^n e^{\alpha x}\sin(\beta x)$	$[(D - \alpha)^2 + \beta^2]^{n+1}$

我们通常对零化两个或两个以上函数的和比较感兴趣。若L是线性微分算子，使得$L(y_1) = 0, L(y_2) = 0$，那么L可以零化线性组合$c_1y_1 + c_2y_2$. 令L_1和L_2是常系数微分算子，并使得L_1零化y_1,L_2零化y_2，但是$L_1(y_2) \neq 0, L_2(y_1) \neq 0$，那么微分算子的乘积$L_1L_2$零化和$c_1y_1 + c_2y_2$。我们可以很容易证明这个结论，利用微分算子的线性和可交换性$L_1L_2 = L_2L_1$:

$$\begin{aligned}L_1L_2(y_1 + y_2) &= L_1L_2(y_1) + L_1L_2(y_2) \\ &= L_2L_1(y_1) + L_1L_2(y_2) \\ &= L_2 \cdot 0 + L_1 \cdot 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

例如，D^2零化$7 - x$，$D^2 + 16$零化$\sin(4x)$. 因此，算子积$D^2(D^2 + 16)$零化线性组合$7 - x + \sin(4x)$.

如果(1)中可以用最低阶的微分算子L_1使之零化，L_1是由算子$D^n, (D - \alpha)^n, [(D - 2\alpha D + \alpha^2 + \beta^2)^n$的积组成的。把$L_1$应用于方程$L(y) = g(x)$的两端，得到$L_1(L(y)) = L_1(g(x)) = 0$。通过解齐次高阶方程$L_1(L(y)) = 0$，我们可以得到原始非齐次方程$L(y) = g(x)$的一个特解$y_p$. 然后我们把特解的形式代入$L(y) = g(x)$求出显式特解.

总结解题步骤如下:

i. 求齐次方程$L(y) = 0$的解，即非齐次方程的辅解部分。

ii. 对非齐次方程$L(y) = g(x)$两端应用使函数$g(x)$零化的微分算子L_1。

iii. 求高阶齐次微分方程$L(L(y)) = 0$的通解。

iv. 从iii的解中去掉i中所求辅解所含的项,余下的项就是线性组合y_p。这就是方程$L(y) = g(x)$的特解。

v. 把iv中所求的y_p代入$L(y) = g(x)$。比较等式两边相同函数项的系数，令相同函数项的系数相等，解系数方程组可得y_p中的未知系数。

vi. 由v中解出的特解，可知微分方程的通解为$y=y_c+y_p$。

用一道例题来说明零化子法的使用。

例 用待定系数法求解微分方程

$$y''+4y'+4y=2x+6 \tag{1}$$

解：第一步，先求解对应的齐次方程的特征方程：

$$\begin{aligned} y''+4y'+4y &= 0 \\ r^2+4r+4 &= 0 \\ r &= -2,-2 \end{aligned}$$

得到辅解

$$y_c=c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}$$

第二步，因为$2x+6$可以被微分算子D^2零化，$D^2(D^2+4D+4)y=(2x+6)D^2$和

$$D^2(D^2+4D+4)y=0$$

相同。上述的四阶特征方程为

$$m^2(m^2+4m+4)=0$$

解出其根为$m=0,0,-2,-2$, 因此它的通解为

$$y=c_1+c_2x+\boxed{c_3e^{-2x}+c_4e^{-2x}x} \tag{2}$$

(3)中方框里的是一开始求到的辅解，这意味着(3)中剩下的部分一定是特解的基本形式：

$$y_p=A+Bx \tag{3}$$

这里为了简化，分别用A,B代替c_1,c_2，要使(3)成为所求方程的特解，就必须找到系数A,B的值。对(4)求微分，可得

$$\begin{aligned} y_p' &= B \\ y_p'' &= 0 \end{aligned}$$

把上述结果代换回(2)，可得

$$\begin{aligned} y_p''+4y_p'+4y &= 2x+6 \\ 4A+4B+4Bx &= 2x+6 \end{aligned}$$

很明显

$$\begin{aligned} 4Bx &= 2x \\ 4B+4A &= 6 \\ B &= \frac{1}{2} \\ A &= 1 \end{aligned}$$

因此$y_p=1+\frac{1}{2}x$。

第三步，方程(2)的通解为$y=y_c+y_p$，所以最后通解为

$$y=c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}+1+\frac{1}{2}x$$

例 解

$$y'''-3y'=8e^{3x}+4\sin(x)$$

解:

1. 该方程的辅解是$y_c=c_1+c_2e^{3x}$。

2. $8e^{3x}$的零化算子是$(D-3)$，$4\sin(x)$的零化算子是(D^2+1)，所以右侧的零化算子为这两个的算子积，即$(D-3)(D^2+1)$，再把这个零化算子应用到方程的左侧，得到:

$$(D-3)(D^2+1)(D^3-3D)y=0 \tag{4}$$

3. 求出(5)对应的特征方程，得到通解

$$y=\boxed{c_1+c_2e^{3x}}+c_3xe^{3x}+c_4\cos(x)+c_5\sin(x)$$

4. 上式方框中是一开始求到的辅解，将这部分去掉，就得到特解的一般形式:

$$y_p=Axe^{3x}+\mathrm{B}\cos(x)+\mathrm{C}\sin(x)$$

5. 将特解的一般形式代入原方程，得到$A=\frac{8}{3},B=\frac{6}{5},C=\frac{-2}{5}$。

6. 所以最后通解为$y=c_1+c_2e^{3x}+\frac{8}{3}xe^{3x}+\frac{6}{5}\cos(x)-\frac{2}{5}\sin(x)$。

3.3.3 常数变易法 6.4

上一节我们介绍了待定系数法。虽然它能将解方程简化为代数问题，但是代数可能会变的非常混乱。除此之外，待定系数法的范围仅适用于相当小的一类函数。例如，下列常系数非齐次线性微分方程就因为它的特解和它的特解的导数不存在任何线性组合而无法使用待定系数法求出:

$$\begin{aligned} y''+y &= \tan(x) \\ y_p''+y_p &= \tan(x) \end{aligned}$$

这时，就应该使用常数变易法(Variation of parameters)来求解。常数变易法的一般形式为

$$y_p=v_1(x)y_1(x)+\cdots+v_n(x)y_2(x)$$

常数变易法的步骤是:

1. 先求出方程的辅解$y_1,y_2,\ldots y_n$。

2. 求出辅解的朗斯基行列式

$$W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & & y_n' \\ \vdots & & & \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & & y_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

3. 求出$W_1(x),W_2(x),\ldots W_n(x)$，当$W_k(x)=(-1)^{n-k}W[y_1,\ \ldots y_{k-1},y_k,y_{k+1},\ldots y_n,1\leqslant k\leqslant n]$时。

4. $v_1(x) = \int \frac{f(x)W_1(x)}{a_n(x)W} dx, ...v_n(x) = \int \frac{f(x)W_n(x)}{a_n(x)W}$

5. 将$v_1(x), ...v_n(x)$代回y_p, 求出特解。

下面通过例题来透彻常数变易法的的精髓。

例：求下面常系数非齐次线性微分方程的特解：

$$y'' + 16y = -24\sec(4t)$$

解：求出该方程的通解

$$\begin{aligned} r^2 + 16 &= 0 \\ r &= \pm 4i \\ y_c &= c_1\cos(4t) + c_2\sin(4t) \end{aligned}$$

使用常数变易法。先求出基础解

$$y_{b_1} = \cos(4t), y_{b_2} = \sin(4t)$$

计算两个基础解的朗斯基行列式：

$$\begin{vmatrix} \cos(4t) & \sin(4t) \\ -4\sin(4t) & 4\cos(4t) \end{vmatrix} = 4$$

设$f(t) = -24\sec(4t)$，特解的一般形式是

$$y_p = v_1 y_{b_{1+v_2}} y_{b_2}$$

计算出v_1, v_2：

$$\begin{aligned} v_1 &= -\int \frac{f(t)y_{b_2}}{W(t)} dt \\ &= -\int -6\tan(4t) dt \\ &= -\frac{3}{2}\ln(|\cos(4t)|) \\ v_2 &= \int \frac{f(t)y_{b_1}}{W(t)} dt \\ &= \int -6dt \\ &= -6t \end{aligned}$$

所以最后该方程的特解为

$$y_p = \frac{3}{2}\cos(4t)\ln(|\sec(4t)|) - 6\mathrm{t}\sin(4t)$$

常数变易法不仅可以对所有类型的常系数非齐次线性微分方程求解，而且还可以对柯西-欧拉方程(Cauchy-Euler Equation)，一种变系数线性微分方程来求解。在引入这个方法之前，我们先对柯西-欧拉方程做一个小介绍：

n阶的柯西-欧拉方程一般形式如下：

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_0 y(x) = Q(x)$$

如果$Q(x)\neq 0$，那么该方程为非齐次的。

柯西-欧拉方程一般的求解方法是：设通解$y=x^r$,将通解代回原方程，求一元n次方程，算出r的值，根据r的值需要考虑三种情况：

n个不同实根	$y=c_1x^{r_1}+c_2x^{r_2}+\ldots+c_nx^{r_n}$
n个相同实根	$y=c_1x^{r_1}+c_2x^{r_1}\ln(x)+\ldots+c_nx^{r_n}(\ln(x))^n$
共轭复根	$y=c_1x^{\alpha}\cos(\beta\ln(x))+c_2x^{\alpha}\sin(\beta\ln(x))$

如果方程不是齐次的，那么就可以用上述方法求出辅解，用常数变易法求出特解部分。一般思路是：除去最高微分项的次数，将方程化为一般形式：

$$\frac{d^n y}{dx^n}+\frac{a_{n-1}x^{n-1}}{a_nx^n}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+\frac{a_0}{a_nx^n}y(x)=\frac{Q(x)}{a_nx^n}$$

设$f(x)=\frac{Q(x)}{a_nx^n}$,则用常数变易法求解柯西-欧拉方程的步骤如下：

1. 用所给的辅解设定一组基础解。
2. 求出这组基础解的朗斯基行列式W。
3. 求出$W_1(x),W_2(x),...W_n(x)$
4. $v_1=\int\frac{f(x)W_1(x)}{W},v_2=\int\frac{f(x)W_2(x)}{W},...v_n=\int\frac{f(x)W_n(x)}{W}$
5. 最后特解为$y_p=v_1b_1+v_2b_2+\ldots+v_nb_n$。
6. 辅解+特解最后得到方程的通解。

在实际MA205中，并不会教授如何求解柯西-欧拉方程，所以我们只以常数变易法为精髓，来讲解一道例题：

例 求解柯西-欧拉方程

$$x^3y'''-3x^2y''+6xy'-6y=x^{-1},x>0$$

解：设$y=x^r$，则得到特征方程

$$r(r-1)(r-2)-3r(r-1)+6r-6=0$$

对这个方程求解得到

$$r=1,2,3$$

所以该方程的辅解部分为

$$y_c=c_1x+c_2x^2+c_3x^3$$

设定基础解集

$$y_{b1}=x,y_{b2}=x^2,y_{b3}=x^3$$

求基础解集的朗斯基行列式

$$W=\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3\\ 1 & 2x & 3x^2\\ 0 & 2 & 6x\end{vmatrix}=2x^3$$

求出$W_1(x), W_2(x), W_3(x)$:

$$\begin{aligned}W_1(x) &= \begin{vmatrix} 0 & x^2 & x^3 \\ 0 & 2x & 3x^2 \\ 1 & 2 & 6x \end{vmatrix} = x^4 \\ W_2(x) &= \begin{vmatrix} x & 0 & x^3 \\ 1 & 0 & 3x^2 \\ 0 & 1 & 6x \end{vmatrix} = -2x^3 \\ W_3(x) &= \begin{vmatrix} x & x^2 & 0 \\ 1 & 2x & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = x^2\end{aligned}$$

将整个方程除去最高微分项的系数， 得到标准形式

$$y''' - \frac{3y''}{x} + \frac{6y'}{x^2} - \frac{6y}{x^3} = \frac{1}{x^4}$$

设$f(x) = \frac{1}{x^4}$,计算v_1, v_2, v_3:

$$\begin{aligned}v_1 = \int \frac{f(x)W_1(x)}{W} &= \frac{-1}{4x^2} \\ v_2 = \int \frac{f(x)W_2(x)}{W} &= \frac{1}{3x^3} \\ v_3 = \int \frac{f(x)W_3(x)}{W} &= \frac{-1}{8x^4}\end{aligned}$$

所以特解为

$$\begin{aligned}y_p &= v_1 y_{b_1} + v_2 y_{b_2} + v_3 y_{b_3} \\ &= \frac{-1}{24x}\end{aligned}$$

最后得到通解为

$$\begin{aligned}y &= y_c + y_p \\ &= c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 - \frac{1}{24x}\end{aligned}$$

4 拉普拉斯变换

4.1 定义

拉普拉斯变换(Laplace Transform)是应用数学中常用的一种积分变换， 又名拉氏转换， 其符号为$\mathcal{L}\{f(t)\}$。 拉氏变换是一个线性变换， 可将一个有实数变量$t(t \geqslant 0)$的函数转换为一个变量为复数s的函数:

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

其中频率参数s是一个复数:

$$s = \sigma + \omega i, \sigma \in R, \omega \in R$$

现在，拉氏变换中的积分被称为反常积分(Improper integral)。反常积分分为两类：

1. 第一类反常积分，称为无穷积分，指积分区间的上限或下限为无穷的积分。

2. 第二类反常积分，称为反常积分，指被积函数在积分区间中含有不连续点的积分。

拉式变换中的反常积分是第一类反常积分，即无穷积分。为了方便起见，在后文中的无穷积分，统一被称为反常积分。反常积分的数学定义如下：

设函数$f(x)$在$[a,\infty)$上连续且可积。定义反常积分：

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{u\to\infty}\int_a^u f(x)dx$$

类似的，设函数$f(x)$在$(-\infty,a]$上连续且可积。定义反常积分：

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{u\to-\infty}\int_u^a f(x)dx$$

当上述极限存在(即不为不定型)时，称该积分收敛(convergent)，否则称该积分发散(divergent)。

现在我们来看看这一类积分应该如何计算。

例 如果$c\neq 0$，计算下列积分：

$$\int_0^\infty e^{ct}dt$$

解：将该积分变成一个极限：

$$\int_0^\infty e^{ct}dt = \lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{ct}dt$$

接下来计算极限：

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{ct}dt &= \lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{ct}dt\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{c}e^{ct}\bigg|_0^n\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{c}e^{cn}-\frac{1}{c}\right)\end{aligned}$$

现在必须小心，c的值会影响答案。我们已经假设$c\neq 0$，如果$c>0$，指数将变为无穷大。另一方面，如果$c<0$，指数将变为0。

因此，如果$c<0$，积分仅是收敛的(即极限存在且是有限的)。在这种情况下，我们得到

$$\int_0^\infty e^{ct}dt = -\frac{1}{c}, c<0$$

现在我们来计算一些拉普拉斯变换的值。

例 计算$\mathcal{L}\{1\}$

解：

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}dt$$

将$c=-s$做替换：

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}dt = -\frac{-1}{-s}, -s<0$$

所以最后得到

$$\mathcal{L}\{1\}=\frac{1}{s},s>0$$

请注意，我们必须对s进行限制才能实际计算变换。所有拉普拉斯变换都将对s有限制。在这个阶段，这种限制我们倾向于忽略，但我们真的不应该忘记它的存在。

另一个例子：

例 计算$\mathcal{L}\{e^{at}\}$

解：

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{e^{at}\} &= \int_0^\infty e^{-st}\cdot e^{at}dt \\
&= \int_0^\infty e^{(a-s)t}dt \\
&= -\frac{1}{a-s},a-s<0 \\
&= \frac{1}{s-a},s>a
\end{aligned}$$

4.2 用表来寻找函数的拉普拉斯变换

有时候，直接计算拉普拉斯变换可能相当复杂。通常我们只是在实际计算拉普拉斯变换时使用变换表。表这里提供的表不是一个包罗万象的表，但确实包括大多数常用的拉普拉斯变换和大多数与拉普拉斯变换有关的常用公式。

在做几个例子来说明表的使用之前，让我们了解拉普拉斯变换的一个性质：

拉普拉斯变换是线性算子。

因此，拉普拉斯变换有以下性质：

- 和的拉普拉斯变换等于各项的拉普拉斯变换的总和。

$$\mathcal{L}\{f(t)+g(t)\}=\mathcal{L}\{f(t)\}+\mathcal{L}\{g(t)\}$$

- 一个函数的倍数的拉普拉斯变换等于该函数的拉普拉斯变换的倍数。

$$\mathcal{L}\{af(t)\}=a\mathcal{L}\{f(t)\}$$

从以上两条性质可以汇总得到：

$$\text{对于任何常数}a,b,\mathcal{L}\{af(t)+bg(t)\}=a\mathcal{L}\{f(t)\}+b\mathcal{L}\{g(t)\}$$

换句话说，我们不担心常数，我们不担心拉普拉斯变换的函数的总和或差。我们需要做的就是对各个函数进行转换，然后将所有常量放回来并添加或减去结果。

例 求下列函数的拉普拉斯变换

a) $f(t)=6e^{-5t}+e^{3t}+5t^3-9$

$$\begin{aligned}
F(s) &= 6\frac{1}{s-(-5)}+\frac{1}{s-3}+5\frac{3!}{s^{3+1}}-9\frac{1}{s} \\
&= \frac{6}{s+5}+\frac{1}{s-3}+\frac{30}{s^4}-\frac{9}{s}
\end{aligned}$$

b) $g(t) = 4\cos(4t) - 9\sin(4t) + 2\cos(10t)$

$$\begin{aligned} G(s) &= 4\frac{s}{s^2+4^2} - 9\frac{4}{s^4+4^2} + 2\frac{s}{s^2+10^2} \\ &= \frac{4s-36}{s^2+16} + \frac{2s}{s^2+100} \end{aligned}$$

c) $h(t) = 3\sinh(2t) + 3\sin(2t)$

$$\begin{aligned} H(s) &= 3\frac{s}{s^2-2^2} + 3\frac{s}{s^2+2^2} \\ &= \frac{6}{s^2-4} + \frac{6}{s^2+4} \end{aligned}$$

d) $g(t) = e^{3t} + \cos(6t) - e^{3t}\cos(6t)$

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{1}{s-3} + \frac{s}{s^2+6^2} + \frac{s-3}{(s-3)^2+6^2} \\ &= \frac{1}{s-3} + \frac{s}{s^2+36} - \frac{s-3}{(s-3)^2+36} \end{aligned}$$

e) $f(t) = t\cosh(3t)$

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}\{t\,g(t)\} \\ &= (-1)^1\mathcal{L}'\{g(t)\} \\ &= -\mathcal{L}'\{g(t)\} \\ &= -\left(\frac{s}{s^2-9}\right)' \\ &= -\left(\frac{(s^2-9)+s\cdot 2s}{(s^2-9)^2}\right) \\ &= -\left(\frac{-9-s^2}{(s^2-9)^2}\right) \\ &= \frac{s^2+9}{(s^2-9)^2} \end{aligned}$$

f) $h(t) = t^2\sin(2t)$

$$\begin{aligned} H(s) &= \mathcal{L}\{t\,g(t)\} \\ &= (-1)^2F''(s) \\ &= F''(s) \\ &= \left(\frac{2}{s^2+2^2}\right)'' \\ &= -\frac{-12s^2+16}{(s^2+4)^3} \end{aligned}$$

g) $g(t) = t^{\frac{3}{2}}$

$$\begin{aligned} n=2, G(s) &= \frac{1\cdot 3\cdot\sqrt{\pi}}{2^2 s^{2+\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{3\sqrt{\pi}}{4s^{\frac{5}{2}}} \end{aligned}$$

h) $f(t) = (10t)^{\frac{3}{2}}$

$$\begin{aligned} g(t) &= t^{\frac{3}{2}} \\ f(t) &= g(10t) \\ F(s) &= \frac{1}{10} G\Big(\frac{s}{10}\Big) \\ &= \frac{1}{10}\left(\frac{3\sqrt{\pi}}{4\big(\frac{s}{10}\big)^{\frac{5}{2}}}\right) \\ &= 10^{\frac{3}{2}} \frac{3\sqrt{\pi}}{4s^{\frac{5}{2}}} \end{aligned}$$

i) $f(t) = t g'(t)$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(tg'(t)) &= -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{g'\} \\ &= -\frac{d}{ds}\{\mathrm{sG}(s) - g(0)\} \\ &= -(G(s) + sG'(s) - 0) \\ &= -G(s) - sG'(s) \end{aligned}$$

4.3 拉普拉斯逆变换

如果我们在前面有一个变换表可以使用，就像我们在上一节中看到的那样，找到函数的拉普拉斯变换并不是非常困难。我们现在想做的是走另一条路。

我们将获得一个变换，$F(s)$，并询问我们最初的函数（或多个函数）。正如您将看到的，这可能是一个比转换更复杂和冗长的过程。在这些情况下，我们说我们正在找到$F(s)$的逆拉普拉斯变换(Inverse Laplace Transform)，并使用以下符号：

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

与拉普拉斯变换一样，我们有以下性质来帮助我们进行逆变换。

给定两个拉普拉斯变换$F(s), G(s)$, 那么对于任意常数a, b而言，存在以下性质：

$$\mathcal{L}^{-1}\{aF(s) + bG(s)\} = a\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + b\{G(s)\}$$

从而推出拉普拉斯逆变换也是一个线性算子。

我们来看看几个相当简单的逆变换。

例 求出下列内容对应的拉普拉斯逆变换

a) $F(s) = \frac{6}{s} - \frac{1}{s-8} + \frac{4}{s-3}$

$$\begin{aligned} F(s) &= 6\frac{1}{s} - \frac{1}{s-8} + 4\frac{1}{s-3} \\ f(t) &= 6 \cdot 1 - e^{8t} + 4e^{3t} \\ &= 6 - e^{8t} + 4e^{3t} \end{aligned}$$

b) $H(s)=\frac{19}{s+2}-\frac{1}{3s-5}+\frac{7}{s^5}$

$$\begin{aligned}H(s) &= \frac{19}{s+2}-\frac{1}{3s-5}+\frac{7}{s^5}\\ &= 19\cdot\frac{1}{s-(-2)}-\frac{1}{3\left(s-\frac{5}{3}\right)}+\frac{7\,\frac{4!}{4!}}{s^{4+1}}\\ &= 19e^{-2t}-\frac{1}{3}e^{\frac{5}{3}t}+\frac{7}{4!}\frac{4!}{s^{4+1}}\\ h(t) &= 19e^{-2t}-\frac{1}{3}e^{\frac{5}{3}t}+\frac{7}{24}t^4\end{aligned}$$

c) $F(s)=\frac{6s}{s^2+25}+\frac{3}{s^2+25}$

$$\begin{aligned}F(s) &= 6\cdot\frac{s}{s^2+25}+\frac{5\,\frac{3}{5}}{s^2+25}\\ f(t) &= 6\cos(5t)+\frac{3}{5}\sin(5t)\end{aligned}$$

d) $G(s)=\frac{8}{3s^2+12}+\frac{3}{s^2-49}$

$$\begin{aligned}G(s) &= \frac{1\cdot 2}{3}\left(\frac{4}{s^2+4}\right)+\frac{7\,\frac{3}{7}}{s^2-7^2}\\ &= \frac{2}{3}\sin(4t)+\frac{3}{7}\sinh(7t)\end{aligned}$$

让我们解决一些稍微难点的问题。这些比第一组问题更复杂。

例 求下列内容对应的拉普拉斯逆变换

a) $G(s)=\frac{86s-78}{(s+3)(s-4)(5s-1)}$

解：首先对$G(s)$做部分分式分解：

$$\begin{aligned}G(s) &= \frac{A}{s+3}+\frac{B}{s-4}+\frac{C}{5s-1}\\ 86s-78 &= A(s-4)(5s-1)+B(s+3)(5s-1)+C(s+3)(s-4)\end{aligned}$$

$s=-3,-336=A(-7)(-16)\rightarrow A=-3$

$s=\frac{1}{5},-\frac{304}{5}=C\left(\frac{16}{5}\right)\left(-\frac{19}{5}\right)\rightarrow C=5$

$s=4,266=B(7)(19)\rightarrow B=2$

所以该函数部分分式分解后为

$$G(s)=\frac{-3}{s+3}+\frac{2}{s-4}+\boxed{\frac{5}{5s-1}}\leftarrow\frac{1}{s-\frac{1}{5}}$$

对$G(s)$做拉普拉斯逆变换：

$$g(t)=-3e^{-3t}+2e^{4t}+e^{\frac{1}{5}t}$$

b) $G(s)=\frac{25}{s^3(s^2+4s+5)}$

解：首先对$G(s)$做部分分式分解：

$$G(s)=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s^3}+\frac{Ds+E}{s^2+4s+5}$$

展开求A,B,C,D,E:

$$\begin{aligned}25 &= As^2(s^2+4s+5)+Bs(s^2+4s+5)+C(s^2+4s+5)+(Ds+E)s^3\\ &= (A+D)s^4+(4A+B+E)s^3+(5A+4B+C)s^2+(5B+4C)s+5C\end{aligned}$$

$\Downarrow$

$A=\frac{11}{5}, B=-4, c=5, D=\frac{-11}{5}, E=-\frac{24}{5}$

所以最后得到$G(s)$:

$$G(s)=\frac{1}{5}\left(\frac{11}{s}-\frac{20}{s^2}+\frac{25}{s^3}-\frac{11s+24}{s^2+4s+5}\right)$$

对$G(s)$做拉普拉斯逆变换：

$$g(t)=\frac{1}{5}\left(11-20t+\frac{25}{2}t^2-11e^{-2t}\cos(t)-2e^{-2t}\sin(t)\right)$$

4.4 使用拉普拉斯变换来求解初值问题

拉普拉斯变换在常微分方程中最重要的应用之一就是用它来求解初值问题。在介绍这个方法之前，我们回顾一下n阶导数的拉普拉斯变换：

$$\mathcal{L}\{f^n(t)\}=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)\cdots-sf^{n-2}(0)-f^{n-1}(0)$$

有了它我们就能求解任意n阶常系数线性微分方程的的初值问题了，解题步骤一般如下：

1. 对方程两侧同时进行拉普拉斯变换。
2. 代入初值条件，整理合并同类项，求出$Y(s)$。
3. 对$Y(s)$做拉普拉斯逆变换，从而求出微分方程的精确解。

让我们来看一道例题。

例 使用拉普拉斯变换来求解初值问题

$$y''-4y'+3y=9t, y(0)=5, y'(0)=0$$

解：首先对整个方程两侧做拉普拉斯变换：

$$\mathcal{L}\{y''-4y'+3y\}=\mathcal{L}\{9t\}$$

然后计算拉普拉斯变换：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y''\}-4\mathcal{L}\{y'\}+3\mathcal{L}\{y\} &= \frac{9}{s^2}\\ s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)-4(sY(s)-y(0))+3F(s) &= \frac{9}{s^2}\end{aligned}$$

代入初值条件:

$$(s^2-4s+3)Y(s)-5s+20=\frac{9}{s^2}$$

求解$Y(s)$:

$$Y(s)=\frac{5s^3-20s^2+9}{s^4-4s^3+3s^2}$$

对$Y(s)$进行部分分式分解，得到:

$$Y(s)=\frac{-2}{s-3}+\frac{4}{s}+\frac{3}{s-1}+\frac{3}{s^2}$$

对$Y(s)$做拉普拉斯逆变换:

$$y=-2e^{3t}+4+3e^t+3t$$

拉普拉斯变换求解初值问题一般是在初值条件$t=0$时使用的，如果所给的初值条件$t\neq 0$时，那么我们需要做一点小小的变动。

例 求解下列初值问题

$$w''-2w'+w=6t-2, w(-1)=3, w'(-1)=7$$

解：需要注意这里所给的初值条件$t\neq 0$，所以我们需要做一个换元:

$$y(t)=w(t-1)$$

很明显

$$\begin{aligned} y'(t) &= w'(t-1)\frac{d}{dt}(t-1)=w'(t-1) & (5)\\ y''(t) &= w''(t-1)\frac{d}{dt}(t-1)=w''(t-1) & (6)\end{aligned}$$

将t用$t-1$代换得到:

$$w''(t-1)-2w'(t-1)+w(t-1)=6(t-1)-2$$

根据(5) (6)可知

$$y''(t)-2y'(t)+y(t)=6t-8, y(0)=w(-1)=3, y'(0)=w'(-1)=7 \tag{7}$$

对(7)做拉普拉斯变换得到:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{3s^3+s^2-8s+6}{s^2(s-1)2}\\ &= \frac{6}{s^2}+\frac{4}{s}-\frac{1}{s-1}+\frac{2}{(s-1)^2} & (8)\end{aligned}$$

对(8)做拉普拉斯逆变换:

$$y(t) = 6t+4-e^t+2te^t$$

又已知$y(t)=w(t-1)$，所以最后解为

$$w(t) \;=\; 6(t+1)+4-e^{t+1}+2(t+1)e^{(t+1)}$$

4.5 拉普拉斯变换表

$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$
1	$\frac{1}{s}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$t^n, n=1,2,3,\ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$t^p, p>-1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$
$\sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}$
$t^{n-\frac{1}{2}}$	$\frac{1\,3\,5\cdots(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n s^{n+\frac{1}{2}}}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$\mathrm{tsin}(at)$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
$\mathrm{tcos}(at)$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
$\sin(at)-at\cos(at)$	$\frac{2a^3}{(s^2+a^2)^2}$
$\sin(at)+at\cos(at)$	$\frac{2as^2}{(s^2+a^2)^2}$
$\cos(at)-a\,\mathrm{tsin(at)}$	$\frac{s(s^2-a^2)}{(s^2+a^2)^2}$
$\cos(at)+a\,\mathrm{tsin(at)}$	$\frac{s(s^2+3a^2)}{(s^2+a^2)^2}$
$\sin(at+b)$	$\frac{s\sin(b)+a\cos(b)}{s^2+a^2}$
$\cos(at+b)$	$\frac{s\sin(b)-a\cos(b)}{s^2+a^2}$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$e^{at}\sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$
$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
$e^{at}\sinh(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2-b^2}$
$e^{at}\cosh(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$

$t^n e^{at}, n=1,2,3,...$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$f(ct)$	$\dfrac{1}{c}F\left(\dfrac{s}{c}\right)$
$e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$
$t^n f(t), t=1,2,3,...$	$(-1)^n F^n(s)$
$f'(t)$	$sF(s)-f(0)$
$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$
$f^n(t)$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)\cdots-sf^{n-2}(0)-f^{n-1}(0)$

注：

$\Gamma(n)=(n-1)!$

5 微分方程的级数解

到目前为止我们已经初步掌握了求解二阶或高阶常系数线性微分方程的方法。唯一的例外是柯西-欧拉方程

$$a_nx^ny^{(n)}(x)+a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)}(x)+\cdots+a_0y(x)=g(x)$$

在实际应用中，变系数的线性方程至少和常系数线性方程一样重要。例如，一个形如

$$y''+xy=0$$

的简单变系数方程没有初等形式的解。我们可以求出该方程两个线性无关的解，但这个方程的解要用无穷级数来定义。

5.1 级数相关概念回顾

级数(Series)：一个有穷或无穷的序列$u_1,u_2,u_3,...$的和$s=u_1+u_2+u_3...$称为**级数**。如果序列是有穷序列，其和称为**有穷级数**(finite series)；反之，称为**无穷级数**(infinite series)。MA205该课主要用到的是无穷级数，所以在下文统一用"级数"统称无穷级数。

无穷级数的定义：设u_n是一个无穷序列：$u_1,u_2,u_3,...,u_n,...$，其前n项的和称为$\sum u_n$的**部分和**(Partial sum)：

$$s_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n$$

(u_n)部分和依次构成另一个无穷序列：$s_1,s_2,s_3,...s_n,...$

这两个序列合称为一个级数，记作$\sum u_n$或者$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$。

无穷级数的敛散性：对于级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，如果$n$趋向正无穷大时，$s_n$趋向一个有限的极限

$$s=\lim_{n\to\infty}s_n$$

那么这个无穷级数就叫做是**收敛**的(Convergent)，s叫做$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的和。如果极限不存在，这个无穷级数就是**发散**的(Divergent)。收敛的无穷级数存在唯一的一个和s。

几种常见的级数：

级数名	英文名
几何级数	Geometric series
幂级数	Power series
泰勒级数	Taylor series

几何级数：是指通项为等比数列的级数，比如：

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=2$$

一般来说，几何级数$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$的敛散性有以下两种情况：

1. 当且仅当$|z|<1$时，级数收敛。

2. 当且仅当$|z|\geqslant 1$时，级数发散。

幂级数：关于$x-a$的**幂级数**是一个形如

$$c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

的无穷级数。这样的级数也被称为以a为中心的幂级数。

例如，幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}(x+1)^n$以$a=-1$为中心。在本节中我们主要讨论关于$x$的幂级数，即以$a=0$为中心的幂级数。

该级数一般使用比值审敛法(Ratio test, 即达朗贝尔判别法)判定敛散性，一般步骤如下：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\rho$$

- 当$\rho<1$时级数收敛
- 当$\rho>1$时级数发散
- 当$\rho=1$时级数可能收敛也可能发散，即无法审敛。

收敛半径(Radius of convergence)则是相反的算法(即前项比后项)：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right|=\rho$$

- 如果$\rho=\infty$, $\forall x$级数收敛
- 如果$0<\rho<\infty$, $\exists x\to|x|<\rho$收敛，$\exists x\to|x|>\rho$发散
- 如果$\rho=0$，级数在$x\neq 0$时发散

例 求下列级数的收敛区间

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}x^n$$

解：先求出收敛半径

$$\begin{aligned}
\rho &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{3^n}{n!}}{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^n}{n!}\cdot\frac{(n+1)!}{3^{n+1}\cdot}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{3}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}|n+1| \\
&= \infty
\end{aligned}$$

该级数中心点为0，所以该级数的收敛区间为

$$(0-\infty,0+\infty) \;=\; (-\infty,\infty)$$

幂级数的性质

幂级数的和、积、微分

假设我们有两个幂级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

且设x在它们的收敛半径之内，那么

$$\begin{aligned}
f(x)+g(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n \\
f(x)g(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, c_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0 \\
f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}
\end{aligned}$$

幂级数的积分

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

那么

$$\int f(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+C$$

恒等原理(Identity principle)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

当且仅当

$$\forall n, a_n=b_n$$

交换和式标记(Shift of index of summation)

当在计算幂级数的微分时，我们可以重新计算下面幂级数的和式标记

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,a_{n+1}x^n$$

一般来说，对于任何幂级数的交换和式标记的方法都可以遵循以下步骤：

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} x^{n+k}$$

注意：交换和式标记时，两个级数的求和标记且两个级数中x的幂次数都必须保持同步。

泰勒级数： 是关于一个光滑函数f在一点a附近取值的级数。 泰勒函数由函数在点a的各阶导数值构成，具体形式为：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

这是一个幂级数。如果$a=0$，也可以把这个级数称为**麦克劳林级数**(Maclaurin series)。

一些常见的麦克劳林级数：

几何级数

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \forall x \colon |x| < 1$$

以e为底数的指数函数：

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \forall x$$

正弦、余弦函数：

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \forall x$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \forall x$$

如果泰勒级数对于区间$(a-r, a+r)$中的所有x都收敛并且级数的和等于$f(x)$， 那么就称函数f在点a上是**解析函数**(Analytic function)。确切来说， 一个函数当且仅当能够被表示为幂级数的形式时，才是解析函数。

典型的解析函数有：

- 全部初等函数：
    - 多项式函数是解析的。 对于次数为n的多项式，其泰勒级数中大于n阶的项必为零，自然也是收敛的。
    - 指数函数是解析的。这个函数的泰勒级数在整个复平面上收敛。
    - 三角函数, 对数函数, 幂函数在相应的定义域上都是解析的。

5.2 使用幂级数来寻找微分方程的解

使用幂级数来寻找微分方程的解的核心之一在于将所有的y全部用

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

代换。y的一次，二次，n次微分也全部都由上述幂级数得到。

我们先来看使用幂级数法来求解一个常系数齐次线性微分方程的例子。

例 用幂级数法来求解下面的微分方程

$$y'+2y=0$$

解：先设

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

然后它的导数

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

因此该微分方程变为

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}+2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n=0$$

为了计算方便，我们这里需要统一和式标记，所以先对整个方程左侧统一和式标记：

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}+2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n &= 0\\ \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, c_{n+1} x^n+2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n &= 0\end{aligned}$$

合并幂级数，得到：

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)c_{n+1}+2c_n]x^n=0$$

很明显接下来要对方程

$$(n+1)c_{n+1}+2c_n=0$$

求解，这里的话就需要求**递推关系式**(Recurrence relation)了。需要求的递推关系式很明显为

$$c_{n+1}=-\frac{2c_n}{n+1}$$

接下来计算这个递推关系式的前面几项：

$$\begin{aligned}c_1 &= -\frac{2c_0}{1}=-2c_0\\ c_2 &= \frac{-2c_1}{1+1}=\frac{-2\cdot-2c_0}{1+1}=\frac{(-2)^2c_0}{2}\\ c_3 &= \frac{-2c_2}{2+1}=\frac{(-2)^3c_0}{2\cdot3}\\ c_4 &= \frac{-2c_3}{3+1}=\frac{(-2)^4c_0}{2\cdot3\cdot4}\\ &\vdots\\ c_n &= \frac{(-2)^n c_0}{n!}\end{aligned}$$

所以该微分方程的解为

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n c_0}{n!}x^n$$

幂级数法其实最广泛的应用其实还是在解变系数齐次线性微分方程的时候。 让我们来看一个变系数齐次线性微分方程的例子。

例 求解微分方程

$$(x-3)y'+2y=0$$

解：首先先设

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

然后它的导数

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)c_n x^{n-1}$$

所以该方程变为

$$(x-3)\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}+2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n=0$$

接下来，消去方程里幂级数外部的系数并统一和式标记：

$$\begin{aligned}
(x-3)\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}+2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n &= 0\\
\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n}-3\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}+2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n &= 0\\
\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^n}-\sum_{n=0}^{\infty} 3(n+1)c_{n+1}x^n+\sum_{n=0}^{\infty} 2c_n x^n &= 0
\end{aligned}$$

上述方框中因为幂级数里幂的次数相同，所以不用转换和式标记直接转到0就能直接使用。

接下来对方程

$$n c_n-3(n+1)c_{n+1}+2c_n=0$$

求解。得到递推关系式：

$$c_{n+1}=\frac{n+2}{3(n+1)}c_n$$

接下来计算这个递推关系式的前面几项：

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{0+2}{3\,(0+1)}c_0=\frac{2}{3}c_0\\
c_2 &= \frac{1+2}{3(1+1)}c_1=\frac{3}{3\cdot 2}c_1=\frac{3}{3\cdot 2}\cdot\frac{2}{3}c_0=\frac{3}{3^2}c_0\\
c_3 &= \frac{2+2}{3(2+1)}c_2=\frac{4}{3\cdot 3}\cdot\frac{3}{3^2}c_0=\frac{4}{3^3}c_0\\
&\vdots\\
c_n &= \frac{n+1}{3^n}c_0
\end{aligned}$$

所以最后方程的解为

$$y=c_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{3^n}x^n$$

总结下来用幂级数求解变系数齐次线性微分方程的步骤如下:

1. 设方程的通解

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

2. 将通解代回原方程，得出通解的n次微分项。

3. 统一和式标记，求出递推关系式。

4. 求出递推关系式的前若干n项，得出级数的一般形式。

5. 将得到的级数一般形式代回原通解，得到所需的级数解。

6. 如果给出初值条件，一阶导数为a_0，二阶导数为a_1，$\ldots$以此类推将初值条件代入所求得的幂级数即可。

5.3 微分方程的奇点

假设线性二阶微分方程

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \tag{9}$$

可以通过除以第一项的系数$a_2(x)$变为标准型

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{10}$$

我们有以下定义。

定义 **平凡点和奇点**

点

$$x = x_0$$

称为微分方程(9)的一个平凡点(ordinary point)，如果标准型(10)中的$P(x)$和$Q(x)$在$x = x_0$处都可以展开。一个点如果不是方程的平凡点，则称为奇点(singular point)。

例如，$x = 0$是微分方程

$$y'' + (e^x)y' + \ln(x)y = 0$$

的一个奇点，因为$Q(x) = \ln(x)$在$x = 0$处不连续，所以其无法表示成x的幂级数。

下面我们主要考虑当(9)有多项式系数时的情况。多项式在x取任意值时可以展开，且有理函数除了其分母取0时之外都可以展开。这样如果$a_2(x)$、$a_1(x)$和$a_0(x)$是没有公因子的多项式，则有理函数$P(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)}$和$Q(x) = \frac{a_0(x)}{a_2(x)}$除了在$a_2(x) = 0$时之外都是可展开的。所以若有$a_2(x) \neq 0$则$x = x_0$是一个平凡点，而若有$a_2(x) = 0$则$x = x_0$是一个奇点。

例如，方程

$$(x^2 - 1)y'' + 2xy' + 6y = 0$$

唯一的奇点是$x^2 - 1 = 0$的解$x = \pm 1$。x的所有其他有限值[10]为平凡点。检验柯西-欧拉方程

$$ax^2y'' + bxy' + \mathrm{c}y = 0$$

10. 我们在这里约定，平凡点和奇点都是有限点。实际上一个常微分方程可能会有取无限制的奇点。

$x=0$为其奇点。

奇点不一定是实数。方程

$$(x^2+1)y''+xy'-y=0$$

的奇点是$x^2+1=0$的解，即$x=\pm i$。x的其他所有实值和复值都是平凡点。

定理 7. 幂级数解的存在性

如果$x=x_0$是微分方程(9)的一个平凡点，那么我们总可以求出两个线性相关且以x_0为中心的幂级数解，即

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n$$

级数解至少在某区间$|x-x_0|<R$上收敛。这里R是x_0到与其最近的奇点的距离。

形如

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n$$

的解称为关于平凡点x_0的解(solution about the ordinary point x_0)。

5.4 奇点的解

微分方程

$$y''+xy=0$$

与

$$xy''+y=0$$

的相似之处在于它们都是变系数齐次线性二阶方程。这是它们仅有的共同点。在上一节我们看到，因为$x=0$是第一个方程的平凡点，所以肯定能求出以该平凡点为中心的两个线性无关的幂级数解。反之，因为$x=0$是第二个常微分方程的奇点，所以求出关于该奇点的两个级数解会比较困难。

规则奇点和不规则奇点 线性微分方程

$$a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0 \tag{11}$$

的奇点$x=x_0$可以进一步被划分为规则和不规则的。这一划分依然依赖于标准型

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \tag{12}$$

中的函数P和Q。

定义 **规则奇点和不规则奇点**

微分方程(11)的一个奇点被称为规则奇点(Regular singular point)，如果函数$p(x)=(x-x_0)P(x)$和$q(x)=(x-x_0)^2Q(x)$处都可以展开。不是规则的奇点称为方程的不规则奇点(Irregular singular point)。

上述定义指出，若函数$p(x)=(x-x_0)P(x)$和$q(x)=(x-x_0)^2Q(x)$至少有一个在$x=x_0$处不可展开，则$x=x_0$就为不规则奇点。

例 8. 奇点的分类

易知$x=\pm 2$是

$$(x^2-4)^2y''+3(x-2)y'+5y=0$$

的奇点。在方程两端除以$(x^2-4)^2=(x-2)^2(x+2)^2$并将系数化简，可得

$$P(x)=\frac{3}{(x-2)(x+2)^2}, Q(x)=\frac{5}{(x-2)^2(x+2)^2}$$

现在我们在每个奇点处检验$P(x),Q(x)$。

为使$x=2$为一个规则奇点，因子$x-2$最多可以以一次幂的形式出现在$P(x)$的分母中且最多可以以二次幂的形式出现在$Q(x)$的分母中。对$P(x)$和$Q(x)$的分母检验证明了这些条件都可满足，所以$x=2$是一个规则奇点。另外，我们可以注意到有理函数

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-2)P(x)=\frac{3}{(x+2)^2} \\ q(x) &= (x-2)^2Q(x)=\frac{5}{(x+2)^2} \end{aligned}$$

在$x=2$处都可以展开从而得到相同的结论。

在例4中，注意到因为$x=2$是一个规则奇点，则原方程可被写为

$$(x-2)^2y''+(x-2)\boxed{\frac{3}{(x+2)^2}}y'+\boxed{\frac{5}{(x+2)^2}}y=0$$

(上述方框中在$x=2$处均可以展开)

弗罗贝尼乌斯方法(Method of Frobenius) 为求出微分方程(11)关于规则奇点的解，我们应用以下由（弗罗贝尼乌斯）给出的定理。

定理 9. 弗罗贝尼乌斯定理

如果$x=x_0$是微分方程(11)的规则奇点，则至少存在一个如下形式的解

$$y=(x-x_0)^r\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^{n+r}$$

其中r是一个待定的系数。这个级数至少在区间$0<x-x_0<R$上收敛。

求关于规则奇点$x=x_0$的级数解的弗罗贝尼乌斯方法类似于5.4节中的待定级数系数法，我们将$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^{n+r}$代入给定微分方程并利用递归关系确定未知系数$c_n$。然而在确定系数之前，我们还有另一个任务，就是必须先求出未知指标r。如果求得的r不是非负整数，则相应的解$y=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^{n+r}$不是幂级数。

指标方程 求指标的方程被称为指标方程(indicial equation)。指标方程的一般形式如下：

$$r(r-1)+a_0r+b_0=0$$

其中

$$\begin{aligned} a_0 &= \lim_{x\to 0}p(x) \\ b_0 &= \lim_{x\to 0}q(x) \end{aligned}$$

指标方程的根被称为指标根(indicial root)或指数(exponent)。一般指标方程只取最大的指标根即可。

例 使用弗罗贝尼乌斯方法求出方程

$$xy''-y=0$$

在$x=0$处的一个非平凡解。

解：先将方程化为标准形式：

$$y''-\frac{1}{x}y=0\rightarrow\begin{cases}P=0\\ Q=-\frac{1}{x}\leftarrow \text{在}x=0\text{上不可解析}\end{cases}$$

所以$x=0$是一个奇点。

又因为

$$\begin{cases}(x-0)\cdot 0=0\\ (x-0)^2\frac{-1}{x}=0\end{cases}\leftarrow \text{在}x_0\text{处均可解析}$$

所以$x=0$是一个规则奇点。

求出指标方程的解：

$$r(r-1)=0, r=0,1$$

选择1作为结果。所以该微分方程的待定解形式为

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+1}$$

代换回原微分方程：

$$x\sum_{n=0}^{\infty}n(n+1)c_nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+1}=0$$

$$c_{n+1}=-\frac{c_n}{(n+2)(n+1)}, n=0,1,2...$$

$$c_n=\frac{(-1)^n}{(n+1)(n!)^2}c_0, n=0,1,2...$$

所以最后微分方程的解为

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{n+1}}{(n+1)(n!)^2}$$