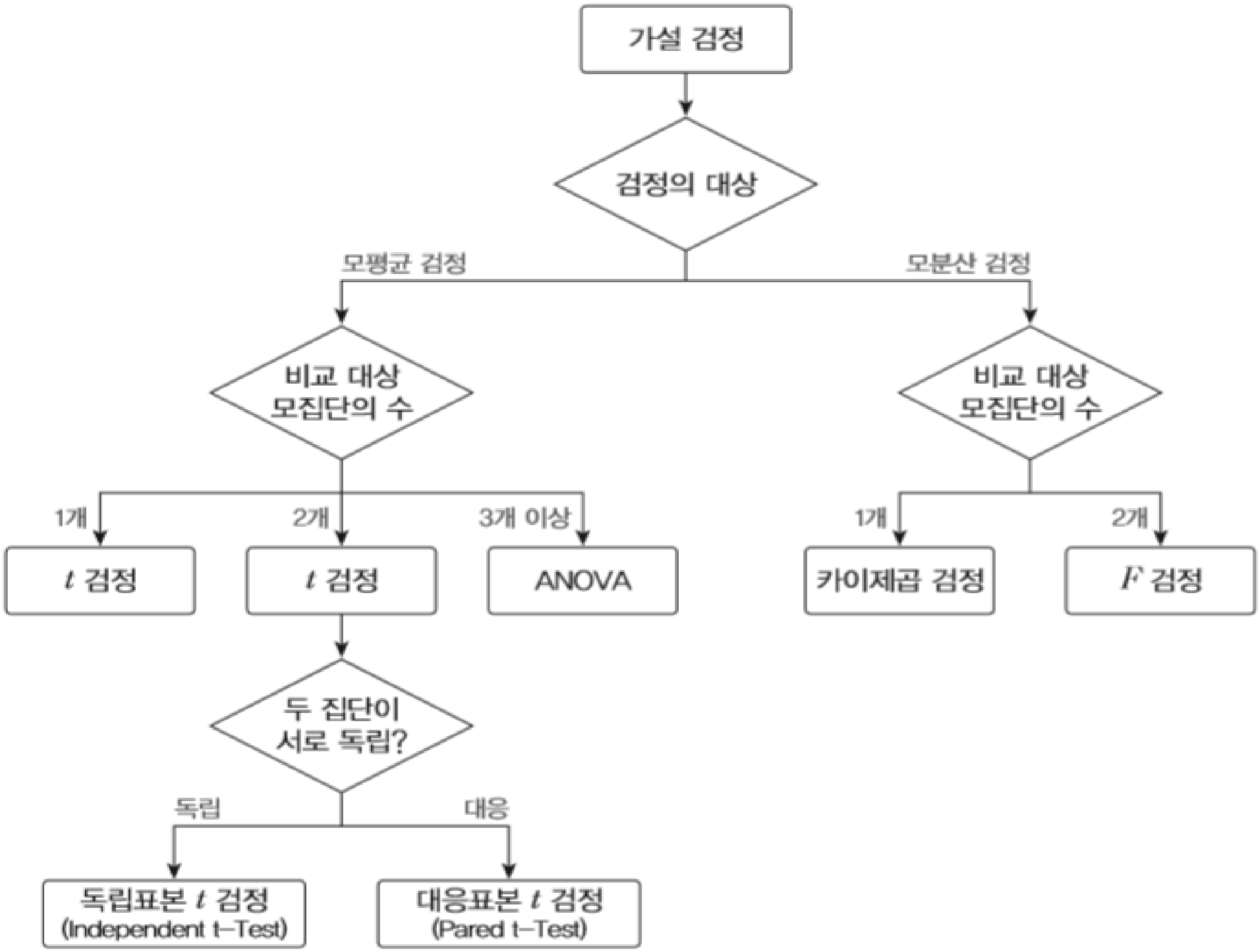
Chap 10. 두 집단의 비교

Ho Sun Shon

검정의 구성도



가설 검정
검정의 대상
모평균 검정
모분산 검정
비교 대상 모집단의 수
비교 대상 모집단의 수
1개
2개
3개 이상
1개
2개
t 검정
t 검정
ANOVA
카이제곱 검정
F 검정
두 집단이 서로 독립?
독립
대응
독립표본 t 검정 (Independent t-Test)
대응표본 t 검정 (Pared t-Test)

목차

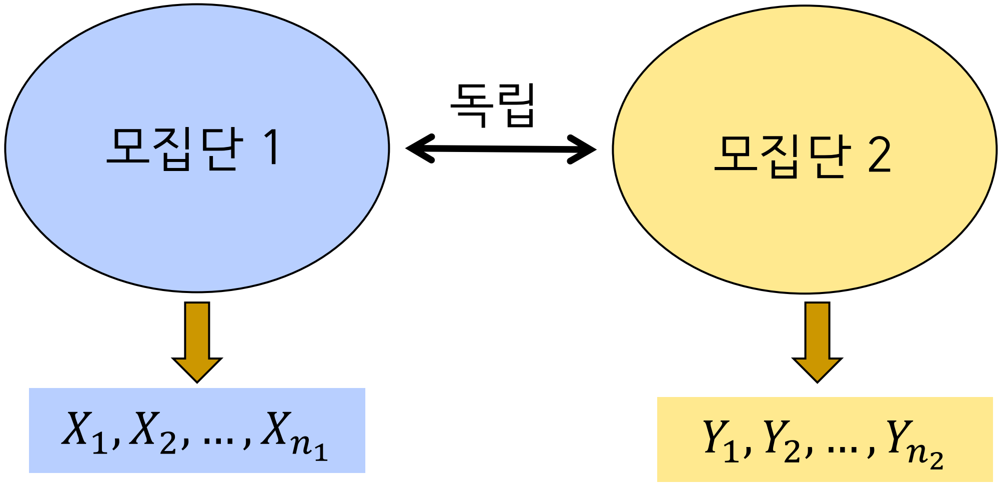
- 두 집단의 비교
- 두 개의 독립표본
  - 표본의 크기가 큰 경우
  - 표본의 크기가 작고 모분산이 동일한 경우
  - 표본의 크기가 작고 모분산이 다른 경우
- 대응 표본

두 모집단의 비교

- 두 모집단의 비교
  - 어느 질병에 대한 치료약 A와 B의 효과 비교
  - 두 도시 A와 B의 소득 비교
- 두 모집단의 비교는 자료 수집 방법에 따라 달라짐
  - 독립인 두 표본(independent samples): 서로 독립인 모집단으로 부터 추출된 표본
    - 배기량이 동일한 두 자동차 회사의 모델 A와 모델 B에 대한 연비
    - 도시 학생과 농촌지역 학생의 시력
  - 대응 표본(paired sample): 짝을 이루는 표본
    - 동일한 차량 10대를 대상으로 엔진오일 첨가제가 연비 향상에 도움이 되는지 사전 사후 비교
    - 혈압 약 복용 전 후 비교

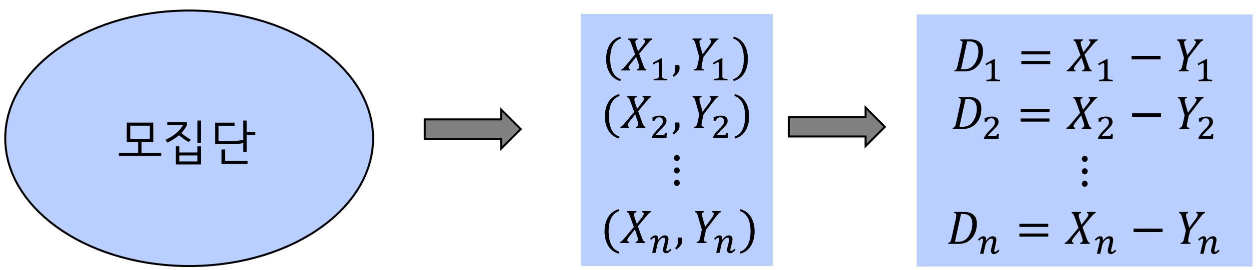
독립인 두 표본 (independent samples)

- 실험 단위를 임의로 두 개의 그룹으로 나누고, 한 그룹에는 처리 1을 다른 그룹에는 처리 2를 적용하고 두 그룹의 반응값 비교
- 각 그룹의 관측값들은 서로 독립
- 별개의 모집단에서 얻어진 두 개의 독립표본으로 간주



대응 표본 (paired sample)

- 두 처리 효과를 비교할 때, 각 실험 단위의 반응값들이 처리 방법뿐만 아니라 다른 요인들의 영향을 받을 수도 있다. 다른 요인들의 영향을 배제하는 방법은?
- 실험 단위를 비슷한 조건을 가지도록 두 실험 단위씩 하나의 쌍으로 묶고, 한 실험 단위에는 처리 1을 적용하고 다른 실험 단위에는 처리 2를 적용하여 두 반응값의 차이를 이용하여 비교 (짝비교)
- 각 쌍에 속한 두 실험 단위는 독립이 아니다.



모평균의 차 $\mu_1 - \mu_2$에 대한 추론

- 두 모집단의 비교는 두 모집단의 평균 μ_1과 μ_2에 차이가 있는지를 이용하여 비교

- 점추정
  - $\mu_1 - \mu_2$의 추정량: $\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 = \bar{X} - \bar{Y}$
  - 추정량의 표준오차: $S.E.(\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2) = S.E.(\bar{X} - \bar{Y}) = \sqrt{\frac{{\sigma_1}^2}{n_1} + \frac{{\sigma_2}^2}{n_2}}$
  - 추정된 표준오차: $S.E.(\widehat{\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2}) = \sqrt{\frac{{S_1}^2}{n_1} + \frac{{S_2}^2}{n_2}}$

두 개의 독립표본: 표본의 크기가 큰 경우

➢ 서로 독립인 두 표본을 이용한 비교

➢ 자료

$$\begin{cases} X_1, X_2, \dots, X_{n_1} : \text{평균이 } \mu_1 \text{이고 분산이 } {\sigma_1}^2 \text{인 모집단에서 임의추출한 자료} \\ Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2} : \text{평균이 } \mu_2 \text{이고 분산이 } {\sigma_2}^2 \text{인 모집단에서 임의추출한 자료} \end{cases}$$

➢ 두 자료의 표본평균과 표본분산

모집단 1: $\overline{X} = \dfrac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_i$, $\quad {S_1}^2 = \dfrac{1}{n_1 - 1}\sum_{i=1}^{n_1}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$

모집단 2: $\overline{Y} = \dfrac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} Y_i$, $\quad {S_2}^2 = \dfrac{1}{n_2 - 1}\sum_{i=1}^{n_2}\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2$

두 개의 독립표본: 표본의 크기가 큰 경우

- 두 표본의 크기 n_1과 n_2가 충분히 크면 $(n_1 \geq 30, n_2 \geq 30)$

$$\overline{X} \sim N\left(\mu_1, \frac{{\sigma_1}^2}{n_1}\right), \qquad \overline{Y} \sim N\left(\mu_2, \frac{{\sigma_2}^2}{n_2}\right)$$

- 두 표본은 독립이므로

$$\overline{X} - \overline{Y} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{{\sigma_1}^2}{n_1} + \frac{{\sigma_2}^2}{n_2}\right)$$

$$\rightarrow Z = \frac{\left(\overline{X} - \overline{Y}\right) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{{\sigma_1}^2}{n_1} + \frac{{\sigma_2}^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

- 표본의 크기가 충분히 크면 ${S_1}^2 \approx {\sigma_1}^2, {S_2}^2 \approx {\sigma_2}^2$이므로

$$\mathrm{Z} = \frac{\left(\overline{X} - \overline{Y}\right) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{{S_1}^2}{n_1} + \frac{{S_2}^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

두 개의 독립표본: 표본의 크기가 큰 경우

- 표본의 크기가 충분히 클 때, $\mu_1 - \mu_2$에 대한 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간:

$$(\overline{X} - \overline{Y}) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{{S_1}^2}{n_1} + \frac{{S_2}^2}{n_2}}$$

- 위의 신뢰구간은 표본의 크기가 클 때의 신뢰구간의 형태인

  (추정량) $\pm z_{\alpha/2} \times$ (추정량의 표준오차)와 일치

예제 10.1

- 같은 종류의 전구를 생산하는 A회사와 B회사 제품의 수명을 비교 하고자 한다. A회사와 B 회사 전구수명의 모평균을 각각 μ_1과 μ_2라고 할 때, $\mu_1 - \mu_2$를 추정하기 위하여 A회사 전구 50개 와 B회사 전구 100개를 임의로 추출하여 수명을 측정한 결과, A회사 전구수명의 표본평균은 453(시간), 표준편차는 80(시간) 이었고, B회사 전구수명의 표본평균은 401(시간), 표준편차는 60(시간)이었다. A회사와 B회사 전구수명의 모평균의 차이인 $\mu_1 - \mu_2$의 95% 신뢰구간을 구하여라.

독립표본: 표본의 크기가 큰 경우 신뢰구간

❖ 자료: $\begin{cases} A\text{회사 전구: } n_1 = 50,\ \bar{x} = 453,\ s_1 = 80 \\ B\text{회사 전구: } n_2 = 100,\ \bar{y} = 401,\ s_2 = 60 \end{cases}$

❖ $\mu_A - \mu_B$에 대한 95% 신뢰구간:

$$(\bar{x} - \bar{y}) \pm z_{0.025}\sqrt{\frac{{s_1}^2}{n_1} + \frac{{s_2}^2}{n_2}}$$

$$= (453 - 401) \pm 1.96 \times \sqrt{\frac{80^2}{50} + \frac{60^2}{100}} = 52 \pm 25.1$$

$$= (25.9, 77.1)$$

독립표본: 표본의 크기가 큰 경우 가설검정

- 가설:

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta_0 \quad vs \quad \begin{cases} (i)\ H_1: \mu_1 - \mu_2 < \delta_0 \\ (ii)\ H_1: \mu_1 - \mu_2 > \delta_0 \\ (iii)\ H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq \delta_0 \end{cases}$$

- 검정통계량(표본의 크기가 클 때)

$$Z = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - \delta_0}{\sqrt{\frac{{S_1}^2}{n_1} + \frac{{S_2}^2}{n_2}}} \sim N(0,1) \qquad (under\ H_0)$$

분자에서 $\mu_1 - \mu_2$ 대신 δ_0를 사용한 거에 유의할 것

독립표본: 표본의 크기가 큰 경우 가설검정

➢ 유의수준 α에서 기각역:

(i) $H_1: \mu_1 - \mu_2 < \delta_0$ 일 때, $R: Z = \dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-\delta_0}{\sqrt{\frac{{s_1}^2}{n_1}+\frac{{s_2}^2}{n_2}}} \le -z_\alpha$

(ii) $H_1: \mu_1 - \mu_2 > \delta_0$ 일 때, $R: Z = \dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-\delta_0}{\sqrt{\frac{{s_1}^2}{n_1}+\frac{{s_2}^2}{n_2}}} \ge z_\alpha$

(iii) $H_1: \mu_1 - \mu_2 \ne \delta_0$ 일 때, $R: |Z| = \dfrac{|(\overline{X}-\overline{Y})-\delta_0|}{\sqrt{\frac{{s_1}^2}{n_1}+\frac{{s_2}^2}{n_2}}} \ge z_{\alpha/2}$

예제 10.2

➢ 두 회사의 전구 수명에 대한 모평균의 차이가 있는지 유의수준 1%에서 검정

❖ 자료 $\begin{cases} A\text{회사 전구}: n_1 = 50,\ \bar{x} = 453,\ s_1 = 80 \\ B\text{회사 전구}: n_2 = 100,\ \bar{y} = 401,\ s_2 = 60 \end{cases}$

❖ 가설 설정: $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \quad vs \quad H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

❖ 검정통계량 결정:

$$Z = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - \delta_0}{\sqrt{\frac{{S_1}^2}{n_1} + \frac{{S_2}^2}{n_2}}} = \frac{453 - 401}{\sqrt{\frac{80^2}{50} + \frac{60^2}{100}}} = 4.06$$

❖ 유의수준 결정: $\alpha = 0.01$

❖ $|Z| = 4.06 > z_{0.025} = 2.575$이므로 귀무가설 기각.

❖ 즉 ‘두 회사의 전구 수명에 대한 모평균은 다르다’

예제 10.2

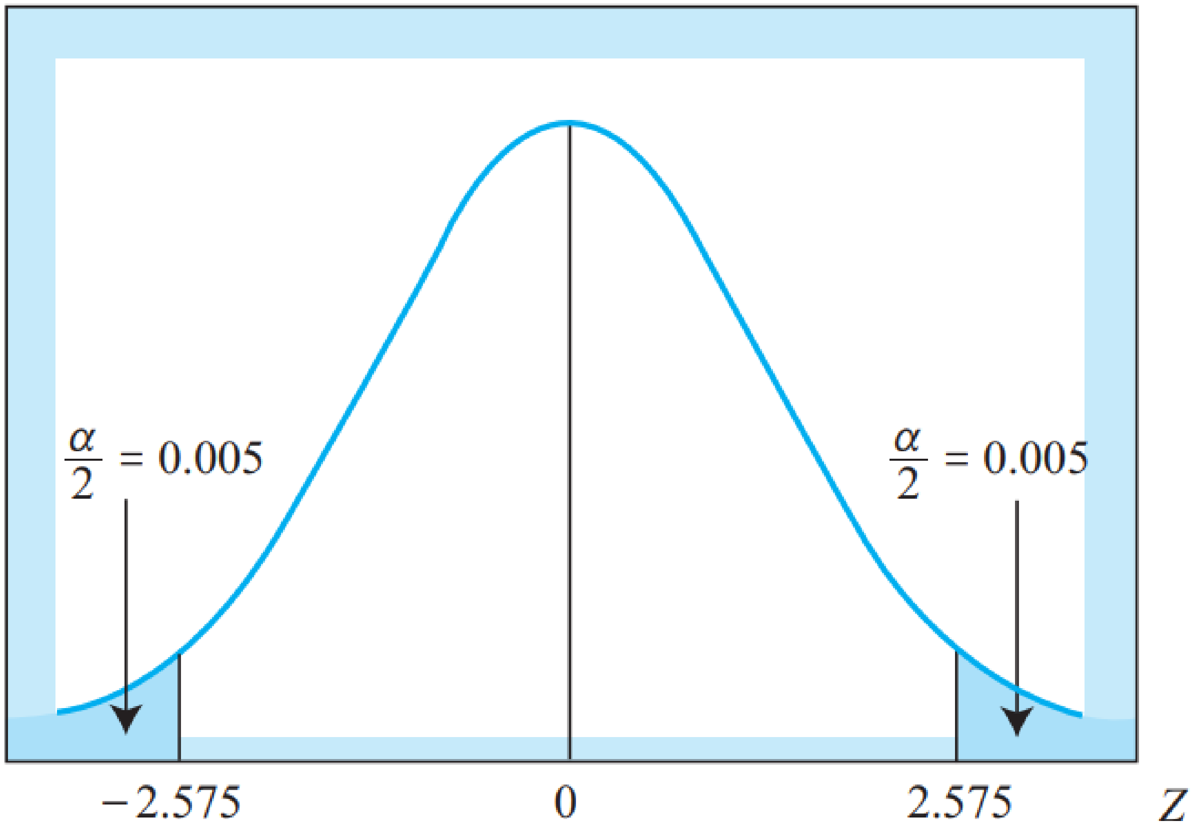


그림 10.1 $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$와 $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$에서 $\alpha = 0.01$일 때의 기각역

독립표본: 표본의 크기가 작고 모분산이 동일한 경우

- 표본의 크기가 작은 경우: 중심극한정리를 적용할 수 없으며, $\mu_1 - \mu_2$에 대한 추론을 위해 모집단에 대한 추가적인 가정이 필요
- **가정**
  - **두 모집단은 모두 정규분포를 따른다. (정규성 가정)**
  - **두 모집단의 표준편차는 같다. ($\boldsymbol{\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma}$) (등분산성 가정)**
- 위 가정을 확인하는 방법
  - 정규분포를 따르는지 확인 방법은 정규확률그림을 그려 직선에 가까운지 확인 또는 shapiro test
  - 두 모집단의 표준편차가 같은지를 판단하는 간단한 방법은 두 표본표준편차를 이용하여 $\frac{1}{2} \leq \frac{S_1}{S_2} \leq 2$인지 확인

독립표본: 표본의 크기가 작고 모분산이 동일한 경우

- 표본의 크기가 작고 모분산이 동일하고 모분산을 아는 경우

- $\begin{cases} X_1, X_2, \dots, X_{n_1} : \text{정규모집단 } N(\mu_1, \sigma^2)\text{에서 임의 추출한 자료} \\ Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2} : \text{정규모집단 } N(\mu_2, \sigma^2)\text{에서 임의 추출한 자료} \end{cases}$

- 이때

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \sigma^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\right)$$

$$\rightarrow \frac{\left(\bar{X} - \bar{Y}\right) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim N(0, 1)$$

독립표본: 표본의 크기가 작고 모분산이 동일한 경우

- 표본의 크기가 작고 모분산이 동일하지만 모분산을 모르는 경우
- 합동분산(pooled variance)

$$S_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2 + \sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\overline{Y})^2}{(n_1+n_2-2)} = \frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{(n_1+n_2-2)}$$

- 분산을 모르는 경우 추정량으로서 합동분산인 S_p^2을 사용

$$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$$

- 두 모집단이 정규분포를 따르고 분산을 모르는 경우, $\mu_1-\mu_2$에 대한 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간:

$$(\overline{X}-\overline{Y}) \pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

예제 10.3

- A, B 두회사에서는 210ml 용량의 비타민 C가 첨가된 음료수를 판매하고 있다. 한 소비자 단체에서는 두 회사 음료수의 평균 용량의 차이가 있는지 확인해 보려 한다. 이를 위하여 A회사의 음료수 13병을 임의로 추출하여 용량을 측정한 결과, 평균이 213(mL), 표준편차가 4(mL) 였고, B회사의 음료수 18병을 임의로 추출하여 용량을 측정한 결과, 평균이 209(mL), 표준편차가 8(mL)였다. 두 회사 음료수의 용량은 정규분포를 따르며, 모분산이 같다고 가정한다. 두 회사 음료수의 평균용량의 차이에 대한 95% 신뢰구간을 구하시오.

예제 10.3

➢ 자료: $\begin{cases} A\text{회사}: n_1 = 13,\ \overline{x} = 213,\ s_1 = 4 \\ B\text{회사}: n_2 = 18,\ \overline{y} = 209,\ s_2 = 8 \end{cases}$

❖ 표본의 크기가 작으므로 정규성 가정을 해야 한다.

❖ 두 표준편차의 비는 $\frac{s_1}{s_2} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ 이므로

❖ 분산의 합동추정량: $S_p = \sqrt{\frac{(13-1)\times 4^2 + (18-1)\times 8^2}{13+18-2}} = 44.14$

❖ $\mu_1 - \mu_2$에 대한 95% 신뢰구간:

$$(\overline{x} - \overline{y}) \pm t_{0.025}(29) S_p \sqrt{\frac{1}{13} + \frac{1}{18}}$$

$$= (213 - 209) \pm \left(2.045 \times \sqrt{44.14} \times \sqrt{\frac{1}{13} + \frac{1}{18}} \right) = 4 \pm 4.95$$

$$= (-0.95, 8.95)$$

가설검정: 표본의 크기가 작고 모분산이 동일한 경우

- 가설:

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta_0 \quad vs \quad \begin{cases} (i)\ H_1: \mu_1 - \mu_2 < \delta_0 \\ (ii)\ H_1: \mu_1 - \mu_2 > \delta_0 \\ (iii)\ H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq \delta_0 \end{cases}$$

- 검정통계량(두 모집단이 정규분포를 따르고 분산이 같을 때)

$$t = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - \delta_0}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2) \qquad (under\ H_0)$$

가설검정: 표본의 크기가 작고 모분산이 동일한 경우

- 유의수준 α에서 기각역:

  - (i) $H_1: \mu_1 - \mu_2 < \delta_0$일 때, $R: t = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-\delta_0}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \le -t_\alpha(n_1+n_2-2)$

  - (ii) $H_1: \mu_1 - \mu_2 > \delta_0$일 때, $R: t = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-\delta_0}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \ge t_\alpha(n_1+n_2-2)$

  - (iii) $H_1: \mu_1 - \mu_2 \ne \delta_0$일 때, $R: |t| = \frac{|(\bar{X}-\bar{Y})-\delta_0|}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \ge t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)$

예제 10.4

- 한 대학교의 체육학과와 일반학과의 신입생들의 키의 차이를 비교하기 위하여 체육학과 신입생 21명을 임의로 추출하여 키를 측정한 결과 평균이 179(cm), 표준편차가 8(cm)였고, 일반학과 신입생 21명을 임의로 추출하여 키를 측정한 결과 평균이 174(cm), 표준편차가 4(cm)였다. 체육학과와 일반학과 신입생의 키는 정규분포를 따르며, 모분산은 서로 같다고 가정한다. 유의수준 10%에서 두 학과 간의 평균키의 차이가 있는지를 검정하라.

예제 10.4

➢ 자료: $\begin{cases} A\text{회사}: n_1 = 21,\ \overline{x} = 179,\ s_1 = 8 \\ B\text{회사}: n_2 = 21,\ \overline{y} = 174,\ s_2 = 4 \end{cases}$

❖ 가설: $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \quad vs \quad H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

❖ $$S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{(n_1+n_2-2)} = 40$$

❖ 검정통계량:

$$t = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = 2.56$$

❖ 기각역: $t_{0.05}(40) = 1.685$, $-t_{0.05}(40) = -1.685$,

❖ |t| > $t_{0.05}(40)$ 이므로 귀무가설 기각

❖ 즉, 학과 간에 평균키의 차이가 있다.

두 정규 모집단의 분산이 같지 않은 경우

➢ 두 정규모집단의 표준편차가 같지 않을 때 추론 방법 $(\sigma_1 \neq \sigma_2)$

$$t^* = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{{S_1}^2}{n_1} + \frac{{S_2}^2}{n_2}}} \sim t(n^*)$$

단 $n^* = \min(n_1 - 1, n_2 - 1)$

❖ $\sigma_1 \neq \sigma_2$인 경우 분산의 합동추정량 ${S_p}^2$을 사용할 수 없다.

❖ 통계량 t^*의 자유도를 구하는 방법이 여러 가지가 있다.

두 정규 모집단의 분산이 같지 않은 경우

- $\mu_1 - \mu_2$에 대한 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간:

$$\left(\overline{X} - \overline{Y}\right) \pm t_{\alpha/2}(n^*) \sqrt{\frac{{S_1}^2}{n_1} + \frac{{S_2}^2}{n_2}}$$

- 가설 $H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta_0$ 에 대한 검정통계량:

$$t^* = \frac{\left(\overline{X} - \overline{Y}\right) - \delta_0}{\sqrt{\frac{{S_1}^2}{n_1} + \frac{{S_2}^2}{n_2}}} \sim t(n^*) \qquad (under\ H_0)$$

- 기각역은 자유도가 n^*인 t –분포로부터 구한다.

두 정규모집단의 분산이 같지 않은 경우

➢ 두 지역의 집값에 차이가 있는지 유의수준 5%에서 검정

❖ 자료: $\begin{cases} \text{남쪽: } n_1 = 13,\ \bar{x} = 2.4,\ s_1 = 0.72 \\ \text{북쪽: } n_2 = 11,\ \bar{y} = 2.15,\ s_2 = 0.35 \end{cases}$

❖ 두 표준편차의 비는 $\frac{s_1}{s_2} = \frac{0.72}{0.35} = 2.06$으로 2배가 넘는다.

❖ 가설: $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \quad vs \quad H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

❖ 검정통계량:

$$t^* = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{{S_1}^2}{n_1} + \frac{{S_2}^2}{n_2}}} = \frac{2.4 - 2.15}{\sqrt{\frac{0.72^2}{13} + \frac{0.35^2}{11}}} = 1.107$$

❖ $n^* = \min(n_1 - 1, n_2 - 1) = \min(13 - 1, 11 - 1) = 10,$

❖ $t_{0.025}(10) = 2.228$이므로 귀무가설을 기각하지 못함. 즉 두 지역의 집값에는 차이가 없다.

대응 표본(paired sample)

- 대응표본이란 임의로 추출된 하나의 표본 안에 있는 각각의 관측값에 대하여 두 번째 표본 안에 그 대응되는 관측값들이 있고, 이러한 관측값들이 같은 모집단으로부터 추출된 경우 이 두 표본을 말함.
- 예) 다이어트 약의 효과를 알아보기 위해 20명의 성인 남녀의 복용 전 체중과 복용 후 체중 비교

대응 표본(paired sample)

➢ 자료:

쌍	처리 1	처리 2	차이
1	X_1	Y_1	$D_1 = X_1 - Y_1$
2	X_2	Y_2	$D_2 = X_2 - Y_2$
⋮	⋮	⋮	⋮
n	X_n	Y_n	$D_n = X_n - Y_n$

❖ $D_1, D_2, \dots, D_n$은 두 처리 효과의 차이를 나타낸다.

❖ $D_1, D_2, \dots, D_n$은 평균이 δ(두 처리 효과의 차이)이고 분산이 $\sigma_D{}^2$인 모집단에 임의추출한 표본이라고 할 수 있다.

$$\overline{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i, \qquad S_D{}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(D_i - \overline{D}\right)^2$$

대응 표본: 표본의 크기가 클 때

- 표본의 크기 n이 충분히 클 때

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{D}-\delta)}{S_D} \sim N(0,1)$$

- δ에 대한 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간:

$$\left(\overline{D}-z_{\alpha/2}\frac{S_D}{\sqrt{n}},\ \overline{D}+z_{\alpha/2}\frac{S_D}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{or} \quad \overline{X} \pm z_{\alpha/2}\frac{S_D}{\sqrt{n}})$$

- 가설 $H_0: \delta = \delta_0$ 에 대한 검정통계량:

$$Z = \frac{\sqrt{n}(\overline{D}-\delta_0)}{S_D} \sim N(0,1) \qquad (under\ H_0)$$

유의수준 α에서 기각역: $Z \leq -z_\alpha, Z \geq z_\alpha, |Z| \geq z_{\alpha/2}$

대응표본: 표본의 크기가 작을 때

- 표본의 크기가 작을 때는 모집단에 대한 추가적인 가정이 필요하다.
- 가정: $D_1, D_2, \ldots, D_n$은 정규모집단 $N(\delta, \sigma_D{}^2)$에서 임의추출한 자료
- 이때

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{D} - \delta)}{S_D} \sim t(n-1)$$

- δ에 대한 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간:

$$\left(\overline{D} - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S_D}{\sqrt{n}},\ \overline{D} + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S_D}{\sqrt{n}}\right) \text{ or } \overline{D} \pm t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S_D}{\sqrt{n}}$$

대응표본: 표본의 크기가 작을 때

- 가설 $H_0: \delta = \delta_0$ 에 대한 검정통계량:

$$t = \frac{\sqrt{n}(\overline{D} - \delta_0)}{S_D} \sim t(n-1) \qquad (under\ H_0)$$

- 유의수준 α에서 기각역:
  - (i) $H_1: \delta < \delta_0$일 때, $R: t = \frac{\sqrt{n}(\overline{D}-\delta_0)}{S_D} \le -t_\alpha(n-1)$
  - (ii) $H_1: \delta > \delta_0$일 때, $R: t = \frac{\sqrt{n}(\overline{D}-\delta_0)}{S_D} \ge t_\alpha(n-1)$,
  - (iii) $H_1: \delta \ne \delta_0$일 때, $R: |t| = \frac{\sqrt{n}\ |\overline{D}-\delta_0|}{S_D} \ge t_{\alpha/2}(n-1)$

예제 10.7

- 새로 시판되는 한 다이어트약의 효과를 알아보기 위하여 남녀 7명의 체중을 다이어트 약 복용 전 후에 체중을 측정하였다. 그 결과 다이어트약의 효과가 있는지 체중의 변화에 대한 95% 신뢰구간을 구하여라.

표 10.1 다이어트약의 복용 전후의 몸무게

복용 전	59	72	85	69	78	82	55
복용 후	54	65	84	63	72	83	51

예제 10.7

표 10.2 각 관측값의 차이에 대한 통계량의 계산 (단위: kg)

복용 전(x_i)	59	72	85	69	78	82	55
복용 후(y_i)	54	65	84	63	72	83	51
전과 후의 차이(d_i)	5	7	1	6	6	−1	4
차이의 제곱(d_i^2)	25	49	1	36	36	1	16

$$n = 7,\ \sum_{i=1}^{n} d_i = 28,\ \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = 164$$

표본의 평균: $\bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i = \frac{28}{7} = 4$

표본의 분산: $s_d^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - n\bar{d}^2\right) = \frac{1}{6}\left(164 - 7(4)^2\right) \approx 8.67$

t-분포표로부터 $t_{0.025}(6) = 2.447$

$$\bar{d} \pm [t_{\alpha/2}(n-1) \times s_{\bar{d}}] = 4 \pm \left(2.447 \times \frac{\sqrt{8.67}}{\sqrt{7}}\right) \approx (1.28,\ 6.72)$$

예제 10.8

- 예제 10.7에서 **다이어트약의 효과가 있는지, 유의수준 5%에서 검정**
- 가설 설정
  - $H_0: \mu_D = 0 \quad vs. \quad H_1: \mu_D > 0$
- 검정 통계량
  - $t = \frac{\sqrt{n}(\overline{D} - \delta_0)}{s_D} = 3.594$
- 유의수준
  - $\alpha = 0.05$, 기각역 $t_{0.05}(6) = 1.943$
- 기각역 : $t > t_{0.05}(6)$ $\qquad H_0$ reject
- 결과 해석?

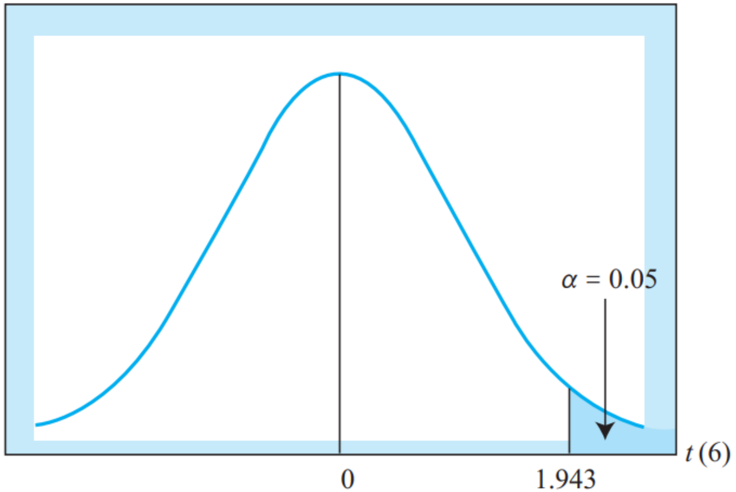


그림 10.4 $H_0 : \mu_D = 0$와 $H_1 : \mu_D > 0$에서 $\alpha = 0.05$일 때의 기각역

Two sample t-test

- 실험군과 대조군이 서로 다른 개입(intervention)을 적용시킨 후 두 집단의 평균이 같은지 비교
- 서로 독립적인 두 집단의 평균의 차이가 "0"인지를 검정
  - 두 집단의 분산이 같은지 검정
  - 분산이 다르면 Welch의 T-test 적용
  - 분산이 같으면 pooled variance를 이용하여 t-test 를 적용

Two sample t-test

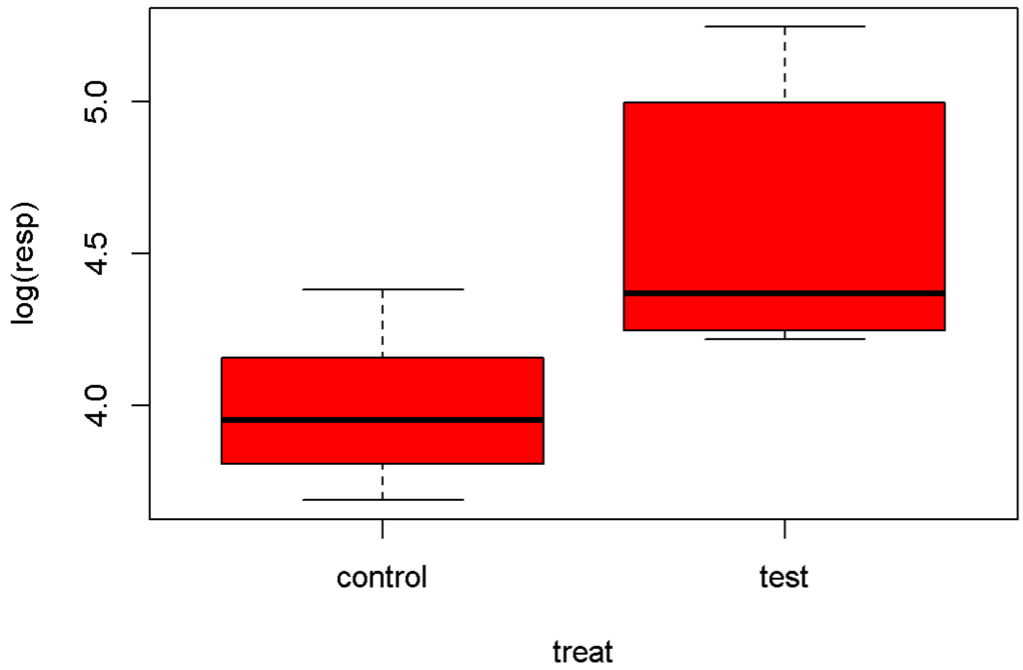
- Dental data는 다른 두 조건 (control, test)에서 배양된 뼈세포의 수(resp)를 측정한 자료
- 생물학적 실험에서 박테리아를 배양하면 박테리아의 수는 지수적으로 증가하며 데이터가 비대칭이고 log 변환을 하면 정규분포를 따름

```
> dental=read.csv("dental.csv")
> dental
    treat resp
1    test  148
2    test  190
3    test   68
4    test   79
5    test   70
6 control   40
7 control   80
8 control   64
9 control   52
10 control  45
```

Two sample t-test

➢ Boxplot

```
> boxplot(log(resp) ~ treat, data = dental, col='red')
```



Two sample t-test

➢ 등분산성 검정(Variance Equality Test)

```
> var.test(log(resp) ~ treat, data = dental)

        F test to compare two variances

data:  log(resp) by treat
F = 0.34321, num df = 4, denom df = 4, p-value =
0.325
alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal to
 1
95 percent confidence interval:
 0.03573413 3.29636586
sample estimates:
ratio of variances
         0.3432095
```

Two sample t-test

➢ 분산이 같은 경우

```
> t.test(log(resp)~treat, var.equal=TRUE, data = dental)

        Two Sample t-test

data:  log(resp) by treat
t = -2.5217, df = 8, p-value = 0.03571
alternative hypothesis: true difference in means between
 group control and group test is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -1.18465764 -0.05293907
sample estimates:
mean in group control    mean in group test
             3.997539              4.616337
```

Two sample t-test

- 분산이 다른 경우

```
> t.test(resp~treat, data = dental)

        Welch Two Sample t-test

data:  resp by treat
t = -2.1333, df = 4.6744, p-value = 0.08988
alternative hypothesis: true difference in means between group control
 and group test is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -122.23919   12.63919
sample estimates:
mean in group control    mean in group test
                 56.2                 111.0
```

Paired T-test

표 10.1 다이어트약의 복용 전후의 몸무게

복용 전	59	72	85	69	78	82	55
복용 후	54	65	84	63	72	83	51

정규성 검정 (Shapiro test)

- 귀무가설: 다이어트약 복용 전후의 차이가 정규분포를 한다
- 대립가설: 다이어트약 복용 전후의 차이가 정규분포를 따르지 않는다

```
> g1 = c(59, 72, 85, 69, 78, 82, 55)
> g2 = c(54, 65, 84, 63, 72, 83, 51)
> shapiro.test(g2-g1)

        Shapiro-Wilk normality test

data:  g2 - g1
W = 0.88458, p-value = 0.2476
```

Paired T-test

- T-test

```
> g1 = c(59, 72, 85, 69, 78, 82, 55)
> g2 = c(54, 65, 84, 63, 72, 83, 51)
> t.test(g1, g2, paired = TRUE)

        Paired t-test

data:  g1 and g2
t = 3.5949, df = 6, p-value = 0.01144
alternative hypothesis: true mean difference is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 1.277328 6.722672
sample estimates:
mean difference 
              4 
```

요약

- 두 집단의 비교
- 두 개의 독립표본: 표본의 크기가 큰 경우
- 두 개의 독립표본: 표본의 크기가 작고 모분산이 동일한 경우
- 두 개의 독립표본: 표본의 크기가 작고 모분산이 다른 경우
- 대응 표본