

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID

Métodos numéricos para EDP

Estimación de error a posteriori

GUILLERMO RUIZ ÁLVAREZ

6 DE ENERO DE 2016

Índice

1. Definición del problema	2
2. Solución teórica	2
2.1. Cálculo de la solución teórica	2
2.2. Programación de la solución teórica	4
3. Método de elementos finitos	5
3.1. Solución al problema elíptico	5
3.1.1. Formulación variacional	5
3.1.2. Existencia y unicidad de la solución al problema débil	7
3.2. Aproximación del problema elíptico	9
3.3. Programación del método	11
3.4. Análisis del error	11
4. Error a posteriori	16
4.1. Programación en MATLAB	18

1. Definición del problema

Consideramos el siguiente problema de condición de frontera:

$$\begin{cases} -\varepsilon u'' + u' = 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

El objetivo de esta práctica será obtener una estimación a posteriori del error $\|u - u_h\|_{L_2(0,1)}$ donde u_h denota la aproximación de la solución obtenida utilizando elementos finitos lineales.

2. Solución teórica

En esta sección se hallará la solución teórica del problema propuesto para más adelante realizar comparaciones con las aproximaciones que se calcularán mediante MATLAB. Además, se mostrará el código realizado para calcular dicha solución.

2.1. Cálculo de la solución teórica

La solución general será la suma de la solución de la ecuación homogénea y de una solución particular.

Solución de la ecuación homogénea La ecuación homogénea tiene la siguiente expresión:

$$-\varepsilon u'' + u' = 0$$

Asumimos que la solución será proporcional a $e^{\lambda x}$ para cierta constante λ . Realizando la sustitución $u(x) = e^{\lambda x}$ obtenemos:

$$-\varepsilon(e^{\lambda x})'' + (e^{\lambda x})' = 0$$

Derivando con respecto a x :

$$-\varepsilon \lambda^2 e^{\lambda x} + \lambda e^{\lambda x} = 0$$

Tomando $e^{\lambda x}$ como factor común:

$$(-\varepsilon \lambda^2 + \lambda) e^{\lambda x} = 0$$

Dado que $e^{\lambda x} \neq 0$ para cualquier valor de λ finito, tiene que ser:

$$(-\varepsilon \lambda^2 + \lambda) = 0$$

Finalmente, tomando λ como factor común se obtiene:

$$\lambda (-\varepsilon \lambda + 1) = 0$$

Por tanto tenemos dos posibles soluciones, que son $\lambda = 0$ y $\lambda = \frac{1}{\varepsilon}$.

- A partir de $\lambda = 0$ obtenemos $u_1(x) = c_1$ como solución, con c_1 una constante arbitraria.
- A partir de $\lambda = \frac{1}{\varepsilon}$ obtenemos $u_2(x) = c_2 e^{x/\varepsilon}$, con c_2 una constante arbitraria.

La solución general a la ecuación homogénea es por tanto la suma de ambas, obteniéndose:

$$u_H(x) = c_1 + c_2 e^{x/\varepsilon}$$

Solución particular Una solución particular a la ecuación

$$-\varepsilon u'' + u' = 1$$

ha de ser un polinomio de primer grado de la forma $u_p(x) = \alpha x$ para una constante α . Hallamos las derivadas primera y segunda de esta solución para determinar el valor de α :

$$\begin{aligned} u_p'(x) &= \alpha \\ u_p''(x) &= 0 \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación obtenemos:

$$-\varepsilon \cdot 0 + \alpha = 1$$

Luego tenemos que $\alpha = 1$. La solución general se halla como:

$$u(x) = u_H(x) + u_p(x)$$

obteniendo:

$$u(x) = x + c_1 + c_2 e^{x/\varepsilon}$$

Condiciones de contorno Vamos a hallar el valor de las constantes utilizando los valores frontera:

- Aplicando la condición de frontera $u(0) = 0$ obtenemos la ecuación:

$$c_1 + c_2 = 0$$

- Aplicando la condición de frontera $u(1) = 0$ obtenemos la ecuación:

$$1 + c_1 + c_2 e^{1/\varepsilon} = 0$$

Utilizando la ecuación anterior tenemos que $c_2 = -c_1$ y llegamos a:

$$1 + c_1 - c_1 e^{1/\varepsilon} = 0$$

De donde obtenemos que

$$c_1 = \frac{-1}{1 - e^{1/\varepsilon}}$$

Solución teórica Usando que $c_2 = -c_1$ en la solución general obtenemos:

$$u(x) = x + c_1(1 - e^{1/\varepsilon})$$

Finalmente, sustituyendo c_1 por la expresión hallada se tiene que la solución al problema es:

$$u(x) = x - \frac{1 - e^{x/\varepsilon}}{1 - e^{1/\varepsilon}}$$

2.2. Programación de la solución teórica

A continuación se muestra el código en MATLAB de la solución teórica a partir de un vector de nodos y de un valor para ε :

```
1 % Solution for the following problem:
2 %   -epsilon*u''(x) + u'(x) = 1
3 % Boundary values: u(0) = u(1) = 0
4 %
5 % Parameters:
6 %   - x: vector of nodes.
7 %   - epsilon: value of epsilon.
8 %
9 % Return:
10 %   - sol: vector of solution values.
11 function [sol] = fem_sol(x, epsilon)
12     sol = x - (1-exp(x ./ epsilon)) ./ (1-exp(1 / epsilon));
13 end
```

3. Método de elementos finitos

En esta sección se explicará como obtener la aproximación u_h perteneciente al espacio de elementos finitos lineales. Además, se mostrará el código escrito en MATLAB que calcula dicha aproximación y se estudiará su comportamiento para distintos valores de ε y de h , el tamaño del mallado.

3.1. Solución al problema elíptico

Una ecuación elíptica tiene la forma:

$$-\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \sum b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x)$$

Con $a_{ij}, b_i, c, f \in C(\bar{\Omega})$ y $x \in \Omega$, siendo Ω un abierto acotado en \mathbb{R}^n . Además, se dice que la ecuación cumple la **condición de elipticidad uniforme** si se tiene que $\forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\forall x \in \bar{\Omega}$, existe una constante positiva \tilde{c} tal que:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \tilde{c} \sum_{i=1}^n \xi_i^2$$

En nuestro caso tenemos:

- $\Omega = (0, 1) \in \mathbb{R}$
- $a_{11}(x) = \varepsilon$
- $b_1(x) = 1$
- $c(x) = 0$
- $f(x) = 1$

3.1.1. Formulación variacional

El primer paso para obtener un método de elementos finitos para un problema elíptico de condiciones de contorno es considerar la formulación débil de dicho problema. Consideramos el espacio de Hilbert:

$$H_0^1(0, 1) = \left\{ u \in L_2(0, 1) : \frac{\partial u}{\partial x} \in L_2(0, 1), u(0) = u(1) = 0 \right\}$$

Se tiene que $H_0^1(0, 1)$ cuenta con:

- Producto escalar:

$$(u, v)_{H^1(0,1)} = \int_0^1 uv + \int_0^1 u'v'$$

- Norma asociada:

$$\|v\|_{H^1(0,1)} = (v, v)_{H^1(0,1)}^{1/2} = \left(\int_0^1 |v|^2 + \int_0^1 |v'|^2 \right)^{1/2} = \left(\|v\|_{L_2(0,1)}^2 + \|v'\|_{L_2(0,1)}^2 \right)^{1/2}$$

Y $L_2(0, 1)$ tiene:

- Producto escalar:

$$(u, v)_{L_2(0,1)} = \int_0^1 uv$$

- Norma asociada:

$$\|v\|_{L_2(0,1)} = (v, v)_{L_2(0,1)}^{1/2} = \left(\int_0^1 |v|^2 \right)^{1/2}$$

Dada la ecuación de nuestro problema:

$$-\varepsilon u'' + u' = 1$$

Multiplicando por una función $v \in H_0^1(0, 1)$ e integrando en $(0, 1)$ obtenemos:

$$-\int_0^1 \varepsilon u'' v + \int_0^1 u' v = \int_0^1 v$$

Realizando la integración por partes del primer término:

$$[-\varepsilon u' v]_0^1 + \int_0^1 \varepsilon u' v' + \int_0^1 u' v = \int_0^1 v$$

Como $v = 0$ en la frontera por ser $v \in H_0^1(0, 1)$, tenemos la siguiente **formulación variacional de la ecuación diferencial**:

$$\underbrace{\int_0^1 \varepsilon u' v' + \int_0^1 u' v}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_0^1 v}_{l(v)}$$

3.1.2. Existencia y unicidad de la solución al problema débil

Buscamos $u \in H_0^1(0, 1)$ tal que $a(u, v) = l(v) \forall v \in H_0^1(0, 1)$. La existencia y unicidad de esta solución viene garantizada por el siguiente teorema, del cual tendremos que comprobar sus hipótesis:

Teorema 3.1: Teorema de Lax-Milgram.

Sea V un espacio de Hilbert con norma $\|\cdot\|_V$. Sea $a(\cdot, \cdot)$ una forma bilineal en $V \times V$ y $l(\cdot)$ un funcional lineal que satisfacen:

■ **Coercividad de la forma bilineal:**

$$\exists c_0 > 0 : \forall v \in V \quad a(v, v) \geq c_0 \|v\|_V^2$$

■ **Continuidad de la forma bilineal:**

$$\exists c_1 > 0 : \forall u, v \in V \quad |a(u, v)| \leq c_1 \|u\|_V \|v\|_V$$

■ **Continuidad del operador lineal:**

$$\exists c_2 > 0 : \forall v \in V \quad |l(v)| \leq c_2 \|v\|_V$$

Entonces **existe** una **única** función $u \in V$ tal que:

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in V$$

En nuestro caso tenemos que $V = H_0^1(0, 1)$. Vamos a proceder a la comprobación de las hipótesis del teorema de Lax-Milgram.

Coercividad de la forma bilineal:

$$a(v, v) = \varepsilon \int_0^1 (v')^2 + \int_0^1 v v' = \varepsilon \int_0^1 (v')^2 + \int_0^1 \frac{1}{2} (v^2)'$$

Integrando por partes el segundo término del lado derecho obtenemos:

$$a(v, v) = \varepsilon \int_0^1 (v')^2 + \frac{1}{2} v^2 \Big|_0^1 = \varepsilon \int_0^1 (v')^2 = \varepsilon \|v'\|_{L_2(0,1)}^2 = \varepsilon \|v\|_V^2$$

Luego $a(\cdot, \cdot)$ es coerciva con constante de coercividad $c_0 = \varepsilon$ ya que $\|v'\|_{L_2(0,1)}$ también es una norma en $H_0^1(0, 1)$.

Continuidad de la forma bilineal: Para comprobar esta condición utilizaremos el siguiente lema:

Lema 3.1: Desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Sean $u, v \in L_2(\Omega)$, entonces $uv \in L_1(\Omega)$ y

$$|(u, v)| \leq \|u\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{L_2(\Omega)}$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \varepsilon \int_0^1 u' v' + \int_0^1 u' v \right| \\ &\leq \varepsilon \int_0^1 |u' v'| + \int_0^1 |u' v| \\ &= \varepsilon |(u', v')_{L_2(0,1)}| + |(u', v)_{L_2(0,1)}| \\ &\leq \varepsilon \|u'\|_{L_2(0,1)} \|v'\|_{L_2(0,1)} + \|u'\|_{L_2(0,1)} \|v\|_{L_2(0,1)} \end{aligned}$$

Ahora utilizamos la siguiente desigualdad:

Lema 3.2: Desigualdad de Poincaré-Friedrichs.

Sea Ω un abierto acotado en \mathbb{R}^n con frontera suficientemente regular y sea $u \in H_0^1(\Omega)$. Entonces existe una constante $c_*(\Omega)$ independiente de u tal que:

$$\int_{\Omega} |u(x)|^2 \leq c_* \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right|^2$$

Nota: Si $\Omega = (0, 1) \subset \mathbb{R}$, entonces $c_* = \frac{1}{2}$.

Continuamos:

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \varepsilon \|u'\|_{L_2(0,1)} \|v'\|_{L_2(0,1)} + \|u'\|_{L_2(0,1)} \|v\|_{L_2(0,1)} \\ &\leq \varepsilon \|u'\|_{L_2(0,1)} \|v'\|_{L_2(0,1)} + C_{PF} \|u'\|_{L_2(0,1)} \|v'\|_{L_2(0,1)} \\ &\leq (\varepsilon + C_{PF}) \|u'\|_{L_2(0,1)} \|v'\|_{L_2(0,1)} \end{aligned}$$

Luego basta tomar $c_1 = (\varepsilon + C_{PF})$ para la segunda condición del teorema de Lax-Milgram.

Continuidad del operador lineal: Para comprobar la condición sobre el operador $l(\cdot)$ utilizaremos la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Si tomamos $u = 1$, teniendo en cuenta que como $\|u\|_{L_2(0,1)} = 1$, entonces:

$$|(1, v)| = \left| \int_0^1 v \right| = |l(v)| \leq \|v\|_{L_2(0,1)} \leq \|v\|_{H^1(0,1)}$$

Luego basta tomar $c_2 = 1$ como constante para la condición de continuidad del operador lineal.

Conclusión: Dado que se cumplen las hipótesis del teorema, tenemos que **existe una única** solución para la formulación variacional del problema propuesto.

3.2. Aproximación del problema elíptico

Consideramos el subespacio finito dimensional $V_h \subset V$ que consiste en funciones polinomiales continuas de un grado fijo, asociadas con una subdivisión del dominio computacional. De esta forma, buscamos $u_h \in V_h$ tal que $a(u_h, v_h) = l(v_h) \forall v_h \in V_h$. Como V_h hereda la estructura del espacio de Hilbert, la existencia y unicidad de la solución del problema discreto se deduce de aplicar el teorema de Lax-Milgram. Suponemos que el espacio tiene $\dim(V_h) = N(h) - 1$ y que está generado por funciones ϕ_i con $i = 1, \dots, N(h) - 1$:

$$V_h = \langle \phi_1, \dots, \phi_{N(h)-1} \rangle$$

De esta forma, la aproximación es una combinación lineal de los elementos de la base:

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{N(h)-1} U_i \phi_i(x)$$

Por lo que hay que encontrar $(U_1, \dots, U_{N(h)-1}) \in \mathbb{R}^{N(h)-1}$ de tal forma que para cada ϕ_j :

$$a \left(\sum_{i=1}^{N(h)-1} U_i \phi_i, \phi_j \right) = l(\phi_j)$$

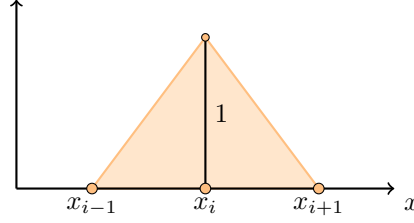
Es decir, con $j = 1, \dots, N(h) - 1$:

$$\sum_{i=1}^{N(h)-1} a(\phi_i, \phi_j) U_i = l(\phi_j)$$

Tenemos un sistema de ecuaciones lineal para $U = (U_1, \dots, U_{N(h)-1})^T$ con la matriz A de tamaño $N(h) - 1 \times N(h) - 1$. El sistema lineal es el siguiente:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a(\phi_1, \phi_1) & a(\phi_2, \phi_1) & \dots & a(\phi_{N(h)-1}, \phi_1) \\ a(\phi_1, \phi_2) & a(\phi_2, \phi_2) & \dots & a(\phi_{N(h)-1}, \phi_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a(\phi_1, \phi_{N(h)-1}) & a(\phi_2, \phi_{N(h)-1}) & \dots & a(\phi_{N(h)-1}, \phi_{N(h)-1}) \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{N(h)-1} \end{pmatrix}}_U = \underbrace{\begin{pmatrix} l(\phi_1) \\ l(\phi_2) \\ \vdots \\ l(\phi_{N(h)-1}) \end{pmatrix}}_F$$

Ahora subdividimos $[0, 1]$ en $N > 1$ subintervalos $[x_i, x_{i+1}]$ con $i = 0, \dots, N - 1$ siendo $x_j = jh$, $j = 0, \dots, N$ y $h = \frac{1}{N}$. No es necesario que el mallado sea equiespaciado pero lo elegimos de esta forma por simplicidad.

Figura 1: Función $\phi_i(x)$

Como base de nuestro espacio consideramos:

$$\phi_i(x) = \begin{cases} 1 - \left| \frac{x-x_i}{h} \right| & x \in [x_{i-1}, x_{i+1}] \\ 0 & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases} = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases}$$

En la Figura 1 se puede observar la forma de este tipo de funciones, que son claramente de $H_0^1(0,1)$. Tenemos por tanto que:

$$\phi'_i = \begin{cases} \frac{1}{h} & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ -\frac{1}{h} & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases}$$

Cálculo de la forma bilineal Dado que se tiene que los elementos a_{ij} son nulos si $|i-j| > 1$, tenemos que la matriz A es tridiagonal. Tenemos que calcular:

$$a(\phi_i, \phi_j) = \varepsilon \int_0^1 \phi'_i \phi'_j + \int_0^1 \phi'_i \phi_j$$

Para ello calculamos, para el primer término:

- $\int_0^1 \phi'_i \phi'_{i-1} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} -\frac{1}{h} \frac{1}{h} = h \cdot \frac{-1}{h^2} = \frac{-1}{h}$
- $\int_0^1 (\phi'_i)^2 = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{1}{h}\right)^2 + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(-\frac{1}{h}\right)^2 = \frac{2}{h}$
- $\int_0^1 \phi'_i \phi'_{i+1} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} -\frac{1}{h} \frac{1}{h} = h \cdot \frac{-1}{h^2} = \frac{-1}{h}$

Y para el segundo:

- $\int_0^1 \phi'_i \phi_{i-1} = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_{i-1} + \frac{-1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_{i-1} = \frac{1}{h} \frac{h}{2} = \frac{1}{2}$
- $\int_0^1 \phi'_i \phi_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_i + \frac{-1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_i = \frac{1}{h} \frac{h}{2} + \frac{-1}{h} \frac{h}{2} = 0$
- $\int_0^1 \phi'_i \phi_{i+1} = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_{i+1} + \frac{-1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_{i+1} = \frac{-1}{h} \frac{h}{2} = -\frac{1}{2}$

Tenemos por tanto que la matriz A es de la forma:

$$A = (a_{ij}) = \begin{cases} \varepsilon \cdot -1/h + \frac{1}{2} & i = j - 1 & \text{(Diagonal superior)} \\ \varepsilon \cdot 2/h & i = j & \text{(Diagonal principal)} \\ \varepsilon \cdot -1/h - \frac{1}{2} & i = j + 1 & \text{(Diagonal inferior)} \end{cases}$$

Cálculo del operador lineal: En este caso es sencillo calcular

$$l(\phi_j) = \int_0^1 \phi_j = \frac{2h}{2} = h$$

Resolución del sistema lineal: Una vez que tenemos calculado la matriz A y el vector F , sólo nos queda programar en MATLAB una función que realice la aproximación resolviendo el sistema:

$$AU = F$$

3.3. Programación del método

A continuación se muestra el código en MATLAB de la aproximación a la solución utilizando elementos finitos a partir de un valor para h y para ε :

```

1  % Finite element method for the equation:
2  %   -epsilon * u''(x) + u'(x) = 1
3  % with:
4  %   - x in (0,1).
5  %   - Boundary values: u(0) = u(1) = 0.
6  %
7  % Parameters:
8  %   - h: mesh size.
9  %   - epsilon: value for epsilon.
10 % Return:
11 %   - U: numerical approximation using finite elements.
12 function [U] = fem(h, epsilon)
13     % Number of nodes
14     N = 1/h;
15     % Auxiliar variables for the matrix A.
16     A1 = spdiags([repmat(-1/h, N-1, 1) ...
17                  repmat( 2/h, N-1, 1) ...
18                  repmat(-1/h, N-1, 1)], ...
19                  -1:1, N-1, N-1);
20     A2 = spdiags([repmat(-1/2, N-1, 1) ...
21                  repmat( 1/2, N-1, 1)], ...
22                  [-1,1], N-1, N-1);
23     % A matrix
24     A = epsilon*A1 + A2;
25     % F matrix
26     F = repmat(h, N-1, 1);
27     % Linear equation
28     U = A \ F;
29 end

```

3.4. Análisis del error

En esta sección se realizará un estudio del error de las aproximaciones a la solución del problema utilizando distintos valores de h y de ε . En las figuras 2 y 3 se pueden observar las distintas gráficas obtenidas para los valores:

$$h = 0.1, 0.05, 0.025, 0.0125 \text{ y } \varepsilon = 0.1, 0.01, 0.005$$

La formulación débil del problema que vimos en la sección anterior consiste en encontrar $u \in H_0^1(0, 1)$ de tal forma que:

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in H_0^1(0, 1)$$

La aproximación por elementos finitos implica la búsqueda de $u_h \in V_h$, siendo V_h un espacio finito dimensional de $H_0^1(0, 1)$ de tal forma que:

$$a(u_h, v_h) = l(v_h) \quad \forall v_h \in V_h$$

La formulación variacional es también válida para cualquier $v = v_h \in V_h$ siendo:

$$a(u, v_h) = l(v_h) \quad \forall v_h \in V_h$$

Si restamos este resultado a la aproximación por elementos finitos, obtenemos:

$$a(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h$$

obteniendo la propiedad conocida como **ortogonalidad de Galerkin**. Con dicha propiedad y utilizando la coercividad de la forma bilineal con $v = u - u_h$ se tiene:

$$\|u - u_h\|_{H^1(0,1)}^2 \leq \frac{1}{c_0} a(u - u_h, u - v_h)$$

Ahora usamos la propiedad de continuidad y obtenemos:

$$a(u - u_h, u - v_h) \leq c_1 \|u - u_h\|_{H^1(0,1)} \|u - v_h\|_{H^1(0,1)}$$

Combinando ambos resultados obtenemos el lema de Céa:

Lema 3.3: Lema de Céa.

La aproximación por elementos finitos u_h es la mejor aproximación de $u \in H_0^1(\Omega)$ en V_h salvo la constante $\frac{c_1}{c_0}$, es decir

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{c_1}{c_0} \min_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)}$$

El interpolador $\mathcal{I}_h u(x) = \sum_{i=1}^{N(h)-1} u(x_i) \phi_i(x)$ mejora si se refina la malla de elementos finitos. Luego tenemos que:

$$\min_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C(u) h^p$$

Este resultado, combinado con el lema de Céa, produce una cota de error a priori:

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C(u) \left(\frac{c_1}{c_0} \right) h^p$$

Tenemos, por tanto, que un refinado del mallado hace que la aproximación por elementos finitos converja a la solución con la norma $H^1(\Omega)$.

Dado que tenemos que $c_1 = \varepsilon + C_{PF}$ y $c_0 = \varepsilon$. Si $\varepsilon \ll 1$ ocurre que la constante $\frac{c_1}{c_0} \gg 1$. Se puede observar que se tiene una degradación de las aproximaciones cuando $\varepsilon \ll 1$, produciéndose grandes oscilaciones y teniendo que refinar mucho el mallado para que se produzca una reducción del error global (ver figuras 2 y 3).

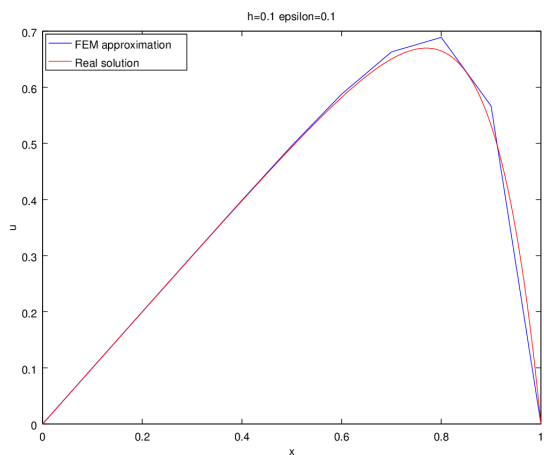
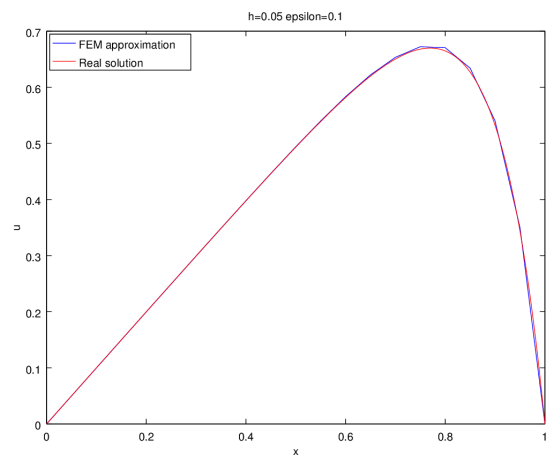
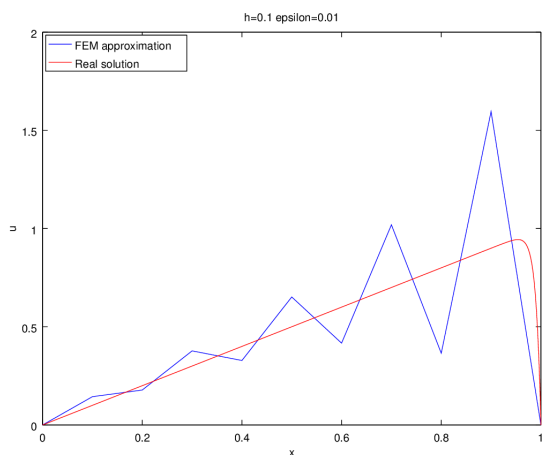
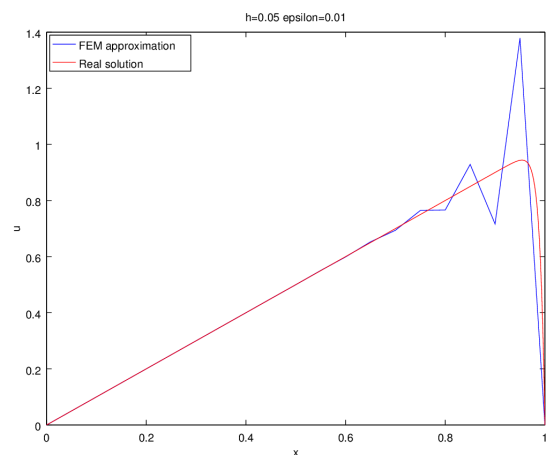
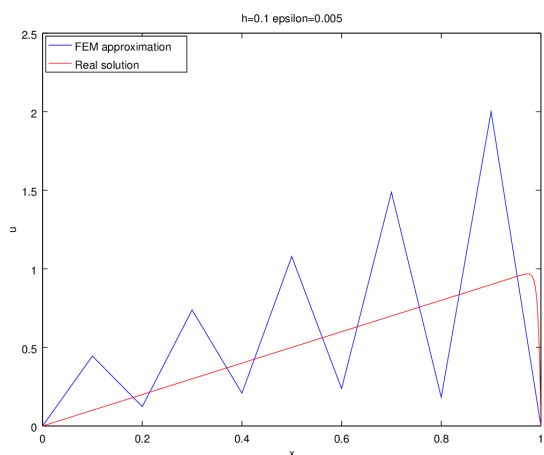
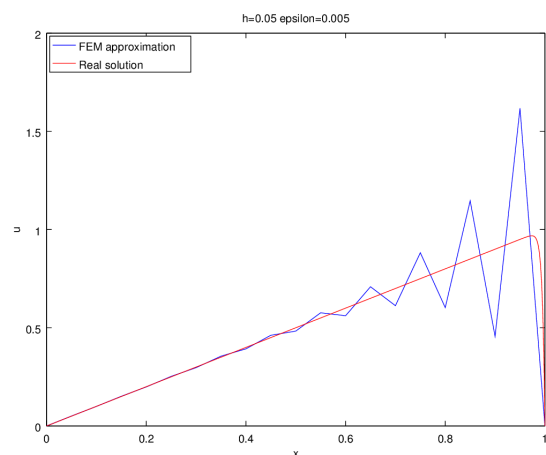
(a) $h = 0,1, \varepsilon = 0,1$ (b) $h = 0,05, \varepsilon = 0,1$ (c) $h = 0,1, \varepsilon = 0,01$ (d) $h = 0,05, \varepsilon = 0,01$ (e) $h = 0,1, \varepsilon = 0,005$ (f) $h = 0,05, \varepsilon = 0,005$

Figura 2: Aproximación con elementos finitos (I)

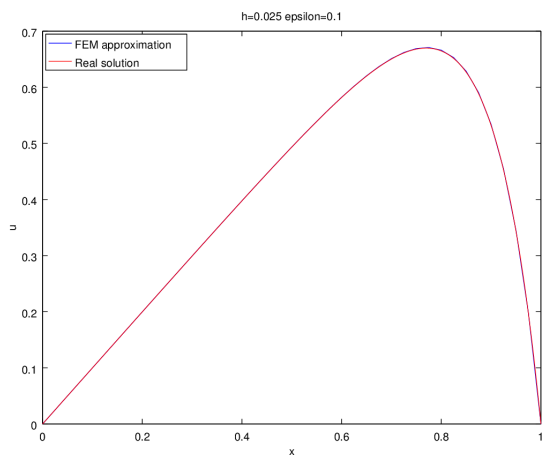
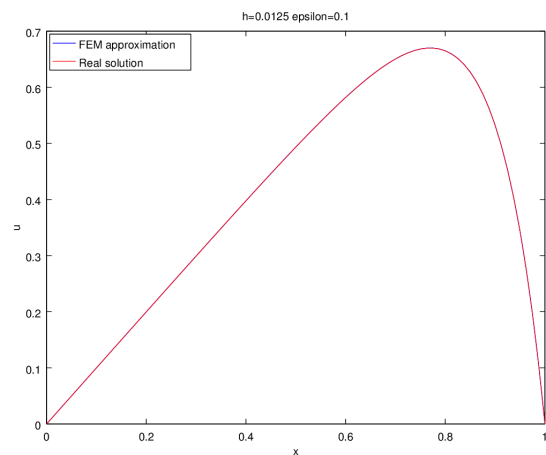
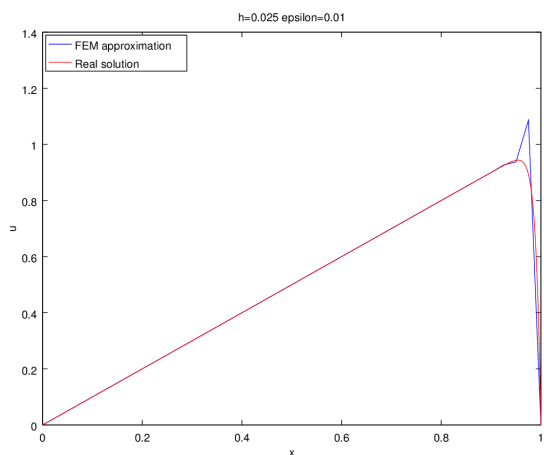
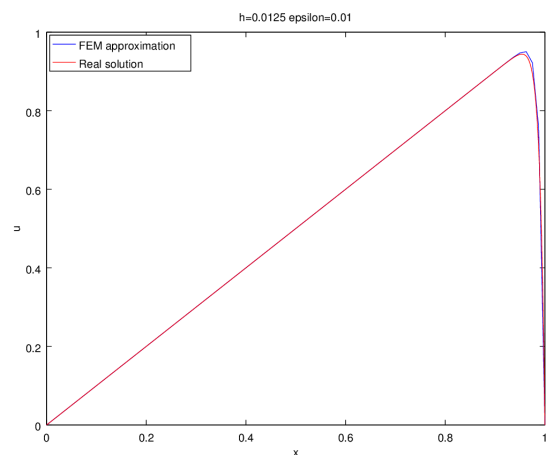
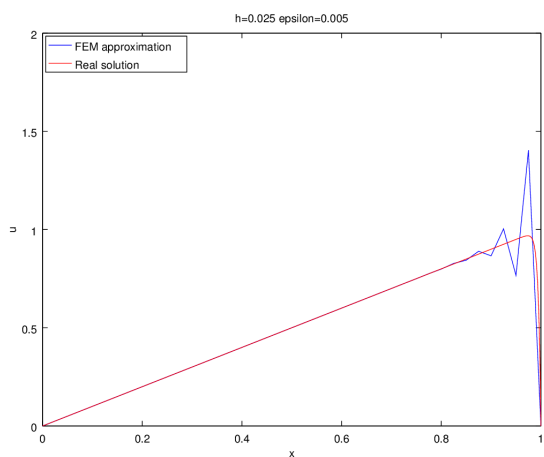
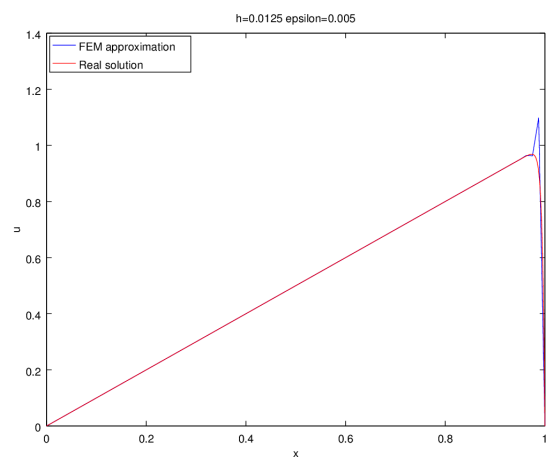
(a) $h = 0,025$, $\varepsilon = 0,1$ (b) $h = 0,0125$, $\varepsilon = 0,1$ (c) $h = 0,025$, $\varepsilon = 0,01$ (d) $h = 0,0125$, $\varepsilon = 0,01$ (e) $h = 0,025$, $\varepsilon = 0,005$ (f) $h = 0,0125$, $\varepsilon = 0,005$

Figura 3: Aproximación con elementos finitos (II)

4. Error a posteriori

En este apartado se estudiará el estimador a posteriori del error $\|u - u_h\|_{L_2(0,1)}$ para el problema propuesto. Nuestra ecuación es:

$$-\varepsilon u'' + u' = 1$$

Sabemos que para un problema como el siguiente:

$$\begin{cases} -u'' + b(x)u' + c(x)u = f(x) & x \in (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

se tiene el siguiente resultado:

$$\|u - u_h\|_{L_2(0,1)} \leq K_0 \left(\sum_{i=1}^N h_i^4 \|R(u_h)\|_{L_2(x_{i-1}, x_i)}^2 \right)^{1/2}$$

con la constante K_0 definida como sigue:

$$K_0 = \frac{1}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \|b\|_{L_\infty(0,1)} + \frac{1}{2} \|c - b'\|_{L_\infty(0,1)} \right)$$

y el residuo de elementos finitos $R(u_h)$, con $x \in (x_{i-1}, x_i)$:

$$R(u_h)(x) = f(x) + u_h''(x) - b(x)u_h'(x) - c(x)u_h(x)$$

Transformamos nuestra ecuación en la siguiente, multiplicándola por $1/\varepsilon$:

$$-u'' + \frac{1}{\varepsilon} u' = \frac{1}{\varepsilon}$$

De forma que tenemos:

- $b(x) = 1/\varepsilon$
- $c(x) = 0$
- $f(x) = 1/\varepsilon$

De esta forma:

$$K_0 = \frac{1}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2}} \right)$$

Por otro lado, como la aproximación u_h es lineal a trozos, tenemos que su derivada segunda es nula, por tanto:

$$R(u_h)(x) = \frac{1}{\varepsilon} (1 - u_h'(x))$$

Luego, dado que $u_h(0) = u_h(1) = 0$:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^N \|R(u_h)(x)\|_{L_2(x_{i-1}, x_i)}^2 &= \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} (1 - u_h')^2 \\
 &= \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^1 1 + (u_h')^2 - 2u_h' \\
 &= \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^1 (u_h')^2 - \int_0^1 2u_h' \\
 &= \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^1 (u_h')^2 - 2u_h|_0^1 \\
 &= \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^1 (u_h')^2 \\
 &= \frac{1}{\varepsilon^2} \left(1 + \int_0^1 (u_h')^2 \right)
 \end{aligned}$$

La integral del término derecho se calcula como sigue:

$$\int_0^1 (u_h')^2 = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{N-1} u_h(x_i) \phi_i' \right) \left(\sum_{j=1}^{N-1} u_h(x_j) \phi_j' \right)$$

Matricialmente:

$$\int_0^1 (u_h')^2 = [u_h(x_1) \dots u_h(x_{N-1})] \begin{bmatrix} 2/h & -1/h & \dots & 0 \\ -1/h & 2/h & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1/h \\ 0 & \dots & -1/h & 2/h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_h(x_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ u_h(x_{N-1}) \end{bmatrix}$$

Aunque no es necesario, se utilizará un mallado equiespaciado por cuestiones de simplicidad, luego tenemos:

$$\|u - u_h\|_{L_2(0,1)} \leq \frac{h^2}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2}} \right) \left(\sum_{i=1}^N \|R(u_h)\|_{L_2(x_{i-1}, x_i)}^2 \right)^{1/2}$$

4.1. Programación en MATLAB

A continuación se muestra el código realizado en MATLAB del estimador a posteriori:

```

1  % Posteriori bound on the global error for the
2  % approximation using finite elements of the following problem
3  % Equation:
4  %   -epsilon * u''(x) + u'(x) = 1
5  % with:
6  %   - x in (0,1).
7  %   - Boundary values: u(0) = u(1) = 0.
8  %
9  % Parameters:
10 %   - u_h: vector of numerical approximation.
11 %   - h: mesh size.
12 %   - epsilon: value for epsilon.
13 % Return:
14 %   - B: computed posteriori bound
15 function [B] = post_bound(u_h, h, epsilon)
16     % Number of nodes
17     N = 1/h;
18     % Calculation of the sum of ||R(u_h)||^2
19     A = spdiags([repmat(-1/h, N-1, 1) ...
20                 repmat( 2/h, N-1, 1) ...
21                 repmat(-1/h, N-1, 1)], ...
22                 -1:1, N-1, N-1);
23     Z = u_h(:)' * A * u_h(:);
24     % Sum of ||R(u_h)||^2
25     R = 1/(epsilon^2)*(1+Z);
26     % Bound
27     B = ((h^2)/(pi^2)) * (1+1/(epsilon*sqrt(2)))*sqrt(R);
28 end

```

Tras la programación en MATLAB, se ha obtenido la cota del error para los valores

$$h = 0.1, 0.05, 0.025, 0.0125, 0.01, 0.005 \text{ y } \varepsilon = 0.1$$

En la Figura 4a se puede observar el resultado del estimador en función del tamaño del mallado h (en escala logarítmica). Se ha obtenido una pendiente de 2, es decir, el error global estimado es de orden 2 con respecto al tamaño del mallado. Para obtener la pendiente de la recta representada se ha utilizado la siguiente función de MATLAB:

```

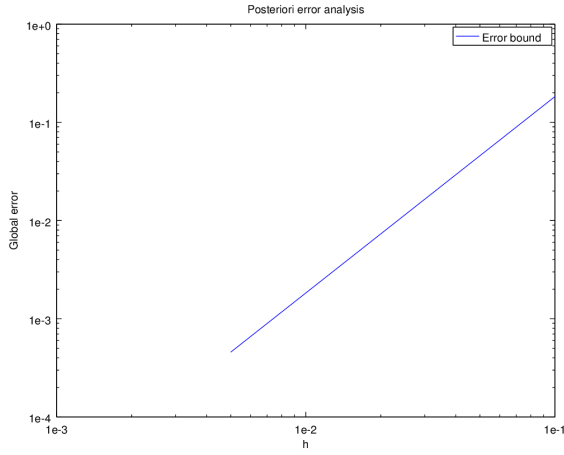
1     % h: vector of mesh sizes.
2     % B: vector of bounds.
3     poly = polyfit(log(h), log(B) , 1);
4     slope = poly(1)

```

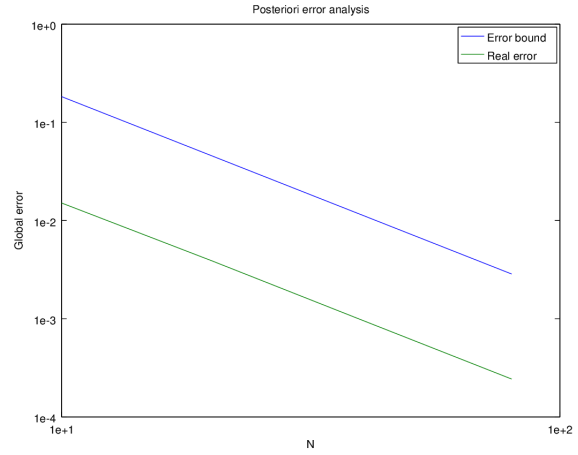
Además de esto, se han representado, también en escala logarítmica, los errores estimados y los errores reales descritos en la siguiente tabla, correspondiente a $\varepsilon = 1$:

$n = 1/h$	$\ u - u_h\ _{L_2(0,1)}$
10	0,0151
20	0,0039
40	$9,7229 \cdot 10^{-4}$
80	$2,4342 \cdot 10^{-4}$

En la gráfica de la Figura 4b se puede observar que ambas rectas tienen la misma pendiente y la recta del error estimado queda siempre por encima de la de errores reales, pues representa una cota de estos últimos.



(a) h frente al error en escala logarítmica.



(b) N frente al error en escala logarítmica.

Figura 4: Estimador del error a posteriori