Correspondence with Christian Goldbach

Original Texts

1
Euler to Goldbach
Petersburg, October 13th (24th), 1729

Vir Celeberrime

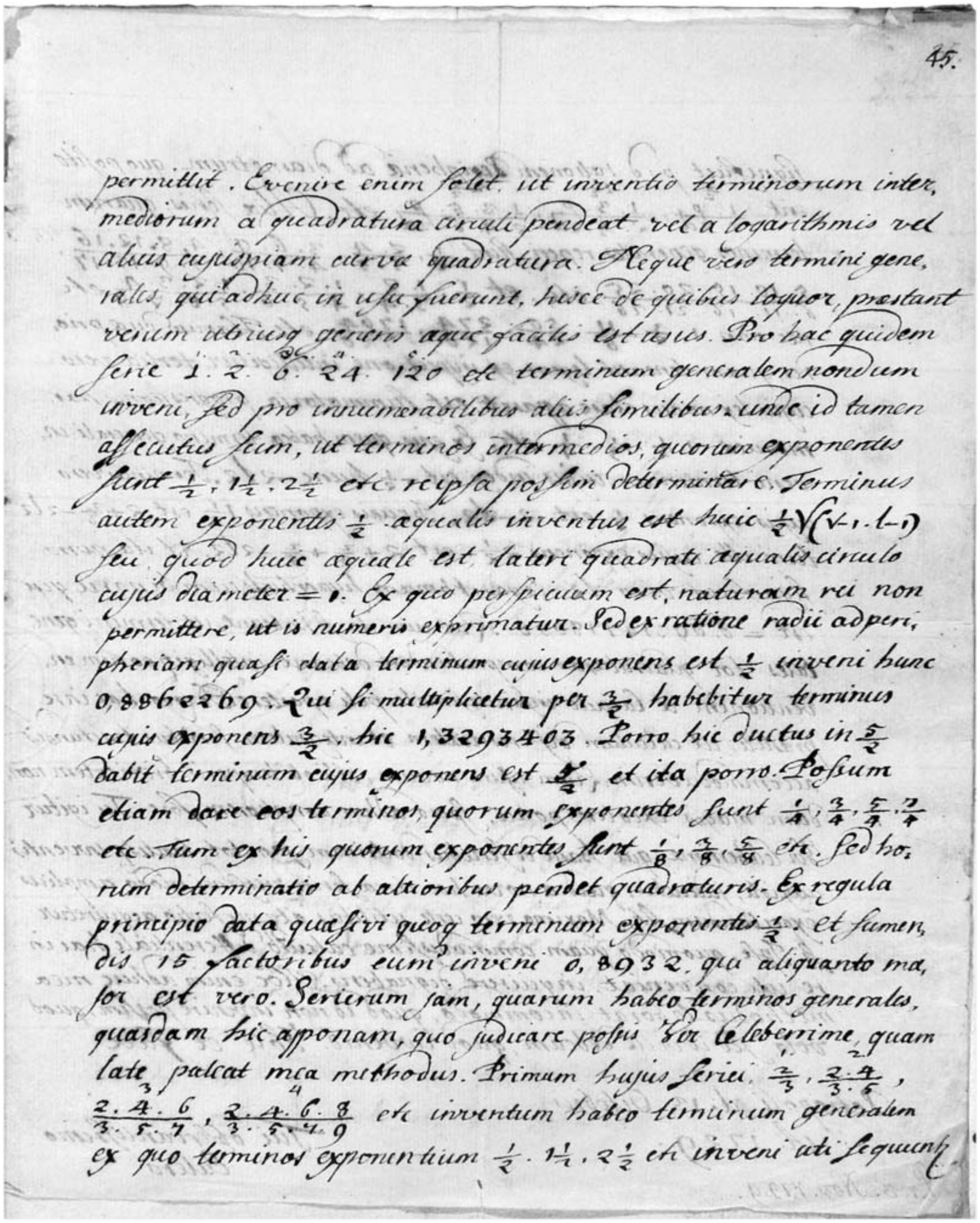
Cum nuper in nonnulla incidissem, quae ad interpolandas series legem, uti appellare soles,[1] variabilem habentes facere visa sunt, ea accuratius contemplatus sum, et multa quae huc attinent, detexi. Quae, quia Tibi Vir Celeberrime placitura esse mihi significavit Clarissimus Bernoulli, Tibi scribere, Tuoque submittere judicio statui. Hujus seriei,[2] 1, 2, 6, 24, 120, etc. quam a Te multum tractatam esse vidi,[3] hunc inveni terminum generalem

$$\frac{1\cdot 2^m}{1+m}\cdot\frac{2^{1-m}\cdot 3^m}{2+m}\cdot\frac{3^{1-m}\cdot 4^m}{3+m}\cdot\frac{4^{1-m}\cdot 5^m}{4+m}\text{ etc.}$$

ex infinito factorum numero constantem, qui terminum ordine m^{mum} exprimit. Is quidem in nullo casu abrumpitur, et aeque si $\underline{m}$ est numerus integer tantum ad verum magis magisque accedit, ac si $\underline{m}$ fuerit fractus: sed tamen per eum admodum prope quemque terminum invenire licet, idque eo facilius, quo minus assumatur $\underline{m}$. Si autem aliquot solum uti visum sit factoribus, termino generali commodior induci potest forma: ut si duobus prioribus factoribus contenti esse velimus, habebitur $\dfrac{1\cdot 2}{(1+m)\,(2+m)}3^m$ pro termino ordine $\underline{m}$, sin autem generaliter $\underline{n}$ factores capiantur sequentibus reliquis neglectis, erit terminus generalis

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\,\cdots\, n}{(1+m)\,(2+m)\,(3+m)\,\cdots\,(n+m)}\,(n+1)^m\,,$$

qui, quo major accipitur numerus n, eo propius ad verum accedet.[4] Communicavi haec cum Clar. Bernoulli, qui peculiari modo eundem fere postremum eruit terminum, in hoc a meo diversum, quod aliam potestatem loco $(n+1)^m$ adhibeat, in qua determinanda fortasse factorum neglectorum rationem habuit. Credo Ipsum Tibi nuper inde deductum numerum termino seriei, cujus index est $1\frac{1}{2}$, proximum misisse.[5] Potest hic terminus generalis praeterea alium habere usum, in inveniendis factis ex infinito factorum numero constantibus, quae sint aequalia numero finito: ut posito $m=2$ habebitur factum $\frac{4}{3}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{16}{15}\cdot\frac{25}{24}\cdot\frac{36}{35}\cdot$ etc. quod aequale est 2. Similiter posito $m=3$ erit $\frac{8}{4}\cdot\frac{27}{20}\cdot\frac{64}{54}\cdot\frac{125}{112}\cdot\text{etc.}=6$. Terminum hunc generalem ex eo inveni fundamento, quod haec series 1, 2, 6, 24, etc. in infinitum continuata tandem evadit geometrica.[6] Et hujusmodi terminos generales etiam pro aliis seriebus, quae in infinitum cum geometricis confunduntur, exhibere in promptu est. Sed cum hoc modo termini intermedii nonnisi veris proximi inveniantur, omissa hac serierum tractandarum ratione, aliter in hac re versari coepi, in id intentus, ut terminos intermedios non tantum veris proximos, sed ipsos veros, si fieri posset, invenirem. Ad id vero inveniendum, cum seriei terminum generalem haberi oportere visum sit, quem vero peculiarem et ab adhuc usitatis longe diversam habiturum formam praevidi. Obtulit se igitur nova quaedam terminorum



45.

permittit. Evenire enim solet, ut inventio terminorum inter-
mediorum a quadratura circuli pendeat vel a logarithmis vel
aliis cujuspiam curvae quadratura. Neque vero termini gene-
rales, qui adhuc in usu fuerunt, hisce de quibus loquor, praestant
verum utriusq generis aeque facilis est usus. Pro hac quidem
serie 1. 2. 6. 24. 120 etc terminum generalem nondum
inveni, sed pro innumerabilibus aliis similibus unde id tamen
assecutus sum, ut terminos intermedios, quorum exponentes
sunt $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$ etc reipsa possim determinare. Terminus
autem exponentis $\frac{1}{2}$ aequalis inventus est huic $\frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{-1}.\,l-1)}$
seu quod huic aequale est, lateri quadrati aequalis circulo
cujus diameter $= 1$. Ex quo perspicuum est, naturam rei non
permittere, ut is numeris exprimatur. Sed ex ratione radii ad peri-
pheriam quasi data terminum cujus exponens est $\frac{1}{2}$ inveni hunc
0,8862269. Qui si multiplicetur per $\frac{3}{2}$ habebitur terminus
cujus exponens $\frac{3}{2}$, hic 1,3293403. Porro hic ductus in $\frac{5}{2}$
dabit terminum cujus exponens est $\frac{5}{2}$, et ita porro. Possum
etiam dare eos terminos, quorum exponentes sunt $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{4}$
etc. Tum ex his quorum exponentes sunt $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$ etc. sed ho-
rum determinatio ab altioribus pendet quadraturis. Ex regula
principio data quaesivi quoq terminum exponentis $\frac{1}{2}$. et sumen-
dis 15 factoribus eum inveni 0,8932, qui aliquanto ma-
jor est vero. Serierum jam, quarum habeo terminos generales,
quasdam hic apponam, quo judicare possis Vir Celeberrime, quam
late pateat mea methodus. Primum hujus seriei $\frac{2}{3}$, $\frac{2.4}{3.5}$,
$\frac{2.4.6}{3.5.7}$, $\frac{2.4.6.8}{3.5.7.9}$ etc inventum habeo terminum generalem
ex quo terminos exponentium $\frac{1}{2}$. $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$ etc inveni uti sequuntur

Euler's first letter to Goldbach, October 13th (24th), 1729: reproduction of the third page (RGADA, f. 181, n. 1413, č. III, fol. 45r)

Euler's determination of the value $\frac{1}{2}!$ and an early form of "Euler's formula" for the logarithm of -1 (cf. n° 1, note 7) can be seen on lines 9–12.

generalium forma, quae quidem ad omnes prorsus series potest accommodari jam cognitas, sed longe ea latius patet, quippe infinitarum serierum legem variabilem habentium, quarumque adhuc methodis consuetis nulli termini generales inveniri potuerunt, determinare possum terminos generales. Hi autem sunt ejusmodi, ut termini quivis, sive eorum exponentes sint numeri integri sive fracti, inde exacte inveniri queant, quatenus scilicet rei natura permittit. Evenire enim solet, ut inventio terminorum intermediorum a quadratura circuli pendeat vel a logarithmis vel alius cujuspiam curvae quadratura. Neque vero termini generales, qui adhuc in usu fuerunt, hisce de quibus loquor, praestant, verum utriusque generis aeque facilis est usus. Pro hac quidem serie $\overset{1.}{1}, \overset{2.}{2}, \overset{3.}{6}, \overset{4.}{24}, \overset{5.}{120}$ etc. terminum generalem nondum inveni, sed pro innumerabilibus aliis similibus, unde id tamen assecutus sum, ut terminos intermedios, quorum exponentes sunt $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$ etc. reipsa possim determinare. Terminus autem exponentis $\frac{1}{2}$ aequalis inventus est huic $\frac{1}{2}\sqrt{\left(\sqrt{-1}\cdot \ell -1\right)}$, seu, quod huic aequale est, lateri quadrati aequalis circulo cujus diameter $= 1$.[7] Ex quo perspicuum est, naturam rei non permittere, ut is numeris exprimatur.[8] Sed ex ratione radii ad peripheriam quasi data terminum cujus exponens est $\frac{1}{2}$ inveni hunc $0,8862269$. Qui si multiplicetur per $\frac{3}{2}$ habebitur terminus cujus exponens $\frac{3}{2}$, hic $1,3293403$. Porro hic ductus in $\frac{5}{2}$ dabit terminum cujus exponens est $\frac{5}{2}$, et ita porro. Possum etiam dare eos terminos, quorum exponentes sunt $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{4}$ etc. Tum ex his quorum exponentes sunt $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$ etc.; sed horum determinatio ab altioribus pendet quadraturis.[9] Ex regula principio data quaesivi quoque terminum exponentis $\frac{1}{2}$, et sumendis 15 factoribus eum inveni $0,8932$, qui aliquanto major est vero. Serierum jam, quarum habeo terminos generales, quasdam hic apponam, quo judicare possis Vir Celeberrime, quam late pateat mea methodus. Primum hujus seriei, $\overset{1}{\frac{2}{3}}, \overset{2}{\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}}, \overset{3}{\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}}, \overset{4}{\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}}$ etc. inventum habeo terminum generalem ex quo terminos exponentium $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$ etc. inveni uti sequuntur: significet $p:d$ rationem Peripheriae ad diametrum,[10] quo posito erit $\overset{\frac{1}{2}}{\frac{1\cdot p}{2\cdot 2d}}, \overset{1\frac{1}{2}}{\frac{1\cdot 3\cdot p}{2\cdot 4\cdot 2d}}, \overset{2\frac{1}{2}}{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot p}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 2d}}$ etc. Aliae series, quarum terminos generales reperi, sunt $\frac{1}{2}, \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}, \frac{3\cdot 6\cdot 9}{4\cdot 7\cdot 10}, \frac{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}{5\cdot 9\cdot 13\cdot 17}, \frac{5\cdot 10\cdot 15\cdot 20\cdot 25}{6\cdot 11\cdot 16\cdot 21\cdot 26}$, etc. et $\frac{1}{2}, \frac{1\cdot 2}{3\cdot 4}, \frac{1\cdot 2\cdot 3}{4\cdot 5\cdot 6}, \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}$ etc. nec non $1, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}, \frac{50}{24}, \frac{274}{120}, \frac{1764}{720}$ etc. Harum duae priores, quam teneant legem ex inspectione intellegetur, tertia vero cujus lex minus clare apparet, est summatoria progressionis harmonicae $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ etc.[11] Ex ejus quem habeo termino generali inveni terminum cujus index est $-\frac{1}{2}$ hunc $-2\,\ell\,2$. Terminus vero cujus exponens $\frac{1}{2}$ est $2-2\,\ell\,2$. Is cujus exponens $1\frac{1}{2}$ est $2+\frac{2}{3}-2\,\ell\,2$, tum ille cujus exponens $2\frac{1}{2}$, est $2+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}-2\,\ell\,2$, et ita porro; significat vero $\ell\,2$ logarithmum hyperbolicum binarii qui est $= 0,693\,147\,180\,56$. Quae cum ita se habeant, ut termini generales tot quadraturas comprehendere debeant, intelligitur eorum inventionem a Calculo infinitesimali peti oportere. Id ergo hac in re praestiti, ut calculum differentialem et integralem seriebus tractandis accommodaverim. Quem usum novum, etsi ob temporis brevitatem nondum magis excolere potui, spero adhuc ampliorem fore. Tu igitur Vir Celeberrime, qui hanc de seriebus doctrinam jam tot tantisque inventis auxisti, judicabis, quid a novo hoc circa series versandi modo amplius expectandum sit. Maxima vero certe utilitas atque perfectio acquiretur si Ipse, quomodo quam commodissime calculo differentiali hac in re uti conveniat, inquirere dignaberis. Hoc enim adhuc mea methodus laborat incommodo, quod id non invenire possim, quod volo, sed id velle debeam, quod invenio. Vale et fave

Tui observantissimo
Eulero.

Petropoli d. 13 Octobris A. 1729.[12]

R 715 Start of Euler's correspondence with Goldbach
Petersburg, October 13th (24th), 1729
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. III, fol. 44r–45v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 3–7; *Euler-Goldbach* (1965), p. 19–21

2
Goldbach to Euler
Moscow, (November 20th) December 1st, 1729

Vir Clarissime

Ad epistolam tuam, quae mihi gratissima fuit, generatim respondeo me in terminis mediis serierum inveniendis satis habuisse, si quos in numeros rationales cogere non possem eosdem per series infinitas numerorum rationalium utcunque exprimerem,[1] quodsi deinde ostendi possit seriem huiusmodi qua valor termini medii quaesiti continetur vel ad numeros irrationales vel ad logarithmos vel denique ad curvarum quadraturas nondum inventas pertinere, id minime contemnendum puto, nam si alii operam dederunt ut incognitam rationem diametri ad circulum per seriem infinitam determinarent, e contrario summam seriei nondum cognitam per quadraturam circuli explicare licebit, hac tamen notabili differentia quod numeros irrationales ad rationales redigi non posse facile demonstretur,[2] quadraturam vero circuli numeris rationalibus definiri non posse nemo quod sciam evicerit.[3]

Terminum generalem seriei $1+2+6+24+$ &c. quem pro exponente quocunque m facis

$$\frac{1\cdot 2^m}{1+m}\cdot\frac{2^{1-m}\cdot 3^m}{2+m}\cdot\frac{3^{1-m}\cdot 4^m}{3+m}\cdot\frac{4^{1-m}\cdot 5^m}{4+m}\cdot \&\text{c.}$$

sic demonstro: Sit x exponens factoris cuiuscunque, erit formula generalis factorum

$$\frac{x^{1-m}\,(x+1)^m}{x+m},$$

et productum omnium factorum a primo usque ad ultimum cuius exponens est x inclusive

$$(x+1)^m : \left(\frac{(x+1)}{1}\frac{(x+2)}{2}\frac{(x+3)}{3}\cdots\frac{(x+m)}{m}\right);$$

exempli gratia si $m = 2$, fiet productum factorum ad datum quemcunque factorem (cuius exponens est x)

$$\frac{2\,(x+1)^2}{(x+1)\,(x+2)} = \frac{2\,(x+1)}{x+2},$$

adeoque productum omnium in infinitum $= 2$. Si $m = 3$, erit simile productum ad datum quemcunque factorem

$$6\,(x+1)^3 : \frac{(x+1)}{1}\frac{(x+2)}{2}\frac{(x+3)}{3}$$

adeoque productum omnium in infinitum $= 6$, et sic porro. Sed observasti sine dubio series Algebraicas omnes quarum termini consueto more per signum $+$ coniungi solent etiam in huiusmodi factores converti posse; erunt enim hic producta factorum quae illic sunt aggregata terminorum.

Fateor me non satis perspectam habere naturam logarithmorum hyperbolicorum; quin et Cl[arissimus] Wolffius ubi de Logarithmis agit, hyperbolicorum mentionem nullam facit.[4]

In reliquarum serierum quas commemoras terminis generalibus tuo more per factores exprimendis non magnam video difficultatem, nam seriei

$$\frac{1}{2} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5} + \frac{3\cdot 6\cdot 9}{4\cdot 7\cdot 10} + \frac{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}{5\cdot 9\cdot 13\cdot 17} + \&\text{c.}$$

terminus generalis est

$$\frac{x}{x+1}\cdot\frac{2x}{2x+1}\cdot\frac{3x}{3x+1}\cdots\frac{mx}{mx+1}$$

donec m fiat $= x$; quod si nusquam contingat erunt factores numero infiniti; sic terminus respondens exponenti $\frac{1}{2}$ fit

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{6}\cdot\&\text{c.}$$ [5]

Seriei

$$\frac{2}{3} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5} + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7} + \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} + \&\text{c.}$$

terminus generalis est

$$\frac{2\,(2n+3)}{3\,(2n+2)}\cdot\frac{4\,(2n+5)}{5\,(2n+4)}\cdot\frac{6\,(2n+7)}{7\,(2n+6)}\cdot\frac{8\,(2n+9)}{9\,(2n+8)}\cdot\&\text{c.}$$

Seriei

$$\frac{1}{2} + \frac{1\cdot 2}{3\cdot 4} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{4\cdot 5\cdot 6} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} + \&\text{c.}$$

terminus generalis est

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2\,(4n+2)}{6\,(n+1)}\cdot\frac{3\,(4n+6)}{10\,(n+2)}\cdot\frac{4\,(4n+10)}{14\,(n+3)}\cdot\frac{5\,(4n+14)}{18\,(n+4)}\cdot\&\text{c.}\right)$$

neque adeo difficile est assumere numeros quadraturam circuli exprimentes aliunde iam cognitos et pro iisdem series concinnare quarum terminos medios hi numeri constituant, cuius artificii mihi probe gnarus videris. Ceterum egregias plane iudico methodos quarum specimina mecum communicasti, neque dubito quin iisdem vestigiis progrediens multa nova et praeclara in hoc genere reperturus sis; misi ego quoque nuper ad Cl[arissimum] Bernoullium nostrum theorema quo methodum summandi series ad calculum quem vocant integralem accommodavi.[6]

Vale. 1. Dec. 1729. Moscua.

Tui observantissimus
Christianus Goldbach.

P.S. Notane Tibi est Fermatii observatio omnes numeros huius formulae $2^{2^{x-1}}+1$, nempe 3, 5, 17, &c. esse primos, quam tamen ipse fatebatur se demonstrare non posse et post eum nemo, quod sciam, demonstravit.[7]

R 716 Reply to nº 1
Moscow, (November 20th) December 1st, 1729
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 2–3r
Copy, 4 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. III, fol. 8v–10r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 8–10; *Euler-Goldbach* (1965), p. 23–24

3d
Euler to Goldbach
Petersburg, January 6th (17th), 1730

Ad D. Goldbach den 6ten Jan. 1730.[1]

Vir Celeberrime

Quae nuper de methodo mea progressionum terminos medios ex quadraturis inveniendi scripsi, ea non ope serierum infinitarum terminos illos exprimentium perficio. Maxime enim arduum esse arbitror de quaque serie infinita, ad quam pertineat quadraturam, pronunciare; quanquam non negem, me primo ex serie terminum generalem progressionis $1+2+6+24+$etc. exhibente, quam Tibi V[ir] C[eleberrime] perscripsi, conclusisse terminum ordine $\frac{1}{2}$ a quadratura circuli pendere. Deinde autem id meditatus sum, quomodo alia via eodem pervenire possim, quae non seri[ebus] dignoscendis contineatur. In aliam igitur atque novam incidi rationem progressionum terminis generalibus denotandarum. Recipio autem formulas integrales in terminos generales, quae, quoties integrari possunt, dant terminum algebraicum, quoties vero integrationem non admittunt termini algebraice determinari nequeunt, simul autem inde cognoscitur a quanam pendeant quadratura.

Formulis autem integralibus sequenti modo utor: Est mihi $\int p\,dx$ terminus generalis seriei cujusdam, quam ex eo construere licet. Designat autem p functionem quandam ipsius x, et constantium, praetereaque literae $\underline{n}$ quae indicat, quotus sit in ordine terminus inveniendus. Jam si $\underline{n}$ in exponentes ingrediatur, perspicuum est fieri posse, ut modo $p\,dx$ integrari possit, modo minus, prout $\underline{n}$ alium atque alium designet numerum. Ex quo alii termini algebraice exprimi poterunt, alii vero a quadraturis pendebunt. Ad terminum vero quempiam ipsum inveniendum, pono in p loco $\underline{n}$ indicem ejus termini et tum quaero integrale ipsius $p\,dx$, quod tanta augeo constante ut facto $x = 0$ totum evanescat. Deinde loco x pono quantitatem quandam constantem, ut formula determinatum habeat valorem, atque hic mihi exprimit terminum quaesitum. Totum hoc negotium exemplo facilius percipietur. Dico hujus progressionis $\frac{2}{3} + \frac{2\cdot4}{3\cdot5} + \frac{2\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7} +$ etc. terminum generalem esse $\dfrac{2n+3}{2}\int dx\ (1-x)^n\sqrt{x}$. Hac enim formula integrata atque loco x scripto 1, invenietur quilibet terminus progressionis. Sit v[erbi] g[ratia] $n = 1$, ut terminus primus inveniatur, habebitur

$$\tfrac{5}{2}\int dx\ (1-x)\sqrt{x} = \tfrac{5}{2}\int x^{\frac{1}{2}}dx - \tfrac{5}{2}\int x^{\frac{3}{2}}dx = \tfrac{5}{3}x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{5}{2}};$$

ponatur $x = 1$, invenietur terminus primus $\frac{2}{3}$; sit $n = 2$, abibit ea formula in

$$\tfrac{7}{2}\int dx\ (1-x)^2\sqrt{x} = \tfrac{7}{2}\int x^{\frac{1}{2}}dx - 7\int x^{\frac{3}{2}}dx + \tfrac{7}{2}\int x^{\frac{5}{2}}dx = \tfrac{7}{3}x^{\frac{3}{2}} - \tfrac{14}{5}x^{\frac{5}{2}} + x^{\frac{7}{2}}.$$

Fiat $x = 1$, obtinebitur terminus secundus $\frac{7}{3} - \frac{14}{5} + 1 = \frac{8}{15}$. Simili modo omnes termini, quorum indices sunt numeri integri, inveniuntur iidem, qui in ipsa serie comprehenduntur, atque idcirco hujus progressionis $\frac{2}{3} + \frac{2\cdot4}{3\cdot5} + \frac{2\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7}$ etc. merito $\dfrac{2n+3}{2}\int dx\ (1-x)^n\sqrt{x}$ terminum generalem appellare licet. Atque hoc eo magis, quod etiam omnes termini medii ex eo inveniri, et per quadraturas curvarum construi possint. Unde eorum saltem determinatus valor cognoscitur. Si requiratur terminus ordine $\frac{1}{2}$, ponatur $n = \frac{1}{2}$ et habetur $2\int dx\sqrt{x-xx}$. Hoc exprimit segmentum circuli diametri 1, cujus sagitta est x; si fiat $x = 1$, abibit segmentum in totum circulum, et propterea terminus quaesitus aequatur areae circuli cujus diameter est 1. Hujusmodi terminos generales omnium earum progressionum, quarum mentionem feci, aliarumque infinitarum similium dare possum. Quousque autem haec methodus pateat ut possis cognoscere, generaliora hic adjungo. Fundamenti loco mihi fuit haec progressio $1 + 1\cdot2 + 1\cdot2\cdot3 +$ etc. cujus terminus generalis est $\int dx\ (-\ell\,x)^n$. Hoc nimirum integrale, facto $x = 1$, dat terminum ordine $\underline{n}$simum. Denotat autem $\ell\,x$ logarithmum hyperbolicum ipsius x. Antequam vero ostendam, quomodo haec expressio progressioni satisfaciat, explicabo quod Te non satis perspicere innuis, quo differant logarithmi hyperbolici ab ordinariis. Si constituatur progressio geometrica

$$A.\quad 1,\quad a,\quad a^2,\quad a^3,\quad a^4,\quad a^5\quad \text{etc.}$$

eique subscribatur arithmetica

$B.\quad b,\quad b+c,\quad b+2c,\quad b+3c,\quad b+4c,\quad b+5c,$

habebit quilibet terminus progressionis A sive eorum ipsorum qui adsunt, sive interpolatorum, respondentem in progressione B. Qui termini eorum vocantur logarithmi. Jam cum infinitae progressiones arithmeticae subscribi possint, perspicuum est infinita dari systemata logarithmorum. In logarithmorum vulgarium systemate, quorum tabulae a Briggio et Vlacquio computatae[2] habentur, loco seriei A hanc posuerunt 1, 10, 100, 1000, etc. et loco arithmeticae B sumserunt hanc, 0, 1, 2, 3 etc., ita ut logarithmus unitatis sit 0, denarii 1, etc. Ex hoc intelligitur, ad systema quoddam logarithmorum condendum, duorum quorundam numerorum logarithmos pro lubitu assumi posse, e quibus deinde omnium numerorum logarithmi inveniantur. Ita in systemate logarithmorum hyperbolicorum etiam pro logarithmo unitatis assumitur 0 et pro numero qui unitatem quantitate infinite parva excedit $1+dz$ assumitur logarithmus ipsum dz, sive series A haec accipitur

$1,\quad 1+dz,\quad (1+dz)^2\qquad$ etc.,

pro serie vero B haec

$0,\qquad dz,\qquad 2\,dz,\qquad 3\,dz\qquad$ etc.

Logarithmi hinc deducti sunt ii qui vocantur hyperbolici, eo quod iidem sint atque illi qui ex quadratura hyperbolae eruuntur; vocantur quoque Neperiani quia Neperus hujusmodi tabulas supputavit.[3] Quae nunc in Analyticis de logarithmorum differentiatione et integratione differentialium logarithmicalium traduntur ea nonnisi ad logarithmos hyperbolicos pertinent. Et hanc ob rem in termino generali $\int dx\ (-\ell\,x)^n$, $\ell\,x$ designat logarithmum hyperbolicum ipsius x. Ut autem appareat, quomodo haec expressio quemvis terminum praebeat, sit $n=3$, erit

$$\int dx\ (-\ell\,x)^n = -\ x\ (\ell\,x)^3 + 3x\ (\ell\,x)^2 - 6x\,\ell\,x + 6x;$$

ponatur $x=1$, evanescent omnes termini ob $\ell\,1=0$ praeter ultimum, qui dat 6, terminum tertium seriei. Similiter omnes termini indices integros habentes ex eo eruuntur; sed qui valor sit eorum, quorum indices sunt numeri fracti, minus clare apparet.

R 717 Draft for n° 3
Petersburg, January 6th (17th), 1730
Autograph draft, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 6–7v

3
Euler to Goldbach
Petersburg, January 8th (19th), 1730

Vir Ce[le]berrime

Quae nuper de methodo mea progressionum terminos medios ex quadraturis inveniendi scripsi,[1] ea non ope serierum infinitarum terminos illos exprimentium perficio; maxime enim arduum esse arbitror de quaque serie infinita, ad quam pertineat quadraturam, pronunciare; quanquam non negem, me primo ex serie terminum generalem progressionis $1+2+6+24+$ etc. exhibente, quam Tibi Vir Celeberrime perscripsi, conclusisse terminum ordine $\frac{1}{2}$ a quadratura circuli pendere. Deinde autem eodem modo circa alias progressiones versari diffidens id meditatus sum, quomodo alia via eodem pervenire possem, quae non seriis[!] dignoscendis contineatur. In aliam igitur atque novam incidi rationem progressionum terminis generalibus denotandarum. Ea in hoc consistit, ut formulas integrales in terminos generales recipiam. Ad hoc autem adductus sum considerans ad ea, quae a communi algebra perfici non possent, analysin infinitorum plerunque facilem praebere aditum. Sed termini hujusmodi generales toties consuetam induunt formam, quoties formulae illae integrales algebraice exprimi possunt, quibus in casibus progressionis omnes termini sive exponentes sint numeri fracti sive integri algebraice exhibentur. Quando vero illae formulae integrationem universaliter non admittunt, omnes termini algebraice exponi nequeunt, sed quidam a quadraturis curvarum pendebunt, quae inde cognoscuntur. Cum igitur in nonnullis seriebus observassem terminos quosdam medios a quadratura circuli pendere, in earum terminis generalibus necessario formulae integrales inesse debere visae sunt. Sequenti autem modo hujusmod[i] formulis integralibus utor. Quando dico seriei cujuspiam terminum generalem esse $\int P\,dx$, intelligi oportet ex eo terminum quemcunque indicis $\underline{n}$ inveniri posse. Indicat vero hic P functionem quandam ex $\underline{x}$ et constantibus quantitatibus una cum $\underline{n}$ indice compositam; refero scilicet $\underline{n}$ ad constantes, ut unica variabilis x adsit. Jam $\int P\,dx$ hoc modo dat terminum $\underline{n}$simum. Integretur $\int P\,dx$ vel reipsa, si fieri potest, vel ad quadraturam curvae convenientis referatur; tanta autem constans adjiciatur ut totum evanescat posito $x=0$. Deinde ponatur $x=$ constanti cuidam quantitati (in sequentibus semper pono $x=1$); habebitur functio quaedam quantitatum constantium et indicis $\underline{n}$, quae erit ipse terminus n^{mus}.[2] Fieri nunc potest, praecipue si $\underline{n}$ in exponentes ingrediatur, ut positis loco $\underline{n}$ certis numeris, formula integrari possit, secus vero si alii substituantur. Quo fit ut alii termini algebraice seu in numeris exprimi queant, alii a quadraturis pendeant. Ut terminum generalem reperi hunc[3] $\dfrac{2n+3}{2}\int dx\ (1-x)^n\sqrt{x}$ progressionis istius $\frac{2}{3}+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}+\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}+$ etc.: Qui quomodo congruat, ut appareat sit $n=2$, habebitur

$$\tfrac{7}{2}\int dx\ (1-x)^2\sqrt{x}=\tfrac{7}{3}x^{\frac{3}{2}}-\tfrac{14}{5}x^{\frac{5}{2}}+x^{\frac{7}{2}};$$

ponatur $x=1$, orietur terminus secundus $=\frac{7}{3}-\frac{14}{5}+1=\frac{8}{15}$. Idem hic terminus generalis omnes terminos medios suppeditat, ut sit $n=\frac{1}{2}$, erit $2\int dx\sqrt{x-xx}$ terminus quaesitus, sed $2\int dx\sqrt{x-xx}$ exhibet segmentum circuli, cujus sagitta[4] est x, radio existente $\frac{1}{2}$ seu diametro 1. Ponatur $x=1$, erit terminus ordine $\frac{1}{2}$ aequalis areae circuli, cujus diameter $=1$. Similiter alii termini medii determinantur. Hujusmodi terminos generales omnium earum progressionum quarum mentionem feci, aliarumque infinitarum similium dare possum. Quousque autem haec methodus pateat ut possis cognoscere Vir Celeberrime, generaliora hic adjungo. Fundamenti loco mihi fere fuit haec progressio, $1+1\cdot 2+1\cdot 2\cdot 3+$etc., cujus terminus generalis mihi inventus est[5] $\int dx\ (-\ell\, x)^n$. Nimirum sumto integrali positoque $x=1$, prodit terminus cujus index est $\frac{1}{2}$. Denotat autem $\ell\, x$ logarithmum hyperbolicum ipsius x. Antequam vero ostendam, quomodo haec formula progressioni satisfaciat, explicabo quod Te non satis perspicere innuis, quo differant logarithmi hyperbolici ab ordinariis. Si constituatur progressio geometrica

$$A.\quad 1,\quad a,\quad a^2,\quad a^3,\quad a^4,\quad a^5\quad \text{etc.}$$

eique subscribatur arithmetica

$$B.\quad b,\quad b+c,\quad b+2c,\quad b+3c,\quad b+4c,\quad b+5c\quad \text{etc.}$$

habebit quilibet terminus progressionis A sive eorum qui adsunt, sive interpolatorum respondentem in progressione B. Hi termini progressionis B respondentium terminorum in progressione A vocantur logarithmi. Jam cum innumerabiles progressiones Arithmeticae subscribi possint, perspicuum est innumerabilia dari systemata logarithmorum. In vulgari systemate, quorum tabulae a Briggio et Vlacquio computatae habentur,[6] loco seriei geometricae A posuerunt 1, 10, 100, 1000, etc. et loco arithmeticae sumserunt hanc 0, 1, 2, 3, 4 etc., ita ut logarithmus unitatis sit 0, denarii 1 etc. Ex hoc intelligitur, ad systema quodpiam logarithmorum condendum duorum quorundam numerorum logarithmos pro lubitu accipi posse; e quibus deinde omnium numerorum logarithmi determinantur. Ita in systemate logarithmorum hyperbolicorum etiam pro logarithmo unitatis ponitur 0, et pro numero, qui unitatem quantitate infinite parva superat ut $1+dz$, assumitur logarithmus hoc ipsum dz. Vel series A est

$$1,\quad (1+dz),\quad (1+dz)^2,\quad (1+dz)^3,$$

et series B logarithmos contine[n]s est

$$0,\quad dz,\quad 2\,dz,\quad 3\,dz\quad \text{etc.}$$

Logarithmi ex hac positione deducti sunt ii, qui vocantur hyperbolici, eo quod iidem sint, ac illi qui ex quadratura hyperbolae[7] eruuntur. In hoc systemate est logarithmus binarii $0{,}693\,147\,180\,559\,945$ et logarithmus denarii est $2{,}302\,585\,092\,994\,045$ ut ipse calculo aliquoties repetito inveni. Sin autem acciderit, ut logarithmis hyperbolicis uti oporteat, non quidem necesse est tabulam eorum ad manus habere, sed Vlacquiani in usum vocari possunt dummodo singuli per $2{,}302\,585$ etc. multiplicentur. Semper autem, quando in calculo infinitesimali de logarithmis sermo est, hyperbolici intelliguntur. Et hanc ob rem in termino generali $\int dx\ (-\ell\, x)^n$ ℓ designat logarithmum hyperbolicum. Ut nunc appareat, quomodo haec formula quemvis terminum praebeat, sit $n = 3$, habebitur

$$\int dx\ (-\ell\, x)^3 = -\ x\,(\ell\, x)^3 + 3x\,(\ell\, x)^2 - 6x\,\ell\, x + 6x,$$

constantis additione opus non est; ponatur ergo $x = 1$, proveniet terminus tertius $= 6$. Omnes enim termini in quibus est $\ell\, x$ evanescent, quia $\ell\, 1 = 0$. Simili modo omnes termini numeros integros habentes eruuntur. Sed qui valor sit eorum, quorum indices sunt numeri fracti, id difficilius eruitur.[8] Deducit enim ad quadraturas curvarum transcendentium, ut terminus ordine $\frac{1}{2}$ determinatur a quadratura curvae ad quam est $yy+\ell\, x = 0$, cum tamen eundem ante a quadratura circuli pendere deprehenderim. Verumtamen alia mihi insuper est methodus eosdem terminos ad curvarum algebraicarum quadraturas reducendi, quae hoc theoremate continetur: terminus cujus index est $p : q$, aequalis est[9]

$$\sqrt[q]{(1\cdot 2\cdot 3\ \cdots\ p)\left(\left[\tfrac{2p}{q}+1\right]\left[\tfrac{3p}{q}+1\right]\left[\tfrac{4p}{q}+1\right]\ \cdots\ \left[\tfrac{qp}{q}+1\right]\right)\cdot}$$
$$\cdot\left(\left[\int dx\ (x-xx)^{\frac{p}{q}}\right]\left[\int dx\ \left(x^2-x^3\right)^{\frac{p}{q}}\right]\ \cdots\ \left[\int dx\ \left(x^{q-1}-x^q\right)^{\frac{p}{q}}\right]\right)$$

quae expressio aequivalet huic $\int dx\ (-\ell\, x)^{\frac{p}{q}}$. Ponatur exempli gratia $p = 1$ et $q = 2$ ut terminus ordine $\frac{1}{2}$ inveniatur, abibit forma generalis in $\sqrt[2]{1\cdot 2\int dx\sqrt{x-xx}}$, sed jam ostensum est $2\int dx\sqrt{x-xx}$ dare aream circuli diametri 1, quare in serie $1+1\cdot 2+1\cdot 2\cdot 3+1\cdot 2\cdot 3\cdot 4$ [+ etc.] terminus cujus index est $\frac{1}{2}$ aequalis est radici quadratae ex circulo cujus diameter est 1. Cum igitur $\int dx\ (-\ell\, x)^n$ sit terminus generalis seu terminus ordine $\underline{n}$ hujus seriei, habeo $\int dx\ (-\ell\, x)^n = 1\cdot 2\cdot 3\ \cdots\ n$. Quod in serierum hanc includentium terminis generalibus inveniendis magni est momenti. Nec minus hoc

$$m\cdot\overline{m+1}\cdot\overline{m+2}\ \cdots\ \overline{m+n} = \frac{\int dx\ (-\ell\, x)^{m+n}}{\int dx\ (-\ell\, x)^{m-1}}.$$

Maxime universale et latissime patens est hoc theorema

$$(f+g)\,(f+2g)\,(f+3g)\ \cdots\ (f+ng) = \frac{g^{n+1}\int dx\ (-\ell\, x)^n}{(f+(n+1)\ g)\int x^{\frac{f}{g}}dx\ (1-x)^n}.$$

Unde facile fluit hoc

$$\frac{(f+g)\,(f+2g)\ \cdots\ (f+ng)}{(h+k)\,(h+2k)\ \cdots\ (h+nk)} = \frac{g^{n+1}\,(h+(n+1)\ k)\int x^{\frac{h}{k}}dx\ (1-x)^n}{k^{n+1}\,(f+(n+1)\ g)\int x^{\frac{f}{g}}dx\ (1-x)^n}.$$

Ex hoc Theoremate facile est invenire omnium hujusmodi serierum, quarum termini sunt facta, in quae ingrediuntur quantitates in Arithmetica progressione progredientes, terminos generales. Ut proposita sit haec progressio de qua nuper mentionem feci,[10] $\frac{1}{2}+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}+\frac{3\cdot 6\cdot 9}{4\cdot 7\cdot 10}+$ etc. Hujus terminus ordine n est

$$\frac{n\cdot 2n\cdot 3n\ \cdots\ nn}{(n+1)\,(2n+1)\,(3n+1)\ \cdots\ (nn+1)}.$$

Hunc comparo cum

$$\frac{(f+g)\,(f+2g)\,(f+3g)\,\cdots\,(f+ng)}{(h+k)\,(h+2k)\,(h+3k)\,\cdots\,(h+nk)},$$

quae formula ut in illam transmutetur oportet sit $f=0$, $g=n$ et $h=1$, $k=n$. His valoribus substitutis prodit

$$\frac{n\cdot 2n\cdot 3n\,\cdots\,nn}{(n+1)\,(2n+1)\,(3n+1)\,\cdots\,(nn+1)}=\frac{(1+n+nn)\int x^{\frac{1}{n}}dx\;(1-x)^n}{(nn+n)\int dx\;(1-x)^n}.$$

Id quod est terminus generalis progressionis propositae. Est autem $dx\,(1-x)^n$ integrabile, integrale enim est $C-\dfrac{(1-x)^{n+1}}{n+1}$. Constans C debet esse $\dfrac{1}{n+1}$ ut posito $x=0$ totum evanescat. Ponatur nunc $x=1$ ut principio monui, prodibit C seu $\dfrac{1}{n+1}$; est igitur $(nn+n)\int dx\;(1-x)^n=n$, et ideo terminus generalis seriei propositae hanc habet formam

$$\left(\frac{1+n+nn}{n}\right)\int x^{\frac{1}{n}}dx\;(1-x)^n\,.$$

Sit $n=3$, ut terminus tertius $\frac{3\cdot 6\cdot 9}{4\cdot 7\cdot 10}$ prodeat, habebitur

$$\tfrac{13}{3}\int x^{\frac{1}{3}}dx\;(1-x)^3=\tfrac{13}{4}x^{\frac{4}{3}}-\tfrac{39}{7}x^{[\frac{7}{3}]}+\tfrac{39}{10}x^{\frac{10}{3}}-x^{\frac{13}{3}};$$

ponatur $x=1$, habebitur $\frac{13}{4}-\frac{39}{7}+\frac{39}{10}-1=\frac{162}{280}$ = termino tertio. Quaero terminum ordine $\frac{1}{2}$; fiat ergo $n=\frac{1}{2}$, habebitur

$$\tfrac{7}{2}\int xx\,dx\;(1-x)^{\frac{1}{2}}=C-\tfrac{7}{3}\,(1-x)^{\frac{3}{2}}+\tfrac{14}{5}\,(1-x)^{\frac{5}{2}}-(1-x)^{\frac{7}{2}}\,.$$

Ergo C est $=\frac{7}{3}-\frac{14}{5}+1$. Ponatur $x=1$, restabit solum C seu $\frac{7}{3}-\frac{14}{5}+1=\frac{8}{15}$. Algebraice ergo hic terminus ordine $\frac{1}{2}$ dari potest nec non ii, quorum indices sunt $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ etc. omnes numeris exprimi possunt; qui autem quanti sint, alio modo vix fortasse inveniri posset. Hic autem observo hunc terminum ordine $\frac{1}{2}$ aequalem esse termino ordine 2, et generaliter terminus ordine $\frac{1}{n}$ aequalis est termino ordine n. Haec fere constituunt unum genus progressionum, ad quod mea methodus deduxit; multa quoque ejus ope in seriebus summandis detexi, et praecipue terminis summatoriis inveniendis omnium earum progressionum, in quarum terminis generalibus exponens vel index in denominatorem ingreditur, ut in progressione harmonica. Sed de his alio tempore, si placuerit, scripturus sum.

Nihil prorsus invenire potui, quod ad Fermatianam observationem[11] spectaret. Sed nondum prorsus persuasus sum, quomodo sola inductione id inferre legitime potuerit, cum certus sim ipsum numeris in formula 2^{2^x} loco x substituendis nec ad senarium quidem pervenisse.

Haec igitur benevole accipias enixe rogo, et favere pergas
Vir Celeberrime
Tibi obstrictissimo
Eulero

Petropoli d. 8 Jan.
1730

R 717 Reply to nº 2
Petersburg, January 8th (19th), 1730
Original, 4 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. III, fol. 69–72r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 11–18; *Euler-Goldbach* (1965), p. 25–28

4
Goldbach to Euler
Moscow, May (11th) 22nd, 1730

Eulero Moscua Petropolin 22. *Maii* 1730.

Egregia teque auctore digna judico quae secundis litteris[1] mecum de terminis generalibus serierum communicasti; hoc tantum in methodo tua cavendum mihi videtur, ne assumta integralis $\int P\,dx$ utrovis modo, hoc est, tam posita $x = 0$, quam posita $x = 1$ in nihilum abeat. Deinde sponte moneo, terminum generalem seriei $\frac{1}{2} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5} + \frac{3\cdot 6\cdot 9}{4\cdot 7\cdot 10} + \&c.$ quem pro exponentibus non integris dederam non quadrare,[2] fatendum tamen est terminum generalem eiusmodi $\dfrac{2n+3}{2}\int dx\ (1-x)^n\sqrt{x}$, ut intelligibilis fiat, in seriem infinitam consueto more resolvi debere, cuius singuli termini integrati tandem exhibebunt terminum generalem indefinitum, quem etiam sine usu Arithmeticae differentialis infinitis modis produci posse constat.

Quod ad Fermatii observationem attinet,[3] tecum sentio, non credibile videri, eum ad sex terminos illius suae seriei exprimendos progressum fuisse, neque tanto labore opus est ad verisimilitudinem illius observationis, facile enim experimur divisore quocunque accepto residua ex terminis ordine quo sequuntur divisis in circulum redire; sit verbi gr[atia] terminus $2^{2^x} + 1$, ubi $x = 2$, divisus per 7, relinquit 3, ergo terminus sequens relinquit idem residuum quod relinquitur ex divisione numeri $(3-1)^2 + 1$ per 7, nempe residuum 5, terminus hunc sequens idem residuum dabit quod relinquitur ex divisione numeri $(5-1)^2+1$ per 7 divisi, nempe 3, ergo omnia residua possibilia omnium terminorum seriei divisorum per 7 (ubi scilicet quotiens sit > 0) sunt vel 3 vel 5; simili ratione facile apparet[4] nullum terminum seriei Fermatianae dividi posse per numerum < 100; sed quidquid sit de Fermatii observatione, hoc certum est, omnem numerum $2^p + 1$, ubi p non sit $=$ alicui numero 2^n (in quo n est numerus integer affirmativus) esse non-primum, cuius quidem divisores facillime inveniuntur. Sic numeri $2^{84} + 1$ divisor est 17, numeri $2^{1736} + 1$ divisor est 257, &c. Vale.

R 718 Reply to n° 3
Moscow, May (11th) 22nd, 1730
Copy of a lost original, 3 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. III, fol. 20v–21v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 19–20; *Euler-Goldbach* (1965), p. 29–30

5

Euler to Goldbach

Petersburg, June 4th (15th), 1730

Vir Celeberrime

Postquam ultimas ad Te misissem literas, de Theoremate Fermatiano[1] diligentius cogitare coepi, idque non tam levi nixum fundamento, quam primum putaveram, perspexi. Quoties enim in $2^n + 1$ non est n numerus ex progressione geometrica 1, 2, 4, 8, etc., divisores semper, ut Ipse Vir Celeberrime in postremis literis monuisti,[2] assignari possunt. Nam si n est numerus impar, binomium $2^n + [1]$ vel etiam generalius $a^n + b^n$ poterit dividi per $a + b$. Si praeterea fuerit n multiplum quodpiam numeri imparis, uti si $n = ki$ denotante i numerum quemcunque imparem; divisor erit $a^k + b^k$. Quam ob rem, cum solae binarii potentiae hanc habeant proprietatem ut per nullum numerum imparem dividi possint, praeter unitatem, sequitur tum solum binomii $a^n + b^n$ ex hoc fonte divisorem assignari non posse, quando n est potentia quaedam binarii. Hoc quidem multum ad evincendam Theorematis veritatem sed tamen non est prorsus sufficiens. Quanquam enim pro n assumitur dignitas quaedam binarii, tamen ex eo inferre non licet $a^n + b^n$ nullos habere divisores; ut si a sit 4, et b 3, etiamsi ponatur $n = 2$, potest $16 + 9$ dividi per 5. Conducit ergo investigare casus, quibus nihilominus divisores locum habent. Perspicuum est primum, si a et b fuerint numeri inter se compositi ut cf et df, binomium $c^n f^n + d^n f^n$ habere divisorem f^n. Deinde si a et b utrumque fuerit numerus impar, dividi semper poterit per 2. Denique ut hos casus universalius evolvamus, sit $a = mc + \alpha$ et $b = mc + \beta$, erit

$$a^n = \alpha^n + n\alpha^{n-1}mc + \frac{n \cdot n-1}{2}\alpha^{n-2}m^2c^2 + \text{etc.}$$

et

$$b^n = \beta^n + n\beta^{n-1}mc + \frac{n \cdot n-1}{2}\beta^{n-2}m^2c^2 + \text{etc.}$$

ergo

$$a^n + b^n = (\alpha^n + \beta^n) + nmc\left(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}\right) + \frac{n \cdot n-1}{2}m^2c^2\left(\alpha^{n-2} + \beta^{n-2}\right) + \text{etc.}$$

Ex hoc apparet singulos progressionis terminos praeter primum dividi posse per mc. Quoties igitur $\alpha^n + \beta^n$ et mc communem habent divisorem, per eundem et

a^n+b^n dividi poterit. In his igitur aliisque, si qui forte hic non continentur, casibus, quibus a^n+b^n non fit numerus primus, si non comprehenditur casus Fermatii quo $a=2$ et $b=1$, tuto concludi potest 2^n+1 semper esse numerum primum. Sed forte et alia hujusmodi Theoremata invenire licet, ut 3^n+2^n, si n fuerit dignitas binarii semper numeros primos mihi dare videtur.[3] Caeterum Theorema hoc non tam saepe, si unquam fallit, mihi fallere videtur, quam quae de differentiis potentiarum enunciant: cujusmodi est hoc 2^n-1 semper dare numerum primum, si n sit numerus primus;[4] nam si ponatur $n=11$, divisorem habet $2^{11}-1$ vel 2047, 23, similiter 47 metitur $2^{23}-1$ et 223 hoc $2^{37}-1$. Occurrit mihi hic terminus generalis, quem aliquando inveni, vel functio quaedam ipsius x, quae hanc habet proprietatem, ut quicunque numerus loco x ponatur, ea det numerum divisorum ejusdem numeri; in divisoribus vero habeo et unitatem et numerum ipsum,[5] ita ut numeri primi duos tantum habeant divisores. Est itaque haec mea formula terminus generalis huius seriei,

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1, & 2, & 2, & 3, & 2, & 4, & 2, & 4, & 3, & 4, & 2, & 6 \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12, \end{array}$$

cujus quilibet terminus indicat, quot index subscriptus habeat divisores, ut 6 habet quatuor 1, 2, 3, 6. Significet nunc x numerum quemcunque, erit numerus divisorum ipsius x hic

$$\frac{3+(-1)^x+1+(-1)^A+1+(-1)^B+1+(-1)^C+1+(-1)^D+\text{etc.}}{2}.$$

Designat vero, A terminum generalem seriei 1, 1, 4, 7, 13, 22, etc. cujus quivis terminus summa est duorum praecedentium et 2; B terminum generalem seriei 1, 1, 1, 6, 11, 21, 41 cujus quilibet terminus est summa trium praecedentium + 3; C terminum generalem seriei 1, 1, 1, 1, 8, 15, 29, 57, etc. cujus quivis terminus est summa quatuor praecedentium + 4. Similis ratio est reliquarum literarum D, E, etc.[6] Quaeratur hinc numerus divisorum senarii, erit $x=6$, $A=22$, $B=21$, $C=15$, $D=10$, $E=1$, $F=1$, et reliquae omnes erunt 1. His positis erit numerus divisorum senarii

$$=\frac{3+(-1)^6+1+(-1)^{22}+1+(-1)^{21}+1+(-1)^{15}+1+(-1)^{10}+1+(-1)^1+1+(-1)^1\,\text{etc.}}{2}.$$

Quia autem -1 elevatum ad numerum parem dat $+1$ et ad numerum imparem -1, erit numerus divisorum

$$=\frac{3+1+1+1+1+1-1+1-1+1+1+1-1+1-1+1-1}{2}=4,$$

qui sunt 1, 2, 3, 6. Si igitur quis potuerit formula illa posita = 2, eruere quid sit x, haberetur terminus generalis pro serie numerorum primorum; sed isthuc pertingere non spero. Incidi nuper Opera Fermatii legens in aliud quoddam non inelegans theorema, <u>Numerum quemcunque esse summam quatuor quadratorum</u>

seu semper inveniri posse quatuor numeros quadratos, quorum summa aequalis sit numero dato.[7] Ut $7 = 1 + 1 + 1 + 4$; sed tria quadrata nunquam invenientur, quorum summa sit 7. Ad hoc Theorema demonstrandum requiritur, ut generaliter quatuor quadrata inveniantur z^2, y^2, x^2, v^2 quorum summa aequalis sit summae quinque datorum $1 + a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.[8] Alia ibi habentur Theoremata de resolution[e] cujusvis numeri in trigonales, pentagonales, cubos, etc., quorum demonstratio magnum afferret incrementum Analysi. Ut pagina haec impleatur transcribam quadraturam quandam circuli, quam ex prop[ositione] aliqua Gregorii a St. Vincentio elicui, cujusque falsitatem nemo adhuc ostendit. Ea haec est si peripheria sit p et diameter d, erit $\dfrac{p}{d} = \dfrac{3\,(1+A)\sqrt{3}}{2\,(2A-1)}$; est vero $A = \left(\frac{11}{5}\right)^{\frac{\ell\,11\,:\,5}{\ell\,203\,:\,53}}$, ubi $\ell\,11 : 5$ denotat logarithmum fractionis $\frac{11}{5}$ et $\ell\,203 : 53$ logarith[mum] hujus $\frac{203}{53}$. Haec expressio prope ad $\frac{22}{7}$ accedit, et si vera esset, magnum sane esset inventum.[9] Vale et favere perge

Vir Celeberrime

Tui observantissimo Eulero

Petropoli die 4. Junii

1730.

R 719 Sequel to n° 3
Petersburg, June 4th (15th), 1730
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. III, fol. 86r–87r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 21–24; *Euler-Goldbach* (1965), p. 30–32

6
Goldbach to Euler
Moscow, June 15th / 26th, 1730

Vir Clarissime

Etiamsi vera non esset Fermatii propositio, tamen laude digna mihi videtur propterea quod, cum eius demonstrationem investigamus, in alia incidimus theoremata, quorum veritas solidis argumentis evinci potest, quale est illud quod de numero $a^n + b^n$ divisibili per $a + b$, si n fuerit numerus impar, observasti.

Praeterea (1.) Si a, b, n sint numeri integri, et $\neq$ significet aequationem impossibilem, posito[1] $\dfrac{a \pm n}{n^2+1} \neq b$, sequitur $a^2 + 1$ esse numerum primum; id quod demonstrari potest. Sufficit autem pro n seligere numeros qui $n^2 + 1$ faciunt primos, videlicet 2, 4, 6, 10, 14, &c. (sunt enim $2^2 + 1$, $4^2 + 1$, $6^2 + 1$, &c. numeri primi): sic verbi gr[atia] quoniam illico patet numeros $\dfrac{20 \pm 2}{5}$ et $\dfrac{20 \pm 4}{17}$ non esse integros, sequitur numerum $20^2 + 1 = 401$ esse primum.

(2.) Verisimile est divisorem minimum (unitatem et numerum ipsum hic pro divisoribus non habeo) cuiuscunque numeri $a^{2^x}+1$ esse huius formae $n^{2^x}+1$, sed hoc quia non dum satis examinavi affirmare non possum, nisi de unico casu ubi $x=1$, qui facile demonstratur.[2] Ceterum si verum esset quod verisimile dixi ex eo demonstraretur theorema Fermatianum, nam verbi gr[atia] posito $a=2$, n non posset sumi $=1$ (quoniam $n^{2^x}+1$ fieret numerus par atque adeo dividere non posset numerum imparem) neque $n=2$ (quoniam divisor $n^{2^x}+1$ fieret $=$ ipsi dividendo); ergo $2^{2^x}+1$ non haberet ullum divisorem.

Utrum numeri (3^n+2^n) (ubi n significat dignitatem aliquam binarii) primi sint non dixerim;[3] si coniectare libet, fortasse etiam $(2\cdot 3)^{2^n}+1$ sunt numeri primi, fortasse et $(2p)^{2^x}+1$, si p est primus;[4] sed quis unquam affirmavit numeros (2^n-1) esse primos si n sit primus?[5]

Quae de termino generali numerorum primorum inveniendo ex formula numerum divisorum dati cuiusvis numeri exprimente disseris ingeniose meditata agnosco, et si in usum deduci, ut ipse animadvertis, vix possint.

Fermatii et Gregorii a S. Vincentio opera me non legisse doleo. Quod ex Fermatio refers theorema: Numerum quemcunque esse summam quatuor quadratorum, demonstratum videre cupio, facile illinc infertur Numerum quemcunque esse summam tot quadratorum $(3n+1)$, quot numerus pro arbitrio sumtus n continet unitates.[6] Sunt mihi complura eiusmodi theoremata in promtu quorum demonstrationes neque exercitatissimus Mathematicus, nisi forte fortuna, inveniat, et si sua natura facillimae sint; verbi gr[atia] nullum numerum triangularem si ei addatur 4 habere radicem rationalem octavae vel decimae potestatis,[7] seu quod idem est, positis a et n numeris integris fore

$$\frac{n^2+n+8}{2} \neq a^{9\pm 1}.$$

De quadratura circuli per logarithmos numerorum quos in litteris tuis commemoras expressa vehementer dubito et si ad verum prope accedat.[8] Sunt etiam numeri surdi simplices qui parum a vero aberrant, ut si data diametro $=1$ peripheriam dicamus $3+\frac{\sqrt{2}}{10}$, hic numerus ne quidem $\frac{2}{100\,000}$ a vero deficit,[9] ita ut non putem ullam methodum excogitatam esse quae rationem diametri ad peripheriam terminis tam prope veris geometrice definiat quam haec ipsa; quid enim facilius est quam diagonalem quadrati circumscripti dividere in partes decem et unam decimam addere ad triplum diametri? Vale et fave

Tuo

Christiano Goldbach.

D[atum] Moscua $\frac{15}{26}$ Jun. 1730.

R 720 Reply to n° 5
Moscow, June 15th / 26th, 1730
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 8–9r
Copy, 3 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. III, fol. 26r–27r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 25–27; *Euler-Goldbach* (1965), p. 33

7
Euler to Goldbach
Petersburg, June 25th (July 6th), 1730

Vir Celeberrime

Theorematis Fermatiani[1] veritas quotidie mihi magis elucere videtur; sed tamen demonstrationem ejus nondum sum nactus. Sunt mihi autem nonnullae ejus inventae proprietates, quae fortasse ad demonstrationem conficiendam utiles esse possent. Fiat series, cujus terminus generalis est $2^{2^{x-1}}+1$, sequens 3, 5, 17, 257, etc., cujus singuli termini secundum Fermatium sunt numeri primi. Demonstrare autem possum, nullum terminum per quemquam praecedentium dividi posse, et praeterea si quis terminus haberet divisorem, sequentium nullum per eundem dividi posse, sed semper residuum fore 2. Certum igitur ex hoc est, omnes ejus progressionis terminos inter se esse primos, vel duos reperiri non posse, qui communem habeant divisorem.

Quod $aa+1$ sit numerus primus, quoties in[2] $\dfrac{a \pm n}{nn+1}$ nullus numerus inveniri potest, qui pro n substitutus fractionem mutet in numerum integrum, demonstrare etiam possum hoc modo: Investigo casus, quibus $aa+b$ (pono autem $b<2a+1$) fit numerus primus. Fiet hoc si nullos habet divisores; si haberet autem divisores ii esse[nt] hujus formae, $a+m$ et $a-n$; quia igitur $aa+b=(a+m)\,(a-n)$ erit[3] $n=\dfrac{ma-b}{a+m}=m-\dfrac{m^2-b}{a+m}=a-\dfrac{aa-b}{a+m}$. Quoties ergo nullus numerus inveniri potest qui loco m substitutus vel $\dfrac{ma-b}{a+m}$ vel $\dfrac{mm+b}{a+m}$ vel $\dfrac{aa+b}{a+m}$ faciat numerum integrum, toties $aa+b$ non habet divisores, et propterea est numerus primus.

Dicis deinde Vir Celeberrime divisorem minimum ipsius $aa+1$, si quos habet divisores, esse hujus formae $nn+1$.[4] Sed puto unitatem pro divisore minimo haberi oportere; nam hoc nisi esset, theorema verum non esset. Si enim est $a=34$, erit $aa+1=1157$ cujus minimus divisor est 13; si $a=76$ erit $aa+1=5777$ cujus minimus divisor est 53. Quanquam autem hi divisores minimi non quidem unitate excedant quadratum, tamen sunt fortasse omnes summae duorum quadratorum.[5]

An $6^{2^x}+1$ sit numerus primus neque affirmare neque negare possum. De generali formula vero $(2p)^{2^x}+1$ nego etiam si p sit numerus primus:[6] nam si $p=5$, $x=2$, habebitur 10001 qui non est primus sed divisorem habet 73. Neque etiam, quod suspicatus eram, $3^{2^x}+2^{2^x}$ est numerus primus; si enim $x=3$, dividi potest 3^8+2^8 per 17.[7]

Fateor me nullum librum nominare posse, in quo invenerim 2^n-1 esse numerum primum, si n est numerus primus. Tamen bene memini, in inveniendis numeris perfectis hoc theorema vulgo in usum vocari; requiritur enim ad eos inveniendos, ut omnes habeantur casus quibus 2^n-1 est numerus primus.[8]

Theorema, quod quicunque numerus sit summa quatuor quadratorum, demonstrare non possum, neque ipse Fermatius demonstrare se posse affirmat. Tamen rem ad hanc quaestionem reduxi, ut $xx+7$ in quatuor quadrata resolvatur.[9]

Quadraturam Circuli Gregorii a St. Vinc[entio] examinavi eamque ex falso lemmate deductam esse deprehendi. Utique si vera non est, etiam si adhuc centies propius ad verum accederet, tamen prorsus nihili est aestimanda. Sed si vera esset, egregium sine dubio esset inventum. Approximationem Tuam Vir Celeberrime ad rationem peripheriae ad diametrum utilissimam esse in Praxi existimo.[10]

De Theoremate Tuo, quod nullus numerus triangularis 4nario auctus habeat radicem rationalem 8^{vae} vel 10^{mae} dignitatis, cogitans seriem numerorum triangularium investigavi, qui quaternario aucti faciant quadrata[11] atque inveni radices numerorum eorum trigonalium sequentem constituere progressionem: -7, 0, 9, 56, 329, etc., quae hanc habet proprietatem, ut quivis terminus puta n^{mus} aequalis sit $6\,(n-1)^{\text{mo}}-(n-2)^{\text{mo}}+2$. Similem legem habet series numerorum, quorum quadrata sunt numeri trigonales,[12] quae haec est, 0, 1, 6, 35, 204, etc., cujus quivis terminus est septuplum praecedentis demta summa duorum praecedentium. His vestigiis insistens universaliter seriem numerorum integrorum dare possum qui loco x substituti faciunt $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ quadratum; notus autem esse debet unus casus, quo id fit quadratum.

Cum mihi nuper Theorema Fermatianum, quod nullus numerus trigonalis sit biquadratum praeter 1, occurreret,[13] inquirere coepi an $\dfrac{xx+x}{2}$ prorsus non possit esse biquadratum[14] nisi sit $x=1$ vel 0. Posui primo $\dfrac{xx+x}{2}=p^2x^2$ eritque $x=\dfrac{1}{2pp-1}$ et $\sqrt{\dfrac{xx+x}{2}}=\dfrac{p}{2pp-1}$. Ut autem $\dfrac{xx+x}{2}$ fiat biquadratum, debebit $\sqrt{\dfrac{xx+x}{2}}$ denuo esse quadratum; quadratum ergo esse debet $2p^3-p$; ponatur $p=q+1$, habebitur $2q^3+6qq+5q+1$. Radix hujus sumatur $1+\frac{5}{2}q$, erit $2q^3+6qq=\frac{25}{4}q^2$. Ergo $q=\frac{1}{8}$, $p=\frac{9}{8}$ et $x=\frac{32}{49}$. Quamobrem numerus trigonalis cujus radix est $\frac{32}{49}$ erit biquadratum radicis $\frac{6}{7}$. Ex hoc casu jam cognito infiniti alii inveniri possunt.[15] Hoc autem veritatem Theorematis non infirmat cum Fermatius id tantum de numeris integris intelligi velit. Rogatus sum Tibi nomine Cl[arissimi] Bernoullii salutem dicere.[16] Vale et fave

Vir Celeberrime

Tui Observantissimo

Leonhardo Eulero.

Petropoli d. 25 Junii

A. 1730.

R 721 Reply to n° 6
Petersburg, June 25th (July 6th), 1730
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. III, fol. 88r–89v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 28–31; *Euler-Goldbach* (1965), p. 34–35

8
Goldbach to Euler
Moscow, July 20th / 31st, 1730

Vir Clarissime

Jam diu animadverti omnem numerum $2^{2^{x+p}}+1$, ubi x et p sint numeri integri, divisum per $2^{2^x}+1$ relinquere 2, propterea quod $\left(2^{2^x}+1\right)\left(2^{2^x}-1\right)$ est $=\left(2^{2^{x+1}}-1\right)$; rursus $\left(2^{2^{x+1}}-1\right)\left(2^{2^{x+1}}+1\right)=\left(2^{2^{x+2}}-1\right)$ et sic porro, donec perveniatur ad $2^{2^{x+p}}-1$, qui numerus binario minor est quam $2^{2^{x+p}}+1$; ex eo quidem certe sequitur omnes numeros seriei Fermatianae esse inter se primos, ut dicis; at quantulum hoc est ad demonstrandum omnes illos numeros esse <u>absolute</u> primos?

Quod affirmaveram divisorem minimum numeri a^2+1 esse huius formae n^2+1, nullo fundamento niti agnosco, quando quidem exemplo numeri $a=34$ refelli potest; haec erronea hypothesis aliam nihilo meliorem peperit: numerum a^2+1 esse primum si $\dfrac{a\pm n}{n^2+1}$ non possit fieri integer, quae cum facto $a=34$ satis refutetur, non digna erat nova, qua eandem ornasti, demonstratione.[1] Ob hoc ipsum exemplum a te allatum, magis quam antea dubito de veritate theorematis Fermatiani; fieri enim potest ut minimus divisor alicuius numeri $2^{2^x}+1$ sit centum, vel centies mille notarum, quem usque ad finem mundi nemo inveniat.

Haud satis intelligo cur Fermatius affirmarit numerum quemcunque esse summam quatuor quadratorum, nisi methodum aliquam tenuit datum numerum in quatuor quadratos dividendi, quae methodus si proba fuit, ad demonstrationem theorematis satis fuit.

In superioribus litteris meis pro $\frac{2}{100\,000}$ scribendum erat $\frac{2}{10\,000}$ quod velim corrigas.[2] Ceterum de fallacia Lemmatis Gregoriani a Te deprehensa Tibi gratulor; haud dubie is est fons erroris quem et Cartesium vix triduo immoratum Gregoriano volumini notasse scribit Lipstorpius in Specim[inum] Philos[ophiae] Cartes[ianae][3] part[e] 2, p. 87. Sane si facilitatem legis qua progreditur approximatio spectes nihil puto de quadratura circuli elegantius excogitatum esse quam Leibnitii seriem;[4] sin modum quam citissime approximandi requiramus, eum quem secutus est D. Lagnius (in Comment[ariis] Acad[emiae] Paris[inae] A. 1719) reliquis praestantiorem ex admirabili quod protulit specimine iudicare licet;[5] occultavit ille quidem tum temporis artificium quo usus est, neque scio an deinde explicaverit, posteriorum enim annorum commentarios non memini me vidisse; si quid Tibi de eius methodo constat, rogo ut ad me perscribas.

Demonstrationem meam theorematis: nullum numerum trigonalem praeter 1 esse quadrato quadratum communicavi cum Cl[arissimo] Bernoullio nostro litteris Moscua datis, quas si ad manum sunt tibi facile concedet;[6] ex ea demonstratione perspicies non solum nullum numerum n^{2p+2}, sed ne quidem ullum n^2 (praeter 1 et 36) reperiri in trigonalium ordine, tantum abest ut omnes quadrati radicum 0, 1, 6, 35, 204, &c. quarum progressionem in litteris descripsisti, sint trigonales.[7]

Incidi aliquando in solutionem huius problematis: Numero cuicunque integro quantumvis magno a cuius tantum duae postremae notae dantur addere alium numerum integrum b, hac lege ut aggregatum non habeat radicem rationalem ullius potestatis.

Sit verbi gratia numerus 543 664, cuius tantum duas ultimas notas nempe 64 mihi cognitas fingo, reliquis 5436 (vel quibuscunque aliis) occultatis, huic si addatur 2 ita ut fiat 543 666, is numerus nullam habet radicem rationalem. Vereor ne totum problema simplicitate sua vilescat si methodum solvendi et demonstrationem simul addam, quapropter easdem in futuram epistolam differo.[8]

Vale et fave

Tuo

Christiano Goldbach.

D[atum] Moscua $\frac{20}{31}$ Jul. A. 1730.

R 722 Reply to n° 7
Moscow, July 20th / 31st, 1730
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 10–11r
Copy, 3 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. III, fol. 30v–31v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 32–34; *Euler-Goldbach* (1965), p. 37–38

9
Euler to Goldbach
Petersburg, August 10th (21st), 1730

Vir Celeberrime

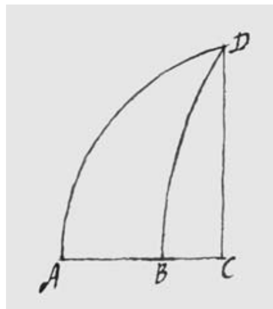
Quantum mihi constat de Theoremate Fermatiano omnem numerum esse summam quatuor quadratorum, ipse Fermatius neque demonstrationem ejus habuisse videtur neque modum generalem numeri cujusque in quatuor quadrata distribuendi; sed id potius videtur tantum observasse, et propterea enunciasse, quia nullum exemplum contrarium ab eo fuit deprehensum.[1] Etiamsi autem haec propositio vera sit, tamen difficillima mihi esse videtur demonstrationis inventio; nullam enim legem observare potui in divisione difficillimorum numerorum hujus formae $nn+7$, atque resolutio in quatuor quadrata semper fortuna tantum succedere videtur, neque ulla prorsus regula contineri. Commentarii Acad[emiae] Paris[inae] ad A. 1719 et sequentes, non adsunt hic in Bibliotheca, et hanc ob rem de methodo

D. Lagnii nihil commemorare possum.[2] Quod autem ad aptam et facilem approximationem ad Aream circuli attinet, memini Majerum nostrum b[eate] d[efunctum] habuisse seriem vehementer convergentem, cujus tres vel quatuor termini tantum sumti darent maximos Ludolphi a Ceulen numeros.[3] Series, quam nuper Tecum communicavi, 0, 1, 6, 35, 204, etc. hanc habet proprietatem, ut cujusvis termini quadratum sit numerus trigonalis,[4] neque haec proprietas ad 0, 1, et 6 tantum pertinet. Nam v. g. quadratum termini 35 est 1225, qui est numerus trigonalis radicis 49. Universaliter vero, cum illius progressionis terminus generalis sit[5] $\dfrac{\left(3+2\sqrt{2}\right)^{n-1}-\left(3-2\sqrt{2}\right)^{n-1}}{4\sqrt{2}}$, hujus quadratum est numerus trigonalis radicis $\dfrac{\left(3+2\sqrt{2}\right)^{n-1}+\left(3-2\sqrt{2}\right)^{n-1}-2}{4}$. Ex ea igitur serie quam dedi inveniuntur innumerabiles numeri integri, qui simul sunt quadrati et trigonales. Fundamentum ejus sequenti generali Theoremate nititur: Si formula az^2+bz+c fit quadratum casu, quo ponitur $z=p$, fiet ea quoque quadratum casu, quo

$$z=\frac{-\,b+b\sqrt{1+a\lambda^2}}{2a}+p\sqrt{1+a\lambda^2}+\lambda\sqrt{ap^2+bp+c};$$

oportet autem pro λ numerum accipere qui $1+a\lambda\lambda$ faciat quadratum. Si igitur unicus innotescit casus quo az^2+bz+c fit quadratum, ex hac forma statim invenientur innumerabiles, idque in integris numeris, si quidem λ ita accipiatur ut $\dfrac{-\,b+b\sqrt{1+a\lambda\lambda}}{2a}$ fiat numerus integer.[6] Omnes autem numeri hoc modo inventi constituunt seriem ex duabus geometricis conflatam. Agitata sunt hujusmodi problemata de numeris integris inveniendis inter Wallisium et Fermatium. Exemplum maxime difficile erat, invenire numeros integros, qui loco x positi efficiant formulam $109xx+1$ quadratum. Pro hujusmodi quaestionibus solvendis excogitavit D. Pell Anglus peculiarem methodum in Wallisii operibus expositam.[7] Eaque ad meum institutum opus habeo, ut $1+a\lambda\lambda$ fiat quadratum. Ea vero methodus tantum ad exempla prorsus numerica patet, neque ejus est usus in formulis arbitrarios coefficientes habentibus resolvendis, cujusmodi est meus casus az^2+bz+c. Conatus sum similem methodum pro formulis, in quibus indeterminata tres habet dimensiones, invenire. Idem vero non aeque ac in quadraticis praestare potui; sed tamen ea sufficit ad omnes numeros integros inveniendos, legem vero qua ii progrediuntur, non praebet. Exempla ad hoc illustrandum sint haec: Invenire numeros pyramidales trigonales integros, qui sint quadrati vel qui sint triangulares plani.[8] Solutionem Tuam Vir Celeberrime Problematis, quod perscripsisti, ad propositum numerum alium addere, ita ut summa non habeat radicem rationalem ullius potestatis,[9] ex hoc principio ductam esse statim animadverti, quod nullus numerus ullius dignitatis per solum binarium dividi possit, vel quod nulla potentia sit numerus impariter par. Ex duabus autem postremis notis cujusque numeri cognoscitur, utrum per 4 dividi possit an secus. Quamobrem si talis numerus adjiciatur, qui efficiat summam per 2 sed non per 4 divisibilem, habetur quod desideratur. Idem adhuc pluribus modis potest effici, vel faciendo ut ultima nota sit 0, penultima non; vel ut duae postremae notae sint 05, 15, 35, 45, 55, 65, 85, 95; hujusmodi enim terminationes nullae habent dignitates. Similiter apparet, qualis numerus ad propositum quantumvis magnum, cujus notarum summa tantum datur, addi debeat, ut quod prodit nulla sit potentia. Nimirum talis debet addi, qui ad summam notarum additus reddat eam per 3, sed non per 9 divisibilem.

Methodum Tuam lunulas quadrabiles inveniendi vidi,[10] eaque mihi magnopere placuit propter summam ejus et facilitatem et brevitatem. Persequutus sum idem problema jam diu prorsus analytice sequenti modo:



Sit semilunula quaecunque ABD, et ex D in AB productam demittatur perpendiculum DC, arcuum AD, BD sinus. Sit $DC = y$, radius arcus $AD = a$, radiusque arcus $BD = b$; erit integratione per logarithmos absoluta,

$$\text{area } ACD = \frac{aa\sqrt{-1}}{2}\,\ell\,\frac{y+\sqrt{yy-aa}}{a\sqrt{-1}} - \frac{y\sqrt{aa-yy}}{2}$$

et

$$\text{area } BCD = \frac{bb\sqrt{-1}}{2}\,\ell\,\frac{y+\sqrt{yy-bb}}{b\sqrt{-1}} - \frac{y\sqrt{bb-yy}}{2}.$$

Ex his erit semilunulae area[11]

$$\begin{aligned} ADB \quad = \quad & \frac{aa\sqrt{-1}}{2}\,\ell\,\frac{y+\sqrt{yy-aa}}{a\sqrt{-1}} - \frac{bb\sqrt{-1}}{2}\,\ell\,\frac{y+\sqrt{yy-bb}}{b\sqrt{-1}} \\ & - \frac{y\sqrt{aa-yy}+y\sqrt{bb-yy}}{2}. \end{aligned}$$

Ergo perspicuum est quoties in hac expressione quantitates logarithmicae evanescunt, toties lunulam esse quadrabilem, erit enim

$$ADB = \frac{y\sqrt{bb-yy} - \; y\sqrt{aa-yy}}{2}.$$

Quamobrem ad lunulas quadrabiles inveniendas oportet ut sit

$$\frac{aa\sqrt{-1}}{2}\ell\,\frac{y+\sqrt{yy-aa}}{a\sqrt{-1}} = \frac{bb\sqrt{-1}}{2}\,\ell\,\frac{y+\sqrt{yy-bb}}{b\sqrt{-1}}$$

vel sumtis numeris[12]

$$\left(\frac{y+\sqrt{yy-aa}}{a\sqrt{-1}}\right)^{aa} = \left(\frac{y+\sqrt{yy-bb}}{b\sqrt{-1}}\right)^{bb}.$$

Ex hac aequatione data relatione inter a et b determinabitur y seu semichorda lunulam quadrabilem subtendens. Quanquam in aequatione inventa insunt quantitates imaginariae, tamen in reductione eae ex calculo abeunt, proditurque pro y valor realis. Solutio haec cum Tua Vir Celeberrime congruit, utraque enim omnes dat casus, qui existunt.[13] Vale et Fave

Vir Celeberrime
Tibi obstrictissimo
Leonhardo Eulero.

Petropoli, d. 10 Aug.
1730

R 723 Reply to n° 8
Petersburg, August 10th (21st), 1730
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. III, fol. 99r–100v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 35–39; *Euler-Goldbach* (1965), p. 39–40

10
Goldbach to Euler
Moscow, (September 28th) October 9th, 1730

Vir Clarissime

Numeros qui dividi possunt in tot quadrata quot a continet unitates animadverti posse etiam dividi in quotcunque plura quam a, hoc est in quadrata $(a+n)$ ubi n denotet numerum integrum affirmativum quemcunque. Si igitur verum est numerum quemcunque dividi posse in quadratos quatuor, theorema generalius enunciari poterit: Numerum quemcunque rationalem dividi posse in quadratos quotcunque plures quam 3.[1] Omnis vero numerus qui neque duorum neque trium quadratorum summa sit, semper dividi posse videtur non solum in quatuor quadratos sed etiam in 1 et tres quadratos,[2] sic verbi gr[atia]

$$7 = 1+1+1+4,\quad 23 = 1+4+9+9,\quad 39 = 1+1+1+36,$$
$$15 = 1+1+4+9,\quad 28 = 1+9+9+9,\quad 47 = 1+1+9+36,\quad \&c.,$$

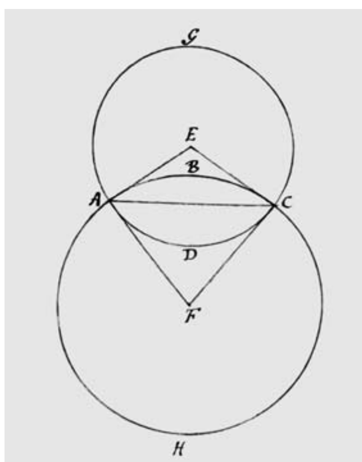
neque ullum exemplum contra adferre poteris; sed huiusmodi theoremata non facile demonstrari cum Fermatio fateor.

Series illa Mayeri quae tribus quatuorve terminis numeros Ludolphinos exhibuit[3] magni momenti videtur, si isti tres quatuorve termini breviore tempore et describi et in summam colligi possunt quam quo tempore opus est ad eosdem numeros methodo Ludolphi determinandos, nisi enim id demonstratur, nihil in eiusmodi serie magnopere admirandum est, cum vel ipsa series Leibnitiana pro lubitu in magis convergentem transmutari possit si v[erbi] gr[atia] millenos quosque terminos eiusdem pro singulis terminis alterius seriei sumamus, sed huius modi compendio, ut dixi, nihil proficimus, quoniam ad duos terminos seriei magis convergentis describendos et addendos tantum temporis requiritur quantum ad colligendam summam bis mille terminorum seriei minus convergentis.

Innumeros esse quadratos trigonales satis ostendisti[4] et hanc ob causam multo magis memorabile est Fermatii effatum: nullum numerum trigonalem praeter 1 esse quadrato quadratum.

Numerum, qui divisus per 9 relinquit 3 vel 6 non habere radicem rationalem, quem ad modum observasti, iam ante plus quam 12 annos ad amicum scripseram; locus ex epistola excerptus in Supplem[ento] Actor[um] Lips[iensium][5] legitur.

Quod mea solutio problematis de quadrandis Lunulis tibi probetur pergratum est, quamquam mihi ipsi displicere coepit postquam non novam, sed a Cl[arissimo] Dan[iele] Bernoullio in Exercitat[ionibus] Math[ematicis] multo ante expositam vidi. Tua solutio mihi in primis arridet quod aequationem ad expressiones definitas reducis quae sane plus habent elegantiae quam series indefinitae. Ceterum quaecunque huius problematis solutiones excogitentur, totum negotium in eo est ut ab expressione quae determinat aream Lunulae removeantur quantitates a circuli quadratura pendentes; igitur iam ante 7 annos cum primum huius problematis mentionem in litteris faceret Nicol[aus] Bernoullius p[ie] m[ortuus] hanc ei solutionem misi:[6]



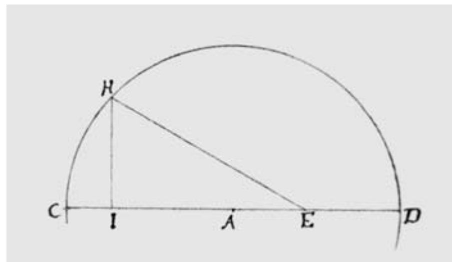
Sint duo circuli sese intersecantes in A et C;

circulus	$AGC = \alpha;$	...	$AHC = \beta;$
pars circuli	$ADCE = \dfrac{\alpha}{p};$	...	$ABCF = \dfrac{\beta}{q};$
triang[ulum]	$AEC = b;$	...	$ACF = c;$

erit segm[entum] $ADC = \frac{\alpha}{p} - b$; ... $ABC = \frac{\beta}{q} - c$;

adeoque Lunula $ABCG = \alpha - \frac{\alpha}{p} + b - \frac{\beta}{q} + c$; et ponendo $\alpha - \frac{\alpha}{p} - \frac{\beta}{q} = 0$ (ut scilicet destruantur quantitates quadraturam circuli involventes) erit eadem Lunula $ABCG = b + c$.

Occasione problematis Kepleriani de semicirculo CHD ex dato puncto E ita dividendo ut trilineum CHE sit ad aream semicirculi in ratione data,[7] in alius problematis solutionem incidi:



(1.) dato radio $AC = 1$,
(2.) ratione diametri ad peripheriam 1 ad p,
(3.) arcus dati ad Sinum rectum, $\frac{p}{n}$ ad e,
(4.) areae trilinei CHE ad aream semicirc[uli] CHD, 1 ad n,

determinare distantiam puncti E a centro A seu lineam $AE = c$ infinitis modis ita ut sinus HI exprimatur per quantitates p, n, c; postulatur autem solutio quae determinet lineas AE et HI non per series sed per expressiones definitas.[8]

Solutio: Sit m numerus arbitrarius,

$$AE = c = \frac{2p\,(1-m)\sqrt{-1}}{n\left[\left(\sqrt{1-e^2}+e\sqrt{-1}\right)^m - \left(\sqrt{1-e^2}-e\sqrt{-1}\right)^m\right]},$$

erit $HI = \frac{p\,(1-m)}{nc}$.

D[atum] 9. Oct. 1730. Moscua

Tui observantissimus
Chr. Goldbach.

R 724 Reply to n° 9
Moscow, (September 28th) October 9th, 1730
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 12r–13r
Partial copy, 3 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. III, fol. 33v–34v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 40–43; *Euler-Goldbach* (1965), p. 41–43

11
Euler to Goldbach
Petersburg; October 17th (28th), 1730

Vir Celeberrime

Quod omnis numerus, qui in tot quadrata, quot a continet unitates, dividi potest, etiam in plura possit dividi;[1] ex eo facile intelligitur, quod quadratus numerus quicunque in duos pluresve quadratos possit distribui. Hoc ergo modo numerus quadratorum, qui junctim sumti numerum datum efficiunt, quousque libuerit potest augeri; non vero diminui. Observavi atque demonstrare possum, nullum numerum hac forma contentum, $mm\,(4x+3)$ in duo dividi posse quadrata; neque ullum hujus formae $mm\,(8x+7)$ esse summam trium quadratorum.[2] An vero omnes reliqui in tria pauciorave dividi possint non dixerim; neque an omnes numeri in ea formula contenti in quatuor quadrata possint dividi. Saltem nullum exemplum deprehendere potui. Attamen si verum est aliud Theorema ejusdem Fermatii, omnem numerum esse summam trium numerorum trigonalium,[3] et hoc inde sequitur omnem numerum $mm\,(8x+7)$ esse summam quatuor quadratorum.[4] Vi enim illius Theorematis omnes numeri comprehenduntur in ista formula $\dfrac{aa+a}{2}+\dfrac{bb+b}{2}+\dfrac{cc+c}{2}$. Propterea hujus octuplum $4aa+4a+4bb+4b+4cc+4c$ complectitur omnia multipla octonarii seu omnes numeros hujus formae $8x$. Consequenter haec formula $(2a+1)^2+(2b+1)^2+(2c+1)^2$ continet omnes numeros hujus formae $8x+3$. Quocirca omnes numeri $8x+3$ sunt summa[e] trium quadratorum. Hanc ob rem omnes numeri formae $8x+4$ vel hujus $8x+7$ sunt in 4 quadrata resolubiles. Porroque et hi $mm\,(8x+4)$ atque $mm\,(8x+7)$. Formula $mm\,(8x+4)$ aequivalet huic $mm\,(2x+1)$. Ex hac formula excluduntur omnes numeri impariter pares iique soli; i.e. numeri formae istius $4x+2$. Etiam si ergo verum esset Fermatii Theorema de numeris trigonalibus; tamen ad veritatem nostri ostendendam necesse insuper est demonstrare omnes numeros $4x+2$ in quatuor quadrata esse resolubiles. Quod attinet ad observationem, omnem numerum in quatuor saltem quadrata divisibilem dividi posse in unitatem et tria quadrata,[5] sive quod eodem redit, si a tali numero unitas auferatur, residuum semper in tria quadrata distribui posse: Haec proprietas utique in omnibus numeris centenario minoribus locum habet, sed numerorum majorum innumerabilia exempla in contrarium afferre possum, cujusmodi est 112, qui numerus, quanquam in pauciora quam 4 quadrata dividi nequit, tamen effici non potest, ut unitas in illis quatuor quadratis reperiatur. Nam 111 nunquam in tria quadrata dividetur. Eandem proprietatem habent omnes numeri hac forma contenti $16nn(8x+7)$, neque enim hi neque unitate mulctati in tria vel pauciora quadrata possunt dividi. Numeris autem $16nn(8x+7)$ in quatuor quadrata dividendis non solum effici non potest, ut unitas sed neque ut hujus formae $(2m+1)^2\,\dfrac{nn}{dd}$ quadratum locum in illis quatuor quadratis expleat; denotat hic d numerum dividentem n. De altera quaestione, quomodo quam facillime maximi numeri Ludolphi a Ceulen quadraturam circuli dantes inveniri queant, scribam quae ipse meditatus sum, cum manuscripta Majeri amplius inspicere non liceat.[6] Sit diameter circuli $= b$, chorda quaecunque $= x$ et arcus respondens $= s$, erit

$$s = x + \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3 \cdot b^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot b^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot b^6} + \text{etc.}$$

Haec series[7] eo magis convergit, quo minor accipitur x. Sed ut ratio peripheriae ad radium inde possit inveniri, oportet ut s cum tota peripheria et x cum diametro sit commensurabilis. Ad hoc minor chorda rationalis non adhuc est inventa, quam ea arcus 60 graduum quae est $= \frac{1}{2}b$. Cum autem hoc casu series nequaquam satis convergat,[8] in id cogitandum est, quomodo expressio finita inveniatur ei quam proxime aequalis. Prope accedit haec $s = \dfrac{60bbx - 17x^3}{60bb - 27xx}$, propius etiam haec $s = x + \dfrac{840bbx^3 - 122x^5}{120bb\,(42bb - 25xx)}$ nec non $s = x + \dfrac{x^3}{6bb}\left(\dfrac{420bb}{420bb - 311xx}\right)^{\frac{189}{311}}$. Sed hae omnes nisi x minor quam $\frac{1}{2}b$ accipi potest, non vehementer admodum ad verum accedunt;[9] propterea maxime consultum erit, minorum peripheriae partium chordas, etsi irrationales assumere.[10] Habeo praeterea aliam formulam, qua peripheriam circuli determinare possum. Si diameter ponatur $= 1$ erit

$$\text{peripheria} = \frac{16 \cdot 36 \cdot 64 \cdot 100 \cdots 4nn}{9 \cdot 25 \cdot 49 \cdot 81 \cdots (2n-1)^2} \cdot \frac{8n+2}{2nn+n}$$

vel accuratius,

$$\text{periph[eria]} = 4\,(1+n)\,\frac{4 \cdot 16 \cdot 36 \cdots 4nn}{9 \cdot 25 \cdot 49 \cdots (2n+1)^2}\sqrt{\frac{2n+2}{2n+3}}$$

quae posterior expressio semper est justo major; hic quo major accipitur n eo vero propior prodibit peripheria.[11] Vidi Clarissimum Bernoullium nostrum in Litteris ad Te Vir Celeberrime datis mentionem fecisse Theorematis cujusdam mei hanc formulam $\dfrac{a\,dx}{\sqrt[m]{b + cx^m}}$ semper posse in rationalem transmutari et propterea integrari.[12] Significavit is mihi, Te eam Formulam multis modis universaliorem reddidisse. Celeberrimus Bernoullius Pater quoque simile effecit; non solum enim eam sed hanc $\dfrac{a\,dx}{\sqrt[m]{ax^m + bx^n}}$ ad rationalitatem reduxit. Haec videns cogitare coepi, an non omnes plane formulae hoc modo integrari possint, admissis saltem logarithmis; nam quia $\dfrac{dx}{x}$ in $x^m dx$ continetur, quae beneficio logarithmorum integrari possunt, ea pro absolute integrabilibus haberi debent.[13] Nullo autem modo hanc formam $\dfrac{aa\,dx}{\sqrt{a^4 - x^4}}$, quae exprimit elementum curvae elasticae rectangulae, integrare potui neque ellipsin rectificare, etiamsi logarithmi admittantur.[14] Nescio autem, an in nulla Tuarum formularum et hae comprehendantur. Vale et Fave

Vir Celeberrime
Tibi obstrictissimo
L Eulero

Petropoli d. 17 Octobr.
A. 1730

R 725 Reply to n° 10
Petersburg, October 17th (28th), 1730
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. III, fol. 111r–112r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 44–47; *Euler-Goldbach* (1965), p. 43–45

12
Goldbach to Euler
Moscow, (October 26th) November 6th, 1730

Vir Clarissime

In ultima epistola tua miror diligentiam quam ad indaganda numerorum mysteria adhibes. Revidi quae ad Cl[arissimum] Bernoullium de formula differentiali cuius mentionem facis[1] scripseram atque illico animadverti casus illos rationales multo brevius quam putaram expediri posse. Praemonendum autem duco formulam

$$A \qquad \ldots \qquad \frac{dx}{(x^m + x^n)^{\frac{1}{m}}}$$

nihilo generaliorem esse formula

$$B \qquad \ldots \qquad \frac{dv}{(v^m + 1)^{\frac{1}{m}}}$$

cum per solam substitutionem $x = v^{\frac{m}{m-n}}$ ex A producatur B, quod etiam agnovit Cl[arissimus] Daniel Bernoullius.[2] Considerabo iam differentialem huius formae

$$C \qquad \ldots \qquad \left(1 + x^{\frac{1}{n}}\right)^p dx$$

(ubi p sit numerus rationalis non integer) quam dico rationalem fieri si n sit numerus integer quicunque; ponatur enim $x = (z-1)^n$, mutabitur C in

$$D \qquad \ldots \qquad n\,(z-1)^{n-1}\, z^p dz,$$

quam apparet fieri rationalem si n sit numerus quicunque integer; si vero ponatur $z = v\,(v-1)^{-1}$, migrabit D in

$$E \qquad \ldots \qquad -\,n\,(v-1)^{-n-p-1}\, v^p dv,$$

quae ad terminos rationales redigi potest, si $-n-p$ sit numerus integer quicunque. Memorabilis haec est convenientia casuum integrabilium et rationabilium (ut sic loquar); illi enim numerum n vel $-n-p$ integrum affirmativum, hi saltem integrum postulant.[3]

Vale. D[atum] Moscua 6. Nov. 1730.

Tui studiosissimus
Christianus Goldbach.

R 726 Reply to nº 11
Moscow, (October 26th) November 6th, 1730
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 14r
Copy, 1 p. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. III, fol. 35v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 48–49; *Euler-Goldbach* (1965), p. 47

13
Euler to Goldbach
Petersburg, November 9th (20th), 1730

Vir Celeberrime

Omnis formula differentialis rationalis hanc habet proprietatem ut ejus integratio reduci possit ad integrationem hujus $x^m dx$. Quamobrem si $x^m dx$ pro absolute integrabili habemus, enunciare possumus, omnes formulas rationales esse integrabiles. Cum autem si $m = -1$ integrale ipsius $x^{-1}dx$ sit $\ell\, x$, cujusmodi expressiones in algebraïcis non habemus; si eas tantum formulas integrabiles esse censeamus, quae dant integralia algebraica, oportet superiorem propositionem quodammodo restringi, hocque modo enunciari, ut omnes formulae differentiales, quae in rationales transmutari possunt, integrabiles esse dicantur iis exceptis, quae a logarithmis pendent. Atque ex hoc ortum suum habet magna ea convenientia casuum integrabilium et rationalium, quam in postremis Litteris annotasti. Nescio autem cur eas formulas, quae a logarithmis pendent, non pro integrabilibus habere velimus. Haec ratio sane non sufficit, quod aeque difficile sit dicere quid sit $\ell\, x$ atque $\int dx : x$. Similis mihi videtur differentia, quae est inter $\int 2x\, dx$ et x^2. Deinde demonstratum est quantitatibus logarithmicis aequales algebraicas dari non posse;[1] et propterea ad quasque quantitates exprimendas logarithmi aeque sunt necessarii, atque algebraicae quantitates; et si formulam integrando ad logarithmos perduxerimus aeque contenti esse debemus, ac si ad algebraicas esset reducta. Admissis igitur logarithmis tanquam quantitatibus in $\int x^m dx$ contentis, omnes formulae differentiales rationales sunt integrabiles, omnesque irrationales, quae in rationales transmutari possunt. Maximam ergo habet utilitatem cura et studium, quod ponitur in reducendis formulis irrationalibus ad rationales. Ex eo autem, quod omnes formulae rationales ad $x^m dx$ possunt reduci, forte suspicari licet, omnes prorsus formulas differentiales eo reduci posse, vel omnes prorsus formulas irrationales in rationales transmutari posse. Magnam hujus desiderati inveniendi haberem spem, si quis hanc tantum expressionem $\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ ad rationalitatem reducere doceret. Formula Tua Vir Celeberrime $\left(1+x^{\frac{1}{n}}\right)^p dx$, quae rationalis redditur, si vel n vel $n+p$ fuerit numerus integer, latissime patet; deprehendi enim complures formulas, quas non putassem, ut $\dfrac{dx}{\sqrt[m]{1+x^m}}$ et $\dfrac{dx}{\sqrt[m]{x^n+x^{m+n}}}$ in ea comprehendi. Aequivaletque Tuum hoc Theorema sequenti meo, quanquam universalius videtur: $\dfrac{dz}{\sqrt[m]{z^p+z^q}}$ ad rationali[ta]tem reduci potest, quoties vel $\dfrac{p-m}{m\,(p-q)}$ vel $\dfrac{q-m}{m\,(q-p)}$ est numerus rationalis.[2] Ad integrandas autem quascunque formulas rationales Theorema sequens inveni:[3]

$$\begin{aligned}
&\int \frac{dx\ (a-x)\,(b-x)\,(c-x)\,(d-x)\ \text{etc.}}{(\alpha+x)\,(\beta+x)\,(\gamma+x)\,(\delta+x)\ \text{etc.}}\\
&= \frac{(\alpha+a)\,(\alpha+b)\,(\alpha+c)\ \text{etc.}}{(\beta-\alpha)\,(\gamma-\alpha)\,(\delta-\alpha)\ \text{etc.}}\,\ell\,\frac{x+\alpha}{\alpha}+\frac{(\beta+a)\,(\beta+b)\,(\beta+c)\ \text{etc.}}{(\alpha-\beta)\,(\gamma-\beta)\,(\delta-\beta)\ \text{etc.}}\,\ell\,\frac{x+\beta}{\beta}\\
&\quad+\frac{(\gamma+a)\,(\gamma+b)\,(\gamma+c)\ \text{etc.}}{(\alpha-\gamma)\,(\beta-\gamma)\,(\delta-\gamma)\ \text{etc.}}\,\ell\,\frac{x+\gamma}{\gamma}+\ \text{etc.}\ \pm Ax\mp\frac{Bx^2}{2}\pm\frac{Cx^3}{3}\mp\ \text{etc.}
\end{aligned}$$

Horum posteriorum terminorum algebraicorum nullus adest, si (posito numero factorum numeratoris, $a-x$, $b-x$, $c-x$ etc., m, et numero factorum denominatoris n) $n=m$ vel $m<n$. Primus tantum Ax locum habet si $m=n+1$. Duo vero Ax et $\dfrac{Bx^2}{2}$ sunt adjiciendi si $m=n+2$. Tres si $m=n+3$ et ita porro. Signorum ambiguorum sumentur superiora si n est numerus par, at inferiora si n est numerus impar. Literae vero majusculae, quae valent si $m>n$ sequentes habent valores: A significat summam omnium factorum quae constant ex tot literis literarum α, β, γ, δ etc. et a, b, c, d etc. quot $m-n$ continet unitates; B significat summam omnium factorum tot habentium factores ex iis literis desumtos quot $m-n-1$ continet unitates; C summam omnium factorum, quae habent $m-n-2$ factores etc. Excluduntur autem omnia ea facta in quibus quaepiam latina litera plures quam unam habet dimensiones. Complectitur autem haec generalis formula integrata omnes formulas differentiales rationales. Numerus enim factorum tam in numeratore quam denominatore est arbitrarius. Quod autem in omnibus factoribus x unius tantum sit dimensionis, id universalitati non nocet, omnes enim formulae algebraicae, in quibus x plures habet dimensiones, sunt divisibiles, in hujusmodi factores simplices. Denique facile perspicitur id universalitati non obesse, quod x alios coefficientes nisi $+1$ et -1 non habeat.

Vale Vir Celeberrime et Fave
Tui observantissimo
Leonhard Euler

Petropoli, d. 9. Novemb.
A. 1730

R 727 Reply to nº 12
Petersburg, November 9th (20th), 1730
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. III, fol. 113r–114r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 50–53; *Euler-Goldbach* (1965), p. 47–49

14
Goldbach to Euler
Moscow, November 18th / 29th, 1731

Vir Clarissime

Jam in litteris Cal[endis] Jun. 1730 ad Cl[arissimum] Bernoullium datis[1] monueram formulas

$$A \ldots \frac{dx}{(x^a+1)^{\frac{1}{n}}}, \qquad B \ldots \frac{u^b du}{(u^c+1)^{\frac{1}{n}}}, \qquad C \ldots \frac{dv}{(v^e+v^f)^{\frac{1}{n}}}$$

pro iisdem haberi posse et propterea me uti velle formula A, in qua duae tantum exponentes arbitrariae insunt, cum in binis reliquis formulis tres exponentes reperiantur.

In formula tua quam pro $\int dx \, \frac{(a-x)\,(b-x)\ \&c.}{(\alpha+x)\,(\beta+x)\ \&c.}$ adsignas non video quid fiat denominatore $=0$ in expressione $\frac{(\alpha+a)\,(\alpha+b)}{(\beta-\alpha)\,(\gamma-\alpha)}$&c. si $\beta=\alpha$ vel $\gamma=\alpha$ &c.[2]

Quod attinet ad $\int \left(1-x^{\frac{1}{n}}\right)^p dx$, non facile puto inventum iri integralem praeter casus quos iam in praecedente epistola mea expressi, si scilicet per casus integrabiles eos tantum intelligamus qui vulgo dici solent, quodsi vero magis ad naturam rei quam ad usum qui inter Mathematicos obtinuit respiciamus, apparebit sane eodem jure quo huius differentialis $(1-x)^{\frac{1}{2}}\,dx$ integralis genuina statuitur $\frac{-2}{3}\,(1-x)^{\frac{3}{2}}$ posse etiam $\left(1-x^{\frac{1}{n}}\right)^p dx$ quovis alio casu integrari; nam cum $\int \left(1-x^{\frac{1}{n}}\right)^p dx$ ut notum est resolvi possit in[3]

$$A \ldots \left(x+\frac{p+n+1}{n+1}Ax^{\frac{n+1}{n}}+\frac{p+n+2}{n+2}Bx^{\frac{n+2}{n}}+\&c.\right)\left(1-x^{\frac{1}{n}}\right)^{p+1}$$

vel in

$$B \ldots \left(\frac{-n}{p+1}x^{\frac{n-1}{n}}+\frac{n-1}{p+n-1}Ax^{\frac{n-2}{n}}+\frac{n-2}{p+n-2}Bx^{\frac{n-3}{n}}+\ \&c.\right)\left(1-x^{\frac{1}{n}}\right)^{p+1}$$

vel in

$$C \ldots x - \frac{pn}{n+1} x^{\frac{n+1}{n}} + \frac{p \cdot p-1 \cdot n}{2 \cdot n+2} x^{\frac{n+2}{n}} - \frac{p \cdot p-1 \cdot p-2 \cdot n}{2 \cdot 3 \cdot n+3} x^{\frac{n+3}{n}} + \;\&\text{c.},$$

ad inveniendam integralem nihil aliud requiritur quam ut determinetur formula generalis summarum huius seriei

$$\frac{-n}{p+1} x^{n-1} + \frac{n-1}{p+n-1} A x^{\frac{n-2}{n}} + \;\&\text{c.}$$

per expressionem quae finita maneat posito pro n numero quocunque non-integro; qua ratione autem huius modi formula designari possit in dissertatione mea[4] dixi; sola differentia quae inter integrales has novas et alias iam cognitas irrationales (verbi gr. $(1-x)^{\frac{3}{2}}$) intercedit haec est quod illae a Mathematicis non dum receptae, hae longo usu iam confirmatae sunt.

Ceterum aequatio $\left(1 - x^{\frac{1}{n}}\right)^p dx = dy$ facile reducitur ad hanc

$$dz = (p+1)\; z\, dv + n\; (1-z)\; v^{-1} dv$$

in qua exponentes prioris n et p coëfficientium locum tenent.[5]

Vale mihique fave
Tibi addictissimo
Christiano Goldbacho.

Moscua $\frac{18}{29}$ Nov. 1731.

R 728 Reply to n° 13 (after a year's silence)
Moscow, November 18th / 29th, 1731
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 15rv
Copy, 2 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. III, fol. 38rv
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 54–55; *Euler-Goldbach* (1965), p. 49–50

15
Euler to Goldbach
Petersburg, November 25th (December 6th), 1731

Vir Celeberrime

In integrali hujus formulae $dx\dfrac{(a-x)\,(b-x)\,(c-x)\ \text{etc.}}{(\alpha+x)\,(\beta+x)\,(\gamma+x)\ \text{etc.}}$ utique difficulter apparet, quid fiat, si litterarum α, β, γ etc. aliquot fuerint aequales.[1] Denominatores in aliquot integralis mei terminis tum evanescunt, et propterea ipsum integrale infinitum fieri videtur. Verum si ad signa terminorum istorum attendimus, videbuntur ii se potius destruere, atque in nihilum abire. Horum autem neutrum recte se habet: nam termini illi in infinitum crescentes junctim sumti dabunt valorem determinatum finitum, quem sequenti modo investigo. Sit $\beta=\alpha$, erit difficultas in duobus integralis terminis istis

$$\frac{(\alpha+a)\,(\alpha+b)\,(\alpha+c)\ \text{etc.}}{(\beta-\alpha)\,(\gamma-\alpha)\,(\delta-\alpha)\ \text{etc.}}\,\ell\,\frac{x+\alpha}{\alpha}+\frac{(\beta+a)\,(\beta+b)\,(\beta+c)\ \text{etc.}}{(\alpha-\beta)\,(\gamma-\beta)\,(\delta-\beta)\ \text{etc.}}\,\ell\,\frac{x+\beta}{\beta}$$

posita. Ad eorum verum valorem inveniendum pono $\beta=\alpha+d\alpha$; $d\alpha$ vero denotat quantitatem infinite parvam, tantumdem ergo est ac si posuissem $\beta=\alpha$. Brevitatis gratia scribo P loco $\dfrac{(\alpha+a)\,(\alpha+b)\,(\alpha+c)\ \text{etc.}}{(\gamma-\alpha)\,(\delta-\alpha)\ \text{etc.}}$. Sumo deinde hujus fractionis differentiale posito tantum α variabili, sit illud $Q\,d\alpha$. Manifestum est fore $\dfrac{(\beta+a)\,(\beta+b)\,(\beta+c)\ \text{etc.}}{(\gamma-\beta)\,(\delta-\beta)\ \text{etc.}}=P+Q\,d\alpha$. Est vero etiam $\beta-\alpha=d\alpha$ et $\alpha-\beta=-\,d\alpha$, et

$$\ell\,\frac{x+\beta}{\beta}=\ell\,\frac{x+\alpha+d\alpha}{\alpha+d\alpha}=\ell\,\frac{x+\alpha}{\alpha}-\frac{x\,d\alpha}{\alpha\,(\alpha+x)}.$$

His substitutis duo illi termini abibunt in

$$\frac{P}{d\alpha}\,\ell\,\frac{x+\alpha}{\alpha}-\frac{P}{d\alpha}\ell\,\frac{x+\alpha}{\alpha}+\frac{Px}{\alpha\,(\alpha+x)}-Q\,\ell\,\frac{x+\alpha}{\alpha}+\frac{Qx\,d\alpha}{\alpha\,(\alpha+x)}.$$

Horum duo priores termini sese tollunt et postremus prae reliquis evanescit, ita ut pro valore duorum terminorum quaesito habeamus $\dfrac{Px}{\alpha\,(\alpha+x)}-Q\,\ell\,\dfrac{x+\alpha}{\alpha}$ qui in integrali eorum loco substitui debet. Est vero ut posui

$$P=\frac{(\alpha+a)\,(\alpha+b)\,(\alpha+c)\ \text{etc.}}{(\gamma-\alpha)\,(\delta-\alpha)\ \text{etc.}},$$

atque ex hoc erit

$$\begin{aligned}Q\quad=\quad&\frac{(\alpha+a)\,(\alpha+b)\,(\alpha+c)\ \text{etc.}}{(\gamma-\alpha)\,(\delta-\alpha)\ \text{etc.}}\\&\left(\frac{1}{\alpha+a}+\frac{1}{\alpha+b}+\frac{1}{\alpha+c}+\text{etc.}+\frac{1}{\gamma-\alpha}+\frac{1}{\delta-\alpha}+\text{etc.}\right).\end{aligned}$$

Notandum hic est in casu $\beta=\alpha$ non totam quantitatem esse transcendentalem, sed partem ejus esse algebraicam, cum tamen universaliter ambo termini sint transcendentes. Si jam ulterius fuerit $\gamma=\alpha$ eodem modo terminorum infinitorum valor ponendo $\gamma=\alpha+d\alpha$ determinabitur.

De formula $\int\left(1-x^{\frac{1}{n}}\right)^p dx$ non dubito, quin omnes integrabilitatis casus a Te Vir Celeb[errime] sint eruti. Sed de reductione aequationis $\left(1-x^{\frac{1}{n}}\right)^p dx=dy$ ad hanc $dz=(p+1)\ z\,dv+n\,(1-z)\ dv:v$ dubium habeo,[2] cum posterior aequatio nunquam sit absolute integrabilis, si quidem adjectionem constantis non negligamus. Sumamus casum simplicissimum, quo $p = 1$ et $n = 1$, erit

$$dz - 2z\,dv + \frac{z\,dv}{v} = \frac{dv}{v}.$$

Multiplicetur haec[3] per $\mathrm{e}^{\ell v - 2v}$ seu quod idem est per $\mathrm{e}^{-2v}v$ (e denotat hic numerum[4] cujus logarithmus hyperbolicus est $= 1$), prodibit

$$\mathrm{e}^{-2v}v\,dz - 2\mathrm{e}^{-2v}zv\,dv + \mathrm{e}^{-2v}z\,dv = \mathrm{e}^{-2v}dv,$$

quae integrata dat $\mathrm{e}^{-2v}vz = \text{Const.} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2v}$ seu $2vz + 1 = a\mathrm{e}^{2v}$, quae algebraica non est nisi sit $a = 0$, et propterea ea ad hanc $x - \frac{1}{2}xx = y + b$ substitutionibus algebraicis reduci non potest. Similis est ratio formulae generalis, haec enim nullo casu est integrabilis ad aequationem algebraicam nisi constans addenda ponatur $= 0$.

Casus nuper formulae riccatianae separabiles considerans[5] sequentem universalem detexi substitutionem, qua aequatio $a\,dq = q^2dp - dp$ ad hanc formam $a\,dy = y^2dx - x^{\frac{-4n}{2n+1}}dx$ reduci potest. Ponatur $p = (2n+1)\,x^{\frac{1}{2n+1}}$ atque

$$q = -\frac{a}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{-3a}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{-5a}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{-7a}{p} + \cfrac{1}{\text{etc. etc. etc.}\ \cfrac{1}{\cfrac{-(2n-1)\,a}{p} + \cfrac{1}{x^{\frac{2n}{2n+1}}y}}}}}}.$$

Haec tantum valet substitutio si n est numerus affirmativus integer, peculiarem habeo si est negativus. Quoties in hac n est numerus integer affirmativus, toties haec fractionum series abrumpitur, et quid pro q substitui debet, facile determinatur. Reciproce etiam aequationem $a\,dy = y^2dx - x^{\frac{-4n}{2n+1}}dx$ in hanc $a\,dq = q^2dp - dp$ transformo hac substitutione $x = \left(\frac{p}{2n+1}\right)^{2n+1}$ et

$$y \quad (p : 2n+1)^{2n} = \cfrac{1}{\cfrac{(2n-1)\,a}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{(2n-3)\,a}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{(2n-5)\,a}{p} + \cfrac{1}{\text{etc. etc.}\ \cfrac{3a}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{a}{p} + q}}}}}.$$

Facile hic cognoscitur si valores harum continuarum fractionum inveniri possent si n denotat numeros fractos, tum formulam $a\,dy = y^2dx - x^m dx$ universaliter posse construi. Interpolatio vero ista nititur inventione termini generalis pro serie hujus proprietatis, si terminus $x$mus fuerit A, ejus sequens B, debet terminus

$(x+2)$mus[6] esse $= (2m+1)\,B + A$ vel in numeris hujus seriei, 1, 1, 4, 21, 151, 1380, etc.

Perpendi ulterius etiam formulam 2^n-1, quae non potest esse numerus primus nisi sit n numerus primus, et eos investigavi casus quibus 2^n-1 non est numerus primus, quamvis fuerit n talis. Exceptiones istae sunt $n=11$, $n=23$, $n=83$, reliqui numeri primi omnes centenario minores loco n positi reddunt 2^n-1 primum.[7] Potest vero $2^{11}-1$ dividi per 23, $2^{23}-1$ per 47, et $2^{83}-1$ per 167: Ratio hujus fundata est hoc theoremate non ineleganti: 2^n-1 semper potest dividi per $n+1$ si quidem $n+1$ fuerit numerus primus.[8] Sic $2^{22}-1$ dividi potest per 23. Saepe etiam $2^{\frac{n}{2}}-1$, nec non $2^{\frac{n}{4}}-1$ etc. per $n+1$ dividi possunt, et ex hoc investigatio casuum quibus 2^n-1 est numerus primus, non est difficilis.[9]

Vale atque fave
Vir Celeberrime
Tibi obstrictissimo
Leonhardo Eulero

Petropoli, 1731
d. 25 Nov.

R 729 Reply to n° 14
Berlin, November 25th (December 6th), 1731
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. III, fol. 126r–127v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 56–60; *Euler-Goldbach* (1965), p. 50–53

16
Goldbach to Euler
December 6th / 17th, 1731

Vir Celeberrime

Ante omnia mihi emendanda est aequatio in superioribus litteris meis male descripta;[1] scribendum enim erat, in quocunque casu numerorum p et n aequatio $(A.)$ $(1-v)\,v\,dz = (n+p+1)\,zv\,dv + n\,(1-z)\,dv$ est integrabilis, eodem casu aequationem $(B.)$ $(1-x^{\frac{1}{n}})^p dx = dy$ esse integrabilem, id quod instituto examine deprehendes.

Altera aequatio $(C.)$ $x^{\frac{\mp 4n}{\pm 2n+1}}dx - y^2dx = dy$ simili modo transmutatur in $(D.)$ $dz - v^2dz \pm 2nvz^{-1}dz = dv$; quo modo vero separatio variabilium in aequatione $(C.)$ vel $(D.)$ pendeat a termino generali seriei cuius lex progressionis est $A + (2m+1)\,B = C$, non video.[2] De reliquis in posterum.

Vale. D[atum] Moscua $\dfrac{6}{17}$ Dec. 1731.

Tui observantissimus
Christianus Goldbach.

R 730 Supplement to n° 14
Moscow, December 6th / 17th, 1731
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 16r
Copy, 1 p. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. III, fol. 39r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 61; *Euler-Goldbach* (1965), p. 54

17
Euler to Goldbach
[Petersburg], January 3rd (14th), 1732

Vir Celeberrime

Omnis aequatio ex tribus constans terminis facile reducitur ad hanc formam

$$x^m dx + ay^n dx + b\,dy = 0,$$

quae ista substitutione

$$x = v^{\frac{1}{mn+n-m}} z^{\frac{n-1}{mn+n-m}} \qquad \text{et} \qquad y = v^{\frac{m+1}{mn+n-m}} z^{\frac{-1}{mn+n-m}}$$

transformatur in sequentem ordinis secundi aequationem

$$z^2 dv + (n-1)\,vz\,dz + avz\,dv + a\,(n-1)\,v^2 dz + b\,(m+1)\,z\,dv - bv\,dz = 0.$$

Si fuerit $n = 2$ habetur forma Riccatii $x^m dx + ay^2 dx + b\,dy = 0$, cui ista aequatio ordinis secundi respondet

$$z^2 dv + vz\,dz + avz\,dv + av^2 dz + b\,(m+1)\,z\,dv - bv\,dz = 0,$$

pro qua mihi difficilior videtur casuum separabilium investigatio, quam pro ipsa $x^m dx + ay^2 dx + b\,dy = 0$. Sit $n = 1$, erit aequatio in quam haec $x^m dx + ay\,dx + b\,dy = 0$ transformatur ista

$$z^2 dv + avz\,dv + b\,(m+1)\,z\,dv - bv\,dz = 0$$

in qua litera z unicam dimensionem habere censenda est.[1]

Quod aequationis $a\,dy = y^2 dx - x^{\frac{-4n}{2n+1}}\,dx$ ad hanc $a\,dq = q^2 dp - dp$ reductio universalis n denotante numerum quemcunque[2] pendeat ab inventione termini generalis hujus seriei $\overset{m}{A}$, $\overset{m+1}{B}$, $(2m+1)\overset{m+2}{B} + A$, sic ostendo. Reductio illa perficitur hac substitutione

$$x = \left(\frac{p}{2n+1}\right)^{2n+1}$$

et

$$y \quad \left(\frac{p}{2n+1}\right)^{2n} = \cfrac{1}{\cfrac{(2n-1)a}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{(2n-3)a}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{(2n-5)a}{p} + \cfrac{1}{\text{etc. usque ad } \cfrac{1}{\cfrac{1a}{p} + q}}}}}.$$

Formula ista continuarum fractionum dat si $n = 1$ hunc valorem $\dfrac{1}{\dfrac{a}{p} + q}$ vel $\dfrac{1}{r+q}$ posito $r = \dfrac{a}{p}$. Si $n = 2$ prodit $\dfrac{1}{3r + \dfrac{1}{r+q}} = \dfrac{r+q}{3r^2 + 3rq + 1}$. Si $n = 3$ fit

$$\cfrac{1}{5r + \cfrac{1}{3r + \cfrac{1}{r+q}}} = \cfrac{1}{5r + \cfrac{r+q}{3r^2+3rq+1}} = \frac{3r^2+3rq+1}{15r^3+15r^2q+6r+q}.$$

Ponatur brevitatis gratia $r + q = s$ seu $q = s - r$, et valores inventi formulae datae respondentes litterae n collocentur in seriem, prodibit

$$\begin{array}{lcccc} n = & 1 & 2 & 3 & 4 \\ & \dfrac{1}{s}, & \dfrac{s}{3rs+1}, & \dfrac{3rs+1}{15r^2s+5r+s}, & \dfrac{15r^2s+5r+s}{105r^3s+35r^2+10rs+1} \quad \text{etc.} \end{array}$$

In qua serie apparet cujusvis fractionis numeratorem esse praecedentis denominatorem. Atque si terminus ordine m sit $\dfrac{A}{B}$ fore sequentem indicis $m+1 = \dfrac{B}{(2m+1)\,B + A}$. Ex his ergo manifestum est, quod in praecedentibus litteris commemoravi,[3] ex termino generali hujus seriei $\overset{m}{A}$, $\overset{m+1}{B}$, $\overset{m+2}{(2m+1)\,B + A}$, cognito haberi formulae Riccatianae separationem et integrationem universalem. In illa autem serie ut sit determinata, oportet esse terminum primum $= 1$ et secundum $= s$. Cognitis igitur ex termino generali A et B, factoque $n = m$ erit $x = \left(\dfrac{p}{2m+1}\right)^{2m+1}$ et $y\left(\dfrac{p}{2m+1}\right)^{2m} = \dfrac{A}{B}$ qua substitutione aequatio $a\,dy = y^2dx - x^{\frac{-4m}{2m+1}}dx$ reducitur ad hanc $a\,dq = q^2dp - dp$, ideoque integrabitur ope logarithmorum universaliter. Aequatio vero $a\,dy = y^2dx - x^{\frac{-4m}{2m+1}}dx$ modo initio tradito reducitur ad hanc

$$z^2dv + vz\,dz - vz\,dv - v^2dz + a\left(\frac{-2m+1}{2m+1}\right) z\,dv - av\,dz = 0.$$

Haec ergo reducetur ad istam $a\,dq = q^2dp - dp$ substitutione $v = \dfrac{Ap}{(2m+1)\,B}$ et $z = \dfrac{Bp}{(2m+1)\,A}$. Vale et fave

Vir Celeberrime
Tui observantissimo
Leonh. Eulero

Domi d. 3 Jan.
1732

R 731 Reply to n° 16
[Petersburg], January 3rd (14th), 1732
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. III, fol. 130r–131r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 62–64; *Euler-Goldbach* (1965), p. 54–55

18
Goldbach to Euler
Moscow, January 15th / 26th, 1732

Vir Clarissime

In superioribus litteris tuis non animadverteram te in formula A, B, $(2m+1)\,B + A$, sumere m pro exponente terminorum qui competit termino A, quod ex postremis tuis nuper ad me datis nunc satis intelligo[1] videoque simili modo $\int (1 - y^{\frac{1}{n}})^p dy$ pendere a formula generali summarum seriei cuius lex progressionis est[2]

$$((p+n+x) \ \gtrless \ (n \pm x))\ A = B,$$

ubi per x intelligo exponentem qui termino A respondet, per $\gtrless$ vero signum divisionis ambiguae, ita ut sumto ex signis $\pm$ superiore, $(n+x)$ sit denominator, sumto inferiore, $(n-x)$ fiat numerator,[3] vel eandem integralem pendere a termino generali summarum seriei cuius lex progressionis est

$$\frac{-\ (n+x-1)\,(p-x+1)\ A}{x\,(n+x)} = B;$$

sed raro admodum contingere arbitror, ut ad terminum huiusmodi generalem expeditior quam ad ipsam integralem quaesitam via sit.

Casu aliquo nuper observavi ex aequationibus quintae potestatis quae hanc formam habent[4]

$$x^5 + \frac{5m}{2}x = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - m^5}\right)^{\frac{1}{5}} - \left(\frac{-p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - m^5}\right)^{\frac{1}{5}} + 4p},$$

quicunque numeri dentur pro m et p, radicem Algebraicam erui posse, quod non contemnendum puto, quotiescunque numerus p in aequatione data $x^5 + \frac{5m}{2}x = n$ per m et n facile determinari potest.[5] Vale.

D[atum] Moscuae $\frac{15.}{26.}$ Januar. 1732.

Tui observantissimus
Christianus Goldbach.

R 732 Reply to n° 17
Moscow, January 15th / 26th, 1732
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 17rv
Partial copy, 1 p. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. III, fol. 40r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 65–66; *Euler-Goldbach* (1965), p. 55–56

19
Euler to Goldbach
Petersburg, January 31st (February 11th), 1732

Vir Celeberrime

Occasione aequationis ordinis quinti $x^5 + \frac{5m}{2}x = \frac{n}{2}$, cujus radicem *Te assignare posse* scribis[1] quoties est

$$n = \sqrt{\left(\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{pp}{4} - m^5}\right)^{\frac{1}{5}} - \left(-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - m^5}\right)^{\frac{1}{5}} + 4p}$$

in qua vero determinatio litterae p etiam ab inventione radicis ex aequatione ordinis quinti pendet, non incongruum arbitror communicare, quae de radicibus aequationum proxime inveniendis observavi. Duos omnino modos ad hoc adhiberi solere perspexi, quorum primus est, quo in pluribus aequationis locis loco incognitae x ponitur quantitas non multum ab ea differens, et tum ipsa x quaeritur, deinde hic pro x inventus valor iterum in aliquot locis pro x scribatur, denuoque x quaeratur; hujus operationis ope, quo saepius repetitur, eo propior habebitur quantitas ipsius x. Ut in aequatione $x^2 = 3x + 20$ ponatur 6 loco x ut prodeat haec aequatio $x = \frac{3x+20}{x} = 6\frac{1}{3}$; tum fiat $x = 6\frac{1}{3}$, fiet $x = 6\frac{3}{19}$ porroque eodem modo $x = 6\frac{29}{117}$, tandemque admodum exacte x reperietur. Generaliter etiam, si principio ponatur $x = a$, post unam operationem proveniet $x = 3+\frac{20}{a}$, post duas $x = 3+\cfrac{20}{3+\cfrac{20}{a}}$, post tres $x = 3 + \cfrac{20}{3 + \cfrac{20}{3 + \cfrac{20}{a}}}$, atque post infinitas $x = 3 + \cfrac{20}{3 + \cfrac{20}{3 + \cfrac{20}{3 + \cfrac{20}{\text{etc.}}}}}$. Hujus igitur continuarum fractionum quantitatis valor cognoscitur,[2] est nimirum $= 3 + \frac{\sqrt{89}}{2}$. Hujusmodi etiam est quantitas, quam ad formulam Riccatianam construendam dedi. Hoc etiam modo nititur methodus Cl[arissimi] Bernoullii nostri, quam dedit ope serierum ut vocat recurrentium radices aequationum admodum prope inveniendi.[3] Ita autem hinc eam derivo: sit primo aequatio quadratica $x^2 = ax + b$, fiat ex ea $x = a + \frac{b}{x}$, in qua pono esse $x = \frac{q}{p}$ prope, hoc substituto $x = \frac{aq + bp}{q}$ propius, hocque etiam pro x posito habebitur $x = \frac{a^2q + abp + bq}{aq + bp}$ multo denuo propius; etc. Ex his ipsius x valoribus formatur facile haec series p, q, $aq + bp$, $a^2q + abp + bq$, etc. hanc habens proprietatem A, B, $aB + bA$,[4] adeoque recurrens; si igitur ejus quivis terminus per praecedentem dividitur, quotus dabit valorem ipsi x eo propiorem, quo longius series continuatur; idem quoque evenit, etiam si pro p et q numeri quicunque assumantur, quo vero magis $\frac{q}{p}$ ab x differt, eo longius series est continuanda. Si fuerit proposita aequatio cubica, $x^3 = ax^2 + bx + c$, mutetur ea in $x = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$; ad hujus radicem inveniendam pro x assumendi sunt duo valores arbitrarii hujus formae $\frac{q}{p}$ et $\frac{p}{n}$, ex quibus igitur fiet $x^2 = \frac{q}{n}$, prodibit ergo $x = \frac{aq + bp + cn}{q}$. Hinc emergit ista series n, p, q, $aq + bp + cn$, etc. itidem recurrens, et cujus quivis terminus per antecedentem divisus dat x proxime. Simili modo ad aequationis $x = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \frac{d}{x^3}$ radicem inveniendam servit haec series m, n, p, q, $aq + bp + cn + dm$, etc. Compendium hic ingens nascitur ex eo, quod principio pro x non unus sed plures valores assumuntur, hocque efficitur ut tot sumendis potestatibus non sit opus, ideoque series facile possit continuari. Aliis forte etiam idoneis modis aequationes possunt disponi, et congrui pro x valores assumi ut series prodeat simplicior, ope cujus radix inveniri potest.

Alter modus appropinquandi est maxime usitatus, atque in eo continetur, ut primo divinando ipsi x propinquus valor habeatur tumque complementum ejus quam proxime investigetur; hoc modo fit aequatio $x^2 = ax + b$, in qua notum sit esse $x = c$ prope; ponatur ergo $x = c + z$, ubi z valde parvum erit respectu c ita ut pro x^2 assumi possit $c^2 + 2cz$, erit ergo $c^2 + 2cz = ac + az + b$ adeoque $z = \frac{c^2 - ac - b}{a - 2c}$ et $x = \frac{c^2 + b}{2c - a}$. Si igitur jam pro c substituatur $\frac{c^2 + b}{2c - a}$, prodibit multo exactius $x = \frac{c^4 + 6bc^2 + b^2 - 4abc + a^2b}{4c^3 + 4bc - 6ac^2 + 4a^2c - 2ab - a^3}$, et ita porro. Hanc methodum vehementer amplificavit Cl[arissimus] Taylor;[5] Aequationem in qua inest incognita x reducere jubet ad nihilum ut prodeat haec forma $X = 0$ ubi X denotat quantitatem quamcunque ex x et cognitis compositam, deinde assumit quantitatem ipsi x propinquam quae sit z, eamque in X pro x substituit; prodibit ergo quantitas ex z et cognitis composita, quae sit $= y$; namque quia non est $z = x$ etiam haec quae prodit quantitas non esse potest $= 0$. Hoc facto sumantur differentialia positis y et z variabilibus, erit inquit $x = \dfrac{z\,dy - y\,dz}{dy}$ q[uam] p[roxime]. Quae non solum pro aequationibus algebraicis, sed etiam transcendentibus valet. Ut sit $\sqrt[2]{7x - x^2} - \sqrt[3]{9 + x^3} = 0$, ponatur $x = z$; erit $\sqrt[2]{7z - z^2} - \sqrt[3]{9 + z^3} = y$, hincque

$$dy = \frac{7dz - 2z\,dz}{2\sqrt[2]{7z - z^2}} - \frac{z^2dz}{\sqrt[3]{(9 + z^3)^2}}$$

adeoque

$$x = z - \frac{2y\sqrt[2]{7z - z^2} \cdot \sqrt[3]{(9 + z^3)^2}}{(7 - 2z)\sqrt[3]{(9 + z^3)^2} - 2z^2\sqrt{7z - z^2}}.$$

Ponatur $z = 1$ erit $y = \sqrt{6} - \sqrt[3]{10}$ adeoque[6]

$$x = 1 - \frac{12\sqrt[3]{100} + 20\sqrt{6}}{5\sqrt[3]{100} - 2\sqrt{6}} = \frac{18\sqrt{6} - 7\sqrt[3]{100}}{5\sqrt[3]{100} - 2\sqrt{6}}.$$

Accuratius deinde idem pertractat, dicitque fore $x = z + v$. At v ex hac aequatione debet determinari

$$y + \frac{v\,dy}{1 \cdot dz} + \frac{v^2ddy}{1 \cdot 2 \cdot dz^2} + \frac{v^3d^3y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dz^3} + \text{etc.} = 0.$$

Si ex hac aequatione definiri posset v accurate, etiam re vera foret $x = z + v$. In secundis vero differentiationibus dz pro constante habetur. Inveni vero esse quam proxime

$$v = \frac{-\,y\,dz}{dy} \cdot \frac{-\dfrac{y^2dz\,d^2y}{1 \cdot 2 \cdot dy^2} + \dfrac{y^3dz\,d^3y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dy^3} - \dfrac{y^4dz\,d^4y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot dy^4} + \text{etc.}}{dy - \dfrac{y\,d^2y}{1 \cdot dy} + \dfrac{y^2d^3y}{1 \cdot 2 \cdot dy^2} - \dfrac{y^3d^4y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dy^3} + \text{etc.}}$$

Sit $x^3 - a = 0$, erit $z^3 - a = y$, et $dy = 3z^2dz$, $ddy = 6z\,dz^2$ et $d^3y = 6dz^3$. Hinc habebitur

$$v = \frac{-\,y}{3z^2} \cdot \frac{-\dfrac{y^2}{3z^3} + \dfrac{y^3}{27z^6}}{3z^2 - \dfrac{2y}{z} + \dfrac{y^2}{3z^4}} = \frac{-\,3yz^2 + \dfrac{y^2}{2} - \dfrac{2y^3}{9z^4}}{9z^4 - 6yz + \dfrac{y^2}{z^2}}$$

atque

$$x = \frac{16z^9 + 51az^6 + 11a^2z^3 + 2a^3}{36z^8 + 36az^5 + 9a^2z^2}.$$

Nimis quidem est operosa haec methodus, si pluries eandem repetere volueris, ponendo iterum loco z, quod pro x jam erat inventum, sed forte etiam compendia poterunt excogitari, quae hanc aeque commodam reddunt, ac priorem methodum.[7] Ad has autem operationes continuandas requiritur series hujus proprietatis, $\overset{n}{x}$, $\overset{n+1}{P}$, $\overset{n+2}{X}$, ut X eodem modo determinetur in P, quo P determinatur in x. Nam pro hac aequatione $x^2 = ax + b$ sunt ipsius x valores successive inventi hi

$$c, \frac{c^2+b}{2c-a}, \frac{c^4+6bc^2+b^2-4abc+a^2b}{4c^3+4bc-6ac^2+4a^2c-2ab-a^3}, \text{ etc. } \ldots, A, \frac{A^2+b}{2A-a}.$$

Inveni autem quomodocunque P detur in x fore

$$X = P + \frac{(P-x)\,dP}{1\cdot dx} + \frac{(P-x)^2\,ddP}{1\cdot 2\cdot dx^2} + \frac{(P-x)^3\,d^3P}{1\cdot 2\cdot 3\cdot dx^3} + \text{etc.}$$

Hujusmodi aequatio etiam dari potest pro curva, cujus abscissae si fuerint 1, 2, 3, 4, etc., respondentes applicatae sunt 1, 2, 6, 24, 120, etc., scilicet in aequatione pro ea inerunt differentialia omnium graduum.[8]

Vale et fave
Vir Celeberrime
Tui observantissimo
Leonhardo Euler.

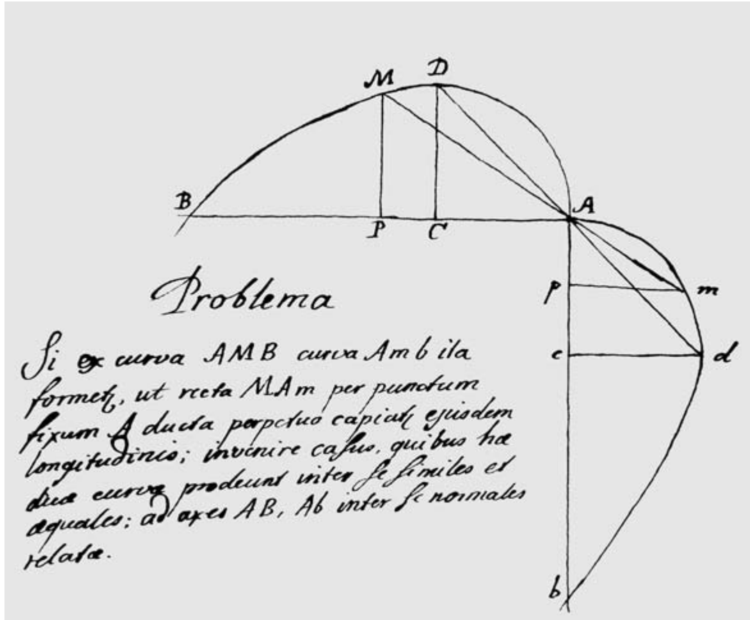
Petropoli d. 31 Jan. 1732.

R 733 Reply to nº 18
Petersburg, January 31st (February 11th), 1732
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. III, fol. 132r–133v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 67–71; *Euler-Goldbach* (1965), p. 56–59

20
Euler to Goldbach
[Petersburg], after January 1732[1]

Problema

Si ex curva AMB curva Amb ita formetur, ut recta MAm per punctum fixum A ducta perpetuo capiatur ejusdem longitudinis; invenire casus, quibus hae duae curvae prodeunt inter se similes et aequales, ad axes AB, Ab inter se normales relatae.[2]



Solutio

Posita longitudine constante $Mm = Dd = AB = 2a$; sit $AP = x$; $PM = y$; atque sumta nova variabili z; sit Q talis functio ipsius z, quae posita z negativa abeat in sui ipsius negativam, cujusmodi sunt, mz; $mz^3 + nz$; etc. Sequenti modo per z coordinatae x et y determinabuntur:

$$x = \frac{(a+z)\sqrt{(aa+zz+2Q)}}{\sqrt{2}\,(aa+zz)};$$
$$y = \frac{(a+z)\sqrt{(aa+zz-2Q)}}{\sqrt{2}\,(aa+zz)}.$$

Eliminando ergo z et Q; infinitae prodibunt aequationes inter x et y, ac proinde innumerabiles curvae AMB problemati satisfacientes. Q[uod] E[rat] I[nveniendum].

Coroll[arium] 1. Erit ergo $\sqrt{(xx+yy)} = a + z$. Atque

$$x : y = \sqrt{(aa+zz+2Q)} : \sqrt{(aa+zz-2Q)}\,.$$

Coroll[arium] 2. Sumta $AC = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$, fiet $CD = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ atque $AD = a$; punctoque D in altera curva sui homologum d respondebit in generatione.

Exemplum.

Sit $Q = naz$; erit $xx : yy = aa + 2naz + zz : aa - 2naz + zz$, seu

$$xx \begin{pmatrix} 2aa + xx + yy & -2a\sqrt{(xx+yy)} \\ +2naa & -2na\sqrt{(xx+yy)} \end{pmatrix}$$
$$= \quad yy \begin{pmatrix} 2aa + xx + yy & -2a\sqrt{(xx+yy)} \\ -2naa & +2na\sqrt{(xx+yy)} \end{pmatrix}$$

$$2a\left((n+1)\,xx + (n-1)\,yy\right)\sqrt{(xx+yy)} = 2aa\left((n+1)\,xx + (n-1)\,yy\right) + x^4 - y^4,$$

unde sequens oritur aequatio pro curva satisfaciente

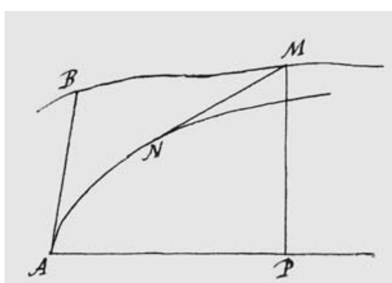
$$\begin{aligned} x^8 \quad - \quad & 2x^4y^4 + y^8 - 4na^2\left((n+1)\,x^2 + (n-1)\,y^2\right)(xx+yy)^2 \\ + \quad & 4a^4\left((n+1)\,x^2 + (n-1)\,y^2\right)^2 = 0, \end{aligned}$$

quae jam innumerabiles praebet curvas quaesitas.

R 734 Undated note, filed with letter nº 24 from July 23rd (August 3rd), 1737
Original, 1 fol. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. III, fol. 178rv
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 72–73; *Euler-Goldbach* (1965), p. 59–60

21
Euler to Goldbach
[Petersburg], before March 17th (28th), 1735[1]

Constructio aequationis $dy + y^2dx = X\,dx$, in qua X quomodocunque datur per x et constantes, ope motus tractorii.[2]



Describatur super axe AP curva BM hoc modo, ut sumta abscissa $AP = 2b\int dx\sqrt{X}$ applicata PM sit $= \dfrac{b}{2}\,\ell X$. Tum super curva BM filum BA longitudinis b motu tractorio producatur, ut terminus A curvam AN describat, eritque ubique $NM = b$. Ponatur tangens semissis anguli $NMP = t$ (posito sinu toto

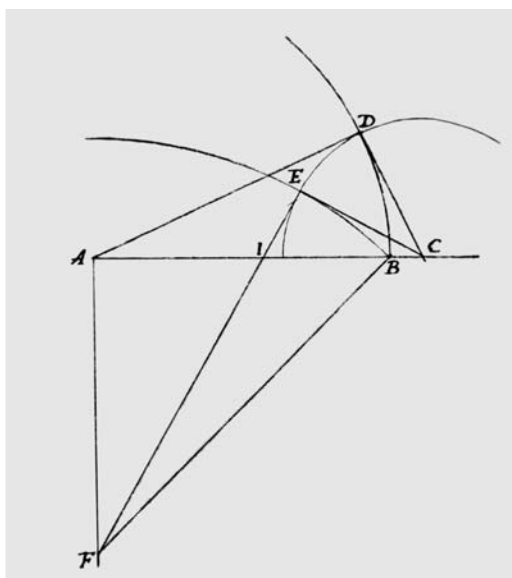
$= 1)$,[3] erit $y = t\sqrt{X}$. Quare cum curva BM ex x et X construatur, ideoque t per x et X cognoscatur, dabitur y quoque per x; hacque ratione aequatio proposita $dy + y^2 dx = X\,dx$ ope motus tractorii construitur. Si ponatur $X = x^m$, habetur casus a Riccato propositus[4] pro eoque est $AP = \dfrac{4bx^{\frac{m+2}{2}}}{m+2}$ et $PM = \dfrac{mb}{2}\,\ell\,x$. Si $m = -2$ est $AP = 2b\,\ell\,x$ et $PM = -\,b\,\ell\,x$. Hoc ergo casu curva BM fit linea recta, et curva AN tractoria communis.[5]

R 735 Undated note, written before March 17th (28th), 1735
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 171, fol. 1
Published: *Euler-Goldbach* (1965), p. 60–61

22
Goldbach to Euler
Petersburg, October (1st) 12th, 1735

Vir Clarissime

Hesterni tui theorematis[1] praeterita nocte hanc demonstrationem imaginatus sum quam mane veram deprehendi:



Dato rectangulo quocunque ADC ducatur indefinita AF perpendicularis ipsi AC, ex qua abscindatur $AB = AD$; si ex puncto C ducatur quaevis $CE = CD$ et ex E erigatur perpendicularis occurrens ipsi AF in F, dico esse $EF = BF$.

Sit $AB = AD = a$, $CD = CE = b$, $AC = \sqrt{a^2+b^2} = f$, $AF = e$, $AI = x$. Erit

$$\begin{aligned} AF : AI &:: CE : EI = \frac{bx}{e}; \\ AF : FI &:: CE : CI = \frac{b\sqrt{e^2+x^2}}{e} = f - x, \end{aligned}$$

ergo

$$x = \frac{e^2 f \pm e\sqrt{e^2 f^2 + (b^2 - f^2)(e^2 - b^2)}}{e^2 - b^2}.$$

Ergo

$$FE = FI + IE = \sqrt{e^2+x^2} + \frac{bx}{e} = \sqrt{a^2+e^2} = FB;^{[2]}$$

ex quo patet, cum puncta E et F sint arbitraria, circulum quemcunque ductum radio FE ad angulos rectos secari per circulum ductum radio CE.

D[atum] Petrop[oli] 12. Oct. 1735.

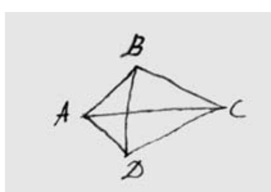
Tui studiosissimus
C. G.

R 736 Petersburg, October (1st) 12th, 1735
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 18r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 74; *Euler-Goldbach* (1965), p. 61

23
Goldbach to Euler
[Petersburg], February 1736

Leonhardo Eulero[1]

Problema mecum communicatum:



Datis in quadrilatero $ABCD$ omnibus lateribus et altera diagonali AC, invenire alteram diagonalem BD: sic solvi posse puto: Sit $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$,

$DA = d$, $BD = y$. Quoniam data diagonali alterutra datur etiam area quadrilateri, quam pono $= \frac{e}{4}$, erit

$$\left(-\left(a^2-b^2\right)^2+2\left(a^2+b^2\right)y^2-y^4\right)^{\frac{1}{2}}+\left(-\left(c^2-d^2\right)^2+2\left(c^2+d^2\right)y^2-y^4\right)^{\frac{1}{2}}=e,$$

unde positis

$$\begin{aligned} -\left(a^2-b^2\right)^2 &= \alpha; \qquad +2\left(a^2+b^2\right)=\beta, \\ -\left(c^2-d^2\right)^2 &= \gamma; \qquad +2\left(c^2+d^2\right)=\delta, \end{aligned}$$

et

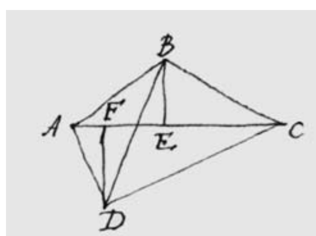
$$\begin{aligned} \frac{2e^2\delta-\left(\alpha-\gamma-e^2\right)(\beta-\delta)}{(\beta-\delta)^2+4e^2} &= \pi, \\ \frac{4e^2\gamma-\left(\alpha-\gamma-e^2\right)^2}{(\beta-\delta)^2+4e^2} &= \tau, \end{aligned}$$

pervenitur ad duplicem valorem

$$y=\left(\pi\pm\sqrt{\pi^2+\tau}\right)^{\frac{1}{2}}$$

altero diagonalem datam AC, altero quaesitam BD exprimente.

Aliter:



Quoniam datis quatuor lateribus et diagonali AC, dantur etiam perpendiculares ad diagonalem, $BE = f$, $DF = g$, et intercepta $FE = h$, erit diagonalis quaesita $BD = \sqrt{(f+g)^2+h^2}$.

R 737 [Petersburg], February 1736
Copy, 2 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. III, fol. 42v–43r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 75–76; Euler-Goldbach (1965), p. 62

24
Euler to Goldbach
[Petersburg], July 23rd (August 3rd), 1737

Vir Celeberrime

Cum in hesternam formulam, quam mecum communicare voluisti,[1] diligentius essem meditatus, incidi in sequentes expressiones non solum satis generales sed etiam perquam commodas, ex quibus omnes Tuae formulae Vir Celeberrime expedite derivari queant; posita scilicet abscissa communi $= x$, sint utriusque curvae applicatarum elementa

$$dx\left(\sqrt{RS} \pm \sqrt{(R+1)(S-1)}\right)$$

unde ipsarum curvarum elementa erunt

$$dx\left(\sqrt{(R+1)S} \pm \sqrt{R(S-1)}\right).$$

Quo igitur utraque curva fiat algebraica, pro R et S tales ipsius x accipiendae erunt functiones, ut tam $dx\sqrt{RS}$ quam $dx\sqrt{(R+1)(S-1)}$ integrationem admittant. Deinde ut arcuum summa algebraice exprimi queat, hanc quoque formulam $dx\sqrt{(R+1)S}$ oportet esse integrabilem. Hoc autem pluribus modis facile praestabitur, sumendis pro R et S talibus functionibus ut RS; $(R+1)(S-1)$; et $S(R+1)$ fiant quantitates vel ex duobus vel ex uno termino constantes; quippe in quibus exponentes ita accipere licet, ut quaesito satisfiat.

I. Sit $R = ax^m$ et $S = \dfrac{1}{ax^m}$ fient elem[enta] applicatarum

$$= dx\left(1 \pm \sqrt{\left(\frac{1}{ax^m} - ax^m\right)}\right)$$

et elem[enta] curvarum

$$= dx\left(\sqrt{\left(1 + \frac{1}{ax^m}\right)} \pm \sqrt{(1 - ax^m)}\right)$$

atque debebit esse $m = \dfrac{-1}{4i+1}$, denotante i numerum quemcunque affirmativum integrum.

II. Sit $R = ax^m - 1$ et $S = bx^n$ fient applicatarum e[le]menta

$$= dx\left(\sqrt{(abx^{m+n} - bx^n)} \pm \sqrt{(abx^{m+n} - ax^m)}\right)$$

et curvarum elementa

$$= dx\left(x^{\frac{m+n}{2}}\sqrt{ab} \pm \sqrt{(ax^m - 1)(bx^n - 1)}\right).$$

Quo autem tam utraque applicata, quam summa arcuum fiat algebraica vel esse debet $m = \dfrac{4i+2}{4ik-1}$ et $n = \dfrac{4k+2}{4ik-1}$ vel etiam $m = \dfrac{-2i}{2ik+i+k}$ atque $n = \dfrac{-2k}{2ik+i+k}$ existentibus i et k numeris integris affirmativis.

III. Sit $R = \dfrac{ab}{c}x^m - \dfrac{abb}{cc}$ et $S = \dfrac{c}{b}x^m + 1$, fient applicatarum elementa

$$= dx\left(\sqrt{x^m}\left(\frac{c}{b} - \frac{ab}{c} + ax^m\right) \pm \sqrt{\left(ax^{2m} - \frac{abb}{cc}\right)}\right)$$

atque curvarum elementa

$$= dx\left(\sqrt{x^m}\left(ax^m - \frac{ab}{c}\right) \pm \sqrt{(b + cx^m)}\left(\frac{1}{b} - \frac{ab}{cc} + \frac{a}{c}x^m\right)\right)$$

sumaturque $m = \dfrac{-1}{2i+1}$.

IV. Sit $R = a^2x^{2m} + 2ax^m$ et $S = bx^m$ erunt applicat[arum] elementa

$$= dx\left(x^m\sqrt{\left(a^2bx^m + 2ab\right)} \pm (ax^m + 1)\sqrt{(bx^m - 1)}\right)$$

et curvarum elem[enta]

$$= dx\left(bx^m(ax^m + 1) \pm \sqrt{x^m}\left(a^2x^m + 2a\right)(bx^m - 1)\right)$$

eritque vel $m = \dfrac{1}{i}$ vel $m = \dfrac{-2}{2i+3}$.

Hujusmodi autem formulae plures aliae hinc possunt derivari, per idoneos valores loco R et S substituendos. Vale et favere perge

Vir Celeberrime
Tui Observantissimo
L. Euler

ad d[iem] 23 Jul. 1737.

R 738 [Petersburg], July 23rd (August 3rd), 1737
Original, 1 fol. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. III, fol. 180rv
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 77–79; *Euler-Goldbach* (1965), p. 62–63

25
Goldbach to Euler
[Petersburg], (September 30) October 11th, 1738

Inveni ego hodie mane[1] formulam generalem in infinitum excurrentem (sed quae abrumpatur quotiescunque exponens terminorum est integer affirmativus) pro serie[2]

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+0-\frac{1}{30}-0+\frac{1}{42}+0 \;∺\; \&c.$$

quae formula si Tibi, Vir Celeberrime, iam nota est, ego inventoris secundi laude contentus ero, sin minus, formulam ipsam libenter tecum communicabo.

A. 1738, d. 11. Oct. st. n.

C. G.[3]

R 739 [Petersburg], (September 30) October 11th, 1738
Address (fol. 19v): “A Monsieur / Monsieur Euler / de l’Academie des Sciences”
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 19r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 80; *Euler-Goldbach* (1965), p. 64

26
Goldbach to Euler
[Petersburg], (October 27th) November 7th, 1739

Vir Clarissime

Ex inventis tuis demonstrari potest,[1] in summa seriei

$$\begin{aligned}\frac{1}{1^n} \;&-\; \frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}-\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}-\frac{1}{7^n}-\frac{1}{8^n}\\ &+\; \frac{1}{9^n}+\frac{1}{10^n}-\frac{1}{11^n}-\frac{1}{12^n}-\frac{1}{13^n}+\frac{1}{14^n}+\frac{1}{15^n}+\frac{1}{16^n}\\ &-\; \frac{1}{17^n}-\frac{1}{18^n}-\frac{1}{19^n}-\frac{1}{20^n}+\frac{1}{21^n}+\frac{1}{22^n}-\frac{1}{23^n}+\frac{1}{24^n}+\&c.\end{aligned}$$

quam continuare possum quousque libuerit, si ponatur $=\alpha\pi^n$, numerum α esse rationalem et assignabilem si n sit numerus affirmativus par; et in casu $n=1$, totam seriem fieri $=0$.

D[atum] d. 7. Nov. 1739. st. n.

Tui observantissimus
C. G.

Ut sciri possit an terminus quicunque datus $\dfrac{1}{x^n}$ exigat signum $+$ an signum $-$? Dico, si x est numerus primus, locum habere signum $-$; si x productum ex duobus primis, locum habere signum $+$; si x productum ex tribus primis, locum habere signum $-$; et ita porro.

V[erbi] gr[atia] $\dfrac{1}{18^n}$ exigit signum $-$, quia producitur ex tribus 2, 3, 3; $\dfrac{1}{24^n}$ exigit signum $+$ quia producitur ex quatuor 2, 2, 2, 3.

R 740 [Petersburg], (October 27th) November 7th, 1739
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 21r
Address (fol. 21v): "Pour / M.r Le Prof[esseur] Euler"
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 81; *Euler-Goldbach* (1965), p. 66

27
Euler to Goldbach
[Petersburg, November 23rd / December 4th, 1739][1]

Vir Celeberrime

Si habeatur Series quaecunque: a, b, c, d, e, etc. atque ponatur

$$\begin{aligned} P &= a+b+c+d+e+\text{etc.} \\ Q &= a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+\text{etc.} \\ R &= a^3+b^3+c^3+d^3+e^3+\text{etc.} \\ S &= a^4+b^4+c^4+d^4+e^4+\text{etc.} \\ &\ \text{etc.} \end{aligned}$$

ac praeterea ex terminis a, b, c, d, etc. formentur

1. facta ex singulis quorum summa sit $A = P$
2. facta ex binis, quorum summa sit $= B$
3. facta ex ternis, quorum summa sit $= C$
4. facta ex quaternis, quorum summa sit $= D$

etc.

His positis si numerus, cujus logarithmus est $= 1$, denotetur littera e (quae ne confundatur cum termino e), erit

$$1+A+B+C+D+\text{etc.} = \mathrm{e}^{P+\frac{1}{2}Q+\frac{1}{3}R+\frac{1}{4}S+\text{etc.}};$$

sumendis vero terminis alternis, erit

$$1+B+D+F+H+\text{etc.} = \frac{\mathrm{e}^{P+\frac{1}{2}Q+\frac{1}{3}R+\frac{1}{4}S+\text{etc.}}+\mathrm{e}^{-P+\frac{1}{2}Q-\frac{1}{3}R+\frac{1}{4}S-\text{etc.}}}{2}$$

atque

$$A+C+E+G+I+\text{etc.}=\frac{\mathrm{e}^{P+\frac{1}{2}Q+\frac{1}{3}R+\text{etc.}}-\mathrm{e}^{-P+\frac{1}{2}Q-\frac{1}{3}R+\text{etc.}}}{2}.$$

Quod si nunc pro serie $a+b+c+d+$etc. capiatur series potestatis cujuscunque numerorum primorum ita ut sit

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{11^n}+\text{etc.}\\
Q &= \frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{7^{2n}}+\frac{1}{11^{2n}}+\text{etc.}\\
R &= \frac{1}{2^{3n}}+\frac{1}{3^{3n}}+\frac{1}{5^{3n}}+\frac{1}{7^{3n}}+\frac{1}{11^{3n}}+\text{etc.}\\
S &= \frac{1}{2^{4n}}+\frac{1}{3^{4n}}+\frac{1}{5^{4n}}+\frac{1}{7^{4n}}+\frac{1}{11^{4n}}+\text{etc.}\\
& \text{etc.}
\end{aligned}$$

erit A ipsa series numerorum primorum P; B series factorum ex binis, C series factorum ex ternis et ita porro: unde fiet $1+A+B+C+D+$etc. series omnium numerorum puta

$$1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+\text{etc.}=\alpha\pi^n.$$

Quamobrem erit

$$\mathrm{e}^{P+\frac{1}{2}Q+\frac{1}{3}R+\frac{1}{4}S+\text{etc.}}=1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\text{ etc.}=\alpha\pi^n,$$

simili vero modo erit

$$\mathrm{e}^{Q+\frac{1}{2}S+\frac{1}{3}V+\frac{1}{4}X+\text{etc.}}=1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+\text{etc.}=\beta\pi^{2n},$$

quae expressio per illam divisa dabit

$$\mathrm{e}^{-P+\frac{1}{2}Q-\frac{1}{3}R+\frac{1}{4}S-\frac{1}{5}T+\frac{1}{6}V-\text{etc.}}=\frac{\beta\pi^n}{\alpha},$$

unde demonstrari potest egregia illa series

$$1-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}-\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}-\frac{1}{7^n}-\text{etc.}$$

cujus summam Tu, Vir Celeberrime, demonstrasti esse $=\dfrac{\beta\pi^n}{\alpha}$. His praemissis cum sit A series ipsorum numerorum primorum, B series factorum ex binis primis, C

ex ternis et ita porro; scilicet

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{11^n}+\text{etc.}\\
B &= \frac{1}{4^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{9^n}+\frac{1}{10^n}+\frac{1}{14^n}+\text{etc.}\\
C &= \frac{1}{8^n}+\frac{1}{12^n}+\frac{1}{18^n}+\frac{1}{20^n}+\frac{1}{27^n}+\text{etc.}\\
D &= \frac{1}{16^n}+\frac{1}{24^n}+\frac{1}{36^n}+\frac{1}{40^n}+\frac{1}{54^n}+\text{etc.}\\
E &= \frac{1}{32^n}+\frac{1}{48^n}+\frac{1}{72^n}+\frac{1}{80^n}+\frac{1}{108^n}+\text{etc.}\\
& \text{etc.}
\end{aligned}$$

sequitur fore

$$1+A+B+C+D+\text{etc.}=\mathrm{e}^{P+\frac{1}{2}Q+\frac{1}{3}R+\text{etc.}}=\alpha\pi^n$$

$$\begin{aligned}
1+B+D+F+\text{etc.} &= \frac{\mathrm{e}^{P+\frac{1}{2}Q+\frac{1}{3}R+\text{etc.}}+\mathrm{e}^{-P+\frac{1}{2}Q-\frac{1}{3}R+\text{etc.}}}{2}=\frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{\beta}{\alpha}\right)\pi^n\\
A+C+E+G\quad\text{etc.} &= \frac{\mathrm{e}^{P+\frac{1}{2}Q+\frac{1}{3}R+\text{etc.}}-\mathrm{e}^{-P+\frac{1}{2}Q-\frac{1}{3}R+\text{etc.}}}{2}=\frac{1}{2}\left(\alpha-\frac{\beta}{\alpha}\right)\pi^n
\end{aligned}$$

hincque

$$1-A+B-C+D-E+F-G+\text{etc.}=\frac{\beta}{\alpha}\pi^n,$$

quae est ipsa series a Te, Vir Celeb[errime], primum inventa.

Denique ex his constat fore summam seriei $1+B+D+F+$etc. in qua insunt producta ex numero pari numerorum primorum, ad summam seriei $A+C+E+G+$etc. quae continet numeros primos ipsos et producta ex numero impari eorum, uti est $\alpha^2+\beta$ ad $\alpha^2-\beta$, quae est proportio quam hodie mihi inveniendam proposuisti. Vale Vir Celeberrime, mihique favere perge.

R 741 [Petersburg, November 23rd / December 4th, 1739]
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. III, fol. 209r–210r
Address (fol. 210v): “A Monsieur / Monsieur Goldbach / Conseiller de Justice et Membre / de l’Academie Imperiale des Sciences / à / St. Petersburg”
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 82–85; *Euler-Goldbach* (1965), p. 68–70

28
GOLDBACH TO EULER
[Petersburg], November 24th (December 5th), 1739[1]

Vir Celeberrime

Gratissima mihi fuerunt quae heri scripsisti;[2] mea solutio haec est: Sit

$$\begin{aligned} 1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\&c. &= \alpha\pi^n \\ 1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+\&c. &= \beta\pi^{2n} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{8^n}+\frac{1}{11^n}+\&c. = M,\text{[3]}$$

cuius denominatores posita $n=1$ sunt producta primorum numero imparium,

$$1+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{9^n}+\frac{1}{10^n}+\&c. = N,$$

cuius denominatores posita $n=1$ sunt producta primorum numero parium;[4] erit $\alpha\pi^n+\dfrac{\beta\pi^n}{\alpha}=2M$, $\alpha\pi^n-\dfrac{\beta\pi^n}{\alpha}=2N$. Sed nescio an methodus tua valeat ad determinandam verbi gr[atia] rationem inter terminos affirmativos et negativos huius seriei

$$\frac{1}{4^n}-\frac{1}{8^n}+\frac{1}{9^n}-\frac{1}{12^n}+\frac{1}{16^n}-\frac{1}{18^n}-\frac{1}{20^n}+\&c.$$

cuius denominatores posita $n=1$ sunt omnes potestates numerorum et omnia earum multipla; termini notati signo $+$ continent denominatores productos ex primis numero paribus, termini notati signo $-$ ... ex imparibus, quam rationem tamen eruere potero si operae pretium visum fuerit.[5] Sed multo magis Tibi, opinor, placebit quod heri inveni: Sit

$$1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\&c. = \alpha\pi^n,$$

$$\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{11^n}+\&c. = P$$

(cuius seriei denominatores continent omnes numeros primos), erit

$$\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{7^{2n}}+\frac{1}{11^{2n}}+\&c. = (P-1)^2+1-\frac{2}{\alpha\pi^n}$$

modo sit $n>1$.[6]

Vale et fave
Tuo C. G.[7]

24. Nov. 1739.

R 742 Reply to n° 27
[Petersburg], November 24th (December 5th), 1739
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 23rv
Address (fol. 24v): "Pour / M.r Le Prof[esseur] Euler"
Partial copy, 2 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. III, fol. 48v–49r (fol. 49 was partially cut out from the copybook)
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 86–88; *Euler-Goldbach* (1965), p. 71–72

29
Euler to Goldbach
[Petersburg], November 26th (December 7th), 1739

Vir Celeberrime

Considerans rationem, quae intercedit inter summam seriei

$$\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{7^{2n}}+\text{etc.}$$

et hanc expressionem $(P-1)^2+1-\dfrac{2}{\alpha\pi^n}$ deprehendi seriem aliquanto esse minorem,[1] ac fore

$$(P-1)^2+1-\frac{2}{\alpha\pi^n}=\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{7^{2n}}+\text{etc.}$$

$$\left.\begin{array}{l} +2\cdot\ \text{sum[mae] factorum ex ternis} \\ -2\cdot\ \text{sum[mae] factorum ex quaternis} \\ +2\cdot\ \text{sum[mae] factorum ex quinis} \\ \qquad\qquad\qquad \text{etc.} \end{array}\right\}\ \begin{array}{l}\text{terminis inaequalibus}\\ \text{seriei } \frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+\text{etc.}\end{array}$$

Quod si autem duplices istae factorum ex ternis, quaternis etc. summae, quippe quae per inventa Tua habentur, substituantur, prodit aequatio identica: quod idem non dubito, quin interim Ipse observaveris Vir Celeb[errime].

Incidi heri in hanc seriem non parum curiosam

$$1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{2}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{2}{6^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{3}{8^n}+\frac{2}{9^n}+\frac{2}{10^n}+\frac{1}{11^n}+\frac{4}{12^n}+\text{etc.}$$

cujus numeratores indicant, quot modis denominatores respondentes sint hujus seriei $2^n+3^n+4^n+5^n+6^n+\text{etc.}$ vel termini ipsi, vel producta ex binis vel ternis, vel quaternis vel ita porro: sic denominator 60^n numeratorem habebit 11, quia 60 his undecim modis componitur:

I.	60	VII.	$2\cdot2\cdot15$
II.	$2\cdot30$	VIII.	$2\cdot3\cdot10$
III.	$3\cdot20$	IX.	$2\cdot5\cdot6$
IV.	$4\cdot15$	X.	$3\cdot4\cdot5$
V.	$5\cdot12$	XI.	$2\cdot2\cdot3\cdot5$
VI.	$6\cdot10$		

Hujus seriei summam casu, quo $n = 2$, inveni esse $= 2$; atque initio arbitratus sum etiam reliquis casibus summam rationaliter exhiberi posse: verum rem diligentius scrutatus inveni casu $n = 4$ summam fore $= \frac{8\mathrm{e}^{\pi}\pi}{\mathrm{e}^{2\pi}-1} = \frac{8\pi}{\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi}}$; ubi est proxime $\mathrm{e}^{\pi} = 23,1407$.[2]

Deinde omnia fere Theoremata, quae de seriebus numerorum primorum aliisque hinc natis protulisti Vir Celeb[errime], multo latius patere observavi. Si enim sit

$$A = \alpha = a + b + c + d + \text{etc.}$$

$$\left.\begin{array}{l} B = \text{summae factorum ex binis} \\ C = \text{summae factorum ex ternis} \\ D = \text{summae factorum ex quaternis} \\ \qquad\qquad \text{etc.} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{terminis seriei } A\text{, terminis} \\ \text{aequalibus non exceptis,} \end{array}$$

itemque

$$\left.\begin{array}{l} \beta = \text{summae factorum ex binis} \\ \gamma = \text{summae factorum ex ternis} \\ \delta = \text{summae factorum ex quaternis} \\ \qquad\qquad \text{etc.} \end{array}\right\} \text{terminis inaequalibus seriei } A \text{ vel } \alpha,$$

fueritque

$$1 + A + B + C + D + E + \text{etc.} \ = s$$

$$1 - A + B - C + D - E + \text{etc.} \ = t$$

erit

$$1 + \alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{etc.} \ = \frac{1}{t}$$

$$1 - \alpha + \beta - \gamma + \delta - \text{etc.} \ = \frac{1}{s}.$$

Hincque

$$1 + B + D + F + \text{etc.} \ = \frac{s+t}{2}$$

$$A + C + E + G + \text{etc.} \ = \frac{s-t}{2}$$

$$1 + \beta + \delta + \zeta + \text{etc.} \ = \frac{s+t}{2st}$$

$$\alpha + \gamma + \varepsilon + \eta + \text{etc.} \ = \frac{s-t}{2st},$$

item

$$(B-\beta) + (C-\gamma) + (D-\delta) + \text{etc.} \ = s - \frac{1}{t}$$

$$(B-\beta) - (C-\gamma) + (D-\delta) - \text{etc.} \ = t - \frac{1}{s}$$

$$(C-\gamma) + (E-\varepsilon) + \text{etc.} \ = \frac{1}{2}(s-t)\left(1 - \frac{1}{st}\right)$$

$$(B-\beta) + (D-\delta) + \text{etc.} \ = \frac{1}{2}(s+t)\left(1 - \frac{1}{st}\right).$$

Quod si autem loco terminorum a, b, c, d, etc. sumantur eorum quadrata sitque

$$A'' = \alpha'' = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \text{etc.}$$

hincque series B'', C'', D'', etc., itemque β'', γ'', δ'', ε'' etc. simili modo formentur, quo supra B, C, D, etc., β, γ, δ etc. ex serie $A = \alpha$, fiet

$$1 + A'' + B'' + C'' + D'' + \text{etc.} \; = st$$

et

$$1 - \alpha'' + \beta'' - \gamma'' + \delta'' - \text{etc.} \; = \frac{1}{st};$$

unde erit generaliter

$$1 - A + B - C + D - \text{etc.} \; = \frac{1 + A'' + B'' + C'' + D'' + \text{etc.}}{1 + A + B + C + D + \text{etc.}}$$

atque

$$(1 + \alpha + \beta + \gamma + \text{etc.})\,(1 - \alpha + \beta - \gamma + \delta - \text{etc.}) = 1 - \alpha'' + \beta'' - \gamma'' + \delta'' - \text{etc.}$$

Ex his nunc si pro serie $a + b + c + d + \text{etc.}$ substituatur haec $\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{11^n}$ + etc. secundum numeros primos procedens, sequentur omnia omnino theoremata, quae mecum communicare voluisti. Vale Vir Celeberrime ac favere perge

Tui Observantissimo
L. Eulero

d. 26 Nov. 1739

R 743 Reply to nº 28
[Petersburg], November 26th (December 7th), 1739
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. III, fol. 213r–214r
Address (fol. 214v): “A Monsieur / Monsieur Goldbach / Conseiller de Justice et Membre / de l’Academie Imp[eriale] / à / St. Petersburg”
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 89–92; *Euler-Goldbach* (1965), p. 73–75

30

Euler to Goldbach

[Petersburg, ca. December 1739][1]

Vir Excellentissime

Seriei cujus terminus generalis est

$$\frac{1}{64x^2-64x+15} \qquad \text{vel} \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8x-5}-\frac{1}{8x-3}\right)$$

summa est

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\left(zz-z^4\right)\,dz}{1-z^8}=\frac{1}{2}\int\frac{zz\,dz}{(1+zz)\,(1+z^4)}=-\frac{1}{4}\int\frac{dz}{1+zz}+\frac{1}{4}\int\frac{(1+zz)\,dz}{1+z^4}$$

si post integrationem ponatur $z=1$.[2] At seriei cujus terminus generalis est

$$=\frac{3m}{64xx-64x+7}=\frac{m}{2}\left(\frac{1}{8x-7}-\frac{1}{8x-1}\right)$$

summa est

$$=\frac{m}{2}\int\frac{\left(1-z^6\right)\,dz}{1-z^8}=\frac{m}{2}\int\frac{\left(1+zz+z^4\right)\,dz}{(1+zz)\,(1+z^4)}=\frac{m}{4}\int\frac{dz}{1+zz}+\frac{m}{4}\int\frac{(1+zz)\,dz}{1+z^4}$$

posito post integrationem $z=1$. Verum est $\displaystyle\int\frac{dz}{1+zz}=\frac{\pi}{4}$;

$$\int\frac{dz}{1+z^4}=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\,\ell\left(1+\sqrt{2}\right) \quad \text{et} \quad \int\frac{zz\,dz}{1+z^4}=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\,\ell\left(1+\sqrt{2}\right):$$

Quare si a serie cujus terminus generalis est $\dfrac{1}{(8x-5)\,(8x-3)}$ subtrahatur series $=\dfrac{3m}{(8x-7)\,(8x-1)}$ seriei resultantis summa erit $=-\dfrac{(1+m)\,\pi}{16}+\dfrac{(1-m)\,\pi}{8\sqrt{2}}$.

Vel seriei cujus terminus generalis est $=\dfrac{3m}{64xx-64x+7}-\dfrac{1}{64xx-64x+15}$ summa est $=\dfrac{(m+1)\,\pi}{16}+\dfrac{(m-1)\,\pi}{8\sqrt{2}}$. Quare si $m=1$ summa erit $=\dfrac{\pi}{8}$; at ut summa sit $=0$ oportet esse $m+1+m\sqrt{2}-\sqrt{2}=0$ seu $m=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$.

II. Si in serie $\dfrac{1}{x\,(2x-1)\,(4x-1)}$ summa terminorum parium ab imparibus subtrahatur, prodit series

$$\frac{1}{1\cdot1\cdot3}-\frac{1}{2\cdot3\cdot7}+\frac{1}{3\cdot5\cdot11}-\frac{1}{4\cdot7\cdot15}+\text{etc.}$$

Quae resolvitur in has tres:

$$\begin{array}{ccccccccl}
+1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & +\frac{1}{5} & -\frac{1}{6} & +\text{etc.} & = & \int \frac{dz}{1+z} \\
+\frac{2}{1} & -\frac{2}{3} & +\frac{2}{5} & -\frac{2}{7} & +\frac{2}{9} & -\frac{2}{11} & +\text{etc.} & = & \int \frac{2\,dz}{1+zz} \\
-\frac{8}{3} & +\frac{8}{7} & -\frac{8}{11} & +\frac{8}{15} & -\frac{8}{19} & +\frac{8}{23} & -\text{etc.} & = & -\int \frac{8zz\,dz}{1+z^4}
\end{array}$$

et summa omnium est $= \ell\,2 + \frac{\pi}{2} - \pi\sqrt{2} + \frac{4}{\sqrt{2}}\ell\left(1+\sqrt{2}\right)$ unde non video quomodo summa possit esse[3] $= \pi - 4\,\ell\,2$; sin autem res ita se haberet foret $\pi = \dfrac{10\,\ell\,2 + 4\sqrt{2}\cdot\ell\left(1+\sqrt{2}\right)}{2\sqrt{2}+1}$.

III. Seriei $\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right) + \text{etc.}$ summa est

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{dz\,\left(1-z+zz-z^3\right)}{1+z^4} = \int \frac{dz\,\left(1+zz\right)}{1+z^4} - \int \frac{z\,dz}{1+z^4} - \int \frac{z^3dz}{1+z^4} \\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} - \frac{\ell\,2}{4}.
\end{aligned}$$

IV. Si fuerit $\int d\,\frac{xx\,dz}{dx} = \int \frac{dx}{1+x^3}$ erit utique

$$dz = \frac{dx}{xx}\int\frac{dx}{1+x^3} = \frac{dx}{xx}\left(x - \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^{10}}{10} + \text{etc.}\right)$$

et

$$z = C + \ell\,x - \frac{x^3}{3\cdot 4} + \frac{x^6}{6\cdot 7} - \frac{x^9}{9\cdot 10} + \text{etc.}$$

Constans autem C si z deberet simul cum x evanescere foret infinita; sin autem C maneat indefinita tum casu $x = 1$ quantitas z indefinitum hoc est quemcunque valorem obtinebit.

V. Sinus ang. $18°$ est $= \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ et sin. ang. $54°$ est $= \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$ unde erit $\dfrac{1}{\sin. 18°} - \dfrac{1}{\sin. 54°} = 2$, id quod etiam tabulae sinuum ostendunt; est enim $\dfrac{1}{\sin. 18°} = \sec. 72°$ et $\dfrac{1}{\sin. 54°} = \sec. 36°$.

VI. Serierum sequentium summae sunt[4]

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{8x-5}-\frac{1}{8x-3}\right) &= \int \frac{dz\,\left(zz-z^4\right)}{1-z^8} = \int \frac{zz\,dz}{(1+zz)\,(1+z^4)} \\
&= \frac{\pi}{4\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi\left(\sqrt{2}-1\right)}{8} \\
\left(\frac{1}{8x-1}-\frac{1}{8x+1}\right) &= \int \frac{dz\,\left(z^6-z^8\right)}{1-z^8} = \int \frac{z^6\,dz}{(1+zz)\,(1+z^4)} \\
&= 1 - \int \frac{dz\,\left(1+zz+z^4\right)}{(1+zz)\,(1+z^4)} \\
&= 1 - \frac{1}{2}\int \frac{dz}{1+zz} - \frac{1}{2}\int \frac{dz\,(1+zz)}{1+z^4} \\
&= 1 - \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{4\sqrt{2}} = 1 - \frac{\pi\left(1+\sqrt{2}\right)}{8} \\
\left(\frac{1}{6x-5}-\frac{1}{6x-2}\right) &= \int \frac{dz\,\left(1-z^3\right)}{1-z^6} = \int \frac{dz}{1+z^3} \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{dz}{1+z} + \frac{1}{3}\int \frac{2dz - z\,dz}{1-z+zz} \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{dz}{1+z} - \frac{1}{6}\int \frac{2z\,dz - dz}{1-z+zz} + \frac{1}{2}\int \frac{dz}{1-z+zz} \\
&= \frac{\ell\,2}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

VII. Seriei $1 - \frac{1}{2^{2n-1}} + \frac{1}{3^{2n-1}} -$ etc. jamdudum quoque conjectavi summam esse $= p\,(\ell\,2)^{2n-1}$ at casu $n = 2$ facile statim deprehendi valorem ipsius p nequidem rationaliter exhiberi posse.[5]

R 744 [Petersburg, ca. December 1739]
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. III, fol. 211r–212r
Address (fol. 212v): "A Monsieur / Monsieur Goldbach / Conseiller &c."
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 93–96; *Euler-Goldbach* (1965), p. 76–78

31
Goldbach to Euler
[Petersburg], (November 28th) December 9th, 1739[1]

Vir Celeberrime

Observavi heri denominatoribus 1; $1 \cdot 2$; $1 \cdot 2 \cdot 3$; $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$; &c. innumeris modis assignari posse numeratores algebraicos ita ut series tota fiat summabilis, sic verbi gr[atia]

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{19}{1 \cdots 6} + \frac{29}{1 \cdots 7} + \frac{41}{1 \cdots 8} + \frac{55}{1 \cdots 9} + \&\text{c.}$$

est

$$= \frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{5}{1 \cdots 6} + \frac{6}{1 \cdots 7} + \frac{7}{1 \cdots 8} + \frac{8}{1 \cdots 9} + \&\text{c.} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{3}{1 \cdot 2} - \frac{4}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \mathbin{{:}{+}{:}} \frac{6}{1 \cdots 5} + \frac{7}{1 \cdots 6} - \frac{8}{1 \cdots 7} + \frac{9}{1 \cdots 8} - \frac{10}{1 \cdots 9} + \&\text{c.} = 1,$$ [2]

quae quidem facile demonstrari possunt; sed ex eodem fonte alia multo abstrusiora derivantur, ut si haec series

$$\frac{a+1}{n} + \frac{2a+3}{1 \cdot 2\, n^2} + \frac{3a+7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot n^3} + \frac{4a+13}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 n^4} + \&\text{c.}$$

(cuius terminus generalis est $\dfrac{ax + x^2 - x + 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots x\, n^x}$) fiat $= -1$, posito pro a numero quocunque, dico, ut aequationi satisfiat, sumendam esse $n = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$.

C. G.

d. 9. Dec. 1739.

R 745 [Petersburg], (November 28th) December 9th, 1739
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 25r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 97–98; *Euler-Goldbach* (1965), p. 78

32
Euler to Goldbach
[Petersburg], December 9th (20th), 1739[1]

Vir Celeberrime

Omnes series quae continentur in hac formula generali $\dfrac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots x \cdot n^x}$ summari possunt per quantitates exponentiales et algebraicas conjunctim.[2] Quare si vel coefficientes α, β, γ, δ, etc. vel numerus n ita determine[n]tur, ut exponentialia evanescant, obtinebuntur omnes series hujus formae, quae summas algebraicas habere possunt. Quod ut clarius appareat per partes progrediar.

Seriei cujus terminus generalis est	summa erit
$\dfrac{\alpha}{1\cdot 2\cdot 3\cdots x\cdot n^x}$	$e^{\frac{1}{n}}\alpha-\alpha$
$\dfrac{\beta x}{1\cdot 2\cdot 3\cdots x\cdot n^x}$	$e^{\frac{1}{n}}\beta\cdot\dfrac{1}{n}$
$\dfrac{\gamma x^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdots x\cdot n^x}$	$e^{\frac{1}{n}}\gamma\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)$
$\dfrac{\delta x^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdots x\cdot n^x}$	$e^{\frac{1}{n}}\delta\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}\right)$
$\dfrac{\varepsilon x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdots x\cdot n^x}$	$e^{\frac{1}{n}}\varepsilon\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{7}{n^2}+\dfrac{6}{n^3}+\dfrac{1}{n^4}\right)$
$\dfrac{\zeta x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdots x\cdot n^x}$	$e^{\frac{1}{n}}\zeta\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{15}{n^2}+\dfrac{25}{n^3}+\dfrac{10}{n^4}+\dfrac{1}{n^5}\right)$
$\dfrac{\eta x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdots x\cdot n^x}$	$e^{\frac{1}{n}}\eta\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{31}{n^2}+\dfrac{90}{n^3}+\dfrac{65}{n^4}+\dfrac{15}{n^5}+\dfrac{1}{n^6}\right)$.

Lex secundum quam hae summae progrediuntur ita est comparata, ut termino generali $\dfrac{\psi x^{k+1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots x\cdot n^x}$ respondeat summa haec

$$e^{\frac{1}{n}}\psi\left(\frac{1}{n}+\frac{2^k-1}{1n^2}+\frac{3^k-2\cdot 2^k+1}{1\cdot 2n^3}+\frac{4^k-3\cdot 3^k+3\cdot 2^k-1}{1\cdot 2\cdot 3n^4}+\frac{5^k-4\cdot 4^k+6\cdot 3^k-4\cdot 2^k+1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4n^5}+\text{etc.}\right).$$

Ex his igitur perspicitur seriei cujus terminus generalis est $\dfrac{\alpha}{1\cdot 2\cdot 3\cdots x\cdot n^x}$ summam algebraicam omnino esse non posse.[3] Sit ergo terminus generalis $=\dfrac{\alpha+\beta x}{1\cdot 2\cdot 3\cdots x\cdot n^x}$ erit ejus summa $=e^{\frac{1}{n}}\left(\alpha+\dfrac{\beta}{n}\right)-\alpha$: unde summa toties erit algebraica eaque $=-\alpha$, quoties fuerit $\alpha n+\beta=0$ seu $n=-\dfrac{\beta}{\alpha}$.

Hicque continentur bini casus priores a Te Vir Celeb[errime] mihi perscripti, quos quidem facile posse demonstrari dicis. Sit autem terminus generalis $=\dfrac{\alpha+\beta x+\gamma x^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdots x\cdot n^x}$ erit summa $=e^{\frac{1}{n}}\left(\alpha+\dfrac{\beta+\gamma}{n}+\dfrac{\gamma}{n^2}\right)-\alpha$. Summa igitur erit algebraica scilicet $=-\alpha$ si fuerit $\alpha n^2+(\beta+\gamma)\,n+\gamma=0$ seu

$$n=\frac{-\beta-\gamma\pm\sqrt{\left(\beta^2+2\beta\gamma+\gamma^2-4\alpha\gamma\right)}}{2\alpha}.$$

Hic continetur series illa abstrusior

$$\frac{a+1}{n}+\frac{2a+3}{1\cdot 2\,n^2}+\frac{3a+7}{1\cdot 2\cdot 3\,n^3}+\text{etc.}$$

cujus terminus generalis est $\dfrac{1+(a-1)\,x+x^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdots x\cdot n^x}$, cujus ob $\alpha=1$, $\beta=a-1$, $\gamma=1$ summa est $e^{\frac{1}{n}}\left(1+\dfrac{a}{n}+\dfrac{1}{nn}\right)-1$, quae ideo fiet algebraica atque $=-1$ si sit $nn+an+1=0$ seu $n=\dfrac{-a\pm\sqrt{(aa-4)}}{2}$. Simili modo ulterius progredi licet, et cum seriei, cujus terminus generalis est

$$=\frac{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+\zeta x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots x\cdot n^x}$$

summa sit

$$=-\alpha+e^{\frac{1}{n}}\left(\alpha+\frac{\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta}{n}+\frac{\gamma+3\delta+7\varepsilon+15\zeta}{n^2}+\frac{\delta+6\varepsilon+25\zeta}{n^3}+\frac{\varepsilon+10\zeta}{n^4}+\frac{\zeta}{n^5}\right),$$

haec summa algebraica esse non potest, quin simul fiat $=-\alpha$; erit autem haec summa $=-\alpha$ si fuerit n radix hujus aequationis

$$\alpha n^5+(\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta)\,n^4+(\gamma+3\delta+7\varepsilon+15\zeta)\,n^3+(\delta+6\varepsilon+25\zeta)\,n^2+(\varepsilon+10\zeta)\,n+\zeta=0.$$

Hac igitur methodo non solum innumerabiles series istius formae $\dfrac{X}{1\cdot 2\cdot 3\cdots x\cdot n^x}$ ubi X functionem denotat algebraicam ipsius x quamcunque rationalem, exhiberi possunt algebraice summabiles, sed etiam intelligitur praeter has inventas alias omnino non dari. Vale Vir Celeberrime ac fave

Tui observantissimo

L. Eulero

d. 9. Dec. 1739

R 746 Reply to nº 31
[Petersburg], December 9th (20th), 1739
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. III, fol. 215r–216r
Address (fol. 216v): "A Monsieur / Monsieur Goldbach / Conseiller de Justice et / Membre de l'Academie Imp[eriale] / à / Petersburg"
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 99–101; *Euler-Goldbach* (1965), p. 79–80

33
Goldbach to Euler
[Petersburg], (February 21st) March 3rd, 1740

Monsieur

Je viens d'apprendre que vos appointemens ont été reglés avec approbation de S[on] Excell[enc]^{e} Mons[ei]^{g}[neu]^{r} le Comte d'Ostermann de la manière que Vous l'aviez souhaité,[1] je vous en felicite de tout mon Coeur et suis avec beaucoup d'Estime

Monsieur
Votre trèshumble et très-obéïssant serviteur
Goldbach.

le 3. Mars n[ouveau] st[yle]
1740.

R 747 [Petersburg], (February 21st) March 3rd, 1740
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 27r
Address (fol. 28v): "A Monsieur / Monsieur Euler / de l'Academie / des Sciences"
Published: *Euler-Goldbach* (1965), p. 80

34
Euler to Goldbach
[Petersburg], August 21st (September 1st), 1740

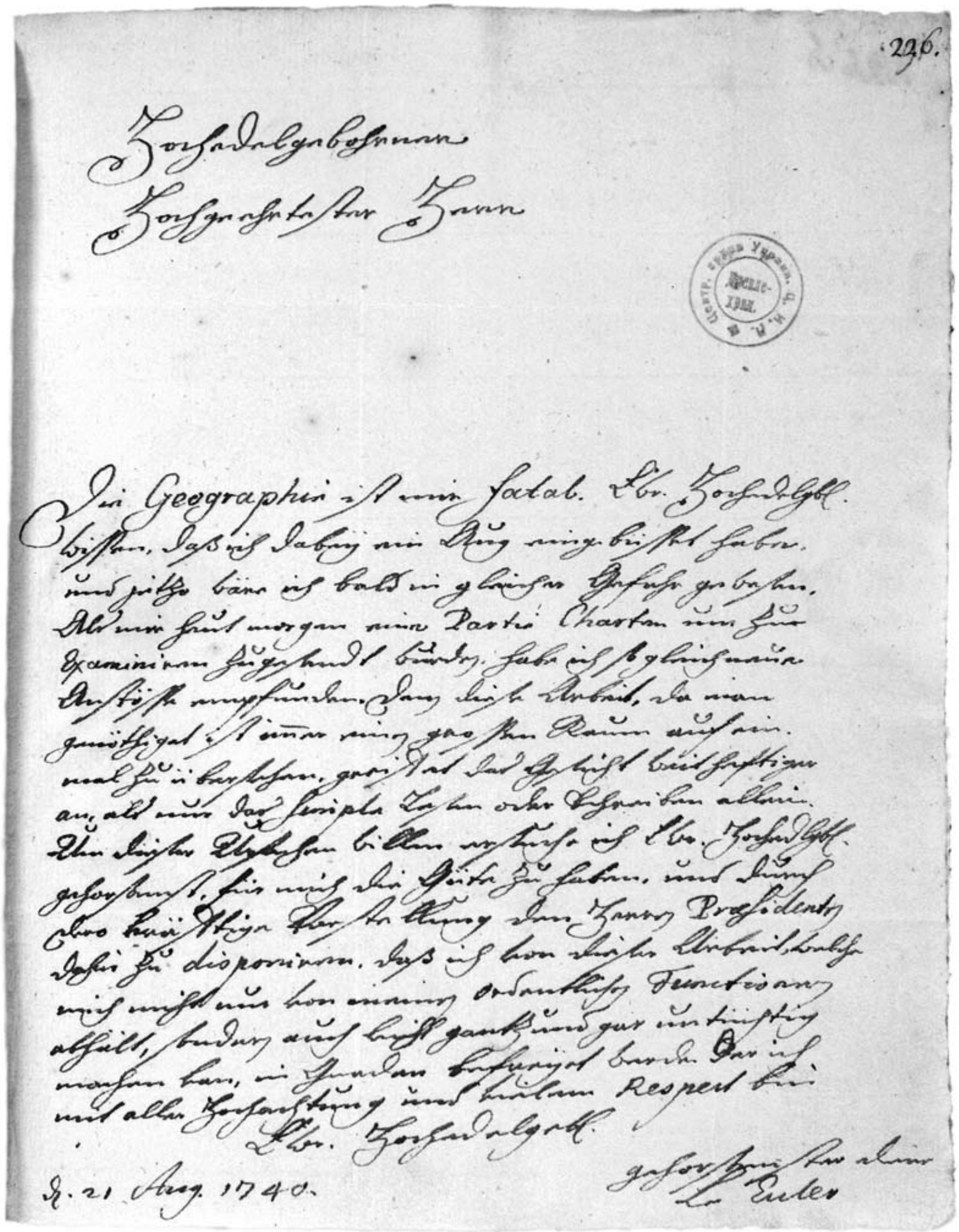
Hochedelgebohrner
Hochgeehrtester Herr

Die *Geographie* ist mir *fatal*. Ewr. Hochedelgb. wissen, daß ich dabey ein Aug eingebüsset habe,[1] und jetzo wäre ich bald in gleicher Gefahr gewesen. Als mir heut morgen eine *Partie Chart*en um zu *Examini*ren zugesandt wurden,[2] habe ich so gleich neue Anstösse empfunden. Denn diese Arbeit, da man genöthiget ist immer einen grossen Raum auf einmal zu übersehen, greiffet das Gesicht weit heftiger an, als nur das simple Lesen oder Schreiben allein. Um dieser Ursachen willen ersuche ich Ewr. Hochedelgb. gehorsamst, für mich die Güte zu haben, und durch Dero kräfftige Vorstellung den Herren *Praesident*en dahin zu *disponi*ren, daß ich von dieser Arbeit, welche mich nicht nur von meinen ordentlichen *Function*en abhält, sondern auch leicht gantz und gar untüchtig machen kan, in Gnaden befreyet werde[3] der ich mit aller Hochachtung und vielem *Respect* bin

Ewr. Hochedelgeb.
gehorsamster Diener
L. Euler

den 21 *Aug.* 1740.

R 748 [Petersburg], August 21st (September 1st), 1740
Original, 1 fol. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. III, fol. 226r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 102; *Euler-Goldbach* (1965), p. 81



226.

Hochedelgebohrner
Hochgeehrtester Herr

Die Geographie ist mir fatal. Ew. Hochedelgeb.
wissen, dass ich dabey ein Aug eingebüsst habe,
und jetzo wäre ich bald in gleicher Gefahr gewesen.
Als mir heut morgen eine Partie Charten um zu
examiniren zugeschickt wurden, habe ich sogleich neue
Anstösse empfunden. Dann diese Arbeit, da man
genöthiget ist einen ziemlich grossen Raum auf ein-
mal zu übersehen, greift das Gesicht weit heftiger
an, als nur das simple Lesen oder Schreiben allein.
Um dieser Ursachen willen ersuche ich Ew. Hochedelgeb.
gehorsamst, für mich die Güte zu haben, und durch
Dero kräftige Vorstellung den Herrn Praesidenten
dahin zu disponiren, dass ich von dieser Arbeit, welche
mich nicht nur von meinen ordentlichen Functionen
abhält, sondern auch leicht ganz und gar untüchtig
machen kan, in Gnaden befreyet werde. Der ich
mit aller Hochachtung und vollkommenem Respect bin
Ew. Hochedelgeb.

gehorsamster Diener
L. Euler

d. 21 Aug. 1740.

Euler's letter n° 34 to Goldbach, August 21st (September 1st), 1740: reproduction of the *recto* page (RGADA, f. 181, n. 1413, č. III, fol. 226r)

Euler complains of the threat his work at the department of geography poses for his eyesight and asks for Goldbach's help in getting a dispensation.

35
Goldbach to Euler
[Petersburg], August 21st (September 1st), 1740

HochEdler Herr,
Hochgeehrter Herr *Professor*,

So bald ich (*Tit. Tit.*)[1] den Hn *Etats*Rath von *Brevern* spreche will ich nicht unterlassen demselben die gehörige Vorstellung wegen Eurer HochEd. kränckliche Zustandes zu thun, weil ich aber nicht gewiß bin ob solches morgen oder erst über einige Tage wird geschehen können, hingegen bey dieser Sache *periculum in mora* ist, so halte ich davor, daß Ew. HochEd. wohl thun werden, wann Sie ohne Zeitverlust den Hn *Praesident*en und den Hn Rath *Schumacher* schrifftlich benachrichtigen, daß sie ohne offenbahre Gefahr Ihrer Gesundheit die *Geographi*schen *Occupations* nicht fortsetzen können sondern dieselben so lange biß Sie sich besser befinden werden, aussetzen müssen.[2] Indessen habe ich heute mit vielem Vergnügen von Hn *Secr*[*etaire*] *Tiedeman* vernommen, daß Ew. HochEd. sich schon etwas besser befinden; ich wünsche hertzlich Sie ehestens völlig *restitui*ret zu sehen und verbleibe mit sonderbahrer *Consideration*

Ew. HochEdlen
Dienstergebenster Diener
Goldbach.

den 21. *Aug.* 1740.
in Eil

R 749 Reply to n° 34
[Petersburg], August 21st (September 1st), 1740
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 29rv
Address (fol. 30v): "A Monsieur / Monsieur Euler / de l'Academie des Sciences"
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 103; Euler-Goldbach (1965), p. 81

36
Euler to Goldbach
[Petersburg], April 18th (29th), 1741

Hochedelgebohrner
Hochgeehrter Herr *Justiz*-Rath

Im Falle der H. *Prof. Krafft* noch nicht sollte des *Schotenii Exercitationes* Ewr. Hochedelgb. zugeschickt haben; so habe die Ehre damit aufzuwarten; ich habe daraus die *Numeros primos* von dieser *Form* $4n+1$ biß auf 3000 ausgeschrieben; und gegen Dero *Observation* keine *Exception* gefunden.[1]

Der H. *De l'Isle* geht diesen Augenblick von mir weg, und hat mir gesagt, daß bey Neuss schon würklich eine blutige *Bataille* vorgegangen, wobey von Preussischer Seite zwey Prinzen nebst einigen *Generalen*, von Österreichischer Seite aber der *General Lentulus* nebst noch vielen anderen geblieben; doch endlich aber die Preussen das Feld behalten haben.[2] Auch soll *Mr. Maupertuis* welcher in Schlesien von dem König Abschied nehmen wollen, bey dieser *Action* verlohren gegangen seyn.[3]

Ich habe die Ehre mit allem *Respect* zu seyn

Ewr. Hochedelgeb.

gehorsamster Diener

L. Euler

den 18 *Apr.* 1741

R 750 [Petersburg], April 18th (29th), 1741
Original, 1 fol. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. III, fol. 251r
Published: *Euler-Goldbach* (1965), p. 82

37
Goldbach to Euler
[Petersburg], June (7th) 18th, 1741

Hochgeehrter Herr *Professor*,

Bey Dero Ankunfft in Berlin bitte ich von Hn Geheimen Rath Vockerod zu vernehmen, ob demselben meine zwey Briefe (1.) vom 12. *Nov.* 1740 nebst einem Einschluß an Hn *von Wartenberg*, (2.) vom 10. *Jan. st. n.* 1741 nebst einem Einschluß an Hn von *Podevils* abgegeben worden.[1]

Im übrigen wünsche ich nochmahls eine glückliche Reise[2] und verbleibe mit aller ersinnlichen Hochachtung

Eurer HochEdelgebohrnen

ergebenster Diener

Goldbach.

den 18. *Jun.* 1741.
st. n.

R 751 [Petersburg], June (7th) 18th, 1741
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 31r
Address (fol. 32v): "A Monsieur / Monsieur Euler / de l'Academie des / Sciences"
Published: *Euler-Goldbach* (1965), p. 82

38
Euler to Goldbach
Berlin, August 1st, 1741

Hochedelgebohrner Herr *Justiz*-Rath
Hochgeehrtester Herr

Ewr Hochedelgeb. Wohlgewogenheit und Freundschaft ist gegen mich jederzeit so ungemein groß gewesen, daß ich mich nicht im Stande befinde darfür gebührender massen Dank abzustatten. Ich nehme also die Freyheit Ewr Hochedelg. eine kurze *Relation* von unserer Reise und meinem gegenwärtigen Zustande allhier zu überschreiben; und dieses um so viel mehr, da Dieselben solches bey meinem Abschied ausdrücklich von mir zu verlangen die Güte gehabt haben.

Nachdem wir den 19 *Jun. st. n.* nachmittag von Petersburg abgefahren, und den 20$^{\text{ten}}$ in *Cron*statt zwischen der gantzen Russischen Flotte vor Anker gelegen, sind wir den 21$^{\text{ten}}$ mit völlig *contrair*em Winde durch die Kriegs-Schiffe *lavir*et, und gantz langsam fortgesegelt, biß wir um Mitternacht bey der Brandwacht angekommen. Den 23$^{\text{ten}}$ sahen wir an den Finnischen Küsten die gantze Schwedische Flotte, und wurden auch von einer Schwedischen *Fregatt*e angehalten, deren *Offici*er sich bey unserm Schiffer wegen des Zustands der Russischen Flotte weitläuffig erkundigte: ich musste mich recht verwundern wie unser Schiffer dem Schwedischen *Officier* vorlog, indem er die Anzahl der Russischen Schiffe verdoppelte, und dabey vorgab, daß sich darunter Schiffe von 130 *Canon*en befänden.[1] Des Abends *passir*ten wir bey gutem Weter Hoch-Land. Die Insul *Dagho* fuhren wir den 26$^{\text{ten}}$ vorbey, als wir mehr als 24 Stund einen ziemlich heftigen Sturmwind ausgestanden hatten; ein gleicher Wind stellte sich wiedrum den 27$^{\text{ten}}$ ein welcher biß den folgenden Tag fort daurte, da wir endlich bey der Nördlichen Küste von *Gothland* ankamen; die folgenden Tage hatten wir schönes Wetter aber entweder gar keinen oder doch *contrair*en Wind, so daß wir biß den 5$^{\text{ten}}$ *Julii* zu brachten, ehe wir die Südlichen Küsten von Gothland vorbey segelten, welche *Distanz* doch nicht mehr als 18 Meilen austrägt. Hierauf war der Wind immer gut aber sehr schwach, und bekamen den 8$^{\text{ten}}$ *Julii* Bornholm, den 10$^{\text{ten}}$ aber die Insul Rügen, und die Mündung der Oder zu gesicht. Von da fuhr ich allein auf einem Fahrzeug den Fluß hinauf 2 Meilen weit biß nach *Wolga*st, allwo den 11$^{\text{ten}}$ auch das Schiff glücklich ankam, nach dem wir drey Wochen auf der See zugebracht hatten und meine gantze Gesellschaft ausser mir allein meistentheils elend krank gelegen war. Den 12$^{\text{ten}}$ *transportir*ten wir uns auf ein Stettiner Schiff, welches gleichfalls von Petersburg gekommen, und fuhren bey dem schönsten Wetter durch die angenehmsten Gegenden den Fluß hinauf biß nach Stettin, dahin wir den 13$^{\text{ten}}$ erwünscht angekommen. Daselbst hatte ich Gelegenheit mit dem H. OberHofprediger *Mauclerc* genaue Bekanntschaft zu machen, welchem ich das *Academi*sche *Pacquet* überreichte, und ein ergebenstes *Compliment* von dem H. *Secret*[*aire*] *Tiedeman* ablegte.[2] Durch *Recommendation* des H. Raths *Heinzelmann*s wurde ich auch bekannt mit dem H. *Secretario Bulle*, welcher mir viel Freundschaft erwieß; der H. Ober*Praesident* von *Grumkow* ließ mich zur Tafel *inviti*ren und den 20ten gieng ich in eine *Disputation*, welche im *Gymnasio* unter dem *Praesidio* des H. *Prof. Stissers* gehalten wurde, allwo ich die meisten von den dasigen H. textitProfessoribus kennen lernte. Den 22ten *Julii* hatte ich eine Kutsche und Frachtwagen bestellt, mit welchen wir von Stettin gegen Abend abfuhren, und endlich den 25ten nachmittag allhier zu Berlin glücklich ankamen. In Stettin hatte ich schon von hier Nachricht bekommen, daß für mich ein *Quartier* auf dem Königl[ichen] *Address-Contoir* bey dem H. Hofrath Wilken auf die *Ordres* des H. *Stehelin*s gemiethet worden, welches wir füglich sogleich bezogen. Wir haben das gantze untere *Etage*, so aus 8 Zimmern einer Küche und allen *Commoditäten* bestehet.[3] Der H. *Baron* von *Mardenfeld*[4] hatte mich an des H. *Cabinet-Ministre* von *Borck Excell*[*enz*] *addressi*rt, welcher mich sehr gnädig empfangen, und versprochen meinetwegen so gleich an Ihro Königl[iche] *Majestä*t Bericht abzustatten. Ich habe auch an Ihre *Excell*[*enz*] den H. *CabinetsMinistre* von *Podewils* geschrieben, und das mir von dem Fr[anzösischen] *Ambassadeur Marquis de Chetardie* an denselben ertheilte *Recommendations* Schreiben zugesandt. Ich hatte auch noch zwey *Recommendations*Schreiben von dem H. *Ambassadeur* an den H. von *Brand Grand Maitre d'Hotel de la Reine Mere*, und an H. *Achard*, welche mich ungemein höflich aufgenommen haben; der Russische *Ministre* H. von *Brackel* hat mich auch seiner Gnade versichert. Übrigens habe ich hier schon gute Bekanntschaft gemacht mit dem H. Hofrath und Leib*medico Eller*, dem H. Grafen *Algarotti*, dem H. Hofrath *Jariges*, welcher die Stelle eines *Secretarii* bey der Königl[ichen] *Societä*t verwaltet, und den H. *Professoribus Naudé* und Wagner, so daß meine Ankunft allhier biß *dato* noch höchst vergnügt gewesen, und ich mit Gottes Hülfe das angenehmste Leben zu hoffen Ursache habe. Ewr. Hochedelg. *Compliment* an den H. Geheimen Rath *Culenman* und Fr[au] Gemahlin habe ich noch nicht außrichten können, weilen sich Dieselben jetzo auf dem Lande aufhalten. Von *Petersburg* habe ich noch keine Briefe erhalten, und weiß also nicht wie meine hinterlassenen Sachen daselbst stehen. Erstlich beförchte ich meine rückständige *Gage* vom 1 *Jan.* biß den 1 *Jun.* möchte mir nicht ohne *Chicann*en bezahlet werden, weilen mir die Sache wegen meines Hauses so mißlich vorkommt;[5] dann ich habe schon die Ehre gehabt Ewr. Hochedelgb. anzudeuten, daß ich auf der Cantzley eine Schrifft unterschrieben, durch welche ich mich verbunden der *Academi*e mein Hauß für denjenigen Preiß zu überlassen welchen die *Architecti* setzen würden, wobey ich freywillig mündlich *declari*rt, daß wann auch die *Architecti* mein Hauß höher als 400 R. *taxi*ren sollten, ich dennoch nicht mehr als 400 R. verlangte, weilen ich von fremden Käuffern, wie Ewr. Hochedelgb. wohl bekannt, nicht mehr als 400 R. gefordert hatte. Nun haben die *Architecti* das Hauß in aller *Form* auf 400 R. *taxi*rt; dem ungeacht aber ließ der H. Rath Schumacher ohne mit mir deswegen ein Wort zu sprechen, auf den Buchladen nur 300 R. darfür *assigni*ren; ich hielte solches anfänglich für ein Versehen, allein der H. Rath Schumacher sagte mir den Tag vor meiner Abreise, daß solches mit Fleiß geschehen wäre, weilen Er, als ich bey Unterschreibung der Schrifft von 400 R. gesprochen, nur 300 R. verstanden hätte. Ich sagte darauf weiter nichts anders, als daß mir solches nie in Sinn gekommen; dabey *declarir*te ich Ihm die

Zeit meiner Abreise, und bat Leute zu schicken, welche vom Hause *Possession* nehmen, ich vernahm aber in *Cronstat*, daß Er einen gantzen Tag nach meiner Abreise noch niemand gesandt hatte. Ingleichem da im Kaiserl[ichen] Cabinet allergnädigst *resolvi*rt worden, mir nach dem Gutachten der *Academi*e eine *Gratification* zu ertheilen, beförchte ich solches möchte auch durch den H. Schumacher hintertrieben werden. Deswegen ersuche Ew. Hochedelgb. gehorsamst mir eine *Copie* von der meinetwegen aus dem *Cabinet* ergangnen *Resolution* gütigst zukommen zu lassen,[6] und nehme die Freyheit Denselben diese meine *Affair*en bestens zu *recommendi*ren, der ich mit aller schuldigsten Hochachtung lebenslang verharre

Ewr. Hochedelgeb.
gehorsamster Diener
Leonhard Euler

Berlin den 1 *Aug.*
1741.

R 752 Berlin, August 1st, 1741
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. III, fol. 255–256v
Published: *Euler-Goldbach* (1965), p. 82–84

39
Goldbach to Euler
Petersburg, August (8th) 19th, 1741

HochEdelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*

Eurer HochEdelgebohrnen Schreiben vom 1. *Aug.* habe ich den 13. *ejusd*[*em*] allhie erhalten[1] und daraus mit grosser Freude ersehen, daß Sie nach zurückgelegter langwieriger Reise sich nunmehro vergnügt in Berlin befinden; die *Connoissances*, so Sie daselbst schon gemacht haben, scheinen mir alle von besonderer *importance* zu seyn und lassen mich nicht zweiffeln daß ihr dortiger Aufenthalt mit ihrem eigenen Wunsch völlig übereinstimmen werde.

Die *Resolution* davon Ew. HochE. eine Copey verlangen,[2] habe ich noch nicht gesehen, und was Dero übrige *Academi*sche Geld*affai*ren betrifft halte ich dafür daß selbige am besten und kürtzesten durch eine Vorstellung an I[hro] Kays[erlichen] M[ajestä]t hohes *Cabinet* zum Schluß kommen werden, wozu Eurer HochEdelgeb. der Herr *Baron* von Mardefeld welcher sich Ihrer Angelegenheiten bißhero so rühmlich angenommen hat, für andern wird beförderlich seyn können; ich werde indessen nicht unterlassen so offt ichs nöthig und Eurer HochE. *interesse* fürträglich halte, das meinige beyzutragen; ich glaube auch daß es nicht schaden könnte wann Sie an Hn *Legation*s-Rath *Groß* von Ihren *Academi*schen *pretensions* umständliche Erwegung thun möchten.

Was halten E. H. von dergl[eichen] *propositionibus*: $(3m+2)n^2+3$ kan niemahls ein *numerus quadratus* seyn *positis pro m et n numeris integris quibuscunque*.[3]

In den Zeitungen von Gelehrten Sachen habe ich unlängst gelesen daß die beyden Mönchen so *Newtoni Principia Math*[*ematica*] herausgeben Eurer HochE. *Mechanicam* starck gebraucht haben.[4]

Wann Sie auf die Königl[iche] *Bibliotheque* in Berlin gehen werden, lassen Sie sich doch *Joh*[*annis*] *de Luneschlos Thesaurum Mathematum reseratum per Algebram novam*[5] *Patavii* 1646 *in fol*[*io*] und *Petrum Bungum de Numerorum mysteriis*[6] *in* 4.*o* zeigen; ich habe *A*[*nno*] 1718 diese Bücher, aber nur obenhin, gesehen,[7] und kan mich fast gar nichts mehr von der selben Inhalt erinneren.

Ich verbl[eibe] nechst gehorsamster Empfehlung an Dero Frau Liebste und sämmtl[iche] *Familie*, Ew. HochEdelgebohrnen

dienstergebenster Diener

Goldbach.

S.t Petersburg
den 19. *Aug.* 1741 *st. n.*

R 753 Reply to n° 38
Petersburg, August (8th) 19th, 1741
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 33–34r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 104; *Euler-Goldbach* (1965), p. 84–85

40
Euler to Goldbach
Berlin, September 9th, 1741

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Justiz*Rath

Ewr. Hochedelgeb. befinde ich mich doppelt verpflichtet: theils für Dero eigene geehrteste Zuschrifft, theils auch fürnehmlich für das Höchst gnädige Schreiben, welches Dieselben im Nahmen Ihro *Excell*[*enz*] des H. Grafen von *Ostermann*s an mich ausgefertiget haben.[1] Gleichwie ich nun Ewr. Hochedelgb. für Dero mir gütigst ertheilten Rath wegen meiner *Affaire* gehorsamst verbunden bin, so zweifle ich nicht, dieselbe werde nächstens zu einem glücklichen Ausgang gereichen, da Ewr. Hochedelgb. ohne Zweifel werden Gelegenheit gehabt haben, mit des H. Grafen von Osterman *Excell*[*enz*] wegen der meinetwegen aus dem *Cabinet* ergangenen *Resolution* weitläuffiger zu sprechen: inzwischen kan ich nicht begreiffen wie es zugegangen, daß Ewr. Hochedelgb. diese *Resolution* noch nicht ist *communicir*t worden, woraus ich nichts anders schliessen kan, als daß darauf aus der *Academi*e noch nicht müsse geantwortet worden seyn. Ehe ich mich *resolvi*ren kan mit dieser meiner *Affair*en den H. *Baron* von Mardenfeld zu bemühen, so habe noch vorher in den *obligeant*sten *Terminis* an den H. Rath Schumacher geschrieben,[2] um im Fall einer abschlägigen oder gar keiner Antwort grösseres Recht zu haben meine Forderung an höherem Ort anhängig zu machen. Ich habe auch meiner Schuldigkeit gemäß erachtet an Ihro *Excell*[*enz*] den H. Grafen *Golovkin* zu schreiben, und Demselben für die mir erwiesene besonders hohe Gnade Dank zu sagen, wobey ich nicht nur von der mir zuerkannten *Gratification* sondern auch von meiner rückständigen *Gage* und Hauß Erwehnung gethan.[3]

Der H. Geh[eime] Rath *Vockerodt*, welcher Sich noch in Breslau befindet lässt Ewr. Hochedelgb. Sein gehorsamst *Compliment* vermelden, und Sich wegen seiner grossen Geschäfte entschuldigen, daß Er noch nicht Ewr. H. zugeschrieben: er hat Dero beyde Briefe richtig erhalten und auch die Einschlüße wohl bestellet.[4]

Vor einigen Wochen haben Ihro *Maj*[*estät*] die Königl[iche] Frau Muter mich zu Sich hohlen lassen, und des Tags darauf hatte ich die Gnade bey Ihro *Maj*[*es*]*tät* zu speisen; und haben so wohl Ihro Majestät als die beyden Königl[ichen] *Princes*sinnen mich auf die Gnädigste und eine recht Leutseelige Art empfangen.[5] Ihro Königl[iche] *Majestä*t der König haben mich auch nicht nur durch den H. G[eheimen] Rath *Jordan* Dero Allerhöchsten Gnade und *Protection* versichern lassen, sondern auch Höchst eigenhändig nachfolgendes Schreiben zuzusenden die Gnade gehabt.[6]

> *Monsieur Euler. J'ai été bien aise d'apprendre que vous étes content de votre sort et établissement présent. J'ai donné les ordres necessaires au Grand Directoire pour la pension de* 1600 *Ecus, que Je vous ai accordée; s'il y a encore quelque chose dont vous aurez besoin, vous n'avez qu'à attendre mon retour à Berlin. Je suis*
>
> *Votre bien affectionné Roy*
>
> *Federic*
>
> *au Camp de Reichenbach*[7]
>
> *ce* 4*me* *sept* 1741.

Weilen Ihro *Majestä*t beschlossen haben ein neues Gebäu zur *Academie* aufzubauen,[8] so ist mir aufgetragen worden, einen vollständigen Riß von den *Academi*schen Gebäuden in S.t *Petersburg* zu verschaffen. Weilen nun alle diese Risse schon würkl[ich] in Kupfer gestochen, ich aber davon nicht leicht ein *Exemplar* von dem H. Schumacher hoffen darf,[9] so nehme die Freyheit Ewr. Hochedelgeb. gehorsamst zu ersuchen ein *Exemplar* von diesen Rissen kauffen und dem H. Stähelin überliefern zu lassen; ich werde mit nächster Post dem H. Stähelin schreiben daß er solche mit allem Dank bezahle und ungesäumt hieher schicke. Ich bitte diese meine Freyheit nicht übel zu nehmen, sondern der Ungewißheit, darinn ich mich befinde, ob jemand anders leicht ein *Exemplar* verschaffen kan, zuzuschreiben; vielleicht ist der H. *Secr*[*etaire*] *Tiedeman*, welchem mein ergebenstes *Compliment* mache im Stande diese Risse zu bekommen, und diese gantze *Commission* auszuführen.[10]

Die beyden gemeldten Bücher habe ich von der *Bibliothec* hohlen lassen, aber in *Petri Bungi mysteriis numerorum*[11] nicht das geringste merkwürdigs gefunden: er durchgehet der Ordnung nach alle Zahlen von 1, 2, 3, biß tausend, und merkt von einer jeden an, wo solche in der Heil[igen] Schrifft und andren *Auctoribus* vorkommen, als bey 38 bringt er nichts anders vor als das *Exempel* des kranken beym Teich zu *Betesda*, welcher 38 Jahre daselbst gelegen. Der Luneschloß ist ein sehr schönes Buch in seiner Art,[12] ich habe aber dasselbe noch nicht völlig durchgegangen.

Ewr. Hochedlgb. *Theorema* daß $(3m+2)\,n^2+3$ kein *Quadrat* seyn könne[13] ist sehr artig, und kan ich die Richtigkeit desselben auf folgende Art darthun: Entweder ist n durch 3 *divisib*[*el*] oder nicht, im ersten Fall ist n^2 *divisib*[*el*] durch 9, und bekommt die *Expression* $(3m+2)\,n^2+3$ eine solche *Form* $9p+3$, welche kein *Quadrat* seyn kan, wie bekannt. Im andern Fall wann n nicht durch 3 *divisib*[*el*] ist so ist n^2 eine solche Zahl $3p+1$, und $(3m+2)\,n^2+3$ bekommt diese *Form* $9mp+3m+6p+5$ das ist $3q+2$, von welcher *Form* gleichfalls bekannt, daß solche niemals ein *Quadrat* seyn kan. Ich habe vor langer Zeit auch solche ähnliche *Theoremata* gefunden: Als $4mn-m-1$ kan *nullo modo* ein *Quadrat* seyn. *Item* $4mn-m-n$ kan auch kein *Quadrat* seyn, *positis* m *et* n *numeris integris affirmativis*.[14]

Von den *Divisoribus quantitatis* $aa \pm mbb$ *si* a *et* b *sint numeri inter se primi* habe ich auch *curieuse proprietates* entdeckt, welche etwas *in recessu* zu haben scheinen,[15] als da sind:

Theor[*ema*] *1. Omnes divisores primi formulae* $aa-2bb$ *continentur in forma* $8n\pm 1$.

Theor[*ema*] *2. Omnes divisores primi formulae* $aa-3bb$ *sunt* $12n\pm 1$.

Theor[*ema*] *3. Nullus numerus primus potest esse divisor formae* $aa-5bb$ *nisi qui sit in hac forma* $10n\pm 1$ *contentus.*

Von den *Integralibus formulae* $\dfrac{dx}{(1-x^n)^{\frac{p}{q}}}$ habe ich auch merkwürdige *Proprietates* gefunden, *si post integrationem ponatur* $x=1$.[16] Als da sind:

Theor[*ema*]. *Integrale* $\int \dfrac{dx}{(1-x^4)^{\frac{3}{4}}}$ *se habet ad integrale* $\int \dfrac{dx}{(1-x^4)^{\frac{1}{2}}}$ *uti* $\sqrt{2}$ *ad* 1, *posito post utramque integrationem* $x=1$.

Theor[*ema*]. *Integrale* $\int \dfrac{dx}{(1-xx)^{\frac{5}{6}}}$ *se habet ad integrale* $\int \dfrac{dx}{(1-xx)^{\frac{2}{3}}}$ *uti* $\sqrt{3}$ *ad* 1, *posito pariter post utramque integrationem* $x=1$.

Welche *Theoremata* um soviel merkwürdiger scheinen, da sonsten nach der gewöhnlichen Art diese *Integralia* nicht mit einander *compari*rt werden können.

Ich habe die Ehre mit aller schuldigsten Hochachtung zu seyn nebst gehorsamster Empfehlung meiner gantzen *Familie*

Ewr. Hochedelgeb.
gehorsamster Diener
Leonh. Euler

Berlin den 9 *Sept.* 1741.

R 754 Reply to n° 39
Berlin, September 9th, 1741
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. III, fol. 259–260v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 105–107; *Euler-Goldbach* (1965), p. 85–87

41
Euler to Goldbach
Berlin, September 16th, 1741

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Justiz*-Rath

Ungeacht ich Ewr. Hochedelgb. erst vor 8 Tagen geschrieben, so befinde ich mich doch schon wiederum genöthiget Denselben gegenwärtiges zu *addressi*ren. Ich habe nehmlich mit der vorigen Post einen Brief von dem alten H. *Professore Joh*[*ann*] *Bernoulli* erhalten,[1] worinn Er den von mir in seinen *Meditationibus Hydraulicis* angemerkten Irrthum nicht nur erkennet, sondern auch beyligendes Blatt, worinn Er alles *corrigi*ret zugesandt, mit Ersuchen, solches unverzüglich nach *Petersburg* zu *expedi*ren, damit dasselbe noch zu rechter Zeit Seiner *Dissertation*, welche vermuthlich mit nächstem gedruckt werden dürfte, zu *inseri*ren. Er hat mir auch aufgetragen die Kaiserl[iche] *Academi*e in Seinem Nahmen zu bitten, daß man Sorge tragen möchte, daß erstlich der *Text* Seiner *Dissertationum correct* gedrucket, und dann auch die *Figur*en, welche nur *manu tremula* verfertiget, mit aller Zierlichkeit gestochen werden. Ich nehme allso die Freyheit dieses Anliegen des H. *Bernoulli* gehorsamst zu *recommendi*ren, und Ewr. Hochedelgb. zu bitten Sorge zu tragen, daß Demselben ein völliges Genügen geleistet werde.[2]

Vor etlichen Tagen hatte ich die Ehre bei des H. *Cabinet-Ministre* von *Borck Excell*[*enz*] zu speisen. Welcher der gantzen *Compagnie* die Hohe *Intention* Ihro Königl[ichen] *Majestä*t auf die Schlesische *Expedition Medaill*en zu prägen vorlegte, und mich *in Specie* ersuchte aus *S.t Petersburg* von denjenigen *habilen Person*en, welche Sich allda auf diese Sache *applicir*ten, einige Vorschläge zu verschaffen.[3] Ich habe dahero meiner Schuldigkeit erachtet Ewr. Hochedelgb. hievon Nachricht zu geben, und beyligendes *Billet*, worinn die Hohe *Intention* Ihro Königl[ichen] *Majestä*t enthalten, zuzuschicken, mit der gehorsamsten Bitte Dero Gedancken darüber im Fall Dieselben darauf *reflecti*ren wollen, mir zuzuschicken; ich werde davon solchen *Usage* machen, wie Ewr. Hochedelgeb. Selbst für gut befinden werden. Hiemit empfehle mich Ewr. Hochedelgeb. beständigen Wohlgewogenheit, und verbleibe mit aller ersinnlichen Hochachtung

Ewr. Hochedelgeb.
gehorsamster Diener
Leonh. Euler

Berlin den 16ten *Sept.*
1741

R 755 Berlin, September 16th, 1741
Original, 1 fol. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. III, fol. 261rv
Published: *Euler-Goldbach* (1965), p. 88–89

42
Goldbach to Euler
Petersburg, (October 27th) November 7th, 1741

HochEdelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*

Die sonderbahre *distinction* mit welcher Ew. HochEdelgeb. in Berlin aufgenommen worden hat mir nicht anders als sehr erfreulich seyn können, insonderheit habe ich das gnädigste Schreiben Ihro Königlichen Majestät an Ew. HochEd.[1] mit der grössesten *Veneration* gelesen und *admiri*ret. Es muß eine treffliche *directio* ⊙' oder ♃ *ad medium coeli* oder dergl[eichen] eine für Ew. HochEd. eingefallen seyn, welche *ex post facto* in dem *themate nativ*[*itatis*] sich wohl wird finden lassen.[2]

Die verlangten Kupfferstiche hat H. *Prof. Stählin* an Ew. HochEdelg. zu besorgen über sich genommen.[3]

Daß Sie in des *Leuneschlos Thesauro* etwas gutes gefunden ist mir sehr lieb.[4] Ich habe schon *A*[*nno*] 1716 in Königsberg von demselben *Autore* ein Tractätchen in 8. gelesen, welches er *paradoxa de quantitate* nennet, das 352.ste heist *Si Deus auferret omne corpus in vase contentum movendo vel annihilando, nec aliud ullum in ablati locum venire permitteret movendo aut creando, hoc ipso vasis latera forent contigua, nec vel tantillum amplius distarent.* Das 473. *Monstrosa et deformia etiam faciunt ad pulchritudinem mundi.* Das 522. *Si Luna esset concava, terra periret incendio.* Das 946. *Pondera campanarum sunt in triplicata ratione sonorum. Verum crassities fidium longitudine et tensione aequalium sunt in ratione duplicata sonorum.* Das 589. *Cum semidiameter gyrorum aquae quovis modo percussae secundo horae minuto dilatatus vix pedem exaequet, et semidiameter spirarum in aëre quavis etiam percussione procreatarum eodem tempore millium trecentorum ac octuaginta pedum existat sequitur aquam millibus trecentum et octuaginta* (1380) *vicibus aëre densiorem atque graviorem esse.*[5]

Der berühmte *Antiquarius* H. *Stosch* wird, weil er so viel ich mich erinnere ein Cüstriner von Geburt ist, denen Gelehrten in Berlin bekannt seyn, wann E. HochEdelg. erfahren wo er sich jetzo aufhält, bitte ich mir davon Nachricht zu geben.[6]

Da ich das vorhergehende schon längst geschrieben, darauf aber durch unterschiedene *distractions* ein mehreres bey zu fügen verhindert worden, so melde jetzo, damit die Antwort nicht gar zu lang aufgehalten werde, nur mit wenigem, daß ich von Eurer HochEdelg. *pension* über dasjenige so in meinem vorigen Briefe enthalten,[7] nichts berichten kan, wie wohl ich hoffe daß Sie auf ihre an hero geschriebene Briefe schon mehrere Nachrichten davon werden erhalten haben. In der *Mathemati*schen *piéce* ist die verlangte veränderung gemacht worden.[8] Für das mir übersandte *avertissement* die *medailles* betreffend bin ich Eurer HochEdlg. sehr verbunden,[9] und werde nicht unterlassen selbiges gut anzuwenden. Künfftig ein mehreres. Ich verbleibe mit besonderer Hochachtung

Eurer HochEdelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

In Eil

S.^{t} Petersburg
den 7. *Nov. st. n.* 1741.

R 756 Reply to n° 40 and n° 41
Petersburg, (October 27th) November 7th, 1741
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 35–36r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 108–109; *Euler-Goldbach* (1965), p. 89–90

43
Euler to Goldbach
Berlin, December 9th, 1741

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Justiz*-Rath

Die sonderbare Freude, welche Ewr. Hochedelgb. über mein glückliches *Etablissement* geschöpfet, erkenne mit der schuldigsten Ehrerbietung: und da Dieselben mir bißher so ungemeine *Prob*en Dero Gewogenheit und Freundschaft erwiesen haben, so wünsche nichts so sehr, als diese Höchstschätzbare Zuneigung gegen mich bestendig zu unterhalten. Ich hätte bey dieser Zeit gern aus *Curiosität* meine *Nativität* nachgesehen,[1] besann mich aber erst, daß ich dieselbe dem H. *Prof.* Kraft zurückgelassen. Der H. *Prof.* Stähelin hat mir geschrieben, daß drey *Exemplaria* von den *Academi*schen Kupferstichen dem H. *Brigadier Baudan* mitgegeben worden, welcher aber biß *dato* hier noch nicht angelanget.[2]

Für Ewr. Hochedelgb. Bemühungen wegen meiner *Academi*schen *Affairen* statte hiemit allen gehorsamsten Dank ab; meine Absicht gehet anjetzo nur dahin, wie ich meine ruckstendige *Gage* mit der Bezahlung für mein Haus bekommen möge, wozu ich nächstens bey der Ankunft der *Academi*schen Silberflotte gute Hoffnung habe.[3]

Was die *Pension* anlangt, wozu man mir hat Hoffnung machen wollen, weilen ich darum in *Petersburg* nicht angehalten, so werde ich auch von hieraus deswegen nicht ferner *supplici*ren. Ich habe schon berichtet daß meine hiesige *Occupation*en mich nicht verhindern der *Academi*e jährlich eben so viel *Piec*en zu überliefern, als wann ich noch daselbst gegenwärtig wäre; erachtet die *Academi*e diese meine geringe Dienste nützlich und einer *Pension* werth, so werde solche Gnade mit der grösten *Veneration* erkennen, und mich derselben aus allen Kräften würdig zu machen bestreben.[4]

Für die mir *communicir*ten *Paradoxa* des Lunenschloß[5] bin gehorsamst verbunden: es zeigen einige davon als von dem Ton der Glocken und Saiten eine richtige Einsicht in die *Natur*. Das von den Glocken steht aber schon in *Stifelii* Anmerkungen über die *Coss Christoff Rudolf*s.[6] Das jenige, welches Ewr. Hochedelgb. zuerst von der *annihilir*ten *Materia* in einem Geschirr geschrieben, scheinet auf diesem *Ratiocinio* zu beruhen: Ist keine *Materia* zwischen den Seiten des Gefässes, so ist nichts dazwischen, ist aber nichts dazwischen, so sind die Seiten aneinander, ungeacht das Gefäß seine vorige Figur behält. Ich halte aber dieses *Ratiocinium* für ein blosses *Sophisma*, und bey weitem nicht hinreichend die *impossibilitatem Vacui in Mundo* zu erweisen.

Der H. Geh[eime] Rath Wolf oder vielmehr seine Anhänger haben neulich einen harten Streit mit dem H. Segner *Prof*[*essore*] *Math*[*eseos*] in Göttingen bekommen, indem dieser einige grobe Fehler in des H. Wolfen *Elementis Matheseos* vorgab gefunden zu haben; es sind beyderseits schon verschiedene Schrifften gewechselt worden. Der H. Segner aber hat recht, und von Seiten des H. Wolfs sind die *Defension*en so schlecht beschaffen, daß daher der Wolfianischen *Philosophia* wenig Ehre zuwächst: man hätte besser gethan die Fehler zu erkennen, weilen dieselben gantz offenbar sind, und dieselben in einer neuen Ausgabe, woran würklich gearbeitet wird zu verbessern.[7]

Ich habe letstens auch ein merkwürdiges *Paradoxon* gefunden, nehmlich daß der Werth von dieser *Expression* $\dfrac{2^{+\sqrt{-1}}+2^{-\sqrt{-1}}}{2}$ *quam proxime* gleich sey $\dfrac{10}{13}$, und dieser Bruch *differir*t nur *in partibus millionesimis* von der Wahrheit. Der wahre Werth aber dieser *Expression* ist der *Cosinus* dieses *Arcus* 0,693 147 180 559 9 oder der *Arcus* von 39°, $42'$, $51''$, $52'''$, 9^{IV} in einem *Circul* dessen *Radius* $= 1$.[8]

Ich habe auch noch verschiedene wichtige *Decouvert*en gemacht über die *Integration* solcher *Formul*n $\dfrac{P\,dx}{Q}$, allwo P und Q *functiones quaecunque rationales* von x sind; wovon zu einer andern Zeit die Ehre haben werde Ewr. Hochedelgb. ausführlicher zu schreiben.[9]

Vorjetzo habe die Ehre Ewr. Hochedelgb. noch gehorsamst zu berichten, daß meine Frau letstens mit einer Tochter glückl[ich] niedergekommen;[10] der ich mich und alle die meinen Dero schätzbaren Gewogenheit unterthänig empfehle und mit aller schuldigen Hochachtung verharre

Ewr. Hochedelgeb.
gehorsamster Diener
Leonh. Euler.

Berlin den 9ten *Dec.*
1741.

P. S. Wegen des H. Stoschen[11] habe ich mich hier *informir*t: der H. *Prof. Muzelius* im *Joachims*thahlischen *Gymnasio* hat seine Schwester. Derselbe befindet sich würklich zu *Florenz*, allwo er von dem GroßHerzog eine reiche *Pension* geniesst, und seinen jüngeren Bruder bey sich hat, welcher auch ein grosser *Antiquarius* seyn soll. Von dem H. *Hedlinger* habe ich letstens Briefe gehabt aus *Arlesheim* im Bistum Basel, worinn er mir schreibt, daß die gegenwärtigen *Conjunctur*en nicht erlauben nach Norden zu reisen;[12] er arbeitet dort aus eigenem Trieb an einer *Medaille* zu Ehren Ihro Königl[ichen] *Majestä*t unsers Allergnädigsten *Monarch*en. Wegen der jetzigen weit aussehenden *Aspect*en haben I[hro] K[önigliche] *M*[*ajestät*] die Einrichtung der hiesigen *Academie* auf eine bessere Zeit aufzuschieben Allergnädigst geruhet: und alsdann soll auch der H. *Maupertuis* wiedrum hieher kommen.[13] Ich lebe inzwischen in der erwünschtesten Ruhe und habe das Vergnügen meinen *studiis* so obligen zu können, daß ich nicht einmal aus dem Hauße komme; wie ich denn den H. Geh[eimen] Rath *Vockerodt*,[14] welcher schon eine geraume Zeit hier ist, noch nicht einmal gesehen.

R 757 Reply to nº 42
Berlin, December 9th, 1741
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. III, fol. 267–268v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 110–111; *Euler-Goldbach* (1965), p. 90–91

44
Euler to Goldbach
Berlin, February 3rd, 1742

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Justiz*-Rath

Beyligender Brief an Ewr. Hochedelgeb. ist mir aus der Durch[lauchtigsten] Prinzen von Würtenberg *Palais* zugeschickt worden. Der Handschrifft nach ist solcher von H. *Dr. Duvernoi*, an mich war nur das *Couvert*.[1] Eben vernehme ich daß Ewr. Hochedelgeb. Sich unpäßlich befinden, solches gehet mir sehr zu Herzen, und wünsche, daß dieser Zufall ohne *Suiten* seyn, und gegenwärtiges Dieselben völlig *restitui*rt antreffen möge.

Hiemit empfehle mich Ewr. Hochedelgb. beständigen Wohlgewogenheit und Freundschaft gehorsamst und verbleibe mit aller schuldigsten Hochachtung

Ewr. Hochedelgeb.
gehorsamster Diener
Leonh. Euler.

Berlin den 3^{ten} *Febr.*
A[*nno*] 1742.

R 758 Berlin, February 3rd, 1742
Original, 1 fol. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 5r
The letter was cut, folded and sealed to be sent without an additional envelope. The reverse side shows the address: "*A Monsieur / Monsieur Goldbach / Conseiller de Justice & Membre / de l'Academie Imp*[*eriale*] *des Sciences / à / S^t. Petersbourg.*"
Published: *Euler-Goldbach* (1965), p. 92

45
Goldbach to Euler
Petersburg, February (2nd) 13th, 1742

HochEdelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*,

Den inliegenden Brief von dem Hn *Poleni*[1] habe ich zwar schon den 19. *Januar.* unter dem *Couvert* des Hn *Marinoni* erhalten, ich bin aber damahls an einer Kranckheit so in *appetitu prostrato* bestund und etliche Wochen gewähret hat, nicht allein bettlägerig, sondern auch so entkräfftet gewesen, daß mir alle Lust etwas zu schreiben oder zu lesen, vergangen: ich habe vor 18 Jahren dergleichen Kranckheit gehabt, welche aber nur halb so lang währete, in dem gantzen *intervallo* der 18 Jahre aber bin ich niemahls bettlägerig gewesen. Anjetzo hat es sich seit 8 Tagen mercklich zur Besserung angelassen und ich hoffe nunmehro innerhalb zwey biß 3 Wochen zu vorigen Kräfften zu kommen.

Für die Nachricht von Hn *Stosch*[2] bin ich Eurer HochEdelg. gar sehr verbunden und ist mir um so viel lieber gewesen zu vernehmen wo er sich jetzo aufhält, nachdem in vielen Jahren keine *positiv*e Nachricht von ihm vernommen hatte.

Die *demonstration*[3] meines *theorematis* welche E. H. in Ihrem vorigen Schreiben gegeben, ist eben dieselbe die ich auch hatte.[4]

Das *Theorema* daß $4mn - m - 1$ kein *quadratum* seyn könne, gefället mir sehr, und ob ich es gleich nicht *demonstri*ren kan, so habe doch diese *consequentiam* daraus gezogen, daß nicht allein, wie E. H. schon angemercket, auch $4mn - m - n$ kein *numerus quadratus* sey, sondern *generatim* die *expression* $4mn - m - n^a$, allwo a ein *numerus integer positivus quicunque* ist, niemahls ein *quadratum* geben könne.[5]

Bey der *observation* so Ew. H. mir *communici*ret,[6] daß $\dfrac{2^{+\sqrt{-1}}+2^{-\sqrt{-1}}}{2}$ *quam proxime* gleich sey $\dfrac{10}{13}$, ist mir eingefallen daß wann man machen wollte daß $2^{p\sqrt{-1}}+2^{-p\sqrt{-1}}=0$ würde, alsdann p kleiner als 3 und grösser als 2 seyn müste; ich gestehe daß diese *limites grosso modo* angegeben sind, habe aber nicht die *curiosité* sie näher zu *determini*ren.[7]

In dem 20.$^{\text{sten}}$ Briefe *part*[*is*] 1 von Kolben Beschreibung *Capitis bonae spei* sind einige *Remarques* über die dortige Ebbe und Fluth welche vieleicht *meriti*ren von E. H. gelesen zu werden. Das Buch wird ohne zweiffel auf der Königlichen *Bibliotheque* seyn.[8]

Im fall E. H. den Hn Geheimen Rath *Culeman* schon gesprochen, will ich hoffen daß Sie das aufgetragene *Compliment* nicht werden vergessen haben.

Des Hn *Brigadier* von *Baudan* glückliche Ankunfft in Berlin habe ich von dem Hn Obrist*Lieut*[*enant*] von *Damm* allhie vernommen und werde mich jederzeit freuen wann ich höre, daß es dem Hn *Brigadier* nach Wunsch gehet.[9]

Haben Ew. H. den H. *Achard* schon gehöret, und hat er nicht Ihre *approbation*?[10]

Daß E. H. anjetzo ihre Zeit nach ihrem eignen Belieben anwenden können, gereichet mir zu grossem Vergnügen, und ich möchte für das aufnehmen der Wissenschafften wünschen, daß Sie jederzeit in solcher *Situation* verbleiben könnten.

Eurer HochEdelg. Fr[au] Liebsten *gratuli*re ich von hertzen zu Dero glücklichen Niederkunfft und Vermehrung der *Familie*,[11] bitte mir auch zu melden wie sich mein lieber Pathe *M.^{r} Jean Albert* befindet, und ob seine Gesundheit nunmehro völlig *restitui*ret ist? wie ich es von hertzen wünsche.[12] Ich verbleibe mit der vollkommensten Hochachtung

Eurer HochEdelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.^{t} Petersburg
den 13. *Febr. st. n.* 1742.

R 759 Reply to n° 43
Petersburg, February (2nd) 13th, 1742
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 37–38v
Partial copy, 2 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. III, fol. 53r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 112–113; *Euler-Goldbach* (1965), p. 93

46
Goldbach to Euler
Petersburg, February (13th) 24th, 1742

HochEdelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*

Eurer HochEdelgebohrnen habe hiedurch melden wollen, daß ich des Hn *Doct. du Vernoi* Schreiben unter Dero *Couvert* richtig erhalten habe,[1] es wird auch ohne Zweiffel mein Brief an Ew. HochE. welchen ich den 13. *Febr.* an meinen *Correspondent*en in Königsberg *adres*siret hatte,[2] bereits in Berlin angekommen seyn. Gestern war seit dem 23. *Dec. st. n.* 1741 meine erste Ausfart, da ich denn bey Anziehung der Kleider noch einen mercklichen Abgang von meiner vorigen *Circumferentz observi*rete ohngeachtet ich mich im übrigen von tag zu tag besser befinde. Ich verbleibe mit sonderbahrer Hochachtung

Eurer HochEdelgebohrnen
dienstergebenster Diener
Goldbach.

S.t Petersburg
den 24. *Febr. st. n.* 1742.

R 760 Reply to nº 44
Petersburg, February (13th) 24th, 1742
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 39rv
Published: *Euler-Goldbach* (1965), p. 94

47
Euler to Goldbach
Berlin, March 6th, 1742

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Justiz*-Rath

Ewr. Hochedelgb. Unpäßlichkeit ist mir in verschiedenen Briefen zu meinem grösten Leidwesen berichtet worden;[1] dahero kan ich Denselben meine innigste Freude nicht gnugsam beschreiben, welche bey Empfang Dero werthesten Zuschrifft empfunden. Ich wünsche von Herzen, daß dieser Zufall nunmehro gäntzlich verschwunden, und Ewr. Hochedelgeb. wiederum zu den vorigen Kräften und einer dauerhaften Gesundheit gelanget seyn möchten.

Vor einiger Zeit habe die Ehre gehabt mit dem H. Geh[eimen] Rath *Culeman* bey dem H. Geh[eimen] Rath *Vockerodt* zu speisen, seit der Zeit aber hat es sich nicht schicken wollen bey demselben meine Aufwartung zu machen. Bey dieser Gelegenheit habe Demselben Ewr. Hochedelgeb. *Compliment* abgestattet, worauf Er sich auf das genauste um Dero gegenwärtige Umstände erkundiget, und bezeuget, daß Er sich sehr für Ewr. Hochedelgb. *interessi*re, und nichts mehr wünschte, als daß in Ihro Königl[ichen] *Maj*[*estät*] Diensten eine *convenable* Stelle für Ewr. Hochedelgeb. ausgefunden werden könnte.

Daß $4mn-m-1$ oder $4mn-m-n$ niemals ein *Quadratum* seyn könne, konnte ich biß anjetzo auch nicht *rigorose demonstri*ren, sondern ich hatte solches aus einem *Theoremate Fermatiano*, worinn behauptet wird, daß eine *summa duorum quadratorum* $aa+bb$ niemals *per numerum formae* $4n-1$ *divisibilis* sey hergeleitet.[2] Dann hat dieses *Theorema* seine Richtigkeit so ist $aa+1 \neq (4n-1)\, m$, da ich Ewr. Hochedelgb. *signum* $\neq$ um eine *aequationem impossibilem* anzuzeigen gebrauche. Dahero ist $aa \neq 4mn-m-1$. Ferner kan auch $\dfrac{aa+1}{4n-1}$ unmöglich ein *numerus integer* seyn, oder es ist $\dfrac{aa+1}{4n-1} \neq i$, folglich ist auch $\dfrac{aa+1}{4n-1}+1$ oder $\dfrac{aa+4n}{4n-1}$ oder $\dfrac{bb+n}{4n-1} \neq i$. Gleichfalls kan $\dfrac{bb+n}{4n-1}+n$ oder $\dfrac{bb+4nn}{4n-1}$ oder $\dfrac{cc+nn}{4n-1}$ kein *numerus integer* seyn. Und wann man auf solche Art fortgehet, so folget daß $\dfrac{aa+n^\alpha}{4n-1} \neq m$, und allso $aa \neq 4mn-m-n^\alpha$, welches die *Consequentz* ist, so Ewr. Hochedelgb. aus diesem *Theoremate* gezogen haben. Die Richtigkeit davon beruhet allso auf der Wahrheit dieses *Theorematis*, daß eine *summa* 2 *quadratorum* $aa+bb$ unmöglich durch $4n-1$ getheilet werden könne (wann nicht aa und bb ein jedes für sich durch $4n-1$ *divisibile* ist). Ich habe aber erst jetzo hievon nachfolgende *Demonstration* gefunden.

Prop[*ositio*] *1. Haec forma* $(a+b)^p-a^p-b^p$ *semper est divisibilis per* $\underline{p}$ *si fuerit* $\underline{p}$ *numerus primus. Dem*[*onstratio*]. *Evolvatur potestas* $(a+b)^p$ *eritque*

$$(a+b)^p-a^p-b^p=\frac{p}{1}a^{p-1}b+\frac{p\,(p-1)}{1\cdot 2}a^{p-2}b^2+\ \ldots\ +\frac{p\,(p-1)}{1\cdot 2}a^2b^{p-2}+\frac{p}{1}ab^{p-1};$$

cujus expressionis singuli termini sunt numeri integri; singuli ergo erunt divisibiles per $\underline{p}$ *si quidem* $\underline{p}$ *sit numerus primus: nam si* $\underline{p}$ *foret numerus compositus, fieri posset, ut in quodam termino factor quispiam ipsius* $\underline{p}$ *per factorem denominatoris tolleretur, illeque terminus ac proinde tota expressio cessaret per* $\underline{p}$ *divisibilis esse. Quocirca si* $\underline{p}$ *est numerus primus haec expressio* $(a+b)^p-a^p-b^p$ *semper erit divisibilis per* p. *Q. E. D.*

Coroll[*arium*] *1. Positis ergo* $a=b=1$ *erit* 2^p-2 *divisibile per numerum primum* $\underline{p}$*, ideoque nisi* $\underline{p}$ *sit* $=2$ *erit* $2^{p-1}-1$ *per* $\underline{p}$ *divisibile.*

Coroll[*arium*] *2. Sit* $a=2$, $b=1$, *erit* 3^p-2^p-1 *divisibile per* $\underline{p}$*: cum autem* 2^p-2 *sit quoque divisibile per* $\underline{p}$*, erit quoque istarum formularum summa* 3^p-3 *divisibilis per* $\underline{p}$*, ideoque nisi sit* $p=3$*, erit* $3^{p-1}-1$ *per* $\underline{p}$ *divisibile.*[3]

Propos[*itio*] *2. Si* a^p-a *fuerit divisibile per* $\underline{p}$ *erit quoque* $(a+1)^p-a-1$ *per* $\underline{p}$ *divisibile. Dem*[*onstratio*]. *Si in prop*[*ositione*] 1 *ponatur* $b=1$*, erit* $(a+1)^p-a^p-1$ *per* $\underline{p}$ *divisibile. Cum autem per hypothesin sit* a^p-a *per* $\underline{p}$ *divisibile, erit quoque summa istarum formularum* $(a+1)^p-a-1$ *per* $\underline{p}$ *divisibilis. Q. E. D.*

Coroll[arium] 1. Cum igitur $1^p - 1$ *divisibile sit per* $\underline{p}$ *erit quoque* $2^p - 2$ *divisibile per* $\underline{p}$, *hincque porro progrediendo per* $\underline{p}$ *divisibiles erunt istae formulae* $3^p - 3$; $4^p - 4$; $5^p - 5$; *etc.*

Coroll[arium] 2. Generaliter ergo per numerum primum $\underline{p}$ *divisibilis erit ista formula* $a^p - a$, *quicunque numerus integer loco* $\underline{a}$ *ponatur. Nisi ergo* $\underline{p}$ *sit divisor ipsius* $\underline{a}$, *erit quoque* $a^{p-1} - 1$ *per* $\underline{p}$ *divisibile.*

Coroll[arium] 3. Quoniam simili modo $b^{p-1} - 1$ *per numerum primum* $\underline{p}$ *est divisibile, nisi* $\underline{b}$ *sit multiplum ipsius* $\underline{p}$, *sequitur fore* $a^{p-1} - b^{p-1}$ *per* $\underline{p}$ *divisibile.*

Theorema. Summa duorum quadratorum $aa+bb$ *non est divisibilis per numerum primum* $4n-1$, *nisi utrumque quadratum seorsim per eundem numerum primum sit divisibile.*

Demonstr[atio]. Quoniam per hyp[othesin] neque $\underline{a}$ *neque* $\underline{b}$ *divisibile est per* $\dfrac{4n-1}{\underline{p}}$, *sequitur hanc formulam* $a^{4n-2} - b^{4n-2}$ *fore per* $4n-1$ *divisibilem: unde per* $4n-1$ *non erit divisibilis haec forma* $a^{4n-2} + b^{4n-2}$, *neque propterea ullus ejus factor. At cum* $4n-2$ *sit numerus impariter par, formulae* $a^{4n-2} + b^{4n-2}$ *factor est* $aa + bb$: *quocirca* $aa + bb$ *per numerum primum* $4n-1$ *dividi omnino nequit. Q. E. D.*

Coroll[arium] 1. Quoniam si $4n-1$ *non est numerus primus, divisorem habet necessario numerum primum hujus formae* $4n-1$; *sequitur summam duorum quadratorum* $aa + bb$ *per nullum numerum hujus formae* $4n-1$ *sive primum sive non primum dividi posse.*

Coroll[arium] 2. Quodsi ergo summa duorum quadratorum $aa + bb$ *habeat divisorem, is erit necessario numerus formae hujus* $4n+1$.

Coroll[arium] 3. Si ergo summa duorum quadratorum $aa + bb$ *per alium numerum dividi nequit, nisi qui ipse sit duorum quadratorum summa (quod demonstrari posse confido), sequitur omnem numerum primum* $4n+1$ *in duo quadrata esse resolubilem.*[4]

Daß Ewr. Hochedelgeb. die *Curiosité* gehabt zu untersuchen, wann diese *Formul* $2^{+p\sqrt{-1}} + 2^{-p\sqrt{-1}}$ *nihilo aequalis* werden könnte,[5] hat mir Anlaß gegeben anzumerken, daß solches *infinitis modis* geschehe: der erste *Valor pro* $\underline{p}$ ist wie Ewr. Hochedelgb. *observi*rt zwischen 2 und 3, nehmlich $p = 2,266\,180\,21$; der wahre *Valor* aber ist $p = \dfrac{\pi}{2\,\ell\,2}$, da ist $\pi = 3,141\,592\,65$, und $\ell\,2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \text{etc.} = 0,693\,147\,180\,5$; alle folgenden *Valores ipsius* $\underline{p}$ entspringen aus diesem, indem man diesen mit 3, 5, 7, 9 etc. *multiplici*rt.

Der H. *Brigadier Baudan* lässt Ewr. Hochedelgb. sein gehorsamstes *Compliment* vermelden, er ist dem König noch nicht *praesenti*rt worden und folglich noch nicht *emploi*rt.[6]

Mr. Achard kenne ich sehr *speciell*, wie dann seine Frau unsers jüngsten Kindes Pathin ist: ich habe Ihn öfters gehört predigen, er ist ein grosser *Orator*. Ihro *Maj[estät]* haben den H. *D[octor]* Gwandt aus Königsberg hieher an die Stelle des sel[igen] H. Reinbecks beruffen mit einer *Pension* von 2000 Rthl.;[7] er hat aber diese *Vocation* abgebeten. Mein ruhiges Leben ist anjetzo in etwas gestöret worden, indem ich täglich eine Stunde bey dem Land Prinzen von Würtenberg seyn und *Lectiones* geben muß:[8] auch muß ich fast täglich bey dem H. Geh[eimen] Rath *Osterman* speisen, welcher Ewr. Hochedelgb. sein ergebenstes *Compliment* vermelden lässt.[9] Für die gütige Nachfrage wegen unsers Albrechts bin gehorsamst verbunden, derselbe hat vor einiger Zeit ein *Recidiv* von seiner vorigen Krankheit bekommen, befindet sich aber durch Gottes Hülfe wiedrum ziemlich gut;[10] ich habe einen *Praeceptorem Domesticum* angenommen, bey welchem er nebst den übrigen Kindern sehr gut *profiti*rt. Meine gantze *Famille* lässt sich Ewr. Hochedelgb. auf das gehorsamste empfehlen, und ich verbleibe mit der schuldigsten Hochachtung

Ewr. Hochedelgebohrnen
gehorsamster Diener
Leonh. Euler

Berlin den 6$^{\text{ten}}$ *Mart.*
1742.

R 761 Reply to n° 45
Berlin, March 6th, 1742
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 6–7v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 114–117; *Euler-Goldbach* (1965), p. 94–96

48
Euler to Goldbach
Berlin, March 13th, 1742

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Justiz*-Rath

Das von Ewr. Hochedelgeb. mit der letsten Post vom 24$^{\text{ten}}$ *Febr.* erhaltene Schreiben hat mich herzinnigst erfreuet, da ich aus demselben Dero völlige *Restitution* vernommen; ich wiederhohle allso nochmals meinen aufrichtigsten Wunsch, daß der Allerhöchste Dieselben bey beständiger Gesundheit in allem Wohlstand und Vergnügen biß in das späteste Alter gnädiglich erhalten wolle. Letstens hat der H. Geh[eime] Rath *Jordan* sehr viel von Ewr. Hochedelgeb. mit mir gesprochen, und sich über Dero Zustand erkundiget; er sagte mir daß er Ewr. Hochedelgeb. Persönlich wohl kannte; weil er aber damals, als Sich Dieselben hier befanden, noch sehr jung gewesen ist, so kan es leicht seyn, daß Ewr. Hochedelgb. Sich dessen kaum mehr erinnern werden.[1] Da ich nun hierauf von Denselben die *Project*e zu den Schlesischen *Medaill*en bekommen,[2] so habe ich gleich, nehmlich vorgestern in der Kirche Gelegenheit gehabt solche dem H. Geh[eimen] Rath *Jordan*, als welcher von Ihro Königl[ichen] *Majestä*t dazu beordert ist, zu übergeben; wobey er mir sagte daß er schon eine ziemliche Anzahl dergleichen Vorschläge beysammen habe, an welche er aber meistentheils sehr viel auszusetzen fände: dahero ich um so viel weniger zweifle, daß Ewr. Hochedelgb. nicht den Preiß davon tragen werden. Inzwischen hat gedachter H. Geh[eime] Rath mir aufgetragen Ewr. Hochedelgb. Sein ergebenstes *Compliment* abzustatten. Ich habe die Ehre gehabt in meinem vorigen Schreiben Ewr. Hochedelgeb. zu melden, daß die Durchl[auchtigste] Herzogin von Würtenberg mir die *Information* in der *Mathem*[*atic*] und *Physic* über Dero Prinzen aufgetragen,[3] womit ich schon seit einigen Wochen *continui*re. Weilen ich aber allhier noch keine Vorgesetzte habe, und diese *Occupation* ohne Erlaubnüß nicht wohl über mich nehmen konnte, so habe deswegen *Directe* an Ihro Königl[iche] *Maj*[estät] nach der *Armée* geschrieben: und vor etlichen Tagen darauf die Allergnädigste *Permission* durch ein Hand-Schreiben bekommen. Von außen war die *Addresse* *A mon professeur Euler*, und der Inhalt war folgender:[4]

> *Aiant vû par Votre lettre du* 20 *du Mois passé, que la Duchesse de Würtenberg Vous demande des leçons mathématiques pour les princes de Sa maison, Je Vous en accorde la permission avec bien du plaisir étant au reste*
>
> *Votre bien affectionné Roi*
>
> *Federic*
>
> *Znaim*[5] *ce* 1*er* *Mars* 1742

Übrigens kan ich die sonderbare *Capacität* des ErbPrinzen und den durchdringenden Verstand nicht genugsam bewundern. Meine *Lection* ist täglich von 10 biß 11 Uhr, da dann die Meß angeht.

Laut des H. Stähelins Briefen soll mir Ihro *Excell*[*enz*] der Herr *Lestocq* so sehr gnädig seyn,[6] daß Er versprochen hat mir durch Sein kräftiges Vorwort zu einer jährlichen *Pension* von der Kaiserl[ichen] *Academi*e zu verhelfen, und soll die gantze Sache anjetzo auf einer *favorabl*en Vorstellung von Seiten der *Academi*e beruhen. Ich schreibe deswegen auch mit der heutigen Post an den H. Rath Schumacher, insonderheit aber nehme die Freyheit Ewr. Hochedelgeb. um Dero nachdrücklichen Beystand in diesem meinem Ansuchen gehorsamst zu bitten.[7] Anjetzo wird ohne Zweifel der für die *Academie destinir*te Herr *Praesident* schon ernennet seyn, denn der H. Stähelin schreibt mir, daß er denselben (jedoch ohne zu nennen) nebst einigen Grossen kürtzlich bey sich *tracti*rt habe.[8]

Ewr. Hochedelgb. habe das letste mal meine *Demonstration* des *Theorematis* daß $4mn - m - n$ niemals ein *Quadratum* seyn könne, zu überschreiben die Ehre gehabt; aus derselben folgen noch viel andere artige *Speculation*en in dieser *Materi*e: und ich bin versichert daß Ewr. Hochedelgb. noch viel herrliche *Consequenz*en daraus herleiten werden. Ich habe anjetzo auch eine gantz andere *Methode* gefunden die *Summas Serierum potestatum reciprocarum* zu finden, welche sich nicht wie die erstere auf die *radices infinitas* einer *Aequationis infinitae* gründet, sondern bloß allein aus den *regulis differentiationum* und *integrationum* fleusst: wovon das nächste mal ausführlicher zu schreiben willens bin.[9] Hiemit verbleibe mit der vollkommensten Hochachtung und schuldigsten *Veneration*

Ewr. Hochedelgebohrnen
Meines Hochgeehrtesten Herrn *Justiz*-Raths
gehorsamster Diener
Leonh. Euler

Berlin den 13$^{\text{ten}}$ *Mart.*
1742.

P. S. Seit 8 Tagen hat man allhier einen *Comet*en wahrgenommen, erst vorgestern aber hat man Gelegenheit gefunden denselben auf dem *Observatorio* zu *observi*ren. Er erschien den 11$^{\text{ten}}$ um mitternacht *in ala boreali Cygni*, so daß *Longitudo* war $12°$, $30'$, und *Latitudo bor*[*ealis*] $71°$. Sechs Stunden hernach schien er beynahe um $2°$ *in consequentia* fortgerückt zu seyn; woraus ich schliesse, daß dieser *Comet* nicht weit von seinem *Perihelio* seyn müsse, ob er aber erst dahin gehe oder schon daher zurükkomme, kan aus dieser einigen *Observation* nicht geschlossen werden: die letst vergangene Nacht war es trüb, daß man nicht *observi*ren konnte. Im übrigen schien der *Nucleus* wie eine *stella* 4^{tae} *magnitudinis*, hatte eine *comam*, und *caudam* ungefehr $3°$ lang. Was hierüber in *Petersburg* entweder *observi*rt worden oder noch wird *observi*rt werden, solches ersuche Ewr. Hochedelgb. gehorsamst mir zu melden; so bald man allhier wird mehrere und *accurat*ere *Observation*en machen können, werde ich solche gleich der *Academie* zu überschreiben die Ehre haben.[10]

R 762 Reply to n° 46
Berlin, March 13th, 1742
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 8–9v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 118–120; *Euler-Goldbach* (1965), p. 97–99

49
Goldbach to Euler
[Moscow], April (1st) 12th, 1742

Ex litteris ad Cl[*arissimum*] *Eulerum* 12. *Apr.*[1]

Meine *Demonstration*,[2] daß, wann $4mn - m - n^\alpha$ kein *numerus quadratus* ist, auch $4mn - m - n^{\alpha+1} \neq a^2$, fliesset alsofort aus der einigen *supposition* $m = 4p - n^\alpha$, denn hiedurch wird $4n\,(4p - n^\alpha) - 4p \neq 4b^2$, *quae aequatio divisa per* 4 *dat* $4pn - p - n^{\alpha+1} \neq b^2$, so daß in der *aequation* $x^\alpha = 4px - p - a^2$, wo α ein *numerus integer quicunque* ist, x keinen *valorem positivum in integris* haben kan: Es folget auch ferner, daß ob gleich $p^2 - p - e^2$ *infinitis modis* ein *quadratum in integris* ist, dennoch $\dfrac{p \pm \sqrt{p^2 - p - e^2}}{2}$ niemahls ein *numerus integer* seyn kan;

item daß die zu erst erwehnte Formul $4mn - m - n^\alpha$ keinen *numerum triangularem* gebe, oder daß $x^\alpha = 4px - p - \dfrac{(b^2 - b)}{2}$ niemahls eine *radicem affirmativam in integris* haben kan.

Gegen die mir *communicir*te *Demonstration*, wofür ich Eurer HochE. sehr verbunden bin, finde ich nichts zu erinnern, vieleicht könnte man aber *generaliter* sagen, daß $(a+b)^p - a^p - b^p$ allezeit *per aliquem divisorem ipsius p divisibile* ist, woraus denn als ein *casus particularis* folget, daß wann p ein *numerus primus* ist, die gedachte Formul *per ipsum numerum p divisibilis* seyn müsse.[3] Bey gelegenheit dessen, was E. H. von der Formul $2^{p\sqrt{-1}} + 2^{-p\sqrt{-1}} = 0$ schreiben, habe ich *observi*ret, daß wann n *variabilis* gesetzt wird, alsdann $2^{np\sqrt{-1}} + 2^{-np\sqrt{-1}} = 2$ werde, so offt n ein *numerus pariter par* ist und daß sie hingegen $= -2$ werde, so offt n ein *numerus pariter impar*[4] ist, und wann n ein *numerus integer*, q aber ein *numerus quicunque rationalis aut irrationalis* ist, so wird allezeit

$$2^{(4n+q)p\sqrt{-1}} + 2^{-(4n+q)p\sqrt{-1}} = 2^{qp\sqrt{-1}} + 2^{-qp\sqrt{-1}}.$$ [5]

Es ist meines erachtens auch *remarquable*, daß wann man p durch diese *aequation determini*ret $2^{p\sqrt{-1}} + 2^{-p\sqrt{-1}} = 3$, alsdann $2^{xp\sqrt{-1}} + 2^{-xp\sqrt{-1}} =$ wird

$$\left(\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^{2x+1} - \left(-1+\sqrt{5}\right)^{2x+1}}{2^{2x+1}}\right) - \left(\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^{2x-1} - \left(-1+\sqrt{5}\right)^{2x-1}}{2^{2x-1}}\right),$$

so offt x ein *numerus integer* ist.

Nachdem ich diese *observation* wieder durchgelesen, finde ich dieselbe von keiner Wichtigkeit, man darff nur setzen $a = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, so ist $a^x + a^{-x}$ der *terminus generalis.*

R 763 Reply to n° 47
[Moscow], April (1st) 12th, 1742
Copy, 3 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. III, fol. 56v–57v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 121–122; *Euler-Goldbach* (1965), p. 99–100

50
Euler to Goldbach
Berlin, May 8th, 1742

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Justiz*-Rath

Ewr. Hochedelgb. Abreise nach Moskau haben mir die beyden *Prinz*en *Dolgorughki*, welche mich gantz unvermuthet allhier besuchten,[1] zu wissen gethan, und der H. Rath Schumacher hatte mir so gar geschrieben, daß Dieselben gesinnet wären die *Academie* gäntzlich zu verlassen, und zu Dero grossem *Avantage* bey Hofe oder in der Reichs*Canz*ley *engagi*rt werden sollten.[2] Gleichwie nun diese Ewr. Hochedelgb. so grosse Veränderung bey mir den grösten Eindruck gemachet, so wünsche von gantzem Herzen, daß dieselbe zu Dero höchstem Vergnügen, und beständigen Wohlfahrt gereichen möge. Inzwischen statte hiemit Ewr. Hochedelgb. für die noch immerfort gegen mich hegende Hochgeneigte *Intention* allen gehorsamsten Dank ab, und empfehle mich Dero ferneren sonderbaren Gewogenheit: hoffe aber dabey daß diese Veränderung mir das innigste Vergnügen nicht benehmen wird, Denselben von Zeit zu Zeit meine gehorsamste *Devotion* zu bezeugen, und von Dero *Commercio* zu *profiti*ren.

Noch vor Erhaltung dieser Nachricht habe ich bey dem H. Geh[eimen] Rath *Culeman* zu speisen die Ehre gehabt, da insonderheit die Frau Geheime Räthin sehr umständlich Sich über Ewr. Hochedelgeb. Zustand erkundiget, und ihre sonderbare Hochachtung und Freundschaft gegen Dieselben auf das deutlichste zu erkennen gegeben. Sie haben mir beyderseits aufgetragen Ewr. Hochedelgb. Ihr ergebenstes *Compliment* abzustatten.[3]

Mit *Catalogis* von Französischen Büchern könnte Ewr. Hochedelgeb. zur Gnüge aufwarten, wann entweder Dieselben die *Post*-Freyheit genössen, oder mir jemand anzeigen wollten, an wen ich solche *addressi*ren sollte; dann von hier kan dieselben ohne etwas zu bezahlen, wegschicken.

Die *Madame La Marquise du Chatellet* hat mir ein *Exemplar* von der neuen *Edition* der *Institutions Physiques* nebst ihrem *Portrait* zugeschickt.[4] Die Bücher, welche Ewr. Hochedelgeb. auch immer verlangen möchten, können von hier aus bequem nach *Petersburg* geschickt, und darfür allda die Bezahlung entweder an H. Stähelin oder das *Berlini*sche *Contoir* entrichtet werden.[5] Von *Mr. Achard* weiß ich nicht das geringste, daß durch den Druck herauskommen wäre.[6]

Weilen die übersandten *Inscription*en[7] von Ewr. Hochedelgb. eigener Hand geschrieben waren: und dabey nichts gemeldet war von dem *Auctore*, so habe nicht gezweifelt, daß dieselben nicht von Denselben seyn sollten. Ich habe aber anjetzo dem H. Geh[eimen] Rath *Jordan* gemeldet, daß ein guter Freund solche Ewr. Hochedelgb. *communici*rt hatte.

Bey Ihro Königl[ichen] *Majestät* Anwesenheit allhier habe ich verschiedene mal *praesenti*rt werden sollen; es sind aber immer Hinternüsse dazwischen gekommen, biß endlich Allerhöchst Dieselben gantz plötzlich von hier abgereiset sind.[8]

Der H. Rath Schumacher hat mir geschrieben, daß meine *Pension* bey der *Academi*e schon so gut als fest gesetzet sey, und ich allso nur den Anfang mit Einsendung meiner *Piecen* machen sollte; hierauf habe denselben Posttag zwey ziemlich grosse *Piec*en dahin geschickt.[9] Ich nehme aber dennoch die Freyheit Ewr. Hochedelgb. diese *Affaire* gehorsamst ferner zu *recommendi*ren.

Die *Corollaria*, welche Ewr. Hochedelgb. aus meinem *Theoremate*, daß $4mn - m - n$ kein *Quadratum* seyn könne, hergeleitet sind sehr merkwürdig, und übertreffen das *Theorema* selbst weit an Wichtigkeit. Dann daß $4mn-m-n$ auch kein *numerus trigonalis* seyn könnte, hatte ich nicht wahrgenommen, anjetzo aber habe aus dieser Anleitung auch befunden, daß eben diese *Formul* $4mn - m - n$ auch kein *numerus heptagonalis* seyn könne.[10] Überhaupt habe gefunden, daß alle Zahlen welche nicht $= 4mn - m - n$ seyn können, in dieser *Formul* $xx + yy + y$ enthalten sind; dahero diese *Expression* $4mn - m - n + xx + yy + y$ alle mögliche Zahlen geben muß,[11] welches *Theorema* einiger massen ähnlich ist dem *Fermatiano*, daß $pp + qq + rr + ss$ alle mögliche Zahlen hervorbringe. Ich habe noch viel mehr dergleichen *Theoremata*: als $3aa + 3bb + 7cc$ kan niemals ein *Quadratum* seyn: *Item* $2aa + 6bb + 21cc$ *quadratum esse nequit*, und dergleichen;[12] ich habe aber noch keine dergleichen *Formulam* finden können, in welcher 4 *Litterae a se invicem non pendentes* enthalten wären.[13]

Daß im übrigen meine jüngst überschickte *Demonstration* bey Ewr. Hochedelgb. Beyfall gefunden erfreuet mich sehr. Daß aber diese *Formul* $(a+b)^p - a^p - b^p$ auch durch p oder einen *Divisorem* des p *praeter unitatem*, wann p kein *numerus primus* ist, *divisibilis* seyn sollte,[14] kan durch meine *Demonstration* nicht nur nicht erwiesen werden, sondern es trifft auch in vielen Fällen nicht zu. Als wann $a = 1$ *et* $b = 1$, *et* $p = 35$, so lässt sich $2^{35} - 2$ weder durch 5 noch durch 7 theilen.

Wann *Generaliter* $a^{p\sqrt{-1}} + a^{-p\sqrt{-1}} = b$, so ist

$$a^{xp\sqrt{-1}} + a^{-xp\sqrt{-1}} = \left(\frac{b + \sqrt{(bb-4)}}{2}\right)^x + \left(\frac{b - \sqrt{(bb-4)}}{2}\right)^x,$$

und folglich wann $2^{p\sqrt{-1}} + 2^{-p\sqrt{-1}} = 3$, so wird

$$\begin{aligned} 2^{xp\sqrt{-1}} + 2^{-xp\sqrt{-1}} &= \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x \\ &= \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2x}. \end{aligned}$$

Sonsten kommen Ewr. Hochedelgb. *Observationen*[15] mit meinem *General-Theoremate*, daß

$$a^{+p\sqrt{-1}} + a^{-p\sqrt{-1}} = 2 \textit{ cosinui Arcus } p\,\ell\,a,$$

meistentheils überein, nur daß $2^{(4n+q)p\sqrt{-1}} + 2^{-(4n+q)p\sqrt{-1}}$ nicht gleich ist $2^{qp\sqrt{-1}} + 2^{-qp\sqrt{-1}}$, wann nicht entweder $(2n+q)\,p\,\ell\,2$ oder $2np\,\ell\,2$ gleich ist $m\pi$ *denotante* $1 : \pi$ *rat[ionem] diam[etri] ad peripheriam.*

Hiemit habe die Ehre mit der vollkommensten Hochachtung und schuldigster *Veneration* mich zu nennen

Eurer Hochedelgebohrnen
gehorsamsten Diener
Leonh. Euler

Berlin den 8ten *May.* 1742.

R 764 Reply to n° 49
Berlin, May 8th, 1742
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 14–15r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 123–124; *Euler-Goldbach* (1965), p. 100–102

51
Goldbach to Euler
Moscow, (May 27th) June 7th, 1742

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*

Auf Eurer Hochedelgebohrnen letztes Schreiben vom 8. *Maii* berichte ich hiemit, daß ob ich zwar kein neues *engagement* gesuchet, mir dennoch von dem Reichs *Collegio* schon den 19. *Febr. st. n.* wider mein Vermuthen die Stelle eines *Etats*-Raths angetragen worden, welche ich unter gewissen Bedingungen *accepti*ret habe. *Nil temere, nil timide.*[1]

Ich wünsche hertzlich daß die vielfältigen *promesses* Eurer HochE. hiesige *pension* betreffend bald zur *realité* kommen mögen, ich halte aber noch dafür daß der Weg den ich bald nach Ihrer Ankunfft in *Berlin* vorgeschlagen,[2] damahls der beste und kürtzeste gewesen wäre wenn er sich mit dem *Systemate Mundi optimi* hätte reimen wollen.

Ohngeachtet[3] ich mich in meinem vorigen Briefe mit der *particula* vieleicht *précautioni*ret, so hätte doch nicht geglaubet daß die Formul $(a+b)^p - a^p - b^p$ sich nicht allezeit durch einen von den *divisoribus numeri p* solte *dividi*ren lassen, wann solches nicht durch das von E. H. angeführte *exemple* deutlich bestättiget würde.[4]

So viel ich mich erinnere, hatte ich mir in meinem letzten Briefe die Formul $2^{xp\sqrt{-1}} + 2^{-xp\sqrt{-1}}$, *posito* $2^{p\sqrt{-1}} + 2^{-p\sqrt{-1}} = 0$, als *applicatas* einer *curvae serpentiformis*, deren *abscissae* x sind, vorgestellet,[5] und welche den *axem* so offt durchschneidet als die Formul $= 0$ wird, so daß wann die *formula ipsa* $= 2$ ist, die *applicata maxima* unten oder oben herauskommet, folglich unzehliche andere *applicatae* einander unter sich gleich seyn müssen, nichtsdestoweniger ist in meiner damahligen *expression* ein Fehler eingeschlichen den E. H. mit recht angemercket haben, und leicht verbessert werden kan, in dem es heissen sollen, daß wann q ein *numerus quicunque*, und $2^{p\sqrt{-1}} + 2^{-p\sqrt{-1}} = 0$ gesetzet wird, alsdann *posito pro n integro quocunque* seyn werde

$$2^{(8n-4-q)\,p\sqrt{-1}} + 2^{-(8n-4-q)\,p\sqrt{-1}} = 2^{qp\sqrt{-1}} + 2^{-qp\sqrt{-1}}.$$ [6]

Ew. HochEdelgb. haben gefunden, daß alle Zahlen so nicht $4mn - m - n$ seyn können, in dieser Formul begriffen sind $v^2 + v + u^2$, und ich finde, daß alle $4mn - m - n$ zu dieser Formul $y^2 + y - x^2$ gebracht werden können,[7] so daß eine jede gegebene Zahl gleich ist $p^2+p\pm q^2$ woselbst *p & q numeros integros* anzeigen, oder auch eine von beyden *litteris* 0 bedeuten kan, woraus zu sehen ist daß eine jede Zahl aus einem *duplo numeri triangularis* $\pm$ *numero quadrato* bestehet; weil aber auch eine jede Zahl gleich ist der Formul $u^2+v^2+v+y^2+y-x^2$, so wird, wann man setzet $u=\frac{z^2+z}{4}+1$, $x=\frac{z^2+z}{4}-1$, $u^2-x^2=z^2+z$, folglich jedes *numeri dati dimidium* $\frac{n}{2}=\frac{v^2+v+y^2+y+z^2+z}{2}$ *id est tribus trigonalibus.*[8]

Daß in der *formula polygonalium* $\frac{(p-2)\,x^2-(p-4)\,x}{2}$, wann sie gleich werden soll $4mn-m-n$, p weder 5 ± 2 noch 5 ± 1 seyn könne, sondern alle *trigonales*, *tetragonales*, *hexagonales* und *heptagonales* ausgeschlossen werden, folget *ex iisdem principiis.*[9]

Ich halte es nicht für undienlich daß man auch die jenigen *propositiones* anmercke welche sehr *probabiles* sind, ohngeachtet es an einer würcklichen *demonstration* fehlet; denn wann sie auch nachmahls falsch befunden werden, so können sie doch zu Entdeckung einer neuen Wahrheit gelegenheit geben. Des *Fermatii* Einfall daß jeder *numerus* $2^{2^{n-1}}+1$ eine *seriem numerorum primorum* gebe, kan zwar, wie Ew. H. bereits gezeiget haben, nicht bestehen, es wäre aber schon was sonderliches, wann diese *series* lauter *numeros unico modo in duo quadrata divisibiles* gäbe;[10] auf solche Weise will ich auch eine *conjecture hazard*iren: daß jede Zahl welche aus zweyen *numeris primis* zusammengesetzet ist ein *aggregatum* so vieler *numerorum primorum* sey als man will (die *unitatem* mit dazu gerechnet) biß auf die *congeriem omnium unitatum.*[11]

Nachdem ich dieses wieder durchgelesen,[12] finde ich, daß sich die *Conjecture in summo rigore demonstri*ren lässet *in casu* $n+1$, *si successerit in casu* n, *et* $n+1$ *dividi possit in duos numeros primos.* Die *demonstration* ist sehr leicht. Es scheinet wenigstens daß eine jede Zahl die grösser ist als 2 ein *aggregatum trium numerorum primorum* sey.[13]

Zum Exempel

$$4=\begin{cases}1+1+1+1\\1+1+2\\1+3\end{cases}\qquad 5=\begin{cases}2+3\\1+1+3\\1+1+1+2\\1+1+1+1+1\end{cases}\qquad 6=\begin{cases}1+5\\1+2+3\\1+1+1+3\\1+1+1+1+2\\1+1+1+1+1+1\end{cases}\qquad \&c.$$

Hierauf folgen ein paar *observationes* so *demonstri*ret werden können:

Si v sit functio ipsius x eiusmodi ut facta $v=c$ *numero cuicunque, determinari possit x per c et reliquas constantes in functione expressas, poterit etiam determinari valor ipsius x in aequatione* $v^{2n+1}=(2v+1)\,(v+1)^{n-1}$.[14]

Si concipiatur curva cuius abscissa sit x, applicata vero sit summa seriei $\frac{x^n}{n\cdot 2^{2n}}$ *posita n pro exponente terminorum, hoc est, applicata*

$$=\frac{x}{1\cdot 2^2}+\frac{x^2}{2\cdot 2^4}+\frac{x^3}{3\cdot 2^6}+\frac{x^4}{4\cdot 2^8}+\&c.,$$

dico, si fuerit abscissa	$=1,$	*applicatam fore*	$\frac{1}{3}$	[15]
	2	...	$\ell\, 2$	
	3	...	$2\,\ell\, 2$	
	4	*vel major* ...	*infinitam.*	[16]

Ich verharre mit aller ersinnlichen Hochachtung
Eurer HochEdelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

Moscau den 7. *Jun. st. n.* 1742.

P. S. Die beyden andern *formulas numerorum non quadratorum*, deren Ew. HochEdelgb. Erwehnung thun, habe ich noch nicht untersuchet, ich glaube aber daß selbige, wann man setzet $a = hx+k$, $b = lx+m$, $c = nx+p$, sich wohl möchten unter nachfolgende Formul *rangi*ren lassen, allwo f, g, γ, δ *numeri integri aff*[*irmativi*] sind

$$\left(2f \begin{array}{l} -4\gamma\delta \\ -4\gamma^2 \end{array}\right) x^2 + 4\,(f-2\gamma\delta)\left(2g \begin{array}{l} -\delta^2 \\ -2f \end{array}\right) x + \left(2g \begin{array}{l} -\delta^2 \\ -2g \end{array}\right)^2,$$

denn diese kan niemals ein *quadratum* geben.

Ohngeachtet der Postfreyheit so E. H. haben wird doch allhie das Brief*porto* von Berlin biß Memel mitgerechnet, und vor jeden Brief werden 65 *Cop.* bezahlet, ich will also meine Briefe künfftig nicht weiter als biß *Memel franqui*ren. Was die *Catalogos* betrifft[17] so dörfften dieselben nur mit einer Gelegenheit, wann andere Sachen von dort nach S.$^{\text{t}}$ Petersburg abgehen, mitgeschicket werden, weil kein *periculum in mora* ist; indessen möchte ich wohl wissen ob die neueste *edition* von dem *Dictionaire de Trevoux* so in diesem oder im vorigen Jahre herausgekommen seyn soll, in Berlin schon verkauffet werde und was sie koste?[18]

Positis m et p numeris integris affirm[*ativis*], *haec expressio*

$$\frac{p+2 \pm \sqrt{4p-m+3}}{m}$$

non potest fieri numerus integer.[19]

Wann E. H. einige *exemplaria* von Dero *Memoire de fluxu et refluxu maris* übrig hätten würde ich mir eines da[von] ausbitten.[20] Hat Ihre *Correspondance* mit dem Hn *Chevalier Mouhi* gantzlich aufgehöret? Die *recension* so er von der *Mad*[*ame*] *la Marqu*[*ise*] *du Chatellet Institutions Physiques* machen wird, möchte wohl lesenswürdig seyn. Haben Ew. H. in dessen nicht erfahren was die von ihm gebrauchte fremde *expression à la trancaise* heißen soll?[21] Wann in des Hn *Poleni* Briefe, den ich aus S. Petersburg übersandt habe,[22] etwas merckwürdiges gestanden, bitte ich mir davon einige Nachricht aus, *item* ob in der Uberschrifft auf den Briefen an E. H. etwas zu ändern sey?

R 765 Reply to nº 50
Moscow, (May 27th) June 7th, 1742
Original, 3 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 43–45v
Partial copy, 6 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. III, fol. 58v–61r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 125–129; *Euler-Goldbach* (1965), p. 103–105

52
Euler to Goldbach
Berlin, June 30th, 1742

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats*-Rath

Eur. Hochedelgeb. neues *Engagement* bey dem Reichs*Collegio* hat mir der H. Rath Schumacher so gleich zu wissen gethan und so gar eine *Copie* von der deswegen ergangenen *Ukas*e zugeschickt.[1] Ich *Gratuli*re zu dieser Veränderung von gantzem Herzen, und wünsche daß Eur. Hochedelgb. dabey alles dasjenige *Avantage* und Vergnügen finden mögen, welches Dieselben Selbst wünschen.

Allhier lebt nun alles in den grösten Freuden, da heute der schon längst gewünschte Friede zwischen unserm Allergnädigsten König, und der Königin von Ungarn und Böheim, mit allen *Solennität*en *publici*rt worden, und Ihro Majestät der König innert 14 Tagen allhier gewiß eintreffen werden. Die *Articul* des Friedens sind noch nicht völlig bekannt, doch soll die Königin gantz Nieder- und Ober-Schlesien abgetretten haben; dagegen aber Sich nächstens in Böhmen Crönen lassen: und wie man versichert, so soll *Prag* schon erobert seyn.[2]

Man vermuthet auch, daß gleich nach Ihro Königl[ichen] *Maj*estät Zurückkunft mit Errichtung der neuen *Academi*e der Anfang gemacht werden soll, und allem Ansehen nach dörffte solches bey den jetzigen Umständen ohne den *Mr. Maupertuis* geschehen.

Vor einigen *Po*st-Tagen habe ich von *Petersburg* die völlige *Resolution* wegen meines *Engagement*s bey der *Academi*e nebst einer jährlichen *Pension* von 200 Rub. erhalten, und über dieses ist mir noch die *Restitution* aller auf die *Correspondenz* gehenden Unkösten versprochen worden; ich verwundere mich aber sehr, daß die *Academi*e noch keinen *Praesident*en bekommen.[3]

Ewr. Hochedelgb. werde mit der ersten Gelegenheit verschiedene *Catalogos* von den neuesten Büchern entweder nach *Petersburg* oder gar nach *Moscau* zu übersenden die Ehre haben.[4] Von der neuesten *Edition* des *Dictionnaire de Trevoux*[5] habe hier noch nichts erfahren können, man hat mir aber gewiesen, daß dieses Werk *A*[*nno*] 1732 schon aus 5 *Vol.* bestanden, und 45 Rthl. gekostet habe.

Von dem *Chevalier de Mouhy* habe seit der Zeit keine Briefe mehr bekommen; wegen der Redens Art *à la trancaise* hatte ich in *Stettin* den *M.ʳ Mauclerc* gefragt, welcher mir so gleich gesagt hat, daß darinn ein Druckfehler sey, und *à la fra*[*n*]*çoise* heissen müsse.[6]

In dem Briefe von dem H. *Poleni*, welchen Ewr. Hochedelgb. mir aus *Petersburg* zuzuschicken die Güte gehabt,[7] ist nichts sonderbar neues gestanden; als daß nunmehro auch die *Exercitationes Vitruvianae Tertiae* nebst einer *Dissertation de Institutionibus Experimentalis Mechanicae Philosophiae* herausgekommen. Ferner sey auch von dem *P. Abbate Grandi* ein *Cursus Mathematicus*, von dem *P. Caraccioli* ein *Tractatus de Lineis Curvis*, und von des H. *Poleni* Tochtermann dem *Julio Pontedera Antiquitatum Latinarum Graecarumque Enarrationes atque Emendationes* zum Vorschein gekommen,[8] von welchen allen Werken ich noch keines gesehen. Ingleichen habe auch noch keine von meinen in *Paris* gedruckten *Dissertation*en bekommen;[9] und kan auch allhier fast keine Gelegenheit finden dazu zu gelangen. Ich werde nun bald wieder eine *Dissertation* nach *Paris* schicken *sur la meilleure maniere d'observer l'inclinaison de l'aiguille aimantée*;[10] und da ich bey dieser Gelegenheit auf die *Theoriam Magnetis meditir*t, so habe ich endlich ein sehr *simples* und den *Legibus naturae* gemässes *Systema* gefunden, wodurch ich alle *proprietates* und *phaenomena Magnetis et ferri* auf eine sehr leichte und deutliche Art erklären kan; über welche *Materi*e ich künftiges Jahr eine *Piece* nach *Paris* senden werde.[11]

Letstens habe ich wiedrum eine *Piece* nach *Petersburg de Oscillationibus pendulorum flexibilium* geschickt;[12] und nächstens wird hier der 7[te] *Tomus Miscell*[*aneorum*] zum Vorschein kommen, darinn ich eine ziemliche Anzahl *Piec*en gegeben.[13] Einige davon handeln von einer neuen Art die *Summas serierum potestatum reciprocarum* zu finden. Erstlich habe ich eine *Methode* gegeben alle *Formulas differentiales rationales* zu *integri*ren, da dann das *Integrale*, wann dasselbe nicht *algebraicum* ist, entweder *a logarithmis*, oder *a quadratura circuli* oder von beyden zugleich *dependi*rt. Hieraus habe ich das *integrale* dieser *Formul*

$$\int \frac{x^{m-1} - x^{n-m-1}}{1 - x^n} dx$$

*generaliter exprimi*rt, und dabey gefunden, daß wann man setzt $x = 1$, alsdann im *Integrali* sich die *membra logarithmica destrui*ren, und nur diejenigen so *a quadratura circuli dependi*ren, übrigbleiben; welche zusammen genommen endlich auf diese *Expression* $\dfrac{\pi\ cos.\frac{m}{n}\pi}{n\ sin.\frac{m}{n}\pi}$ *reduci*rt werden. Hierauf habe ich die *formul* $\int \dfrac{x^{m-1} - x^{n-m-1}}{1 - x^n} dx$ *per series integri*rt, *modo ordinario*, und nachdem ich $x = 1$ gesetzet, diese *Aequation* gefunden:[14]

$$\frac{\pi\ cos.\frac{m}{n}\pi}{n\ sin.\frac{m}{n}\pi} = \frac{1}{m} - \frac{1}{n-m} + \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} - \frac{1}{3n-m} + etc.$$

allwo $1 : \pi$ *rationem diametri ad peripheriam* bedeutet, und folglich *posito radio seu sinu toto* $= 1$, die halbe *peripherie* oder der *arcus* $180°$ durch π angedeutet wird; und allso wird $\frac{m}{n}\pi$ ein *arcus determinatus*, davon man den *sinum* und *co-*

sinum anzeigen kan. Nun setze ich $\frac{m}{n} = x$; so kommt diese *Series* heraus

$$\frac{\pi\ cos.\,\pi x}{sin.\,\pi x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} - \frac{1}{3-x} + etc.;$$

setzt man $x = \frac{1}{4}$, so wird $\pi x = 45°$, und $cos.\,\pi x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ *et* $sin.\,\pi x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ und folglich

$$\pi = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - etc.$$

Hieraus kan man aber *per differentiationem* auf höhere *potestates* kommen: denn *sumto* $\underline{x}$ *variab*[*ili*] ist $d.\,cos\,\pi x = -\,\pi\,dx\,sin\,\pi x$ und $d.\,sin\,\pi x = \pi\,dx\,cos.\,\pi x$; dahero wird

$$d.\frac{\pi\ cos\,\pi x}{sin\,\pi x} = \frac{-\,\pi\pi\,dx\ (sin\,\pi x)^2 - \pi\pi\,dx\ (cos\,\pi x)^2}{(sin\,\pi x)^2} = \frac{-\,\pi\pi\,dx}{(sin\,\pi x)^2}$$

ob $(sin\,\pi x)^2 + (cos\,\pi x)^2 = 1$, *nempe quadrato radii*: allso wann die *series* auch *differenti*rt wird, so kommt

$$\frac{-\,\pi\pi\,dx}{(sin\,\pi x)^2} = \frac{-\,dx}{xx} - \frac{dx}{(1-x)^2} - \frac{dx}{(1+x)^2} - \frac{dx}{(2-x)^2} - \frac{dx}{(2+x)^2} - etc.$$

und durch $-\,dx$ *dividi*rt

$$\frac{\pi\pi}{(sin\,\pi x)^2} = \frac{1}{xx} + \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(2-x)^2} + \frac{1}{(2+x)^2} + etc.;$$

setzt man $x = \frac{1}{4}$, weil $sin.\,\frac{1}{4}\pi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, so wird $2\pi\pi = \dfrac{16}{1} + \dfrac{16}{9} + \dfrac{16}{25} + etc.$ oder $\dfrac{\pi\pi}{8} = \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{5^2} + \dfrac{1}{7^2} + etc.$ Man kan aber noch weiter *differenti*ren, und solcher gestalt *ad summas quarumcunque potestatum* gelangen; dann es wird

$$d.\frac{\pi\pi}{(sin\,\pi x)^2} = \frac{-\,2\pi^3\,dx\,cos.\,\pi x}{(sin\,\pi x)^3} = \frac{-\,2dx}{x^3} + \frac{2dx}{(1-x)^3} - \frac{2dx}{(1+x)^3} + etc.$$

und folglich

$$\frac{\pi^3\,cos\,\pi x}{(sin\,\pi x)^3} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{(1-x)^3} + \frac{1}{(1+x)^3} - \frac{1}{(2-x)^3} + \frac{1}{(2+x)^3} - etc.;$$

sit $x = \dfrac{1}{4}$, erit $2\pi^3 = \dfrac{64}{1} - \dfrac{64}{3^3} + \dfrac{64}{5^3} - \dfrac{64}{7^3} + etc.$ Solcher gestalt finde ich allso die *Summas omnium potestatum* und noch viel *generaler* als durch die vorher gebrauchte *methode*, weil ich hier *loco x quamcunque fractionem substitui*ren kan.

Diese *Methode* habe ich dem H. *Nicolao Bernoulli* nach Basel geschrieben, und erwarte darüber noch seine Meinung.[15] Ich erinnere mich aber, daß Ewr. Hochedelgeb. schon vormals angemerket haben,[16] daß wann man die *Summ* von dieser *Serie*

$$\frac{1}{a+\alpha x}+\frac{1}{b+\beta x}+\frac{1}{c+\gamma x}+etc.$$

wüsste, man daraus *per differentiationem* die *Summ* von dieser finden könnte

$$\frac{\alpha^{n-1}}{(a+\alpha x)^n}+\frac{\beta^{n-1}}{(b+\beta x)^n}+\frac{\gamma^{n-1}}{(c+\gamma x)^n}+etc.$$

wovon meine *summatio* hier ein *Casus* ist.

Generaliter ist $2^{p\sqrt{-1}}+2^{-p\sqrt{-1}}=2\,cos\,A[rcus]\;p\,\ell\,2$. Wann allso $2^{p\sqrt{-1}}+2^{-p\sqrt{-1}}$ soll $=0$ seyn, so muß $p\,\ell\,2$ einem solchen *arcui circuli* gleich seyn, dessen *cosinus* $=0$; diese Eigenschaft aber haben alle *arcus in hac formula* $\dfrac{(2n+1)\,\pi}{2}$ *contenti*: und folglich wird $p=\dfrac{(2n+1)\,\pi}{2\,\ell\,2}$. Dahero *posito* $p=\dfrac{(2n+1)\,\pi}{2\,\ell\,2}$ oder $2^{p\sqrt{-1}}+2^{-p\sqrt{-1}}=0$, so wird

$$2^{xp\sqrt{-1}}+2^{-xp\sqrt{-1}}=2\,cos\,A[rcus]\,xp\,\ell\,2=2\,cos\,A[rcus]\,\frac{(2n+1)\,x\pi}{2}.$$

Wann allso seyn soll $2^{qp\sqrt{-1}}+2^{-qp\sqrt{-1}}=2^{rp\sqrt{-1}}+2^{-rp\sqrt{-1}}$ so muß

$$cos\,A[rcus]\frac{(2n+1)\,q\pi}{2}=\;cos\,\frac{(2n+1)\,r\pi}{2}.$$

Die *cosinus* aber von zweyen verschiedenen *arcubus* sind einander gleich, wann entweder die *summa* oder *differentia arcuum* gleich ist einem *multiplo* von der gantzen *peripheria* 2π; dahero wird

$$\frac{(2n+1)\,q\pi}{2}\pm\frac{(2n+1)\,r\pi}{2}=2m\pi,$$

und folglich $q\pm r=\dfrac{4m}{2n+1}$; so daß seyn wird

$$2^{\left(\frac{4m}{2n+1}-q\right)p\sqrt{-1}}+2^{-\left(\frac{4m}{2n+1}-q\right)p\sqrt{-1}}=2^{qp\sqrt{-1}}+2^{-qp\sqrt{-1}};$$

worinn alles dasjenige enthalten ist, was Ewr. Hochedelgb. von dieser *Mat*erie mir überschrieben haben.[17]

Nicht nur alle Zahlen, welche diese *Formul* $4mn-m-n$ gibt, sind enthalten in $yy+y-xx$, sondern gar alle möglichen Zahlen, welche so wohl in $4mn-m-n$ als nicht darinn begriffen sind;[18] und allso ist *independenter* von diesem *Theoremate* eine jede Zahl in dieser *Formul* $uu+v^2+v+y^2+y-x^2$ enthalten. Hieraus lässt sich aber nichts *ad resolutionem numeri cujusque in numeros trigonales vel* *quadratos* schliessen,[19] dann da ein jeder Buchstabe u, v, y, und x, eine jegliche Zahl andeutet, so kan man nicht vor u, $\frac{zz+z}{4}+1$ noch vor x, $\frac{zz+z}{4}-1$ setzen, weilen diese *Formulae* $\frac{zz+z}{4}\pm 1$ nicht mehr alle möglichen Zahlen geben, welche doch durch u und x angedeutet werden. Dann da eine jede Zahl sogar in dieser *Formul* $uu-xx$ enthalten ist, so müste kraft dieser *substitution* auch eine jede Zahl in dieser $zz+z$ enthalten und allso ein *numerus trigonalis* seyn.

Wann alle in dieser *Formula* $2^{2^{n-1}}+1$ enthaltenen Zahlen nur *unico modo in duo quadrata divisibiles* wären, so müsten auch alle diese Zahlen nothwendig *numeri primi* seyn; welches aber nicht ist.[20] Dann alle diese Zahlen sind in dieser *Formula* $4m+1$ enthalten, welche so oft sie ein *numerus primus* ist, unfehlbar *in duo quadrata hocque unico modo resolvi*rt werden kan; so oft aber $4m+1$ kein *numerus primus* ist, so ist dieselbe Zahl entweder gar nicht *resolubilis in duo quadrata*, oder *pluribus uno modis*. Daß aber $2^{32}+1$, welche Zahl kein *numerus primus* ist, zum wenigsten *duobus modis in duo quadrata divisibilis* sey, kan ich allso zeigen: I. Wann $\underline{a}$ *et* $\underline{b}$ *in duo quadrata resolubiles* sind, so wird auch das *product* $\underline{a}\,\underline{b}$ *in duo quadrata resolubile* seyn; II. *si productum* $\underline{a}\,\underline{b}$ *et alter factor* $\underline{a}$ *fuerint numeri in duo quadrata resolubiles, tum quoque alter factor* $\underline{b}$ *in duo quadrata erit resolubilis*: diese *Theoremata* können *rigidissime demonstri*rt werden. Nun ist $2^{32}+1$, welche Zahl *in duo quadrata est resolubilis nempe* 2^{32} *et* 1, *divisibilis per* $641=25^2+4^2$; dahero der andere *Factor*, den ich *brevitatis gratia* $\underline{b}$ nennen will, gewiß auch eine *summa duorum quadratorum, sit* $b=pp+qq$, *ita ut sit* $2^{32}+1=\left(25^2+4^2\right)(pp+qq)$*: erit* $2^{32}+1=(25p+4q)^2+(25q-4p)^2$*; et simul* $2^{32}+1=(25p-4q)^2+(25q+4p)^2$, und folglich zum wenigsten *duobus modis* eine *summa duorum quadratorum*. Hieraus kan man nun die *Resolutionem duplicem a priori* finden; dann es wird $p=2556$ *et* $q=409$: und folglich $2^{32}+1=65\,536^2+1^2=62\,264^2+20\,449^2$. Daß eine jegliche Zahl, welche *in* 2 *numeros primos resolubilis* ist, zugleich *in quot quis voluerit, numeros primos* zertheilt werden könne, kan aus einer *Observation*, welche Ewr. Hochedelgb. vormals mit mir *communici*rt haben, daß nehmlich ein jeder *numerus par* eine *summa duorum numerorum primorum* sey, *illustri*rt und *confirmi*rt werden.[21] Dann ist der *numerus propositus* $\underline{n}$ *par* so ist er eine *summa duorum numerorum prim*[*orum*], und da $n-2$ auch eine *summa duorum numerorum* [*primorum*] ist, so ist n auch eine *summa trium*; und auch *quatuor*, und so fort. Ist aber $\underline{n}$ ein *numerus impar* so ist derselbe gewiß eine *summa trium n*[*umerorum*] *p*[*rimorum*], weil $n-1$ eine *summa duorum* ist, und kan folglich auch *in quotvis plures resolvi*rt werden.[22] Daß aber ein jeder *numerus par* eine *summa duorum primorum* sey, halte ich für ein gantz gewisses *Theorema*, ungeacht ich dasselbe nicht *demonstri*ren kan.[23]

Daß $\frac{p+2\pm\sqrt{(4p-m+3)}}{m}$ nimmer ein *numerus integer* werden könne erhellet daher, weilen wann man diese *Formul* einem *numero integro* n gleich setzt, herauskommt $p=mn\pm\sqrt{(4mn-1)}$, es kan aber $4mn-1$ kein *quadratum* seyn.[24]

Ewr. Hochedelgb. *Theorema*,[25] daß wann man *ex aequatione* $v = c$, *existente* v *functione quapiam ipsius* x, die *radicem* x finden kan, man auch *ex hac aequatione* $v^{2n+1} = (2v+1)(v+1)^{n-1}$ den *valorem ipsius* x bestimmen könne, hat mich zu ergründen viel mühe gekostet, biß ich endlich gemerket, daß diese *Aequation* $v^{2n+1} - (2v+1)(v+1)^{n-1} = 0$ *divisibilis* sey *per* $vv - v - 1$; dann es ist

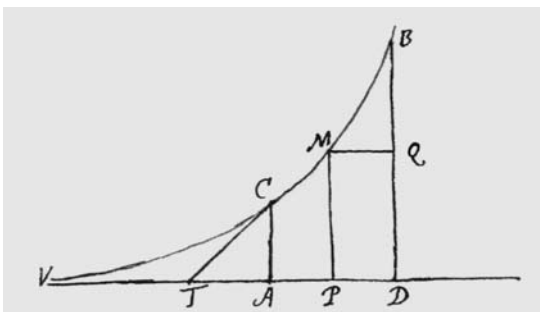
$$v^{2n+1} - (2v+1)(v+1)^{n-1} = v\left(v^{2n} - (v+1)^n\right) + (vv - v - 1)(v+1)^{n-1};$$

und $v^{2n} - (v+1)^n$ ist durch $vv - (v+1)$ *divisibilis. Quicquid ergo sit n aequationi* $v^{2n+1} = (2v+1)(v+1)^{n-1}$ *satisfacit* $vv = v + 1$, und ist allso $v = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, aus welcher *Aequation* man *per hypothesin* die *radicem* x finden kan.

Si concipiatur [*curva*] *cujus abscissa posita* $= x$, *applicata sit*

$$y = \frac{x}{1 \cdot 2^2} + \frac{x^2}{2 \cdot 2^4} + \frac{x^3}{3 \cdot 2^6} + \frac{x^4}{4 \cdot 2^8} + etc.,$$

erit generaliter $y = \ell \dfrac{4}{4-x}$, und folglich ist die *curva* eine *logarithmica*, darinn die *applicata* zum *assymtoto* wird wann $x = 4$.



Es sey VCB eine *Logarithmica ordinaria asymtoton habens* VD, deren *subtangens constans* $AT = 1$; *capiatur applicata* $AC = 1$, *et ducta alia quacunque* PM, *positisque* $AP = t$, *et* $PM = u$, *erit* $t = \ell\, u$ *seu* $u\, dt = du$. *Jam ducatur applicata* $DB = 4AC = 4$, *erit* $AD = \ell\, 4$: *et ducta* MQ *fiet* $BQ = x$ *et* $QM = y$ *pro casu proposito; erit enim* $AP = t = \ell\, 4 - y$ *et* $PM = u = 4 - x$, *unde ob* $t = \ell\, u$ *erit* $\ell\, 4 - y = \ell\, (4-x)$ *et* $y = \ell \dfrac{4}{4-x}$. Sonsten haben Ewr. Hochedelgb. *pro summa seriei ipsi y aequalis casu* $x = 1$ geschrieben $\frac{1}{3}$, da diese *summ* ist $= \ell\, \frac{4}{3}$.[26]

Hiemit empfehle mich zu Ewr. Hochedelgb. beständigen Gunst und Gewogenheit, und habe die Ehre mit der schuldigsten Hochachtung zu seyn,

Ewr. Hochedelgebohrnen
gehorsamster Diener
Leonh. Euler

Berlin den 30ten *Junii*
1742.

R 766 Reply to nº 51
Berlin, June 30th, 1742
Original, 4 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 22–25r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 130–136; *Euler-Goldbach* (1965), p. 107–111

53
Goldbach to Euler
Moscow, July (19th) 30th, 1742

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*,

Eurer Hochedelgebohrnen an mich abgestatteten Glückwunsch erkenne ich mit der schuldigsten Danckbarkeit und *gratuli*re gleichfalls zu Dero bevorstehenden *perpetuell*en *pension* aus Pariß, denn es scheinet je länger je mehr daß E. HochEdelg. die dortige *Academie des Sciences* sich bey Austheilung der Preise gäntzlich *tributaire* machen werden.[1]

Von den Friedens *Condition*en wird jedermann gestehen daß sie für Ihro Königl[iche] Majestät nicht *glorieus*er hätten vermuthet werden können,[2] welches auch mir zu grosser Freude gereichet.

Bey Gelegenheit[3] des *loci corrupti* den der H. *Mauclerc* so glücklich *restitui*ret hat,[4] erinnere ich mich daß ich in den von *Wallisio dechifrir*ten Briefen[5] einige Stellen angemercket, die einer andern *interpretation* nöthig haben,[6] wie es E. H. wann Sie nachfolgende *remarques* mit den Briefen selbst *conferi*ren wollen, ohne Zweiffel befinden werden: *Tom.* III *Op*[*erum*] *p.* 666, *lin*[*ea*] 4 hatte in dem Briefe gestanden 125, 44, 24, 123, 68, 28. Er setzet an statt 24 die Zahl 26 und lieset

125,	44,	26,	123,	68,	28,
co	*n*	*d*	*ui*	*st*	*e*

welches kein frantzösisches Wort ist, da doch vielmehr von dem *Copist*en die zwey Zahlen 40 und 20 oder die eine 348 ausgelassen worden und das gantze Wort heissen soll: <u>*Conclaviste*</u>. *Lin*[*ea*] 10 *ibid.* setzet er für 128 die Zahl 138 und *interpreti*ret sie <u>*Hongrois*</u>; es ist aber viel wahrscheinlicher daß 128 recht geschrieben, und <u>*homme*</u> heist. Auch ist nicht zusehen warum *p.* 665, *lin*[*ea*] 7 von unten, die Zahl 380 welche er gar nicht in den *clavem* gesetzet, <u>*pall*</u> heissen soll da dieselbe vielmehr <u>*paye*</u> bedeuten wird. Die Zahl 136 welche er gar nicht *interpreti*ret soll vermuthlich heissen <u>*Dame*</u>. Dessen ohngeachtet halte ich die von *Wallisio* bewerckstelligte *Dechifri*rung vor einen grossen *effort de l'Esprit humain*. Er gestehet aber aufrichtig daß ihm unterschiedene *chifri*rte Briefe in die hände gekommen daraus er nichts finden können.

Ich sehe wohl daß bey meinen Briefen allezeit die Erinnerung nöthig ist: *Omnia probate*,[7] weil es mehrenteils an gehöriger *at*[*ten*]*tion* fehlet, indessen wird es mir doch lieb seyn wann nur etwas darin enthalten ist so Eurer HochE. *approbation* *meriti*ret. An die *observation* welche Sie mir schon längst *communici*ret, daß die *numeri* $4m+1$ nur auf einerley Art in zwey *quadrata* getheilet werden können, habe ich damahls als ich den letzten Brief geschrieben, nicht gedacht.[8] Daß alle Zahlen in der *formula* y^2+y-x^2 begriffen sind[9] ist gewiß, doch hätte dieses meiner damahligen *intention* nichts gehindert wann nur die *suppositiones* $u=\frac{z^2+z}{4}+1$ und $x=\frac{z^2+z}{4}-1$ aus zulänglichen Gründen wären hergeleitet worden; denn wie es in dieser *proposition*: *quilibet numerus est aequalis tribus trigonalibus, uni affirmativo et duobus negativis*,[10] darauf nicht ankommt daß in den *tribus formulis* $\frac{x^2+x-y^2-y-z^2-z}{2}$, x, y und z alle nur mögliche Zahlen bedeuten, son[dern] vor x auch gar wohl gesetzt werden kan $2u^2$, wann man nur erweiset, daß diese *adhibita substitutio* dem *numero cuicunque dato*, so aus der gantzen erwehnten *formul* heraus kommen soll, nicht hinderlich ist, so würde es auch mit dem *casu* daß jeder *numerus* aus *tribus trigonalibus* bestehet, eine gleiche Bewandniß haben, wann die *suppositio* $x=\frac{z^2+z}{4}+1$ gnugsahm gegründet wäre.

Bald nach dem ich meinen Brief geschrieben hatte, sahe ich, daß die *observation* $\frac{p+2\pm\sqrt{4p-m+3}}{m}\neq$ *numero integro* von keiner Erheblichkeit ist.[11] Vieleicht sind diese etwas besser: $1+16a^2+16b^2$ *nunquam habet radicem huius formae* $4n-1$, *sed semper huius* $4n+1$. *Numerus* $4x^4+1$ *in unico casu est primus, si* $x=1$.[12]

Gleichwie es aber *series numerorum* giebt welche entweder nicht können durch $4n-1$ *dividi*ret werden, oder gar *numeri primi* sind, so wären auch dergleichen *series* von Zahlen zu suchen die entweder *numeri primi* sind, oder durch $4n+1$ nicht können *dividi*ret werden, oder wenigstens den *divisorem minimum* niemahls *huius formae* $4n+1$ haben, denn so offt es sich träffe, daß ein *terminus eius seriei* gleich würde a^2+1, könnte man *demonstri*ren daß es ein *numerus primus* sey. In der *serie numerorum trigonalium unitate auctorum* sind gewiß sehr wenige *casus* da der *divisor minimus ad hanc formam* $4n+1$ gehöret; einer von diesen *casibus* ereignet sich wann der *exponens termini* ist 252 und der *numerus* $\triangle$*lis unitate auctus* aus den *factoribus* 29 und 401 bestehet.[13] Wann man aber dergleichen *casus in quibus divisor minimus est huius formae* $4n+1$ durch eine *generale exception* ausschliessen könnte, so wären alle *termini huius formae* a^2+1 insofern sie in selbiger *exception* nicht begriffen sind, *numeri primi*.[14]

Was ich von $v^{2n+1}=(2v+1)\,(v+1)^{n-1}$ geschrieben hatte war bloß *ex consideratione numeri* $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ hergenommen, ohne zu vermuthen daß die *aequatio dividi*ret werden könnte, welches doch, wie ich jetzo sehe, in dergleichen Fällen unumgänglich nöthig ist.[15]

So viel ich mich erinnere, ist mir niemahls eine *methode data summa seriei*

$$\frac{1}{a+\alpha x}+\frac{1}{b+\beta x}+\frac{1}{c+\gamma x}\;+\;\&c.$$

inveniendi summam

$$\frac{\alpha^{n-1}}{(a+\alpha x)^n}+\frac{\beta^{n-1}}{(b+\beta x)^n}+\frac{\gamma^{n-1}}{(c+\gamma x)^n}+\&c.$$

bekannt gewesen,[16] ausser in dem Fall da *summa prioris seriei* aus einer bekannten *functione ipsius* x bestehet, solcher gestalt wird auch *data* $\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+\delta x^4+\&c.$ *summabili*, die *series* $\alpha x+2^n\beta x^2+3^n\gamma x^3+4^n\delta x^4+\&c.$ *summabilis*; welches aber nichts sonderliches ist, da hingegen die gröste Schwierigkeit darin bestehet, daß man in Ermangelung einer solchen *functionis finitae ipsius* x eine *expressionem aequivalentem substitui*ren und selbige hernach immer weiter *differentii*ren könne, wie E. H. es mit den *Sinibus arcuum circuli* gemachet. Indessen will ich doch ein *Theorema* hieher setzen so mir nun seit wenigen Tagen eingefallen: *Sint tres series*

$$\begin{array}{ll} A\ \ldots & a+b+c+d+\&c.\\ B\ \ldots & ab+(a+b)\,c+(a+b+c)\,d+\&c.\\ C\ \ldots & a^2+b^2+c^2+d^2+\&c.\end{array}$$

dico esse $B=\dfrac{A^2-C}{2}$, *unde sequitur cognitis summis duarum serierum ex his tribus, dari etiam summam tertiae seriei, et cognita summa unius seriei dari etiam rationem quam alterutra series reliquarum habet ad alteram. Sit exempli gratia* $a=\dfrac{1}{m}$, $b=\dfrac{1}{m^2}$, $c=\dfrac{1}{m^3}$ *&c., erit* $B=\dfrac{1}{(m+1)\,(m-1)^2}$. *Sit* $a=1$, $b=\frac{1}{3}$, $c=-\frac{1}{5}$, $d=-\frac{1}{7}$ (*signis post binos quosque terminos alternantibus*), *erit series* $B=0$.[17] *Si ponatur*

$$\frac{1}{2^n}-\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\frac{1}{3^n}+\left(1-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)\frac{1}{4^n}-\&c.=f\pi^{2n},$$

ubi π = *circumferentiae circuli cuius diameter* 1, *erit* f *functio ejusmodi ipsius* n, *quae posito* $n=1$ *fiat* $\dfrac{6p^2-\pi^2}{12}$, *ubi* $p=\ell\,2$; *si vero* n *ponatur numerus integer maior unitate, tota functio fiat numerus rationalis, propterea quod in illa functione his casibus quantitates numeris* p *et* π *affectae sese destruunt.* Hiebey habe ich *observi*ret daß $1+p^2=\dfrac{3\pi^2}{20}$ *fere*.[18]

Ich möchte wohl wissen ob E. H. die *summas* nachfolgender *serierum* $ab^2+(a+b)\,c^2+(a+b+c)\,d^2$ &c. und $a^2b+\left(a^2+b^2\right)c+\left(a^2+b^2+c^2\right)d+\&c.$, wann $a=1$, $b=-\frac{1}{2}$, $c=\frac{1}{3}$, $d=-\frac{1}{4}$ oder $a+b+c+\&c.=\ell\,2$, *per logarithmos et quadraturam circuli* exprimieren können?

Neulich fand ich einen Zettel darauf von meiner Hand, vermuthlich schon vor einigen Jahren, geschrieben war:[19] *Seriei* $1+2^p+3^p+4^p+\&c.$ *summa ad datum* *terminum x est*

$$\begin{aligned} 1 \quad &+ \quad 2^p\,(x-1) + (3^p - 2^p)\,(x-1)\,\frac{(x-2)}{2} \\ &+ \quad (4^p - 2\cdot 3^p + 2^p)\,(x-1)\,\frac{(x-2)}{2}\,\frac{(x-3)}{3} \\ &+ \quad (5^p - 3\cdot 4^p + 3\cdot 3^p - 2^p)\,(x-1)\,\frac{(x-2)}{2}\,\frac{(x-3)}{3}\,\frac{(x-4)}{4} \;+\; \&c. \end{aligned}$$

quae series abrumpitur si p sit numerus integer affirmativus, nec plures continet terminos, quam $p+2$ continet unitates.[20]

Auf einem andern Zettel fand ich folgendes: *Ex his formulis*

$$\begin{array}{rl} \text{(I.)} & u^n \\ \text{(II.)} & nu^{n+1} - (n+1)\,u^n \\ \text{(III.)} & n^2u^{n+2} - \big(2n^2+2n-1\big)\,u^{n+1} + (n+1)^2\,u^n \\ \text{(IV.)} & n^3u^{n+3} - \big(3n^3+3n^2-3n+1\big)\,u^{n+2} + \big(3n^3+6n^2-4\big)\,u^{n+1} - (n+1)^3\,u^n \end{array}$$

quae in infinitum continuari possunt ea lege, ut si antecedens fuerit

$$n^pu^{n+p} + \alpha u^{n+p-1} + \beta u^{n+p-2} + \gamma u^{n+p-3} + \&c.,$$

sequens fiat

$$\begin{array}{lllll} n^{p+1}u^{n+p+1} & - n^p\,(n+p+1)\,u^{n+p} & - \alpha\,(n+p)\,u^{n+p-1} & - \beta\,(n+p-1)\,u^{n+p-2} & - \&c. \\ & + \alpha\,(n-1) & + \beta\,(n-2) & + \gamma\,(n-3) & + \&c. \end{array}$$

Sumatur formula quaecunque A et in casu particulari ubi fit $n=0$, eadem formula ponatur $=B$; dico $\dfrac{A-B}{(u-1)^{p+1}}$ esse summatricem seriei

$$1 + 2^pu + 3^pu^2 + 4^pu^3\ \ldots +\ n^pu^{n-1}.$$

Sit exempli causa $p=1$, erit $A = nu^{n+1} - (n+1)\,u^n$, et in casu particulari ubi $n=0$ transit A in $-1=B$, qua propter[21]

$$\frac{A-B}{(u-1)^2} = \frac{nu^{n+1} - (n+1)\,u^n + 1}{(u-1)^2} = 1 + 2u + 3u^2 + 4u^3\ \ldots +\ nu^{n-1}.$$

Sonst habe ich auch bemercket daß die *summa Seriei* $1 + 2^{2n} + 3^{2n} + 4^{2n} + \&c.$ gleich sey

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n}x^n\,(x+1)^n \quad &- \quad \frac{(n-2)}{2^2\cdot 3}x^{n-1}\,(x+1)^{n-1} \\ &+ \quad \frac{(7n-8)\,(n-1)\,(n-3)}{2^4\cdot 3^2\cdot 5}x^{n-2}\,(x+1)^{n-2} - \&c. \end{aligned}$$ [22]

oder (*posito* $y = x\,(x+1)$) *erit summatrix*

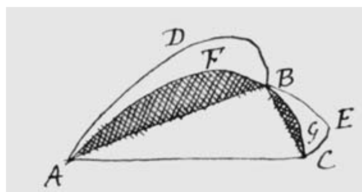
$$= \frac{1}{2n}\left(y^n + ay^{n-1} + by^{n-2} +\ \ldots\ my^2\right)$$

ubi a, b, *&c. determinantur hoc modo*:

$$
\begin{aligned}
&(n-1)\,a &+&\quad n\,(n-1)\,(n-2)=0\\
&(n-2)\,b &+&\quad \frac{a\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{2\cdot 3}+\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=0\\
&(n-3)\,c &+&\quad \frac{b\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)}{2\cdot 3}+\frac{a\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)\,(n-5)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\\
& &+&\quad \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)\,(n-5)\,(n-6)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}=0;
\end{aligned}
$$

solte auch hierin etwas verschrieben seyn, so kann ich es doch gleich *rectifici*ren, wie denn auch dasjenige, was jetzo von den *exponentibus paribus* gesagt worden, auf alle *exponentes in genere* zu *extendi*ren nicht schwer seyn würde.

In den *Compendiis Geometricis* wo das *Theorema Pythagoricum demonstri*ret wird, solte man billig solches auch von allen *figuris similibus demonstri*ren,[23] woraus denn dieses *corollarium* folget:



Si triangulum rectangulum ABC tangatur a curva quacunque AFBGC in tribus punctis A, B, C, et super basibus AB et BC describantur curvae ADB, BEC ipsi curvae ABC per omnia similes, nec sese in aliis punctis praeter A, B, C intersecantes, fore (deductis segmentis cancellatis AFB, BGC) reliquas quasi-lunulas $ADBF + BECG = \triangle ABC$*; quae quasi-lunulae in lunulas veras transibunt, si curva ABC fuerit semicirculus.*

Hiernechst verbleibe ich mit besonderer Hochachtung,

Eurer HochEdelgebohrnen

ergebenster Diener

Goldbach.

Moscau den 30. *Julii st. n.* 1742.

R 767 Reply to nº 52
Moscow, July (19th) 30th, 1742
Original, 4 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 46–49r
Partial copy, 7 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. III, fol. 61r–64r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 137–143; *Euler-Goldbach* (1965), p. 112–115

54
Euler to Goldbach
Berlin, August 28th, 1742

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats*-Rath

Daß Ewr. Hochedelgb. mir einen bestandigen *Tribut* von der *Academie* zu *Paris prophe*zeyen, erkenne ich als eine deutliche *marque* Dero gegen mich hegenden besondern Wohlgewogenheit mit der schuldigsten Dankbarkeit:[1] ob ich aber gleich zu Erhaltung dieses Vortheils meiner seits nicht ermangeln lasse, so scheinet doch meine von hieraus abgeschickten *Piec*en eben dasjenige Schicksaal betroffen zu haben welches vor etlichen Jahren den H. *Cammer* Herrn Korff so viel Mühe gekostet hat zu *redressi*ren.[2] Dann ich habe schon zu Anfang des vorigen Monaths meine *Piec*e über die *Inclination* des *Magnet*en an den H. *De Mairan* geschickt, und gleich wohl noch keine Antwort, daß selbige angekommen, erhalten.[3] Hernach hatte ich verwichenen *Martium* eine *Piece* über den *Motum Fluidorum in Canalibus elasticis* an die *Academi*e *des Sciences* nach *Dijon*, von welcher über diese *Materi*e ein Preiß von 30 *Louisd'or* bestimmt war, gesandt, und gleichfalls darüber noch keine Antwort empfangen,[4] welches mich glauben macht, daß diese beyden *Piecen* entweder irgendwo aufgehalten, oder gar verlohren gegangen seyn müssen; wobey ich nur dieses am meisten bedaure, daß ich von diesen beyden *Piec*en keine *Copi*en gehalten habe.

Zu Aufbauung der neuen *Academi*e der Wissenschaften allhier sind von Ihro Königl[ichen] *Majestät* die nöthigen *Ordres* schon gegeben worden, allein wegen der Aufrichtung selbst ist noch nichts *resolvi*rt worden. Die alte *Societät* hatte letstens bald ein grosses Unglück betroffen, indem bey Nacht auf dem Königl[ichen] Stall Feur ausgekommen wodurch die gantze vordere *Face* nach den Linden verbrannt, und die gantze Mahler *Academi*e zu Grund gegangen.[5]

Der H. Rath Schumacher hat mir vor einiger Zeit gemeldet, daß Ihro Kaiserl[iche] *Majestät* schon würckl[ich] für die *Academi*e in *Petersburg* zu sorgen und derselben einen *Praesident*en zu geben Allergnädigst geruhet hätten; da aber Ewr. Hochedelgb. davon keine Meldung gethan, so muß ich die *Confirmation* dieser Zeitung noch erwarten.[6]

Ewr. Hochedelgb. *Emendation*en der von *Wallisio dechifrir*ten Briefe[7] halte ich vor gantz richtig, erkenne aber dabey mein Unvermögen, selbsten diese tiefsinnige *Materi*e zu untersuchen.

Daß diese *Expression* $\sqrt{}(1+16aa+16bb)$ niemals eine Zahl von dieser *Form* $4n-1$ geben könne, ist ein sehr schönes *Theorema*,[8] davon die *Demonstration* nicht so leicht in die Augen fällt. Dann gesetzt, daß $4n-1=\sqrt{}(1+16aa+16bb)$, so würde $16nn-8n=16aa+16bb$, und folglich $n\,(2n-1)=2\,(aa+bb)$. Weilen nun $2\,(aa+bb)$ ein *numerus par* ist, so müste n ein *numerus par* seyn, indem $2n-1$ gewiß *impar* ist. Es sey allso $n=2p$, so wird $2p\,(4p-1)=2\,(aa+bb)$ und dannenhero $4p-1$ ein *divisor formulae* $aa+bb$ welches nicht seyn kan: oder

$p\,(4p-1)$ müste eine *summa duorum quadratorum* seyn, welches ebenfalls nicht möglich ist.

Daß $4x^4+1$ niemals ein *numerus primus* seyn könne ausser dem *Casu* wann $x=1$, ist kein Wunder, weilen diese *Formula generaliter in duos factores resolvi*rt werden kan, denn es ist $4x^4+1=(2xx+2x+1)\,(2xx-2x+1)$.

Ob es solche *Series Numerorum* gebe, welche entweder durch $4n+1$ nicht *divisibiles*, oder gar *numeri primi* sind, zweifle ich sehr;[9] wann aber gleichwohl dergleichen sich finden sollten, so würde man daraus einen grossen Vortheil zu Erfindung der *numerorum primorum* ziehen können.

Übrigens halten die *Divisores primi* aller *Serierum* von Zahlen, welche in dieser *Formula* enthalten sind $\alpha xx \pm \beta yy$ eine sehr artige Ordnung, welche, ungeacht ich davon noch keine *Demonstration* habe, dennoch ihre völlige Richtigkeit zu haben scheint. Ich nehme deswegen die Freyheit Ewr. Hochedelgb. einige dergleichen *Theoremata* zu überschreiben, aus welchen noch unendlich viel andere hergeleitet werden können.[10]

I. *Si x et y sunt numeri primi inter se haec formula $xx+yy$ per alios numeros primos non est divisibilis, nisi qui contineantur in hac forma $4n+1$; atque hi numeri primi omnes ipsi in hac forma $xx+yy$ continentur.*

Dieses bekannte *Theorema* setze ich voraus, um die *connexion* der übrigen desto besser vor Augen zu legen.

II. *Haec formula $2xx+yy$ alios divisores primos non habet, nisi qui in his formis* $8n+1$ oder $8n+3$ *contineantur: et quoties $8n+1$ vel $8n+3$ fuerit numerus primus, erit is aggregatum ex quadrato et duplo alterius quadrati, seu erit formae $2xx+yy$.*

III. *Haec formula $3xx+yy$ alios divisores primos non habet, nisi qui in his formis $12n+1$, et $12n+7$* (oder in dieser einzeln $6n+1$) *contineantur. Et quoties $6n+1$ est numerus primus, continebitur in forma $3xx+yy$.*

IV. *Haec formula $5xx+yy$ alios divisores primos non habet, nisi qui in his formis $20n+1$; $20n+3$; $20n+9$; $20n+7$ contineantur: et omnis numerus primus in una harum quatuor formularum contentus erit ipse numerus formae $5xx+yy$.*

V. *Haec forma $6xx+yy$ alios divisores primos non habet, nisi qui in una harum quatuor formularum $24n+1$; $24n+5$; $24n+7$; $24n+11$ contineantur: et omnis numerus primus in una harum formularum contentus est ipse numerus formae $6xx+yy$.*

VI. *Haec forma $7xx+yy$ alios divisores primos non habet, nisi qui in una harum 6 formularum $28n+1$; $28n+9$; $28n+11$; $28n+15$; $28n+23$; $28n+25$* (oder in einer dieser dreyen $14n+1$; $14n+9$; $14n+11$) *continea*[*ntur*:] *et omnis numerus primus in una harum formularum contentus est ipse numerus formae $7xx+yy$.*

Nun aber ist *omnis numerus trigonalis unitate auctus* in dieser *Formula* $7xx+yy$ enthalten,[11] und folglich können die *numeri trigonales unitate aucti* keine andern *Divisores primos* haben, als welche in diesen *Formulis* $14n+1$; $14n+9$; $14n+11$; oder welches gleich viel in dieser $7xx+yy$ enthalten sind. Hieraus lassen sich nun leicht alle *numeri primi* finden, welche einen *numerum trigonalem unitate* *auctum dividi*ren: Solche sind nehmlich 1; 11; 23; 29; 37; 43; 53; 67; 71; 79; *etc.* Dahero können keine andere *numeri primi hujus formae* $4m+1$ *divisores* seyn *numeri trigonalis unitate aucti*, als welche in einer von diesen 3 *formulis* begriffen sind $28n+1$; $28n+9$; $28n+25$.

Hieraus ist allso klar daß diese *Expression* $pxx+yy$ keine andern *Divisores* habe, als welche in einer gewissen Anzahl von solchen *formulis* $4pn+s$ enthalten sind, allwo s einige Zahlen bedeutet, welche ob sie gleich keine Ordnung unter sich zu halten scheinen, dennoch nach einer schönen *Lege* fort gehen: welche aus diesen *Theorematis* erhellet.

VII. *Si numerus primus formae* $4pn+s$ *fuerit divisor formulae* $pxx+yy$*, tum etiam omnis numerus primus in hac forma generaliori contentus* $4pn+s^k$ *erit divisor formulae* $pxx+yy$*, atque etiam ipse erit numerus formae* $pxx+yy$*. Ex*[*empli*] *gr*[*atia*]*. Quia numerus primus* $28n+9$ *est numerus formae* $7xx+yy$*, erunt etiam numeri primi* $28n+81$ $(28n+25)$; $28n+729$ $(28n+1)$ *etc. numeri formae* $7xx+yy$.

VIII. *Si duo numeri primi* $4pn+s$ *et* $4pn+t$ *fuerint divisores formulae* $pxx+yy$*, tum omnis numerus primus hujus formae* $4pn+s^kt^i$ *erit simul numerus formae* $pxx+yy$.[12]

Wann man allso von einer solchen *Expression* $pxx+yy$ schon einige *divisores primos* entdecket hat, so kan man durch diese *Theoremata* leicht alle möglichen finden. Als es sey diese *formul* $13xx+yy$ gegeben, worinn diese Zahlen 14; 17; 22; 29; 38; 49; 62; *etc.* enthalten sind. *Numeri igitur primi qui sunt divisores formulae* $13xx+yy$ *erunt* 1; 7; 11; 17; 19; 29; 31: folglich müssen alle *numeri primi in his formulis* $52n+1$; $52n+7$; $52n+11$; *etc. divisores* von $13xx+yy$ seyn können. Die *Formul* $52n+7$ gibt aber nach dem *Theor*[*emate*] VII noch diese $52n+49$; $52n+343$ (oder $52n+31$); $52n+7\cdot31$ oder $52n+9$; ferner $52n+7\cdot9$, oder $52n+11$; ferner $52n+7\cdot11$ oder $52n+25$; ferner $52n+7\cdot25$ oder $52n+19$; ferner $52n+7\cdot19$ oder $52n+29$; ferner $52n+7\cdot29$ oder $52n+47$; ferner $52n+7\cdot47$ oder $52n+17$; ferner $52n+7\cdot17$ oder $52n+15$; ferner $52n+7\cdot15$ oder $52n+1$, und hier endet sich die Verschiedenheit der Zahlen, welche zu $52n$ gesetzt werden können, um *numeros primos in forma* $13xx+yy$ *contentos* hervorzubringen. Allso nur allein daraus daß 7 ein *Divisor formae* $13xx+yy$ seyn kan, weisen die beyden letsten *Theoremata*, daß alle *numeri primi in his formulis*

$$\begin{array}{llll} 52n+1; & 52n+31; & 52n+25; & 52n+47 \\ 52n+7; & 52n+9; & 52n+19; & 52n+[17]^{[13]} \\ 52n+49; & 52n+11; & 52n+29; & 52n+15 \end{array}$$

contenti diese *form* $13xx+yy$ haben, und auch *divisores* von solchen Zahlen $13xx+yy$ seyn können, und mehr *formulae* können auch durch die *Theoremata* nicht herausgebracht werden. Dahero gewiß ist daß kein anderer *numerus primus* ein *divisor formae* $13xx+yy$ seyn kan, als welcher in einer der gefundenen 12 *Formul*n enthalten ist. Weilen nun ein jeder *numerus primus in hac forma contentus* $4pn+1$ ein *Divisor* von $pxx+yy$ seyn kan. Hieher können schöne *Proprietates* hergeleitet werden als z[um] e[xempel]: Weil 17 ein *numerus primus* und auch von dieser *Form* $2xx+yy$: so ist gewiß daß so offt $17^m\pm8n$ ein *numerus primus* ist, solcher auch eine solche Zahl $2xx + yy$ seyn müsse. Und wann $17^m \pm 8n$ eine Zahl ist von dieser *Form* $2xx + yy$ und doch keinen *Divisorem* von dieser *Form* *admitti*rt, so ist dieselbe gewiß ein *numerus primus*.

Eine gleiche Beschaffenheit hat es auch mit den *Divisoribus hujus modi formularum* $pxx - yy$, oder $xx - pyy$; welche wann sie *primi* sind in dieser *Form* $4np \pm s$ enthalten seyn müssen; da s einige *determinir*te Zahlen bedeutet. Nehmlich in einigen Fällen wird seyn:

1. *Omnes divisores primi formae* $xx - yy$ *continentur in* $4n \pm 1$, welches klar.

2. *Omnes divisores primi formae* $2xx - yy$ *continentur in* $8n \pm 1$.

Coroll[*arium*]. *Ergo numerus primus* $8n \pm 3$ *non est numerus formae* $2xx - yy$.

3. *Omnes divisores primi formae* $3xx - yy$ *continentur in forma* $12n \pm 1$.

4. *Omnes divisores primi formae* $5xx - yy$ *continentur vel in* $20n \pm 1$ *vel in* $20n \pm [9]$ (oder in dieser einzeln $10n \pm 1$)

etc.

Et si numerus primus $4pn + s$ *fuerit divisor formae* $pxx - yy$ *oder* $xx - [pyy]$, *tum* $\pm 4np \pm s^k$ *erit ipse numerus formae* $pxx - yy$ *vel* $xx - pyy$ *quoties fuerit numerus primus. Si duo numeri primi* s, *et* t *fuerint numeri formae* $pxx - yy$, *tum quoties* $\pm 4np \pm s^\mu t^\nu$ *fuerit numerus primus, simul erit numerus formae* $pxx - yy$. Allso weil 7, und 17 *numeri primi* und von dieser *Form* $2xx - yy$ sind, so wird auch $\pm 8n \pm 7^\mu \cdot 17^\nu$ eine Zahl von dieser *Form* seyn, so oft dieselbe ein *numerus primus* ist. Es sey $\mu = 1$, $\nu = 1$; so ist $7 \cdot 17 = 119$; und $119 + 8 = 127 =$ *numero primo*; folglich wird seyn $127 = 2xx - yy = 2 \cdot 64 - 1$. Hieraus ist nun klar daß es nicht möglich ist *suiten* von Zahlen so in einer solchen *Formul* $pxx \pm qyy$ begriffen sind, zu finden, welche nicht *divisores* von dieser art $4n + 1$ *admitti*ren sollten.

Ich glaube aber fest daß ich diese *Materi*e bey weitem noch nicht erschöpfet habe, sondern daß sich darinn noch unzehlich viele herrliche *Proprietates Numerorum* entdeken lassen; wodurch die *Doctrina de Divisoribus* zu einer weit grössern Vollkommenheit gebracht werden könnte;[14] und bin dabey gewiß daß wann Ewr. Hochedelgb. diese *Materi*e einiger *Attention* würdigen werden, Dieselben darinn sehr wichtige *Decouvert*en machen würden. Der grösste Vortheil wurde aber sich alsdenn recht zeigen, wann man für diese *Theoremata Demonstrationes* finden sollte.

Wenn 3 *Series* allso beschaffen sind,[15] daß $A = a + b + c + d + etc.$, $B = ab + (a + b)\,c + (a + b + c)\,d + etc.$, *et* $C = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + etc.$, so ist B die *summa factorum ex binis terminis seriei* A, und ist folglich die *dupla summa factorum ex binis* $2B$ *una cum summa quadratorum singulorum* C gleich dem *Quadrato seriei* A *seu* $2B + C = AA$, *et* $B = \dfrac{A^2 - C}{2}$; solche *Theoremata* können auf höhere *Potestates extendi*rt werden, als wann

$$\begin{aligned} A &= a + b + c + d + etc. \\ B &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + etc. \\ C &= a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + etc. \\ D &= a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + etc. \end{aligned}$$

so wird seyn *terminorum* a, b, c, d, e, *etc.*

$$\textit{summa factorum ex binis} = \frac{A^2 - B}{2}$$

$$\textit{summa factorum ex ternis} = \frac{A^3 - 3AB + 2C}{6}$$

$$\textit{summa factorum ex quaternis} = \frac{A^4 - 6A^2B + 8AC + 3B^2 - 6D}{24}$$

etc.;

wann aber $A = a + b + c + d + \textit{etc.}$ und $B = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \textit{etc.}$ und $C = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + \textit{etc.}$ und Ewr. Hochedelgb. mir *proponi*rte *series* gesetzt werden

$$P = ab^2 + (a + b)\, c^2 + (a + b + c)\, d^2 + (a + b + c + d)\, e^2 + \textit{etc.}$$

item

$$Q = a^2 b + \left(a^2 + b^2\right) c + \left(a^2 + b^2 + c^2\right) d + \textit{etc.}$$

so wird seyn $P + Q = AB - C$: folglich wann

$$\begin{array}{rcl} A & = & 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \textit{etc.} \\ B & = & 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \textit{etc.} \\ C & = & 1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{27} - \frac{1}{64} + \frac{1}{125} - \textit{etc.} \end{array}$$

so kan die *summa* der beyden *serierum* $P+Q$ nicht *per logarithmos et quadraturam circuli* angegeben werden, weilen die *Series* C noch nicht *summir*t werden kan; viel weniger kan allso eine jede für sich *summir*t werden: wann aber dieses geschehen könnte so hätte man die *summam Seriei* C, welche ich bißher vergebens gesucht.

Die *Valores* $1 + p^2$ und $\dfrac{3\pi^2}{20}$, wann $p = \ell\, 2$, *differi*ren so wenig von einander, daß ich dieselben bald für völlig gleich gehalten hatte:[16] ich habe deswegen beyder *Valores* genauer gesucht und gefunden $1 + p^2 = 1{,}480\,453\,013\,9$ und $\dfrac{3}{20}\pi^2 = 1{,}480\,440\,66$.

Die *Formulae* welche Ewr. Hochedelgeb. mir für die *Summationem Seriei* $1 + 2^p + 3^p + 4^p + \textit{etc.}$ *usque ad datum terminum* überschrieben, erinnere ich mich noch in *Petersburg* bey Denselben gesehen zu haben,[17] und entspringet die erstere *Expression* $1 + 2^p\,(x-1) + (3^p - 2^p)\,\dfrac{(x-1)\,(x-2)}{1 \cdot 2} + \textit{etc.}$ *ex differentiis continuo sumtis*, und die andern *Formulae* kommen *per differentiationem* heraus.

Um aber die *Summam* in der bequemsten *Form* zu finden, so halte ich diese Art vor die leichteste:

$$\begin{aligned}
1 \;+\;& 2^p + 3^p + 4^p + 5^p + 6^p \;\ldots + \; x^p \\
=\;& \frac{x^{p+1}}{p+1} + \frac{x^p}{1\cdot 2} + \frac{p}{2\cdot 3}\cdot\frac{1}{2}x^{p-1} - \frac{p\,(p-1)\,(p-2)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot\frac{1}{6}x^{p-3} \\
+\;& \frac{p\,(p-1)\,(p-2)\,(p-3)\,(p-4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}\cdot\frac{1}{6}x^{p-5} - \frac{p\,(p-1)\,\cdots\,(p-6)}{2\cdot 3\cdot 4\,\cdots\,9}\cdot\frac{3}{10}x^{p-7} \\
+\;& \frac{p\,(p-1)\,\cdots\,(p-8)}{2\cdot 3\,\cdots\,11}\cdot\frac{5}{6}x^{p-9} - \frac{p\,(p-1)\,\cdots\,(p-10)}{2\cdot 3\,\cdots\,13}\cdot\frac{691}{210}x^{p-11} \\
+\;& \frac{p\,(p-1)\,\cdots\,(p-12)}{2\cdot 3\,\cdots\,15}\cdot\frac{35}{2}x^{p-13} - \mathit{etc.}
\end{aligned}$$

allwo das Hauptwerk auf diese *Seriem fractionum* ankommt, welche Ewr. Hochedelgb. genugsam noch bekannt seyn wird:[18]

$$\overset{1}{\frac{1}{2}};\quad \overset{2}{\frac{1}{6}};\quad \overset{3}{\frac{1}{6}};\quad \overset{4}{\frac{3}{10}};\quad \overset{5}{\frac{5}{6}};\quad \overset{6}{\frac{691}{210}};\quad \overset{7}{\frac{35}{2}};\quad \overset{8}{\frac{3617}{30}};\quad \overset{9}{\frac{43\,867}{42}};\quad \overset{10}{\frac{1\,222\,277}{110}};\quad \overset{11}{\frac{854\,513}{6}};$$

$$\overset{12}{\frac{1\,181\,820\,455}{546}};\quad \overset{13}{\frac{76\,977\,927}{2}};$$

so weit habe ich sie *continuir*t. Der *Terminus generalis exponenti n respondens* kan allso *exprimir*t werden

$$(2n+1)\left(-\frac{1}{2}+\frac{(2^{2n}-2\cdot 1)}{3}-\frac{(3^{2n}-3\cdot 2^{2n}+3\cdot 1)}{4}+\frac{(4^{2n}-4\cdot 3^{2n}+6\cdot 2^{2n}-4\cdot 1)}{5}-\mathit{etc.}\right),$$

welche gleichfalls *abrumpir*t wird.

Ob gleich diese *Series* $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\mathit{etc.}$ *per quadraturam circuli exprimir*t wird, so kan doch die *summ* von dieser $x+\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x^3}{9}+\dfrac{x^4}{16}+\mathit{etc.}$ nicht *generaliter* gegeben werden;[19] und ausser den *Casum* $x=1$ habe bißher noch keinen andern als wann $x=\frac{1}{2}$, *summi*ren können. Nehmlich *posito* $p=\ell\,2$ *et* $\pi:1=$ *periph*[*eria*] : *diam*[*etrum*], so kommt heraus

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{16\cdot 16}+\frac{1}{25\cdot 32}+\frac{1}{36\cdot 64}+\mathit{etc.}=\frac{\pi\pi-6pp}{12}.$$

Endlich habe die Ehre noch dieses *Theorema* hinzuzufügen, welches öffters einen grossen Nutzen haben kan:[20]

Th[*eorema*]: *Si fuerit*

$$s=1+\frac{a}{n+1}+\frac{aa}{2n+1}+\frac{a^3}{3n+1}+\frac{a^4}{4n+1}+\frac{a^5}{5n+1}\;+\;\mathit{etc.},$$

erit

$$\begin{aligned}\frac{ss}{2} = \frac{1}{2} \quad &+ \quad \frac{a}{n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)+\frac{aa}{2n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}\right)\\ &+ \quad \frac{a^3}{3n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3n+1}\right)\\ &+ \quad \frac{a^4}{4n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{4n+1}\right)+\ etc.\end{aligned}$$

Hiemit empfehle mich Ewr. Hochedelgb. gehorsamst, und verbleibe mit der schuldigsten Hochachtung

Ewr. Hochedelgeb.
gehorsamster Diener
Leonh. Euler

Berlin den 28ten *Aug.*
1742.

P. S. Der H. *Hedling*er, welcher mit S[eine]r Fr[au] Liebste seit kurzem hier ankommen, und bey uns *logir*t, lässt Ewr. Hochedelgeb. seine gehorsamste Empfehlung machen.

R 768 Reply to nº 53
Berlin, August 28th, 1742
Original, 4 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 26–29v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 144–153; *Euler-Goldbach* (1965), p. 116–120

55
Goldbach to Euler
Moscow, (September 20th) October 1st, 1742

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*,

Eurer HochEdelgebohrnen bin ich für die Nachricht daß (*Tit*[*ulo*]) H. *Hedlinger* in Berlin angekommen und sich meiner annoch erinnert, sehr verbunden,[1] ich bitte mich demselben ferner zu empfehlen und hoffe noch immer ihn in diesen Gegenden wieder zu sprechen. Falls noch keine Nachricht von Eurer H. nach Pariß übersandten *Memoire* eingelauffen,[2] würde rathsahm seyn, dem Hn *De Mairan* durch ein besonderes Schreiben nebst einem *attestato* vom Berlinischen Posthause zu *notifici*ren daß eine *piéce* an ihn abgegangen wodurch der *Autor* um den künfftigen Preiß bey der *Academie competi*ret, und Sie wann selbige nicht zu gehöriger Zeit angekommen wäre, in dessen Nahmen (nach dem *Advocat*en *stilo*) *de termino non elabendo* *protesti*ren wolten.

Daß[3] $p\,(4p-1)$ keine *summa duorum quadratorum* seyn kan, wird von E. H. als bekannt angenommen, ich *deduci*re es aber daher *quia* $n \neq 2p \pm \sqrt{4p^2 - p - a^2}$, und dieses *quia* $n^2 \neq 4pn - p - a^2$; sonst habe ich auch gefunden daß eine *summa trium datorum quadratorum* nicht gleich seyn kan dem *facto ex duobus multiplicato per quadratum par*[4] oder daß $e^2 + f^2 + g^2 \neq 4e^2f^2p^2$; imgleichen *si est* $fmn - m - n \neq a^2$ (*ubi* f, m, n, a *sint integri affirmativi*) *erit etiam* $fp^2mn - m - n \neq a^2$, *ubi* p *praeterea sit integer.* Da es aber mit dem *casu* $f = 4$ bekannter massen *in aequatione priori* seine richtigkeit hat, so wird auch $4mnp^2 - m - n \neq a^2$, und kann gar wohl seyn[5] daß f für sich selbst noch viele oder unzehliche *valores* ausser dem *quaternario* hat, wie es sich denn findet, daß wann alle *divisores primi huius numeri* $3xx + yy$ (*ubi* x *et* y *sunt numeri inter se primi*) unter dieser *formula* $6n + 1$ begriffen sind (*de quo dubitare nefas*)[6] f auch $= 12$ gesetzt werden kan, folglich $12mnp^2 - m - n \neq a^2$. Ich habe unter den *remarques* so Ew. HochEdelg. mir von den *divisoribus formulae* $px^2 + y^2$ *communici*ren wollen insonderheit diese betrachtet, daß ein jeder *numerus* $\triangle$*lis unitate auctus* in dieser *formula* $7xx + yy$ enthalten ist und dahero keine andere *divisores primos* haben soll als welche in diesen *formulis* $14n+1$, $14n+9$, $14n+11$ bestehen; weil aber unzehliche *numeri* $\triangle$*les* (als zum Exempel 21) *unitate aucti* zu dieser *formul* $7x^2 + y^2$ gleichwohl nicht gebracht werden können[7] so verstehe ich Eurer H. *Theorema* nur von den *numeris trigonalibus paribus quorum scilicet exponentes sunt huius formae* $4m - \dfrac{(1 \mp 1)}{2}$, denn dieser *exponentium trigonales unitate aucti* sind offenbahr $7m^2 + (m \pm 1)^2$ und gehören alle, sie mögen *primi* oder *non primi* seyn, unter nachfolgende 4 *Classes* $7n + 0$, $7n + 1$, $7n + 2$, $7n + 4$, welches jedoch mit Eurer HochE. *specification* der *divisorum* (als worin der *numerus* 7 ausgelassen ist) nicht übereinkommet. Ich bin indessen Eurer H. für die *communication* dieser besondern *theorematum* sehr verbunden, ohngeachtet ich nicht alles *pro rei dignitate* einsehen kan.

Nach dem von E. H. mir schon längst *communici*rten *valore* $\ell\,2$ hatte ich $1 + \ell\,2 \cdot \ell\,2$ gefunden $= 1[,]480\,453\,017\,915\,20\ldots$ welcher von den in Dero Schreiben angeführten Zahlen etwas *differi*ret, weil aber der *error* sich erst nach der neunten Ziffer äussert, will ich den von E. H. angegebenen *valorem* lieber für wahr annehmen als die *multiplication* wiederhohlen.[8]

Die 12 *terminos seriei* $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{10}$ *&c.* habe ich auch schon längst abgeschrieben gehabt und den 13.den aus Dero letzterem Briefe bereits dazu gesetzet.

Das *quadratum seriei*[9] $s = 1 + \dfrac{a}{n+1} + \dfrac{a^2}{2n+1} + \text{\&c.}$ welches ist

$$ss = 2\left(1 + \frac{a}{n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{a^2}{2n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1}\right) + \text{\&c.}\right)$$

scheinet nur bloß deswegen merckwürdig zu seyn, weil die *coëfficientes* in einer so leichten Ordnung fortgehen.

Was ich in meinem vorigen von den *Lunulis* geschrieben hatte, ist von E. H. vermutlich übergangen worden nicht weil es unrichtig, sondern weil es gar zu offenbahr ist.[10]

Da nach der angenommenen Bedeutung der *signorum* $\pm$ und $\mp$ diese *formul* $\pm a \mp b$ entweder $a-b$ oder $-a+b$ heissen muß, so ist allerdings ein *signum* nützlich welches ausser diesen beyden *valoribus* auch $a+b$ und $-a-b$ andeutet, dieses erinnere ich mich in einigen Büchern mit $\between$ ausgedruckt gesehen zu haben,[11] und auf solche weise halte ich dafür daß man durch $\between 1 \between \frac{1}{2} \between \frac{1}{3} \between \frac{1}{4} \between \frac{1}{5} \between$ *&c.* alle *quantitates rationales, surdas & a quibuscunque quadraturis pendentes*[12] *exprimi*ren könne; die gantze Kunst bestehet nur darin daß die *signa* $+$ *&* $-$ *suis locis* recht *substitui*ret werden.[13]

Weil aber doch das *signum* $\between$ nur *alternative* entweder $+$ oder $-$ bedeutet so kan man noch ein *signum*, etwa $\div$ (welches der *Stifelius* vor $-$ zu gebrauchen pfleget)[14] in diesem Verstande annehmen, daß es *simul et* $+$ *et* $-$ bedeute; so giebt es *exempli gr*[*atia*] eine *seriem numerorum* n, der *apparence* nach *valde irregularem*, und die wohl noch von niemanden *consideri*ret seyn mag, von dieser beschaffenheit $n \div p = P$, wo p und P *numeros primos* bedeuten, so daß wan $n-p$ ein *numerus primus* ist, *ex natura numeri* n auch $n+p$ ein *numerus primus* seyn muß, durch n aber werden folgende *numeri* angedeutet 2, 3, 4, 5, 6, 8, 12, 18, 24, 30, *&c.* Gleichwie nun alle *numeri primi maiores quam* 3 unter die formul $6m \pm 1$ gehören, so hat es das ansehen daß die *termini* dieser neuen *seriei* welche grösser als 8 sind in der *formul* $6m$ begriffen seyen.[15]

Die *series numerorum* 2, 4, 6, 10, 14, 16, 20, 24, *&c.* deren *quadrata unitate aucta numeri primi* sind, scheinet diese *proprietatem* zuhaben daß eine jede Zahl aus zweyen der vorhergehenden bestehe als $6 = 2+4$, $24 = 10+14$, $20 = 4+16$ *&c.*;[16] offtmahls ist der *terminus unico modo ex duobus praecedentibus compositus*, als $74 = 20+54$.

Es ist unlängst bey einer gewissen Gelegenheit darüber *raisonni*ret worden ob die *globi sanguinei* welche nach des *Leuvenhoek*s *observation* 6 zusammen einen *globum maiorem formi*ren,[17] nicht ferner aus 6 kleinern und diese wieder aus 6 kleinern *et sic in infinitum* zusammengesetzt seyn könnten? Wann aber 6 *globi intra cavitatem globi maioris* solcher gestalt *concipi*ret werden, daß sie sich ein ander so viel möglich berühren, so wird der *diameter globi cuiusvis minoris* sich *ad diametrum globi maioris, in quo continentur*, verhalten wie 1 zu $1+\sqrt{2}$, und wann dieses auf die *globos sanguineos*, deren ein jeder für sich selbst nicht eigentlich ein *globus* sondern ein *aggregatum sex minorum globorum* ist, *applici*ret wird, diese kleineren *globuli* aber, wie gemeldet, aus 6 noch kleinern *&c.* bestehen sollen, so findet es sich daß man nothwendig bey einem gewissen *gradu determinato* mit solcher *diminutione globorum* aufhören muß; denn weil die *soliditas omnium globorum ex ordine n ad soliditatem unius globi ex ordine primo* ist wie $\dfrac{6^{n-1}}{\left(1+\sqrt{2}\right)^{3n-3}}$ *ad* 1, so würde, wann die *subdivisio* auf gleiche art *in infinitum* fortgienge, *propter* $n = \infty$, das *aggregatum omnium istorum globorum respectu globi maximi infi-*

nite parvum seyn, folglich auch mit dem besten *microscopio* nicht gesehen werden können, welches der *experience* zuwieder läufft. Ich habe (*Tit*[*ulo*]) den Hn von *Bl*....[18] mit welchem ich hierüber gesprochen, *meo periculo* versichert daß es Ew. HochEdelgb. eben so finden würden und bitte mir desfalls Dero *sentiment* hievon mit wenigem zu melden.

Bey dem *meo periculo* fällt mir der *Matanasius* ein, davon ich unlängst die 6.$^{\text{te}}$ *edition* gelesen, nachdem ich das Buch in 18 Jahren nicht gesehen hatte;[19] die *approbation generale* so es bey dem *Publico* gefunden und davon der *Autor* selbst unterschiedene *passages* anführet, zeuget in der That von dessen *merite*, und trifft hier gewisser massen des *Ciceronis* Ausspruch ein: *id ipsum est summi oratoris, summum oratorem populo videri*.[20]

Ich habe mich nach einem Buch so den *Titul* fuhret *Labyrinthus Algebrae Aut*[*ore*] *Joh*[*anne*] *Jac*[*obo*] *Ferguson*, *Hagae Com*[*itum*] 1667, 4., und ich selbst schon vor 30 Jahren in händen gehabt (wiewohl nichts daraus behalten) bey unterschiedenen Personen vergeblich erkundiget; dem Hn *Hermann* welcher doch eine grosse *connoissance* von dieser art Büchern hatte, war es auch gantz unbekannt; neulich fand ich ohngefehr obgedachten *Tit*el in meinen *excerptis*, und dabey geschrieben: *de quo tractatu iudicium vide in Actis Anglicanis ad ann*[*um*] 1669, *mens*[*em*] *Jul.*, *p.* 202; vieleicht ist etwas darin so einige *attention meriti*ret.[21]

Ich bin mit besonderer Hochachtung
Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

Moscau den 1. *Oct. st. n.* 1742.

Was[22] ich vorhin von dem *Dictionaire de Trevoux* geschrieben hatte beziehet sich auf folgende Nachricht aus den gelehrten Zeitungen: Das *Dict*[*ionaire*] *de Trevoux* ist zu *Nanci* bey *Pierre Antoine* 1733 gedruckt und soll von demselben 1741 wieder heraus gegeben werden.[23]

Auch möchte wohl wissen ob der *Thesaurus Stephani* in 4 *folianten curante Gesnero* in Leipzig schon gedruckt sey?[24]

vert[*e*]

Inliegenden Brief bitte ich so lang in Verwahrung zu behalten, bis sich eine bequeme Gelegenheit selbigen fortzuschicken findet.[25]

R 769 Reply to n° 54
Moscow, (September 20th) October 1st, 1742
Original, 5 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 50–53v, 140r
Address: "*A Monsieur / Monsieur Euler / De l'Academie des Sciences / à / Berlin.*"
Partial copy, 8 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. III, fol. 64v–68r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 154–159; *Euler-Goldbach* (1965), p. 122–124

56

Euler to Goldbach

Berlin, October 27th, 1742

Wohlgebohrner Herr *Etats*-Rath
Hochgeehrtester Herr

Ewr. Wohlgb. soll zuvorderst im Nahmen des H. *Hedling*ers vor Dero Geneigtes Andenken gehorsamsten Dank abstatten; derselbe befindet sich noch allhier bey uns und scheinet gesinnet zu seyn gleich nach Ihro Kaiserl[ichen] *Majestät* Zurückkunft in S^t *Petersburg* dahin einen *Tour* zu machen. Wegen meiner nach *Paris* gesandten *Piec*e habe ich noch keine Nachricht erhalten; ich habe deswegen neulich den H. *Clairaut* gebeten, sich desfalls bey *M.*^{r} *Demairan* zu erkundigen, und hoffe darauf bald Antwort zu bekommen.[1] Unterdessen versichert man mich auf der hiesigen *Post*, daß diese *Piece* nicht nur richtig von hier abgegangen, sondern auch in *Paris* angekommen seyn müsse. Sollte dieselbe dem ungeacht verlohren gegangen, oder zu späth angekommen seyn, so zweifle ich sehr, ob ich zum zweyten mal eine solche *Dispensation* hoffen könnte, indem mir anjetzo eine solche nachdrückliche Unterstützung fehlet; inzwischen werde doch Ewr. Wohlgeb. gutem Rath Folge leisten, als worfür gehorsamsten Dank abstatte.

Wann E. W. eine solche *Demonstration* haben, daß $n^2 \neq 4pn - p - a^2$ worinn nicht angenommen wird, daß $q\,(4p-1)$ keine *Summa duorum quadratorum* seyn kan, so ist dieselbe höchst merkwürdig, indem darauß nicht nur diese Wahrheit sondern noch viel andere weit leichter *demonstrir*t werden könnten; ich muß inzwischen gestehen, daß ich aller angewandten Mühe ungeacht keine andere *Demonstration* habe finden können. Hingegen sehe ich deutlich ein daß $ee+ff+gg \neq 4e^2f^2p^2$: dann soll eine *summa trium quadratorum* einen *numerum parem* machen, so muß entweder nur ein *Quadratum* oder alle drey *quadrata paria* seyn: im erstern Fall kommt ein *numerus impariter par* heraus, welcher folglich kein *Quadrat* seyn kan; dahero ist klar daß alle drey *Quadrata paria* seyn müssten; es sey allso $e = 2a$; $f = 2b$; $g = 2c$; so müsste $aa + bb + cc$ gleich seyn $16a^2b^2p^2$, und folglich müssten um soviel mehr a, b, und c *numeri pares* seyn, und so fort *in infinitum*. Aus diesem Grunde folget also noch dieser *generalere* Satz daß $aa + bb + cc \neq 4abn$. *Si* $fmn - n \neq a^2$ *erit quoque positis mpp et npp pro m et n* $\quad fmnp^4 - mpp - npp \neq \Box$ und folglich $fmnpp - m - n \neq \Box$; damit aber die erste *Aequation* ihre Richtigkeit habe, so kan freylich der *coefficiens* f *praeter* 4 unendlich viel andere *Valores* haben, wie Ewr. Wohlgeb. angemerket haben:[2] wobey ich hierauf gefallen daß, *si formulae* $faa+1$ *nullus extat divisor formae* $4fm-1$, auch immer $4fmn-m-n \neq \Box$. Weil nun nach den letstens überschriebenen *Observationen, hujusmodi formula* $faa + bb$ *dividi nequit per numerum primum formae* $4fm - 1$,[3] so folget *generaliter* daß $4fmn - m - n \neq$ *quadrato*, welcher *universal* Satz sich vielleicht noch leichter *demonstrir*en lässt, als ein *casus particularis*:[4] es käme allso darauf an daß man *demonstrir*te, daß $\dfrac{aa+m+n}{4mn}$ nimmermehr ein *numerus integer* seyn könne; oder daß $\frac{aa+p}{pp-qq}$ *ubi p et q uterque vel numerus par vel impar esse debet*[5] kein *numerus integer* seyn könne: oder daß $mpp-mqq-p$ kein *quadratum* seyn könne. Bey Überschreibung der *divisorum primorum formulae* $pxx+yy$, welche alle in solchen *formulis exprimir*t werden können $4p+\alpha$, $4p+\beta$, *etc.* habe vergessen zu melden, daß ausser diesen der *Binarius*, *et ipse numerus p ejusque divisores* Platz finden;[6] deren *numerus determinatus* ist, und in den vorigen *Formulis* nicht begriffen sind; und folglich *à part* bemerket werden müssen. Allso sind alle *divisores primi formae* $7xx+yy$ entweder 2 oder 7 oder in diesen *Formul*n enthalten $14n+1$; $14n+9$; $14n+11$; und so offt $14n+1$, oder $14n+9$ oder $14n+11$ ein *numerus primus* ist, so hat derselbe selbst diese *Formam* $7xx+yy$. Alle *Numeri trigonales aucti unitate* $\frac{xx+x}{2}+1$ sind zwar nicht eigentlich in $7xx+yy$ enthalten, sondern in $\frac{7xx+yy}{4}$;[7] und sind allso alle *numeri trigonales unitate aucti et quater sumti* in dieser *Form* begriffen $7xx+yy$; da nun das *simplum* keine andere *Divisores* haben kan als das *Quadruplum*, so folget dem ungeacht, daß alle *numeri primi, qui sunt divisores cujusque numeri trigonalis unitate aucti*, in diesen *Expression*en begriffen sind: 2; 7; $14n+1$; $14n+9$; $14n+11$; und dagegen wird keine *Exception* gefunden werden. Daß unsere *Expressiones pro* $\ell\,2\cdot\ell\,2$ nicht völlig übereinkommen, rührt ohne Zweifel daher, daß der $\ell\,2$ in beyden *Calculis* nicht gleich *accurat* genommen worden; ich erinnere mich nicht mehr auf wie viel Figuren ich den $\ell\,2$ genommen, ich habe solchen in meinen Schrifften nur auf 16 Figuren aufgezeichnet; es ist aber noch *accurat*er

$$\ell\,2 = 0{,}693\,147\,180\,559\,945\,309\,417\,232\,1$$

und nachdem ich die *multiplication* nochmal gemacht so finde ich

$$\ell\,2\cdot\ell\,2 = 0{,}480\,453\,013\,918\,201\,424\,667\,102\,4.$$

Das gemeldte *Theorema*:[8] *si*

$$s = 1 + \frac{a}{n+1} + \frac{a^2}{2n+1} + \frac{a^3}{3n+1} + etc.$$

erit

$$\frac{ss}{2} = \frac{1}{2} + \frac{a}{n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}\right) + \frac{a^2}{2n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}\right) + etc.,$$

ist deswegen merkwürdig, weilen durch dasselbe sehr leicht die *summa hujus seriei*

$$1 + \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 5} + \frac{1}{7\cdot 7} + \frac{1}{9\cdot 9} + etc.$$

gefunden werden kan; dann weilen ist

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + etc.$$

ponatur summa quadratorum horum terminorum

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+etc.=p;$$

et summa factorum ex binis terminis illius seriei $\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+etc.\right)$ $=q$; *erit* $p+2q=\frac{\pi\pi}{16}$: *erit autem*

$$q=\left\{\begin{array}{rcl} -\frac{1}{1\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 5}-\frac{1}{5\cdot 7}- & etc. & =-\frac{1}{2}(1)\\ +\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 7}+\frac{1}{5\cdot 9}- & etc. & =+\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{3}\right)\\ -\frac{1}{1\cdot 7}-\frac{1}{3\cdot 9}-\frac{1}{5\cdot 11}- & etc. & =-\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\\ +\frac{1}{1\cdot 9}+\frac{1}{3\cdot 11}+\frac{1}{5\cdot 13}- & etc. & =+\frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)\\ etc. & etc. & \quad etc. \end{array}\right.$$

es ist allso

$$-q=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)-\frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+etc.;$$

wann nun in obiger *serie* genommen wird $a=-1$; und $n=2$; und allso gesetzt wird

$$s=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-etc.=\frac{\pi}{4}$$

erit

$$-q=\frac{ss}{2}=\frac{\pi\pi}{32}.$$

Dahero weilen $p=\frac{\pi\pi}{16}-2q$, so ist

$$p=\frac{2\pi\pi}{16}=\frac{\pi\pi}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+etc.,$$

und gleicher gestalt kan dieses *Theorema* bey andern Gelegenheiten gantz unerwartete nützliche Dienste leisten. Daß in meinem vorigen Ewr. Wohlgeb. Einfall *de lunulis* nicht beantwortet habe[9] ist aus Versehen geschehen: der Grund davon ist zwar *ex similitudine figurarum* leicht einzusehen, indessen können daher doch solche *curieus*e *Consequentz*en gezogen werden, welche auf eine andere Art schwehrlich werden bewiesen werden können.

Was für Zahlen vor n angenommen werden können, daß wann $n-p$ ein *numerus primus* ist auch $n+p$ ein solcher werde, und dabey p einen *numerum primum* bedeutet, kan meines Erachtens nicht *generaliter* angezeiget werden;[10] wann aber für p eine *determinir*te Zahl angenommen wird, so können *quovis casu series numerorum pro n* gefunden werden; als wann $p=1$, so hat man für n diese Zahlen:

2; 4; 6; 12; 18; 30; 42; 60; 72; *etc.*, als welche Zahlen alle *sive aucti sive minuti unitate numeros primos* geben. Ist $p=2$ so kommt für n diese *Series* 3; 5; 9; 15; 21; 39; 45; 69; 81; *etc.*; weil aber hier lauter *numeri impares* kommen, so sey $p=3$; und für alle *Valores* von n kommt diese *series*: 4; 8; 10; 14; 16; 20; 26; 34; 40; *etc. Datur ergo unicus numerus* 4 *qui omnibus numeris primis* (*excepto* 2) *se minoribus sive auctus sive minutus producat numeros primos.* Der grosse Vortheil, welchen uns die *Analysis* bringt, kommt in der That nur von den *signis* her, welche man nach gewissen Grundgesetzen zu *tracti*ren pflegt; und dahero stehen noch wichtige Erweiterungen zu vermuthen, wann man neue *signa introduci*ren sollte; die Hauptsach aber wird auch auf die Erfindung der Regeln ankommen, nach welchen man dieselben *signa tracti*ren muß. Der *Newton* in *Arithmetica universali* hat die *signa dubia* nur durch *puncta* angedeutet; und kan deswegen weil dadurch die *Multiplication* angedeutet zu werden pflegt, nicht *imitir*t werden.[11] Ewr. Wohlgb. *Reflexion* über die *compositionem globulorum sanguineorum*[12] hat ihre völlige Richtigkeit, dergestalt, daß wann eine *similis compositio in infinitum* fortgienge, die *quantitas materiae* völlig *evanescir*te. Es sey A das *Volumen* eines *globi sanguinei*, welches zugleich die *quantitatem materiae* oder sein Gewicht anzeigen würde, wann der *globus solid* oder *massiv* wäre; ist aber derselbe aus 6 *globulis* zusammen gesetzt, welche alle *solid* sind, so ist die *quantitas materiae* nur

$$= \frac{6A}{\left(1+\sqrt{2}\right)^3} = \frac{6A}{7+5\sqrt{2}} = 0,071\,067\,811\,8 \cdot 6A$$

oder $= 0,426\,406\,870\,6 \cdot A$; das ist die *quantitas materiae* in einem solchen *globulo sanguineo contentae* wird bey nahe $\frac{14}{6}$ mal kleiner seyn, als wann derselbe *solid* wäre. Sollten diese 6 *globuli* wiedrum aus 6 noch kleinern zusammen gesetzt seyn, so würde die *quantitas materiae* und folglich das *Pondus* $\frac{14}{6} \cdot \frac{14}{6}$ das ist $\frac{196}{36}$ oder 5 mal geringer, und auf solche Art bald *imperceptib*el werden: da nun aber doch ein jeder *globulus sanguineus* ein Gewicht hat, so ist klar daß diese Art der Zusammen Setzung nicht weit fortgeht, und nicht einmal sich über die dritte Ordnung erstreckt. Dan sollte ein jeder von diesen *Globulis* wiedrum aus 6 andern bestehen; wann auch diese so schwehr als Gold angenommen würden, so könnte doch das würckliche Gewicht nicht herauskommen. Um dieses deutlicher einzusehen, so sey die *gravitas specifica materiae, ex qua globuli non amplius compositi constant,* $= n$; wann allso die *globuli sanguinei* selbst *solid* wären und aus dieser *materia* bestünden; so würde ihre *gravitas specifica* gleich seyn

n oder	$= 1,000\,000\,0 \cdot n$
wären aber die *globuli* $II^{ord[inis]}$ *solid*, so ist die *gravitas specifica*	$= 0,426\,406\,8 \cdot n$
sind erst die *globuli* $III^{ord[inis]}$ *solid*, so ist die *gravitas specifica*	$= 0,181\,822\,8 \cdot n$
sind die *globuli* $IV^{ord[inis]}$ *solid*, so ist die *gravitas specifica*	$= 0,077\,530\,5 \cdot n$
sind die *globuli* $V^{ord[inis]}$ *solid*, so ist die *gravitas specifica*	$= 0,033\,059\,5 \cdot n.$

Wann allso die *gravitas specifica ultimae materiae sanguinem constituentis* so schwehr wäre als Gold, und erst die *globuli* $V^{ord[inis]}$ *solid* wären, so würde doch die *gravitas specifica sanguinis* schon 30 mal kleiner seyn, als des Golds, und allso fast um die Helfte leichter als Wasser. Da nun die *gravitas specifica sanguinis* nicht kleiner ist als des Wassers, und die *ultima materia* bey weitem nicht so schwehr als Gold angenommen werden kan, so ist gantz klar, daß dieser *modus compositionis cujusque globuli ex sex minoribus* sich unmöglich *ultra III ordinem* erstrecken könne.

Bey dem obgedachten *Theoremate*[13] daß $4nab - a - b$ nimmer ein *numerus quadratus* seyn könne, oder daß $\dfrac{pp+a+b}{ab}$ kein *numerus integer per quaternarium divisibilis* sey, habe ich zwar gesehen, daß $\dfrac{pp+a+b}{ab}$ *infinitis casibus* ein *numerus integer* werden kan; derselbe ist aber allzeit entweder *impar* oder doch *impariter par*, *infinitis autem valoribus pro a et b assumtis* kan $\dfrac{pp+a+b}{ab}$ nicht einmal ein *numerus integer* werden:

sit $a=1,\ b=1;$ *erit* $\dfrac{pp+a+b}{ab} = pp+2,$	und allso entweder *impar* oder *impariter par*.
sit $a=1,\ b=2;$ *erit* $\dfrac{pp+a+b}{ab} = \dfrac{pp+3}{2}:$	(2, 6, 14, 26, *etc.*), nehmlich allzeit *impariter par*.
sit $a=1,\ b=3;$ *erit* $\dfrac{pp+a+b}{ab} = \dfrac{pp+4}{3}:$	welche *Formul* nimmer ein *numerus integer* seyn kan.
sit $a=1,\ b=4;$ *erit* $\dfrac{pp+a+b}{ab} = \dfrac{pp+5}{4}:$	diese kan auch nimmer ein *numerus integer* werden.
sit $a=1,\ b=5;$ *erit* $\dfrac{pp+a+b}{ab} = \dfrac{pp+6}{5}$	(2; 3; 11; 14; 30; *etc.*) entweder *impar* oder *impariter par*.
sit $a=2,\ b=2;$ *erit* $\dfrac{pp+4}{4}:$	(1, 2, 5, 10, 17, 26, *etc.*) welche *numeri* entweder *impares* oder *impariter pares*.
sit $a=2,\ b=3;$ *erit* $\dfrac{pp+a+b}{ab} = \dfrac{pp+5}{6}$	(1, 5, 9, 21, *etc.*) alle *impares*.
sit $a=2,\ b=4;$ *erit* $\dfrac{pp+a+b}{ab} = \dfrac{pp+6}{8};$	allso muß sey[n] $p=2q$; und $\dfrac{2qq+3}{4}$ $=$ *int*[*eger*] welches unmöglich.
sit $a=2,\ b=5;$ *erit* $\dfrac{pp+a+b}{ab} = \dfrac{pp+7}{10},$	welche *Formul* kein *numerus integer* seyn kan.
sit $a=2,\ b=6;$ *erit* $\dfrac{pp+a+b}{ab} = \dfrac{pp+8}{12}$	(1, 2, 6, 9, 17, 22 *etc.*) wo kein *multiplum quatern*[*arii*] vorkommt.

Wann man vielleicht diese *Casus* weiter *continuir*t und wohl erwiegt, so könnte man den wahren Grund finden, warum $\dfrac{pp+a+b}{ab}$ niemals ein *numerus integer per* 4 *divisibilis* werden kan. Es scheinen auch aus der *Form* $\dfrac{pp+a+b}{ab}$ außer den *multiplis quaternarii* noch andere Zahlen ausgeschlossen zu seyn, als zum *exempel* 7, dann ich habe noch keine *Valores pro a, b et p* finden können *ut* $\dfrac{pp+a+b}{ab}$

fieret = 7; dem ungeacht aber können *multipla* von 7 als 14, 21, *etc.* herauskommen.[14] Es scheinen allso in dergleichen *Speculation*en noch grosse Geheimnüße verborgen zu ligen; wovon dem *Fermatio* einige wichtige bekant gewesen seyn mögen: deren Verlust um so viel mehr zu bedauren ist. Ich habe an *M.^{r} Clairaut* geschrieben, ob die *Manuscripta* von *Fermat* noch zu finden wären, da aber der *Gout* für dergleichen Sachen bey den meisten erloschen ist, so ist auch die Hoffnung verschwunden.[15]

Wo ich mich nicht betriege, so habe ich des *Fergusons Labyr*[*inthum*] *Algebrae*[16] auf der *Bibliothec* in *Petersburg* gesehen; zum wenigsten war mir dieser *Titul* schon bekannt ungeacht ich mich nicht recht erinnern kan, wo ich etwas davon gesehen, gelesen oder gehöret habe; ich glaube aber daß der H. *Prof.* Krafft darüber würde einige Nachricht geben können: inzwischen werde ich mich auch deswegen in der hiesigen *Bibliothec* erkundigen.

Mit dem Druck des *Thesauri Stephani*[17] ist in *Leipzic* noch nicht einmal der Anfang gemacht worden, weilen der H. *Prof. Gesner* nicht eher will anfangen lassen, biß er selbst die gantze Arbeit zu Ende gebracht, damit das Werk um so viel vollkommener werde, und nicht durch *supplementa* nachgeholfen werden müsse.

Den Brief an den H. *Baron Stosch* habe ich bey S[eine]r Frau Schwester so bestellt,[18] daß derselbe in kurzer Zeit richtig einkommen wird; ich hätte ihn auch an den H. *Poleni* nach *Padua* einschliessen können, allein ich glaube daß dieser Weg sicherer ist.

Den H. *Prof.* Krafft erwartet man mit dem Anfang des künftigen Jahrs allhier, und der H. *Prof. Heinsius* dörfte auch nächstens seine *Dimission* verlangen, weilen die *Universität Wittenberg* ihm die durch das Absterben des H. *Hasii vacant*e *Professionem Math*[*eseos*] bestimmet hat.[19] Hier geht das Gerücht, daß die *Praesidenten* Stelle bey der *Academi*e dem Prinzen *Cantemir* aufbehalten werde:[20] welches gewiß für die *Academi*e das gröste Glück seyn würde. Der H. *Brigadier Baudan* ist hier noch ausser Dienst, und hat sich mit ein *M.^{lle}* verheurathet, deren Vermögen ungefehr in 4000 Rthl. bestehet, darunter ein artiges Hauß begriffen war, welches ich für 2000 Rthl. gekaufft, und dazu von Ihro Königl[ichen] *Majestä*t das *Privilegium* eines Freyhauses erhalten habe. Dasselbe ligt zwischen der Fridrichs und Dorotheen Statt, nahe bey dem Ort, wo Ihro *Majestä*t der König das Neue Schloß und die *Academi*e zu bauen beschlossen hat; daß allso die *Situation* nicht erwünschter seyn könnte.[21] Der H. *Brigadier Baudan* wird nun mit seiner Gemahlin wieder nach Rußland zurükkehren, und daselbst weiter Dienste suchen, wozu er Hofft, daß Ewr. Wohlgeb. durch kräftige *Recommendation* viel werden *contribui*ren können;[22] um welche Gewogenheit für denselben auch ich gehorsamst bitte, der ich zugleich mich nebst allen meinigen Dero beständigen Gewogenheit gehorsamst empfehle und mit der schuldigsten Hochachtung Lebenslang verharre

Ewr. Wohlgebohrnen

Meines Hochgeehrtesten Herrn *Etats* Raths

gehorsamster Diener

Leonh. Euler

Berlin den 27ten *Octobr.*
1742.

P. S. Wegen des *Dictionnaire de Trevoux* habe in vielen hiesigen Buchläden herumgeschickt,[23] darüber aber nicht die geringste Nachricht erhalten; so sehr schlecht ist es mit dem Buchhandel allhier beschaffen.

R 770 Reply to nº 55
Berlin, October 27th, 1742
Original, 4 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 31–34r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 160–168; *Euler-Goldbach* (1965), p. 125–129

57
Goldbach to Euler
Moscow, (November 25th) December 6th, 1742[1]

den 6. *Dec.* 1742.

HochEdelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*

In meinem vorigen Briefe[2] hatte ich $n^2 \neq 4pn-p-a^2$ als einen *casum particularem huius* $n^\alpha \neq 4pn-p-a^2$ angenommen, welches aber darauf beruhet, daß a^2+1 durch $4n-1$ nicht *dividi*ret werden kan. Ich gestehe daß ich zum öfftern vermuthet, es würde das *theorema* $4mn-m-1 \neq a^2$, weil kein ander *numerus determinatus* als 4 und 1 darin vorkommt, sich durch die *proprietates quadratorum per quaternarium divisorum demonstri*ren lassen, insonderheit da man die Wahrheit des *theorematis* gleich einsiehet wann m ein *numerus formae* $4u+0$ oder $4u-3$, worin schon die helffte aller *casuum possibilium* begriffen ist, hingegen hat sich allezeit bey den *casibus* $m = 4u-1$ und $m = 4u-2$ eine *difficultät* gefunden, biß ich endlich gestern die *demonstration* folgender massen eingerichtet:[3]

1. Quicunque numerus divisus per 4 relinquit 2 vel 3, ille non est quadratus.
2. Si ulla harum quatuor aequationum impossibilium

$$\left.\begin{array}{ll} A \ldots & 4mn-m-1 \\ B \ldots & 4mn-m-n \\ C \ldots & 4mn-m-n^2 \\ D \ldots & 4mn-n-1 \end{array}\right\} \neq \Box$$

est vera, omnes simul verae sunt,[4] quoniam si vera est $4mn-m-n^\alpha$, vera etiam est $4mn-m-n^{\alpha+1}$ et $4mn-n-m^\alpha$, et rursus, si posteriores verae sunt, vera etiam est prima, ut in superioribus litteris ostensum fuit.

3. Omnes numeri possibiles pro m et n continentur his quatuor casibus

$$\begin{array}{cccc} m = 4u + 0, & m = 4u + 1, & m = 4u + 2, & m = 4u + 3, \\ n = 4v + 0, & n = 4v + 1, & n = 4v + 2, & n = 4v + 3, \end{array}$$

sed per applicationem horum casuum apparet, quicunque sint valores ipsius m et n, semper aliquam quatuor formularum A, B, C et D ita dividi posse per 4 ut remaneat 2 vel 3. Sit enim m vel $n = 0$ (quod compendii causa scribo pro $m = 4u + 0$ et $n = 4v + 0$ et sic in ceteris), formula A vel D div[isa] per 4 relinqu[it] 3.

Si m vel $n = 1$, formula A vel D divisa per 4 relinquit 2;

si $m = 2$, $n = 2$, C divisa per 4 relinquit 2;

si $\left.\begin{array}{l} m = 2,\ n = 3 \\ m = 3,\ n = 2 \end{array}\right\}$, B divisa per 4 relinquit 3;

$m = 3$, $n = 3$, B divisa per 4 relinquit 2.

Ergo nulla formularum A, B, C, D aequalis est quadrato.

Die Zahl so ich pro $\ell\,2$ von E. H. *communicir*et bekommen muß allerdings unrichtig abgeschrieben gewesen seyn,[5] weil sie schon in der 14.den Ziffer fehlet, ich bin also Eurer H. für die weit *accurat*ere sowohl von dem $\ell\,2$ als dessen *quadrato*, welche in Dero letztem Schreiben enthalten sind, verbunden.

Ein dergleichen Fehler muß gewiß auch entweder in des *M.r Lagni* oder in des Hn *Sharp numerum pro quadratura circuli* eingeschlichen seyn. Wann ich mich recht erinnere so haben E. H. diese *varietät* schon längst bemercket; weil aber doch *M. Sharp* ausdrückl[ich] saget daß er auch von der letzten Ziffer, so weit seine Zahl gehet, gewiß sey, so glaube ich vielmehr daß in der Zahl des *M. Lagni* entweder im drucken oder im abschreiben eine 6 für eine 5 gesetzt worden, welches dennoch zu *rectifici*ren wäre wann die in dem *numero Lagniano* nachfolgenden Ziffern einigen Nutzen haben sollen.[6]

Bey dem Punct von den *globulis sanguinis* ist mir lieb die *confirmation* meines *raisonnement*s zu sehen; ob man aber sicher annehmen könne daß diese *globuli* mit der gantzen *massa sanguinis* einerley *gravitatem specificam* haben, zweifele ich, weil nicht allein die *globuli* sondern auch die *lympha* als *partes constitutivae, sed heterogeneae,* diejenige *massam* ausmachen, welche nach Eurer H. *hypothesi* bey nahe so schwer als das Wasser ist.[7]

Was Sie von dem *theoremate*

$$s = 1 + \frac{a}{n+1} + \frac{a^2}{2n+1} + \frac{a^3}{3n+1} + \&c.$$

ergo[8]

$$\frac{ss}{2} = \frac{1}{2} + \frac{a}{n+1}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{a^2}{2n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1}\right) + \&c.$$

erwehnen, halte ich in der That für sehr merckwürdig, nachdem ich sehe, daß man dadurch *data summa seriei*[9] $1 \mathbin{:\!+\!:} \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \mathbin{:\!+\!:} \frac{1}{7} + \&c.$ die *summam seriei* $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \&c.$ finden könne, bey welcher Gelegenheit zugleich melde, daß ich (wiewohl *per ambages*) auch die *summas* nachfolgender *serierum*

$$1 - \frac{1}{2}\left(1 \mp \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(1 \mp \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(1 \mp \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \mp \frac{1}{4}\right) + \&c.,$$

$$1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16}\right) + \&c.,$$

$$\frac{1 \cdot 1}{4} - \frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{16}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{25}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \&c.$$

gefunden habe, wozu man vieleicht durch einen viel nähern, aber mir unbekannten Weg gelangen kan.[10]

Wie ich gäntzlich mit Eurer H. der Meinung bin, daß man die Zahlen welche vor n anzunehmen sind, damit wann $n - p$ ein *numerus primus* ist auch $n + p$ ein *numerus primus* werde, *denotante p numerum primum*, nicht *generaliter* bestimmen könne, so halte ich auch dafür, daß die *numeri* 2, 4, 6, 12, *&c.* welche *tam addita quam demta unitate numeros primos* geben schwerlich *generaliter* oder *per certam legem progressionis* dürfften zu finden seyn,[11] so daß es *hoc respectu* mit beyden *seriebus* einerley bewandniß zu haben scheinet.

Für die mir gegebenen Nachrichten bin ich Eurer H. sehr verbunden; ich dancke auch dem Hn *Brigadier de Baudan* für das Vertrauen so Er zu mir zu tragen beliebet, an meiner guten *intention* zu Dessen Vergnügen ewas beyzutragen wird es gewiß niemahls ermangeln;[12] ich bitte demselben in meinem Nahmen zur vollzogenen Heyrath zu *gratuli*ren und wünsche mir das Glück, den Hn *Brigadier* bald wieder in *S.ᵗ Petersbourg* zu sehen.

Ubrigens verbleibe ich nechst hertzlicher Anwünschung alles Wohlergehens und schuldigster Empfehlung an Dero Fr[au] Liebste wie auch sämmtliche Familie

Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

Moscau.

P. S. Die künfftigen Briefe können wieder nach *S.* Petersburg gesandt werden.[13]

R 771 Reply to nº 56
Moscow, (November 25th) December 6th, 1742
Original, 3 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 56–58r
Partial copy, 3 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. III, fol. 69r–70r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 172–175; *Euler-Goldbach* (1965), p. 132–134

58
Euler to Goldbach
Berlin, December 15th, 1742[1]

Wohlgebohrner Herr *Etats*-Rath
Hochgeehrtester Herr

Beyligender Brief wird ohne Zweifel von dem H. *Baron Stosch* seyn, weilen mir derselbe von Seiner Frau Schwester zugesandt worden;[2] dahero Ewr. Wohlgeb. vermutlich lieb seyn wird, daß ich Denselben diese Antwort ohne Verzug zusende.

Der junge H. *Ehler* aus Dantzig welcher vor einiger Zeit aus Frankreich gekommen und hier durch gereiset,[3] hat mir unter andern gesagt, daß das *Dictionnaire de Trevoux* in *Paris* unter der Presse sey, und nächstens zum Vorschein kommen werde.[4]

Seit dem ich Ewr. Wohlgeb. das letste mal zuzuschreiben die Ehre gehabt, habe ich allhier ein Haus gekauffet, wozu mir der H. *Brigadier Baudan* Anlaß gegeben, weilen dieses Hauß Seiner Frau Liebste zugehörte, ihre gantze Habschafft aber zu Geld gemacht werden musste, indem er gleich nach der Hochzeit nach Polen gereiset, von dannen er wiedrum, wann er daselbst kein anständiges *Emploi* findet, nach Rußland gehen wird. Ihre Königl[iche] *Majestä*t haben auf mein Allerunterthänigstes Ansuchen dieses Haus auf ewig von aller Ein*quartir*ung loßzusprechen allergnädigst geruhet.[5] Weilen ich in diesem Hauß Zimmer und Raum in Überfluß habe, so wird der H. Geh[eime] Rath *Osterman*[6] welcher Sich noch in Westfahlen aufhält, bey mir wohnen, und sein Leben in der Stille zu bringen.

Unlängst ist Ihro *Majestä*t dem König eine neue *Poeti*sche Übersetzung der *Psalm*en *Davids dedicir*t worden welche sowohl wegen der *Poesi*e als der richtigen Ausdrückung des Grund *Text*s grosse *Approbation* findet und auch schon auf dem Schloß statt der Lobwasserischen Psalmen eingeführt werden soll. Der Verfasser davon ist ein Landsman von mir nahmens H. *Spreng*, welcher schon lang für einen grossen *Poet*en *passir*t ist.[7]

Der Zustand der *Academi*e in *Petersburg* gehet mir wegen des H. Rath Schumachers sehr zu Herzen, am meisten aber ist der H. *Bernoulli* darüber *allarmir*t, weilen er beförchtet seine bißher genossene *Gage* zu verlieren.[8] Es werden anjetzo des Alten H. *Bernoullis* Schrifften, so noch nicht *publicir*t worden, in *Geneve* gedruckt; dieses Werk soll unserm König *dedicir*t werden, und der Verleger will selbst herkommen, solches zu *praesenti*ren. Mit demselben werde ich bey dieser Gelegenheit einen *Accord* wegen meiner *Scientia navali* zu treffen suchen, welches vermuthlich die *Academi*e nicht übelnehmen wird.[9]

Ewr. Wohlgeb. habe schon letstens zu melden die Ehre gehabt, daß ich wegen meiner nach *Paris* gesandten *Piec*e an den H. *Clairaut* geschrieben; ungeacht nun derselbe biß *dato* im Schreiben sehr *exact* gewesen, so habe ich doch noch zu meiner grossen Verwundrung von demselben keine Antwort erhalten.[10] Inzwischen will mir der Hiesige *Post Director* beweisen daß diese meine *Piec*e richtig in *Paris* angekommen.

Ich bin anjetzo auch mit dem H. *Prof. Nicolao Bernoulli* in *Correspondenz* gekommen; diese hat bißher *roulir*t über die *summationem serierum* $1 + \dfrac{1}{2^{2n}} + \dfrac{1}{3^{2n}} + \dfrac{1}{4^{2n}} + etc.$ worüber Derselbe sehr schöne *Reflexion*en gemacht.[11] Bey dieser Gelegenheit habe ich Demselben eine kurze *Methode communicir*t alle *differentialia hujus formae*

$$\frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + etc.}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \zeta x^5 + etc.}\, dx$$

zu *integri*ren *vel absolute* wann möglich *vel ope logarithmorum vel quadraturae circuli.* Diese *Methode* bestehet darinn daß man erstlich den *Denominatorem* in seine *factores simplices resolvi*re; weil aber öfters einige von diesen *factoribus imaginarii* werden, so hatte ich angemerkt daß da alle *factores imaginarii* immer *numero pares* seyn müßen, dieselben auch so beschaffen sind, daß je zween mit einander *multiplicir*t ein *Productum reale* geben.[12] An diesem Satz zweifelte nun letstens der H. *Bernoulli*, und glaubte daß es solche *formulas* gäbe, deren *Factores imaginarii* nicht diese Eigenschaft hätten. Dieses zu behaupten brachte er diese *Formul* $x^4 - 4x^3 + 2xx + 4x + 4$ als ein *Exempel* vor welche nachfolgende 4 *factores simplices imaginarios* hatte:

$$\begin{array}{ll}
\text{I.} & x - 1 - \sqrt{2 + \sqrt{-3}} \\
\text{II.} & x - 1 + \sqrt{2 + \sqrt{-3}} \\
\text{III.} & x - 1 - \sqrt{2 - \sqrt{-3}} \\
\text{IV.} & x - 1 + \sqrt{2 - \sqrt{-3}},
\end{array}$$

von welchen man Seiner Meinung nach nicht sollte zwey finden können, welche mit einander *multiplicir*t ein *Productum reale* hervor brächten. Dieses *Exempel* schien mir auch anfänglich meinen Satz umzustossen; als ich aber die Sach reiffer überlegte, so fand daß der I und III mit einander *multiplicir*t dieses *Productum reale*

$$xx - \left(2 + \sqrt{4 + 2\sqrt{7}}\right) x + 1 + \sqrt{7} + \sqrt{4 + 2\sqrt{7}},$$

die zwey übrigen aber der II und IV dieses

$$xx - \left(2 - \sqrt{4 + 2\sqrt{7}}\right) x + 1 + \sqrt{7} - \sqrt{4 + 2\sqrt{7}}$$

geben. Weilen nun durch diese Antwort das gemachte *Dubium* gehoben wird,[13] so vermuthe ich nun von dem H. *Bernoulli* zur *Recompens* eine richtige *Demonstration* meines Satzes: *omnem expressionem algebraicam* $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + etc.$ *vel in factores reales simplices* $p+qx$, *vel saltem in factores reales quadratos* $p+qx+rxx$ *resolvi posse*;[14] welcher Satz (den ich ungefehr wie einige *Theoremata Fermatiana* aber nicht *summo rigore demonstri*ren kan) in der *Analysi* von sehr grossem Nutzen ist, dann daraus folgt *omnem formulam differentialem vel rationalem vel* *ad rationalitatem reducibilem, nisi absolute integrari queat, semper certe ope vel logarithmorum vel quadraturae circuli integrari posse.*

Mit dem neuen *Tomo Miscellaneorum Berolin*[*ensium*] ist man schon ziemlich weit gekommen, worinn fast die gantze *Classis Mathematica* von mir kommt.[15] Weilen ich aber von den in *Petersburg* zurückgelassenen *Piec*en keine *Copi*en habe, und dieselben entweder sehr späth oder gar nicht zum Vorschein kommen dürften,[16] so nehme die Freyheit Ewr. Wohlgeb. gehorsamst um Dero Rath zu bitten, wie ich am füglichsten zu denselben gelangen könnte. Ich verlange solche gar nicht um anderwerts drucken zu lassen; dann dazu finden sich immer *Materi*en genug: sondern nur um mich darinn umzusehen damit ich nicht eine Sach zweymal zum Vorschein bringe.

Von dem H. Geh[eimen] Rath *Vockerodt* habe Ewr. Wohlgb. ein gehorsamstes *Compliment* zu vermelden,[17] der ich mich zu Dero beständigen Wohlgewogenheit gehorsamst empfehle und mit der schuldigsten Hochachtung verharre

Ewr. Wohlgebohrnen
Meines Hochgeehrtesten Herrn *Etats*-Raths
gehorsamster Diener
Leonh. Euler

Berlin den 15ten *Dec.*
1742.

R 772 Berlin, December 15th, 1742
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 37–38v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 169–171; *Euler-Goldbach* (1965), p. 130–131

59
Goldbach to Euler
Moscow, December (13th) 24th, 1742[1]

HochEdelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*,

Als ich neulich die vermeinten *Summas* der beyden letzteren *Serierum* in meinem vorigen Schreiben[2] wieder betrachtet, habe alsofort wahrgenommen, daß selbige aus einem blossen Schreibfehler entstanden, von welchem es aber in der That heisset:

Si non errasset fecerat ille minus:[3]

denn ich bin durch diese Gelegenheit auf *summationes aliarum serierum* gerathen die ich sonst kaum gesuchet vielweniger gefunden haben würde.

Ich halte dafür das[!] es ein *problema problematum* ist die *summam huius*:

$$1+\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{2^m}\right)+\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}\right)+\frac{1}{4^n}\left(1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{4^m}\right)+\&c.$$

in den *casibus* zu finden wo m *et* n nicht *numeri integri pares et sibi aequales* sind,[4] doch giebt es *casus* da die *summa* angegeben werden kan, *exempli gr*[*atia*] *si* $m=1$, $n=3$, denn es ist

$$1+\frac{1}{2^3}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3^3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{4^3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\&c.=\frac{\pi^4}{72}$$

(wann π gewöhnlicher massen für die *peripheriam circuli cuius diameter* $=1$ genommen wird); hingegen weiß ich die *summas serierum*

$$A\ \ldots\ 1+\frac{1}{2^5}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3^5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{4^5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\&c.$$

und

$$B\ldots\ 1+\frac{1}{2^4}\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\frac{1}{3^4}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\frac{1}{4^4}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}\right)+\&c.$$

noch nicht, ob ich gleich weiß daß $2A+B=\dfrac{19\pi^6}{2\cdot 5\cdot 7\cdot 3^4}$, wie ich denn auch die *summam* der folgenden beyden *serierum* $C+D$ allezeit finden kan, *si* m *et* n *sint numeri pares quicunque*

$$C\ \ldots\ 1+\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{2^m}\right)+\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}\right)+\&c.$$
$$D\ \ldots\ 1+\frac{1}{2^m}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)+\frac{1}{3^m}\left(1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\&c.$$

Ubrigens beziehe ich mich auf mein voriges Schreiben und verbleibe nechst hertzlicher Anwünschung eines glücklichen neuen Jahres

Eurer HochEdelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

Moscau, den 24 *Dec.*
1742.

R 773 Supplement to n° 57
Moscow, December (13th) 24th, 1742
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 54–55r
Partial copy, 3 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. III, fol. 70r–71r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 176–177; *Euler-Goldbach* (1965), p. 134–135

60
Euler to Goldbach
Berlin, January 5th, 1743

Wohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats*-Rath

Daß Ewr. Wohlgb. glücklich wiedrum nach *S.t Petersburg* möchten zurükgekommen seyn wünsche ich von gantzem Herzen. Ich habe vor einigen Wochen von dem H. *Baron* Stosch eine Antwort an Ewr. Wohlgb. noch nach *Moscau* abgeschickt,[1] welche zweifelsohne richtig wird eingetroffen seyn; desselben Schwager H. *Muzelius* ist dieser Tagen bey mir gewesen, und hat von mir zu wissen verlangt welcher gestalt Ewr. Wohlgeb. in Rußische Dienste gekommen, um solches dem H. *Baron Stosch* berichten zu können. Nachdem der H. *Brigadier Baudan* von hier nach Brandenburg abgereiset um allda seine Heurath zu vollziehen, habe ich weder denselben noch Briefe von ihm gesehen; ich habe aber gehöret daß er von da nach Warschau gegangen, und sich bey dem Fürsten *Czartorinski* aufhalte; sollte er aber daselbst keine Dienste finden, so sey er gesinnet wiedrum nach *Petersburg* zurückzukehren.

Ewr. Wohlgeb. *Demonstration*, daß $4mn-m-n$ kein *Quadratum* seyn könne,[2] will mir noch kein völliges Genügen leisten. Dann ungeacht, wann $4mn-m-1 \neq \Box$ auch seyn muß $4mn-m-n \neq \Box$ und $4mn-m-n^2 \neq \Box$, so folgt doch nicht hinwiedrum: *quibus casibus pro m et n substitutis una formula quadratum esse nequeat, iisdem casibus reliquas formulas quadrata esse non posse.* Dieses erhellet aber deutlicher, wann man die *derivationem* der übrigen *Formul*n aus der ersten betrachtet, nehmlich aus $4mn-m-1$: man setze allso $m = 4p-1$; so kommt $4\,(4np-n-p)$; wann allso $4mn-m-1$ auf keinerley art ein *quadratum* seyn kan, so kan diese *Formul* auch kein *Quadrat* seyn *casu* $m = 4p-1$, und folglich kan auch $4np-n-p$ kein *Quadratum* seyn. Nun aber haben Ewr. Wohlgeb. nur gewiesen daß wann m *vel* n sey $= 4u+1$, die *Formul* $4mn-m-1$ kein *Quadratum* seyn könne, und dahero folget daraus nicht daß $4np-n-p$ kein *Quadrat* seyn könnte, *eodem casu* n *vel* $p = 4u+1$. Ferner ist klar daß wann man nur bewiesen hätte daß $4mn-m-1 \neq \Box$ *casu* $m = 4u-1$, daraus schon folgen würde daß $4np-n-p \neq \Box$. Wann aber bewiesen wäre, daß $4np-n-p \neq \Box$, so würde daraus nur folgen daß $4mn-m-1$ kein *Quadratum* seyn könnte *casu quo* $m = 4u-1$, aber nicht *generaliter*. Wann man aber nur beweisen könnte daß $4mn-m-1$ kein *Quadratum* seyn könne *casu* $m = 4u-1$, so würde daraus schon folgen, daß $4mn-m-n$ gantz und gar kein *Quadratum* seyn könnte. Villeicht dörfte aber das *Theorema generale* $4mnp-m-n \neq \Box$, wovon Ewr. Wohlgb. keine Meldung thun, leichter zu *demonstri*ren fallen. Es ist aber für sich klar daß wann entweder $m+n = 4u+1$, oder $m+n = 4u+2$ die *Formul* $4mnp-m-n$ kein *Quadratum* seyn könne, dahero nur die beyden *casus* $m+n = 4u$, und $m+n = 4u-1$ zu *demonstri*ren übrig bleiben. Wann man für den ersten Fall setzt $m = 2u+a$, und $n = 2u-a$; so hat man zu beweisen, daß $p\,(4uu-aa)-u$ kein *Quadrat* seyn könne.

Es kan allso diese *Formul* $\dfrac{bb+u}{4uu-aa}$ kein *numerus integer* seyn; *ponatur* $a = 2u - c$ so kan $\dfrac{bb+u}{c\,(4u-c)}$ kein *numerus integer* seyn; und hieraus können unendlich viel schöne *Theoremata* hergeleitet werden; ich muß unterdessen gestehen, daß ich aller angewandten Mühe ungeacht noch keine *Demonstration* von diesem *Theoremate* habe finden können daß $4mnp - m - n \neq$ *Quadrato*. Es kommt aber darauf an daß man *demonstrir*e daß eine solche Zahl $4paa+1$ nimmer *divisibilis* seyn könne *per numerum formae* $4pq-1$. Es sind aber alle mögliche *Divisores formulae* $4paa+1$ enthalten in einer gewissen Anzahl solcher *Formul*n $4np+1$; $4np+\alpha$; $4np+\beta$; $4np+\gamma$; *etc.* wobey zu merken daß, wann unter den Zahlen α, β, γ, *etc.* eine Zahl f enthalten ist, zugleich alle *potestates ipsius* f darunter vorkommen, und wann darunter zwey Zahlen f *et* g vorkommen, so müssen auch alle *potestates* einer jeden, und alle daraus mögliche *Producte* vorkommen; wann man allso einen oder etliche *numeros pro* α, β, γ, *etc.* weiß, so kan man zugleich die übrigen finden; die simpelsten *Divisores* aber der *formul* $4paa+1$ sind die *Valores* dieser *Formul* selbst wann *pro* a ein *numerus determinatus* gesetzt wird: und allso hat man vor α, β, *etc.* solche *Valores primitivos*, $4p+1$; $16p+1$; $36p+1$; daher entstehen wann man alle *potestates* nimmt, und solche ineinander *multiplicir*t, alle übrige *Valores litterarum* α, β, γ, δ, *etc.*; es ist aber klar daß alle diese Zahlen von solcher *form* $4mp+1$ seyn werden; dahero alle *Divisores formulae* $4paa+1$ nothwendig allso seyn müssen $4np+4mp+1$; und kan allso eine solche Zahl $4np-1$ nimmer ein *Divisor* seyn; dieses ist aber nur wahr in so fern die *Divisores primitivi* von der *Form* $4mp+1$ sind: wann aber ein *derivativus* von der *Form* $4mp-1$ wäre so müste auch ein *primitivus* diese *Form* haben.[3] Hieraus folget nun soviel, daß wann dieses *Theorema* bey kleinen Zahlen wahr ist, dasselbe auch bey grossen wahr seyn müsse.[4] Wann gleich *Sharp* sagt, daß er von seiner letsten *Figur in quadratura Circuli* sicher sey,[5] so kan doch solches nicht behauptet werden, wann er nicht zum wenigsten auf 3 oder 4 *Figur*en weiter hinaus gerechnet hat, welches doch nicht geschehen: dahero dieses schon als ein Merkmal der *Accuratesse* zu halten, daß seine letste *Figur* nur um 1 zu klein ist; ich kan mich auch nicht erinnern, daß ich jemalen um dieser Ursach willen an der Richtigkeit des *Lagny*s Zahlen gezweifelt habe. Bey der *Mat*erie über die *globulos sanguineos*[6] habe ich nicht so genau angenommen, daß die *globuli rubri* mit der gantzen *massa* einerley *gravitatem specificam* haben; dann meine *Reflexion*en bleiben einerley, wann gleich dieselbe 2 oder mehr mal grösser oder kleiner angenommen würde: unterdessen ist doch soviel gewiß, daß die *Gravitas specifica* der *globulorum rubrorum* nicht so sehr viel vom Wasser *differi*ren wird; es wäre dann, daß man dieselben niemals *pur* ohne Vermischung der *Lymphae* bekommen könnte; in welchem Fall es freylich nicht mehr auf die *Gravitatem specificam* allein ankommen würde um die Unmöglichkeit des *progressus in infinitum* zu zeigen.

Ich hatte dieses *Theorema*: *si*

$$s = 1 + \frac{a}{n+1} + \frac{aa}{2n+1} + \frac{a^3}{3n+1} + etc.$$

erit

$$\frac{1}{2}ss = \frac{1}{2} + \frac{a}{n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{a^2}{2n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1}\right) \textit{ etc.},$$

dem H. *Professori Nicolao Bernoulli* geschrieben,[7] wovon Er mir nachfolgende schöne *Demonstration* zugeschickt.[8] Er schreibt x^n für a; und t für sx; *eritque*

$$sx = t = x + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{x^{3n+1}}{3n+1} + \textit{etc.},$$

qua differentiata prodit

$$dt = dx\,\left(1 + x^n + x^{2n} + x^{3n} + \textit{ etc.}\right);$$

diese zwey *series multiplicir*t er mit einander, *terminos secundum potestates ipsius x ordinando*, und bekommt

$$t\,dt = dx\begin{pmatrix} x + x^{n+1}\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) + x^{2n+1}\left(1 + \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{2n+1}\right) \\ + x^{3n+1}\left(1 + \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{2n+1} + \dfrac{1}{3n+1}\right)[+ \textit{etc.}] \end{pmatrix},$$

quae integrata dat

$$\frac{1}{2}tt = \frac{1}{2}ssxx = \frac{1}{2}xx + \frac{x^{n+2}}{n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{x^{2n+2}}{2n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1}\right) + \textit{etc.};$$

dividatur per xx *et ob* $x^n = a$ *erit*

$$\frac{1}{2}ss = \frac{1}{2} + \frac{a}{n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{a^2}{2n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1}\right) + \textit{etc.}$$

Er geht auf diese Art weiter und *multiplicir*t $\frac{1}{2}tt$ nochmal mit dt, und findet *post integrationem*

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}s^3 = {} & \frac{1}{6} + \frac{a}{n+3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\right) \\ & + \frac{aa}{2n+3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1}\right)\right) \\ & + \frac{a^3}{3n+3}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n+2}\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) + \dfrac{1}{2n+2}\left(1 + \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{2n+1}\right) \\ + \dfrac{1}{3n+2}\left(1 + \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{2n+1} + \dfrac{1}{3n+1}\right) \end{pmatrix} \textit{ etc.} \end{aligned}$$

Um nun auf solche *Summationes* zu kommen dergleichen Ewr. Wohlgeboh[ren] gefunden,[9] so sey $n = 1$; *erit*

$$s = 1 + \frac{a}{2} + \frac{a^2}{3} + \frac{a^3}{4} + \textit{etc.} = \frac{1}{a}\,\ell\,\frac{1}{1-a};$$

unde fit

$$A \ldots \; \frac{1}{2aa}\left(\ell\,\frac{1}{1-a}\right)^2 = \frac{1}{2}+\frac{a}{3}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{aa}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) + \frac{a^3}{5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) \textit{ etc.}$$

Sit $n=2$ *erit* $s = 1+\frac{a}{3}+\frac{aa}{5}+\frac{a^3}{7}+\textit{etc.} = \frac{1}{2\sqrt{a}}\,\ell\,\frac{1+\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}$, *unde fit*

$$B \ldots \; \frac{1}{8a}\left(\ell\,\frac{1+\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}\right)^2 = \frac{1}{2}+\frac{a}{4}\left(1+\frac{1}{3}\right)+\frac{aa}{6}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right) + \frac{a^3}{8}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right) \textit{ etc.}$$

Si $n=2$ *et* $a=-b$ *erit* $s = 1-\frac{b}{3}+\frac{bb}{5}-\frac{b^3}{7}+\textit{etc.} = \frac{1}{\sqrt{b}}\,\mathrm{A\,tang.}\sqrt{b}$, *unde fit*

$$C \ldots \; \frac{1}{2b}\left(\mathrm{A\,tang}\,\sqrt{b}\right)^2 = \frac{1}{2}-\frac{b}{4}\left(1+\frac{1}{3}\right)+\frac{bb}{6}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right) - \frac{b^3}{8}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right) \textit{ etc.}$$

Ponatur in A, $a=-1$; *et in* C, $b=1$; *ob* $\mathrm{A\,tang}\,1 = \frac{\pi}{4}$ *erit*

$$D \ldots \quad \frac{1}{2}(\ell\,2)^2 = \frac{1}{2}-\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) \textit{ etc.}$$

$$E \ldots \quad \frac{\pi\pi}{32} = \frac{1}{2}-\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)-\frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right) \textit{ etc.}$$

$$F \ldots \quad \frac{1}{8}(\ell\,2)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right) \textit{ etc.}$$

$$[E]-F \ \ldots \ \frac{\pi\pi}{32}-\frac{1}{8}(\ell\,2)^2 = \frac{1}{2}\cdot 1-\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right) - \frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right) \ [\textit{etc.}]$$

$$[E+]\,F \ \ldots \ \frac{\pi\pi}{32}+\frac{1}{8}(\ell\,2)^2 = \frac{1}{2}\cdot 1-\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right) - \frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right) [\textit{etc.}]$$

Si D subtrahatur a serie $\dfrac{\pi\pi}{12} = 1 - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{4} + etc.$ *erit*

$$[G] \ldots\ \frac{\pi\pi}{12} - \frac{1}{2}(\ell\, 2)^2 = 1 - \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\ etc.$$

Quoniam si fuerit $s = a - b + c - d + e - etc.$ *et* $t = aa + bb + cc + dd + etc.$ *erit summa factorum ex binis terminis seriei s* $= \frac{1}{2}ss - \frac{1}{2}t$: *eritque adeo*

$$\frac{1}{2}ss - \frac{1}{2}t = -b\cdot a + c\,(a-b) - d\,(a-b+c) + e\,(a-b+c-d) - etc.;$$

addendo t erit

$$\frac{1}{2}ss + \frac{1}{2}t = aa - b(a-b) + c(a-b+c) - d(a-b+c-d) + e(a-b+c-d+e) - etc.$$

Sit $s = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} - etc.$ *erit* $s = \ell\, 2$ *et* $t = \dfrac{\pi\pi}{6}$; *unde fit*

$$\begin{aligned} H\ \ldots\ & -\frac{1}{2}(\ell 2)^2 + \frac{\pi\pi}{12} \\ & = \frac{1}{2}\cdot 1 - \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + etc. = G. \end{aligned}$$

$$I \ldots\ \frac{\pi\pi}{12} + \frac{1}{2}(\ell\, 2)^2 = 1\cdot 1 - \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + etc.$$

$$[D+]\, H\ \ldots\ \frac{\pi\pi}{12} = 1 - \frac{2}{3}\cdot 1 + \frac{2}{4}\left(1+\frac{1}{3}\right) - \frac{2}{5}\left(1+\frac{1}{3}\right) + \frac{2}{6}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right) - etc.$$

seu

$$\frac{\pi\pi}{12} = \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{10}\left(1+\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{21}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right) + \frac{1}{36}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right) + etc.$$

Hier sind nun die beyden *series* G und I die beyden erstern, welche Ewr. Wohlgb. überschrieben.

Es ist bey der *Serie* $1 + \dfrac{x}{4} + \dfrac{xx}{9} + \dfrac{x^3}{16} + \dfrac{x^4}{25} + \dfrac{x^5}{36} + etc.$ merkwürdig daß dieselbe nur in 3 Fällen *summi*rt werden kan,[10] welche sind $x = 1$; $x = [-1;]$ und $x = \frac{1}{2}$; der letstere *Casus* folgt aber auß der *Serie G* kraft die[ses] *Theorematis*: *Si*

$$s = 1\cdot a - \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{3}(a+b+c) - \frac{1}{4}(a+b+c+d) + etc.,$$

e[*rit*]

$$\begin{aligned} s = \frac{a}{1\cdot 2} \quad & + \quad \frac{1}{2\cdot 4}(a-b) + \frac{1}{3\cdot 8}(a-2b+c) + \frac{1}{4\cdot 16}(a-3b+3c-d) \\ & + \quad \frac{1}{5\cdot 32}(a-4b+6c-4d\,[+e) + etc.;] \end{aligned}$$

wann nun für $a+b+c+d+etc.$ diese *Series* $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+etc.$ gesetzt wird, so ist $s=\frac{\pi\pi}{12}-\frac{1}{2}(\ell\, 2)^2$. Um aber zu finden was diese *Expression*

$$1-\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{2}+\frac{n\,(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{3}-\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{4}+etc.$$

betrage, so setze ich

$$z=x-\frac{n}{1}\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{n\,(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{x^3}{3}+etc.$$

und *differentiando* wird

$$dz=dx\left(1-\frac{n}{1}\cdot x+\frac{n\,(n-1)}{1\cdot 2}\,x^2-etc.\right)=dx\,(1-x)^n:$$

dahero *integrando*

$$z=\frac{1-(1-x)^{n+1}}{n+1}$$

un[d] *facto* $x=1$ *fit*

$$1-\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{2}+\frac{n\,(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{3}-\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{4}+etc.=\frac{1}{n+1}\,.$$

Dah[ero] ist

$$\frac{\pi\pi}{12}-\frac{1}{2}(\ell\, 2)^2=\frac{1}{1^2\cdot 2}+\frac{1}{2^2\cdot 4}+\frac{1}{3^2\cdot 8}+\frac{1}{4^2\cdot 16}+\frac{1}{5^2\cdot 32}+etc.$$

Was abe[r] Ewr. Wohlgb. beyde letstern *Series* betrifft, nehmlich[11]

$$\begin{aligned}
p &= 1-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right)-\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}\right)+etc.\\
q &= \frac{1}{4}\cdot 1-\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{16}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{25}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+etc.
\end{aligned}$$

so ist klar d[aß]

$$p-q=\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+etc.\right)\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+etc.\right)=\frac{\pi\pi}{12}\,\ell\, 2;$$

und allso wann d[ie] *Summ* von einer bekannt wäre, daraus die andere gleich *summir*t werden könnte; es ist zwar

$$\frac{13}{1440}\pi^4=1-\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right)-\frac{1}{16}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}\right)+[etc.],$$

ich habe aber noch keinen Weg entdecken können um die *valores* p und q zu bestimmen, dahero von Ewr. Wohlgb. die *Methode* diese *Series* zu *summi*r[en], mit grossem Verlangen erwarte. Wann Ewr. Wohlgb. hernach auch diese *Seriem*

$$r = \frac{1}{2}\cdot 1 - \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right) - \frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}\right) + etc.$$

*summi*ren könnten, so würden die beyden *Series* $p+r$ die schon längst gesuchte *Summam* dieser *Seriei* $1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+$ *etc.* geben.[12]

Der H. *Hedlinger*[13] nebst meiner gantzen *Famille* lassen sich Ewr. Wohlgb. gehorsamst empfehlen, und ich verbleibe mit der schuldigsten Hochachtung

Ewr. Wohlgebohrnen
gehorsamster Diener
Leonhard Euler.

Berlin den 5ten *Jan.*
1743.

P. S. Mr Clairaut hat mir nun geschrieb[en] daß meine nach *Paris* geschickte *Piece* zu re[chter] Zeit glückl[ich] eingekom[men.][14]

R 774 Reply to no 57
Berlin, January 5th, 1743
Original, 3 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 41–43v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 178–187; *Euler-Goldbach* (1965), p. 135–140

61
Euler to Goldbach
Berlin, January 19th, 1743

Wohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats*-Rath

Ewr. Wohlgeb. haben in der That den gemeldten Schreibfehler als ein grosses Glück anzusehen,[1] wann derselbe zu solchen herrlichen Erfindungen Anlaß gegeben. Es hat mich viele Stunden und grosse *calculos* gekostet, ehe ich nur die Wahrheit der mir gütigst *communicir*ten *Summation*en habe einsehen können; ich kan mich aber auch nicht weiter rühmen, als daß ich dieselben *demonstri*ret habe. Die *Methode* wodurch ich dazu gelanget, ist ziemlich weit her gesucht, und so beschaffen, daß ich auch vermittelst derselben diese *Summas* nimmer würde herausgebracht haben, wann mir solche nicht schon vorher aus Ewr. Wohlgeb. Schreiben bekannt gewesen wären. Ich habe aber nachfolgende *Series* zu Hülfe genommen

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+etc. & B &= 1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+etc.\\
C &= \frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+etc. & D &= 1+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{4^5}+etc.\\
E &= \frac{1}{1^6}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+etc. & F &= 1+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{3^7}+\frac{1}{4^7}+etc.\\
G &= \frac{1}{1^8}+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+etc. & H &= 1+\frac{1}{2^9}+\frac{1}{3^9}+\frac{1}{4^9}+etc.\\
&etc.
\end{aligned}$$

von welchen die *Summae* A, C, E, G, *etc.* bekannt sind; aus diesen habe ich endlich mit grosser mühe folgende hergeleitet

$$\begin{aligned}
\alpha &= 1+\frac{1}{2^3}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3^3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{4^3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+etc.\\
&= \frac{1}{2}AA\\
\beta &= 1+\frac{1}{2^5}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3^5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{4^5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+etc.\\
&= AC-\frac{1}{2}BB\\
\gamma &= 1+\frac{1}{2^7}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3^7}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{4^7}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\ etc.\\
&= AE-BD+\frac{1}{2}CC.\\
\delta &= 1+\frac{1}{2^9}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3^9}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{4^9}\,(etc.)\\
&= AG-BF+CE-\frac{1}{2}DD\\
&\quad etc.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a &= 1+\frac{1}{2^2}\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\frac{1}{3^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\frac{1}{4^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}\right) etc.\\
&= \frac{1}{2}AA+\frac{1}{2}C\\
b &= 1+\frac{1}{2^4}\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\frac{1}{3^4}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\frac{1}{4^4}\,(1+etc.)\\
&= BB-\frac{1}{3}E
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
c &= 1+\frac{1}{2^6}\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\frac{1}{3^6}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\frac{1}{4^6}\left(1+\mathit{etc.}\right)\\
&= 2BD-\frac{3}{2}CC+\frac{1}{4}G\\
d &= 1+\frac{1}{2^8}\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\frac{1}{3^8}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\frac{1}{4^8}\left(1+\mathit{etc.}\right)\\
&= 2BF-3CE+\frac{4}{2}DD-\frac{1}{5}[I]\\
&\quad \mathit{etc.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p &= 1+\frac{1}{2^3}\left(1+\frac{1}{2^3}\right)+\frac{1}{3^3}\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right)+\frac{1}{4^3}\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}\right)\mathit{etc.}\\
&= \frac{1}{2}BB+\frac{1}{2}E\\
q &= 1+\frac{1}{2^5}\left(1+\frac{1}{2^3}\right)+\frac{1}{3^5}\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right)+\frac{1}{4^5}\left(1+\mathit{etc.}\right)\\
&= \frac{3}{2}CC-\frac{5}{8}G\\
&\quad \mathit{etc.}
\end{aligned}
$$

Weilen nun A, C, E, G, *etc.* gegeben sind nehmlich $A=\frac{\pi^2}{6}$; $C=\frac{\pi^4}{90}$; $E=\frac{\pi^6}{945}$; $G=\frac{\pi^8}{9450}$; *etc.*, so geben obige *series*:

$$\alpha=\frac{1}{2}AA=\frac{\pi^4}{72};$$

$$2\beta+b=2AC-\frac{1}{3}E=\frac{19\pi^6}{2\cdot5\cdot7\cdot3^4}$$

welches Ewr. Wohlgeb. zwey ersten *Theoremata* sind. Ferner ist auch

$$2\gamma+c=2AE-\frac{1}{2}CC+\frac{1}{4}G;$$

und

$$\beta+p=AC+\frac{1}{2}E;$$

und endlich ist

$$1+\frac{1}{2^5}\left(1+\frac{1}{2^3}\right)+\frac{1}{3^5}\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right)+\mathit{etc.}=\frac{\pi^8}{16\cdot3\cdot25\cdot7}.$$

Weil aber diese meine *Methode* nicht natürlich genug ist, so ersuche Ewr. Wohlgb. gehorsamst mir Dero *Methode* gütigst zu *communici*ren.

Das letste *Theorema* war mir gleich bekannt, dann wann man setzt

$$\begin{aligned} r &= 1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{4^m}+etc. \\ s &= 1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+etc. \end{aligned}$$

und

$$t = 1+\frac{1}{2^{m+n}}+\frac{1}{3^{m+n}}+\frac{1}{4^{m+n}}+etc.$$

so wird seyn

$$rs+t = \left\{ \begin{array}{l} 1+\dfrac{1}{2^n}\left(1+\dfrac{1}{2^m}\right)+\dfrac{1}{3^n}\left(1+\dfrac{1}{2^m}+\dfrac{1}{3^m}\right)+etc. \\ 1+\dfrac{1}{2^m}\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)+\dfrac{1}{3^m}\left(1+\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{3^n}\right)+etc. \end{array} \right\};$$

da nun, wann m *et* n *numeri pares* sind, die *summa* r, s, und t angegeben werden kan, so sind auch in diesen Fällen diese beyden letsten *series* zusammen genommen *summa*bel.[2]

Seit dem ich Ewr. Wohlgeb. zugeschrieben, ist mir erst eingefallen, daß ich Denselben schon vor geraumer Zeit eine *Rigor*ose *demonstration* von diesem *Theoremate* daß $4mn-m-n \neq quadr[ato]$ überschrieben hatte.[3] Solches hatte ich aber so sehr vergessen, daß ich in meinem letsten schrieb, ich hätte aller Mühe ungeacht davon noch keine *Demonstration* finden können; ich will allso diese *Demonstration* kurzlich wiederhohlen.

Lemma. Si fuerit p *numerus primus haec expressio* $a^{p-1}-1$ *divisibilis erit per* p. Hievon haben Ewr. Wohlgeb. die *Demonstration* schon *approbi*rt; hieraus *raisonni*re ich allso:

Sit $p=4n-1$, *erit* $a^{4n-2}-1$ *divisibile per* $4n-1$, *si fuerit* $4n-1$ *numerus primus. Ergo* $a^{4n-2}+1$ *non erit divisibile per* $4n-1$. *At* $a^{4n-2}+1$ (*ob* $4n-2=$ *numer[um] impariter parem*) *est divisibile per* $aa+1$. *Consequenter cum* $a^{4n-2}+1$ *non sit per* $4n-1$ *divisibilis, nec ejus factor* $aa+1$ *per* $4n-1$ *erit divisibilis.*

Porro si $aa+1$ *per nullum numerum primum formae* $4n-1$ *fuerit divisibile, etiam per nullum numerum compositum formae* $4n-1$ *divisibile erit; si enim* $4m-1$ *non fuerit numerus primus, unum saltem factorem primum habebit formae* $4n-1$.

Cum igitur $aa+1$ *per* $4n-1$ *dividi nequeat, haec aequatio*

$$aa+1=(4n-1)(4m-1)$$

erit impossibilis, ideoque $aa \neq 16mn-4m-4n$ *seu* $4mn-m-n \neq$ *quadrato. Q. E. D.*

Ewr. Wohlgeb. läst Sich der H. *Hedling*er und meine gantze *Famille* gehorsamst empfehlen, und ich verbleibe mit der schuldigsten Hochachtung

Ewr. Wohlgebohrnen
gehorsamster Diener
Leonhard Euler

Berlin den 19$^{\text{ten}}$ *Jan.*
1743.

R 775 Reply to n° 59
Berlin, January 19th, 1743
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 44–45v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 188–192; *Euler-Goldbach* (1965), p. 140–142

62
Goldbach to Euler
Petersburg, (January 25th) February 5th, 1743[1]

HochEdelgebohrner Herr,
Hochgeehrter Herr *Professor*,

Eurer HochEdelgebohrnen Schreiben vom 15. *Dec.* 1742 habe ich den 3. *Januar.* *a*[*nni*] *c*[*urrentis*] kurtz vor meiner Abreise von *Moscau* daselbst erhalten[2] auch aus dem inliegenden[3] mit Freuden ersehen daß der Herr von *Stosch* schon eine geraume Zeit her von dem Englischen Hofe eine jährl[iche] *pension* von 320 Pf[und] Sterl[ing] geniesset. Zu Dero neugekaufften Hause *gratuli*re ich von Hertzen,[4] und noch vielmehr zu dem von I[hro] Königl[ichen] M[ajestä]$^{\text{t}}$ darauf allergnädigst verliehenen *privilegio*. Von dem grossen Poeten dessen E. H. Erwehnung thun[5] war mir vorhero nichts bewust in dem ich sowohl die Gelehrten als andern Zeitungen nicht in der gehörigen Ordnung lese, ich erinnere mich aber, daß ich schon vor mehr als 10 Jahren bey dem Hn *Baron* von *Mardefeld* eine in Dantzig in 8.° mit ziemlich grossen Buchstaben gedruckte fürtreffliche Ubersetzung der Psalmen in deutschen Versen[6] gesehen habe; der jetzige neue Ubersetzer welchem das erwehnte Buch ohne Zweiffel schon bekannt gewesen, wird es also allem vermuthen nach, noch weiter gebracht haben, und möchte ich gern eine Übersetzung mit der andern *conferi*ren. Wann der *T. . .* noch lebete[7] würde er die verlangten Abschrifften von Eurer HochE. *Memoires* mit grosser *ponctualité* übersenden,[8] anjetzo aber weiß ich in der That nicht wer dergl[eichen] Geschäffte besorget. Das *Compliment* von dem Hn Geheimen Rath *Vockerodt* ist mir sehr angenehm gewesen,[9] ich wünschte hertzlich den selben einmal in einem *considerabl*en *Poste* (wann es auch gegen seine eigene *intention* wäre) allhie wieder zu sehen.

Wann dasjenige was Ew. H. von den *radicibus imaginariis* melden,[10] *demonstri*ret werden könnte, so müste auch folgen daß *posito c imaginario quocunque*; *f reali quocunque*, und $c\sqrt{4c^4 - f} = r =$ *numero reali*; $m = \sqrt{-c^2 + \frac{r}{c}}$,

$n = \sqrt{-c^2 - \frac{r}{c}}$, so wohl $(m+n)$ als $c\,(m-n)$ *reales* sind; es stünde solchemnach etwan der *casus* $x^4 + 72x - 20$ zu untersuchen, allwo die 4 *divisores* sind *positis* $c = 1 + \sqrt{-2}$; $f = -20$; $\sqrt{4c^4 - f} = \frac{r}{4c} = \frac{18}{1+\sqrt{-2}}$

$$\text{(I.)}\quad x + c + \sqrt{-c^2 + \frac{r}{c}}, \qquad \text{(II.)}\quad x + c - \sqrt{-c^2 + \frac{r}{c}},$$

$$\text{(III.)}\quad x - c + \sqrt{-c^2 - \frac{r}{c}}, \qquad \text{(IV.)}\quad x - c - \sqrt{-c^2 - \frac{r}{c}}.$$

Auf Dero anderes Schreiben vom 5. *Januar.* habe ich zu antworten daß die *objection*, welche Ew. HochE. bei $4mn - m - 1 \neq \square$ und den andern Formuln machen, schon damahls zum theil von mir bemercket worden wiewohl ich meinete daß selbige leicht würde zu *solvi*ren seyn; jedoch glaube ich daß alles viel kürtzer und ohne dergleichen *casus particulares* zu hülf zu nehmen *demonstri*ret werden kan; vorher aber will nur *ad verba*: "Ferner ist klar daß wann man nur bewiesen hätte daß $4mn - m - 1 \neq \square$ *casu* $m = 4u - 1$, daraus schon folgen würde daß $4np - n - p \neq \square$; wann aber bewiesen wäre daß $4np - n - p \neq \square$ so würde daraus nur folgen daß $4mn - m - 1$ kein *Quadratum* seyn könne *casu quo* $m = 4u - 1$, aber nicht *generaliter*",[11] diese kleine Erinnerung machen, daß nicht allein $B \ldots 4np - n - p \neq \square$ ein *casus particularis* von $A \ldots 4mn - m - 1 \neq \square$, sondern auch A ein *casus particularis* von B ist, welches natürlicher Weise *contradictorium* seyn würde, wann das $\square$ *in* A und B *idem quadratum determinatum* bedeutete, nun aber, da es in beyden Fällen *diversos valores* hat, gar wohl bestehen kan; denn gleich wie aus dem *casu particulari ipsius* A, *ubi* $m = 4u - 1$, die *formula* $4\,(4nu - u - n)$ oder diese *aequivalens* $B \ldots 4nu - n - u \neq \square$ entspringet, so kömmt aus dem *casu particulari ipsius* B, wann u gesetzt wird $= 4n^2p - n$, die *formula* $4np - p - 1 \neq \square$ herauß, welche *posito* p *pro numero integro quocunque* die *formulam* A giebt, wie denn auch *generaliter* $4mn - m - n^{2\alpha-1} \neq \square$ durch die *substitution* $m = 4n^{2\alpha}p - n^{2\alpha-1}$ alsofort in $4np - p - 1 \neq \square$ verwandelt werden kan.[12]

Hie solte die neue *demonstration* folgen, weil sie mir aber nach besserer Überlegung selbst kein gnügen thut so muß dieser Punct biß auf eine andere Zeit ausgesetzt bleiben, indessen habe ich angemercket daß die *propositio* $4pmn - m - n \neq \square$ *per substitutionem* $m = 4n^2q - n$ *in hanc similem* $4npq - p - q \neq \square$ verwandelt wird.[13]

Aus der mir *communici*rten *demonstration*[14] des *theorematis*: *Si*

$$s = 1 + \frac{a}{n+1} + \&c.,$$

erit

$$\frac{1}{2}ss = \frac{1}{2} + \frac{a}{n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \&c.,$$

erhellet zugleich die grosse Einsicht des Hn *Autoris* in dergleichen Sachen, und die unterschiedenen *applicationes* so E. H. von dem *theoremate* selbst machen, halte ich für sehr merckwürdig. Die *Summae serierum* G *et* I sind eben diejenigen so ich gefunden hatte,[15] die *summa* $D+H$ war mir auch bekannt.

Daß die *summae serierum*

$$p = 1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) - \&c.$$

und

$$q = \frac{1\cdot 1}{4} - \frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{16}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \&c.,$$

so ich gefunden zu haben vermeinet, aus einem blossen Schreibfehler entstanden wären habe ich selbst schon Eurer HochEdelg. in meinem letzten Schreiben erinnert,[16] ich hätte dahero auch an selbige *series* nicht weiter gedacht, wann ich sie nicht in Dero Schreiben wiederholet gesehen,[17] worauf ich denn alsofort befunden, daß beyder *Summa* von $z = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \&c.$ *dependi*ret. Ew. HochEd. *inferi*ren mit grössestem Recht, daß wann ich die *seriem*

$$r = \frac{1\cdot 1}{2} - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) - \&c.$$

auch *summi*ren könnte, alsdann $z = p + r$ gefunden seyn würde, nun lässet sich zwar die *series* r gar schön *summi*ren, denn sie ist $= \frac{\left(\pi^2 - 3\right)\,\ell 2}{6}$,[18] aber p weiß ich nicht anders zu *exprimi*ren als durch $z - r$. Ich hatte auch in meinem vorigen geschrieben, daß ich die *summam seriei*

$$1 + \frac{1}{2^5}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3^5}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \&c.$$

noch nicht wüste, selbige aber *dependi*ret gleichfalls von der *summa* z und ist $= -\frac{z^2}{2} + \frac{\pi^6}{2\cdot 3^3\cdot 7}$.[19]

Aus Eurer Hochedelg. letztem Schreiben vom 19. *Jan.* ist mir lieb gewesen zu ersehen daß die *series* α, β, und b nicht von den leichtesten zu *summi*ren sind, was nun die *series* α und $2\beta + b$ betrifft, so kommen unsere *methodi* darin völlig überein, daß $\alpha = \frac{1}{2}AA$ und $2\beta{+}b = \frac{19\pi^6}{2\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7}$, hierin aber sind sie unterschieden, daß Eurer H. *methode* giebt $\beta = AC - \frac{1}{2}BB$, $b = BB - \frac{1}{3}E$, meine hingegen $\beta = \frac{\pi^6}{2\cdot 3^3\cdot 7} - \frac{BB}{2}$, $b = BB - \frac{11\pi^6}{2\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7}$;[20] den *valorem* $p = \frac{1}{2}BB + \frac{1}{2}E$ finde ich richtig, die übrigen habe noch nicht untersuchet. Meine *methode* werden E. H. aus nachfolgendem einigen *Schemate* gnugsam *pro omnibus seriebus huic similibus* ersehen können:

Sit

$$\begin{aligned} A &= 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\&c. = \frac{\pi^2}{6}, \\ C &= 1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\&c. = \frac{\pi^4}{90}, \end{aligned}$$

erit duplum summae productorum ex binis terminis seriei A aequale $A^2 - C$*, sed hoc duplum etiam est aequale sequentibus seriebus*

$$\begin{array}{llll} & \text{(I.)} & \text{(II.)} & \text{(III.)} \\ +2\left(\frac{1}{1^2\cdot 2^2}+\frac{1}{2^2\cdot 3^2}+\frac{1}{3^2\cdot 4^2}+\frac{1}{4^2\cdot 5^2}+\&c.\right) = 2\Big(& \frac{\pi^2}{3\cdot 1^2} & -2 & -1\Big) \\ +2\left(\frac{1}{1^2\cdot 3^2}+\frac{1}{2^2\cdot 4^2}+\frac{1}{3^2\cdot 5^2}+\frac{1}{4^2\cdot 6^2}+\&c.\right) = 2\Big(& \frac{\pi^2}{3\cdot 2^2} & -\frac{2\left(1+\frac{1}{2}\right)}{2^3} & -\frac{\left(1+\frac{1}{2^2}\right)}{2^2}\Big) \\ +2\left(\frac{1}{1^2\cdot 4^2}+\frac{1}{2^2\cdot 5^2}+\frac{1}{3^2\cdot 6^2}+\frac{1}{4^2\cdot 7^2}+\&c.\right) = 2\Big(& \frac{\pi^2}{3\cdot 3^2} & -\frac{2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)}{3^3} & -\frac{\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)}{3^2}\Big) \\ \qquad\qquad \&c. & & \&c. & \end{array}$$

Wann nun die drey *columnae perpendiculares* besonders *summi*ret werden, so entstehet

$$\begin{array}{rl} \text{(I.)} & \frac{2\pi^2}{3}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\&c.\right) = \frac{2\pi^4}{3\cdot 6} \\ \text{(II.)} & -4\left(1+\frac{1}{2^3}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3^3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\&c.\right) \\ \text{(III.)} & -2\left(1+\frac{1}{2^2}\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\frac{1}{3^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\&c.\right); \end{array}$$

die letzte *series* aber ist bekannter massen gleich $\frac{-7\pi^4}{180}$ also muß die mittlere seyn

$$A^2 - C - \frac{2\pi^4}{3\cdot 6} + \frac{7\pi^4}{180} = \frac{-10\pi^4}{180}$$

oder

$$1+\frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{27}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{64}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\&c. = \frac{\pi^4}{72}.$$

An Dero sämmtliche *familie* bitte mich dienstl[ich] zu empfehlen, wie auch den Hn *Chevalier Hedlinger* meiner beständigen Hochachtung zu versichern und verharre mit sonderbahrer *Consideration*

Eurer HochEdelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.^{t} Petersburg den 5. *Febr.* 1743.

P. S. Den durch E. H. mir übersandten Brief aus Sachsen habe ich wohl erhalten.[21]

Daß das *Theorema* $4mn - m - 1 \neq \square$ von E. H. schon längst *demonstri*ret worden, habe ich nicht vergessen, es ist aber nur die Frage gewesen, ob man es nicht noch auf eine andere Art *demonstri*ren könne?[22]

R 776 Reply to nº 58, nº 60 and nº 61
Petersburg, (January 25th) February 5th, 1743
Original, 4 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 61–64v
Partial copy, 7 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. III, fol. 71r–74r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 193–197; *Euler-Goldbach* (1965), p. 143–145

63
Goldbach to Euler
Petersburg, February (1st) 12th, 1743[1]

den 12. *Febr.* 1743.

Da ich anjetzo nach Königsberg schreibe[2] so habe gegenwärtiges *Post scriptum* zu meinem letzten Briefe an Ew. HochEdelgeb. mit absenden und zugleich einen abermahl eingeschlichenen Fehler *corrigi*ren wollen, denn die *summa*[3]

$$p = 1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) - \mathit{\&c.}$$

ist nicht $z - \dfrac{\pi^2\,\ell\,2}{6} + \dfrac{\ell\,2}{2}$, sondern $z - \dfrac{\pi^2\,\ell\,2}{6} + u$ wann

$$u = 1 - \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{9}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{16}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + {}^{[4]}\ \mathit{\&c.};$$

setzet man ferner

$$v = 1 - \frac{1}{2^2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3^2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4^2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \mathit{\&c.},$$

so wird $u + v = \dfrac{\pi^2\,\ell\,2}{3}$.

Sonst habe ich auch *observi*ret, daß wann man setzet

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \mathit{\&c.}$$

$$B = \frac{3}{1\cdot 2} + \frac{5}{2\cdot 3}\left(1 + \frac{1}{2^3}\right) + \frac{7}{3\cdot 4}\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \frac{9}{4\cdot 5}\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3}\right) + \mathit{\&c.},$$

alsdann seyn werde

$$\frac{B}{2A} = z = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \&c.$$

Ich weiß nicht ob dergleichen *casus* bißhero sonderlich betrachtet worden *ubi series* $= \infty$ *dividitur per aliam* $= \infty$;[5] ich mag mir nicht die Mühe nehmen zu sehen was *per actualem divisionem* der *Seriei* B durch $2A$ vor *termini* herauskommen möchten, weil ich vermuthe daß die selben sehr *confus* aussehen werden.

Wann man ferner setzet

$$C = 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2^3}\right) + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3}\right) + \&c.,$$

so wird

$$\frac{C}{A} = \frac{B}{2A} = z = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \&c.,$$

woraus aber nicht folget daß $2C = B$, sondern nur daß $2C - B$ ein *infinite parvum* sey *respectu ipsius* B *vel* C.

R 777 Supplement to n° 62
Petersburg, February (1st) 12th, 1743
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 59rv
Copy, 2 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. III, fol. 74rv
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 198–199; *Euler-Goldbach* (1965), p. 146

64
Euler to Goldbach
Berlin, February 26th, 1743

Wohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Nach Abstattung meiner gehorsamsten *Gratulation* zu Ewr. Wohlgeb. glücklichen Zurückkunft in *S.t Petersburg*, finde ich mich im Stande Denselben von einer *Edition* des *Dictionnaire de Trevoux* zuverlässige Nachricht zu geben: solches ist im vorigen Jahr in Basel bey H. Christ (welcher die Brandmüllerische Buchhandlung ererbet) gedruckt worden, bestehet in 6 *Tom. in Fol.* und kostet 30 *fl.* oder ungefehr 15 *Rub.*; der *Titul* ist *Dictionnaire de Trevoux, nouvelle Edition considerablement augmentée*, 6 *Vol. fol.* 1742; davon werden nächstens *Exemplaria* allhier zu bekommen seyn.[1] Die gemeldte Dantziger *Edition* der Psalmen[2] ist mir unbekannt, ich bin aber von Leuten, welche dieselbe und die neue gesehen haben, versichert worden, daß diese jene weit übertreffe. In dieser sind auch die Lobwasserischen *Melodi*en und Abtheilungen beybehalten worden, daß man sich derselben in den

Kirchen bedienen kan. Es liegen hier viel *Exemplaria*, und haben Ewr. Wohlgeb. nur zu befehlen, ob ich mit Gelegenheit eines überschicken soll.

Die über die *Academie* hochverordnete *Commission* hat mir letstens die versprochene *Pension* auf das gnädigste *confirmi*ret, und der H. *Admiral* Graf *Gollovin pressi*rt mich sehr meine *Scientiam navalem* nächstens gegen eine ansehnliche *Recompens* einzuschicken; ich habe solche völlig zu Ende gebracht, und nur um Erlaubnüß gebeten, solche vorher abschreiben zu lassen.[3]

Was ich von den *Radicibus imaginariis aequationum* gemeldet, daß dieselben immer dergestalt paar weiß genommen werden können, daß so wohl das *product* als die *summ* von zweyen *real* werde, kan ich zwar nicht *generaliter demonstri*ren, aber doch von allen *Aequationibus sexto gradu inferioribus*,[4] in gleichen auch von dieser weit *general*eren *aequation* $\alpha x^{5n} + \beta x^{4n} + \gamma x^{3n} + \delta x^{2n} + \varepsilon x^n + \zeta = 0$, *denotante n numerum integrum quemcunque*; dahero der von Ewr. Wohlgeb. gemeldte *Casus*[5] keine Schwierigkeit hat; ich glaube aber daß in den *Expression*en ein kleines Versehen seyn muß, weilen dieselben nicht zusammen stimmen, dann wan $c = 1+\sqrt{-2}$, und $f = -20$, so wird $\sqrt{4c^4 - f} = \dfrac{6\sqrt{2}}{1+\sqrt{-2}}$ und nicht $= \dfrac{18}{1+\sqrt{-2}}$. Ich bin den Spuren Ewr. Wohlgeb. nachgegangen, und glaube daß Dieselben auf diese *Aequation* gekommen seyn würden:

$$x^4 + 8\,(\alpha\alpha + \beta\beta)\; x\sqrt{2\,(\beta\beta - \alpha\alpha)} + 12\alpha^4 - 40\alpha^2\beta^2 + 12\beta^4 = 0,$$

welche erstlich in diese zwey *factores imaginarios resolvi*rt wird:

$$\begin{aligned} &xx+2\left(\alpha+\beta\sqrt{-1}\right)x+4\alpha\beta\sqrt{-1}-2(\beta\beta-\alpha\alpha)-2\left(\alpha-\beta\sqrt{-1}\right)\sqrt{2(\beta\beta-\alpha\alpha)}=0\\ &xx-2\left(\alpha-\beta\sqrt{-1}\right)x+4\alpha\beta\sqrt{-1}-2(\beta\beta-\alpha\alpha)+2\left(\alpha-\beta\sqrt{-1}\right)\sqrt{2(\beta\beta-\alpha\alpha)}=0\end{aligned}$$

dahero die 4 *Radices* sehr *complicat* seyn würden. Dem ungeacht aber ist eben dieselbe *Aequation* auch ein *Product* von diesen zweyen *Factoribus realibus*

$$\begin{aligned} xx + 2x\sqrt{2\,(\beta\beta - \alpha\alpha)} + 6\beta\beta - 2\alpha\alpha = 0\\ xx - 2x\sqrt{2\,(\beta\beta - \alpha\alpha)} + 2\beta\beta - 6\alpha\alpha = 0\end{aligned}$$

woraus die Wahrheit meines Satzes erhellet. Überhaupt aber wann 2 *factores imaginarii in se ducti* dieses *Productum reale* $x^4 + Bxx + Cx + D$ herausbringen sollen, so müssen dieselben allso beschaffen seyn

$$\begin{aligned} &xx + \left(b + c\sqrt{-1}\right)x - aa - ab + bc\sqrt{-1} + ac\sqrt{-1}\\ &xx - \left(b + c\sqrt{-1}\right)x - aa + ab + bc\sqrt{-1} - ac\sqrt{-1};\end{aligned}$$

nun aber kan das *productum* dieser zwey *factorum imaginariorum* auch in diese 2 *factores reales resolvi*rt werden:

$$(xx + 2ax + aa - bb)\,(xx - 2ax + aa + cc)\,.$$

Gleicher gestalt wann eine *aequation* nachfolgende 4 *radices imaginarias* hat:

$$\begin{aligned}
&\text{I.} \quad x = p + q\sqrt{-1} + \sqrt{\left(pp + 2pq\sqrt{-1} - qq - r - s\sqrt{-1}\right)}\\
&\text{II.} \quad x = p + q\sqrt{-1} - \sqrt{\left(pp + 2pq\sqrt{-1} - qq - r - s\sqrt{-1}\right)}\\
&\text{III.} \quad x = p - q\sqrt{-1} + \sqrt{\left(pp - 2pq\sqrt{-1} - qq - r + s\sqrt{-1}\right)}\\
&\text{IV.} \quad x = p - q\sqrt{-1} - \sqrt{\left(pp - 2pq\sqrt{-1} - qq - r + s\sqrt{-1}\right)};
\end{aligned}$$

um abzukürzen setze ich $pp - qq - r = t$; $2pq - s = u$: so wird erstlich $\sqrt{tt + uu} \pm t$ allzeit eine *quantitas positiva*, und folglich $\sqrt{\left(\pm\, t + \sqrt{(tt + uu)}\right)}$ eine *quantitas realis* seyn; dieses vorausgesetzt, so ist die *summa radicum* $\mathrm{I} + \mathrm{III}$

$$= 2p + \sqrt{2t + 2\sqrt{(tt + uu)}};$$

summa II *et* IV

$$= 2p - \sqrt{2t + 2\sqrt{tt + uu}};$$

productum radicum $\mathrm{I} \cdot \mathrm{III}$

$$= pp + qq \quad \begin{array}{l} + p\sqrt{2t + 2\sqrt{tt + uu}} \\ + q\sqrt{-2t + 2\sqrt{tt + uu}} \end{array} \quad + \sqrt{tt + uu}$$

und *productum radicum* $\mathrm{II} \cdot \mathrm{IV}$

$$= pp + qq \quad \begin{array}{l} - p\sqrt{2t + 2\sqrt{tt + uu}} \\ + q\sqrt{-2t + 2\sqrt{tt + uu}} \end{array} \quad + \sqrt{tt + uu},$$

welches alles *Quantitates reales* sind.

Ewr. Wohlgeb. *Transformatio*[6] *formulae* $4pmn - m - n \neq \Box$ *in hanc* $4npq - p - q \neq \Box$ *ope substitutionis* $m = 4n^2q - n$ kan ein grosses Licht zur *Demonstration* geben; dann wann man nur *demonstri*ren könnte daß $4pmn - m - n$ kein *Quadrat* sey, wann m eine Zahl ist von dieser Art $4nnq - n$, so würde zugleich *demonstri*rt seyn daß $4pmn - m - n$ *nullo modo* ein *Quadrat* seyn könnte. Eine gleiche *Transformation* geht auch an durch diese *Substitution*en:

$$m = (4np)^{2\alpha}\, x - \frac{n\left((4np)^{2\alpha} - 1\right)}{4np - 1}$$

oder

$$m = 4nn\,(4np)^{2\alpha}\, y - \frac{n\left((4np)^{2\alpha+1} - 1\right)}{4np - 1}.$$

Ich kan auf keine Weise herausbringen,[7] daß diese *series*

$$r = \frac{1}{2}\cdot 1 - \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right) - etc. = \frac{(\pi\pi-3)\ \ell\, 2}{6};$$

dann da alle *termini evoluti* von dieser *Form* $\dfrac{1}{xx\,(x+n)}$ sind, und

$$\frac{1}{xx\,(x+n)} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{xx} - \frac{1}{nn}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{nn}\cdot\frac{1}{(x+n)}$$

so folget nach der von Ewr. Wohlgeb. mir gütigst *communicir*ten *Methode*, daß

$$r = \frac{\pi\pi\,\ell\, 2}{6} - 1 + \frac{1}{2^2}\left(1+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) + etc.;$$

allso müste seyn

$$\frac{1}{2}\ell\, 2 = 1 - \frac{1}{2^2}\left(1+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\ [-\ etc.;]$$

ich finde aber die *summam* dieser *seriei per approximationem* $= 0,7504$ und folglich grösser als $\ell\, 2$.

Daß diese *series*

$$\beta = 1 + \frac{1}{2^5}\left(1+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3^5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) + etc. = AC - \frac{1}{2}BB,$$

habe auch durch Ewr. Wohlgeb. *Methode* gefunden, daß ich allso die *summ* $\dfrac{\pi^6}{2\cdot 3^3\cdot 7} - \dfrac{1}{2}BB$ für verdächtig halte, weilen *proxime* $\dfrac{\pi^6}{2\cdot 3^3\cdot 7} = 2,543\,35$, und $\dfrac{1}{5}BB = 0,722\,47$, und allso der *Valor* für β viel zu groß herauskäme; dieses wird noch mehr bestätiget, wann Ewr. Wohlgeb. angeben

$$b = 1 + \frac{1}{2^4}\left(1+\frac{1}{2^2}\right) + \frac{1}{3^4}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right) + etc. = BB - \frac{11\pi^6}{2\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7},$$

dann da $BB = 1,444\,940$ und $\dfrac{11\pi^6}{2\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7} = 1,865\,13$, so würde b *negativum* werden.[8]

Für die von Ewr. Wohlgeb. mir gütigst *communicir*te *Methode* sage tausendfältigen Dank, indem dieselbe weit leichter und *natür*licher auf diese *series* leitet, als diejenige welche ich gebrauchet, und sehr *embarrassant* ist. Um aber diese herrliche *Methode* auf die folgenden *Casus* zu *applici*ren, so habe dieses *Lemma* gebrauchet:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^n\,(x+a)^n} \quad = \quad & \frac{1}{a^n}\left(\frac{1}{x^n} \pm \frac{1}{(x+a)^n}\right) - \frac{n}{a^{n+1}}\left(\frac{1}{x^{n-1}} \mp \frac{1}{(x+a)^{n-1}}\right) \\ & + \frac{n\,(n+1)}{1\cdot 2a^{n+2}}\left(\frac{1}{x^{n-2}} \pm \frac{1}{(x+a)^{n-2}}\right) \\ & - \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3a^{n+3}}\left(\frac{1}{x^{n-3}} \mp \frac{1}{(x+a)^{n-3}}\right) + [etc.]\end{aligned}$$

biß man *ad potestates primas ipsarum* x *et* $x+a$ kommt. Von den *sig*[*nis*] *ambiguis* gelten die oberen wann n ein *numerus par* ist, sonst die untren. Wann auch ungleiche *Dignitates* mit einander *multiplici*rt werden, so dienet dieses *Lemma*:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^m(x+a)^n} \quad + \quad \frac{1}{x^n(x+a)^m} &\\ = \; &+\frac{1}{a^n}\left(\frac{1}{x^m}\pm\frac{1}{(x+a)^m}\right)-\frac{n}{1a^{n+1}}\left(\frac{1}{x^{m-1}}\mp\frac{1}{(x+a)^{m-1}}\right)\\ &+\frac{n(n+1)}{1\cdot 2a^{n+2}}\left(\frac{1}{x^{m-2}}\pm\frac{1}{(x+a)^{m-2}}\right)-[etc.]\\ &+\frac{1}{a^m}\left(\frac{1}{x^n}\pm\frac{1}{(x+a)^n}\right)-\frac{m}{1a^{m+1}}\left(\frac{1}{x^{n-1}}\mp\frac{1}{(x+a)^{n-1}}\right)\\ &+\frac{m(m+1)}{1\cdot 2a^{m+2}}\left(\frac{1}{x^{n-2}}\pm\frac{1}{(x+a)^{n-2}}\right)-[etc.;]\end{aligned}$$

wann man nun setzt

$$P = 1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{4^m}+etc.$$

$$Q = 1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+etc.$$

et

$$Z = 1+\frac{1}{2^{m+n}}+\frac{1}{3^{m+n}}+\frac{1}{4^{m+n}}+etc.$$

so findet sich

$$\begin{aligned}PQ-Z = &+\frac{1}{1\cdot 2^m}+\frac{1}{2^n\cdot 3^m}+\frac{1}{3^n\cdot 4^m}+etc.+\frac{1}{1\cdot 2^n}+\frac{1}{2^m\cdot 3^n}+\frac{1}{3^m\cdot 4^n}+etc.\\ &+\frac{1}{1\cdot 3^m}+\frac{1}{2^n\cdot 4^m}+\frac{1}{3^n\cdot 5^m}+etc.+\frac{1}{1\cdot 3^n}+\frac{1}{2^m\cdot 4^n}+\frac{1}{3^m\cdot 5^n}+etc.\\ &+\frac{1}{1\cdot 4^m}+\frac{1}{2^n\cdot 5^m}+\frac{1}{3^n\cdot 6^m}+etc.+\frac{1}{1\cdot 4^n}+\frac{1}{2^m\cdot 5^n}+\frac{1}{3^m\cdot 6^n}+etc.\\ &\qquad\qquad etc. \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad etc.\end{aligned}$$

Wann man nun so wohl gleiche als ungleiche *Dignitates* mit einander *multiplici*rt, wie Ewr. Wohlgeb. unfehlbar werden gethan haben, so finde wie schon vorher gemeldt $\beta = AC - \frac{1}{2}BB$ und $b = BB - \frac{1}{3}E$, und wann man weiter geht und setzt

$$\begin{aligned}\alpha &= 1+\frac{1}{2^5}\left(1+\frac{1}{2^3}\right)+etc.\\ \beta &= 1+\frac{1}{2^6}\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+etc.\\ \gamma &= 1+\frac{1}{2^7}\left(1+\frac{1}{2}\right)+etc.\end{aligned}$$

so findet sich $\gamma = AE - BD + \frac{1}{2}CC$ und $2\alpha + 5\beta = 10BD - \frac{9}{2}CC$ wo A, B, C, D, *etc.* die vorgemeldten *valores* behalten.

Die *Series* $B = 1 + \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{3^3} + \dfrac{1}{4^3} + etc.$ will sich noch auf keine Art *tracti*ren lassen; ich fand letstens *per approximationem* daß $BB = A - \dfrac{1}{5}$, welches ziemlich genau eintrifft, aber doch nicht Stich hält, dann es ist $BB = 1,444\,940\,798\,43$ und $A = 1,644\,934\,066\,84$; dahero $A - \dfrac{1}{5} = 1,444\,934\,066\,84$ und

$$BB = A - \frac{1}{5} + \frac{673}{100\,000\,000}.$$

Inzwischen ist der *nexus* zwischen dieser *Serie* $B = 1 + \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{3^3} + etc.$ und den längst bemerkten Brüchen $\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{6}; \dfrac{1}{6}; \dfrac{3}{10}; \dfrac{5}{6}; \dfrac{691}{210}; \dfrac{35}{2}$; *etc. remarqua*bel; dann wann

$$s = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{3}{10} + \frac{5}{6} - \frac{691}{210} + \frac{35}{2} - etc.,$$

so ist $B = 1 + \frac{1}{2}s$. Der Beweiß davon steckt in meiner *Dissertation de inventione termini summatorii ex dato termino generali*.[9] Dann wann man setzt

$$Z = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots \frac{1}{x^3}$$

und

$$B = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + etc. \textit{ in infinitum},$$

so wird

$$\begin{aligned} B = Z \quad &+ \quad \frac{1}{2xx} - \frac{1}{2x^3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x^4} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2x^6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2x^8} - \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{2x^{10}} \\ &+ \quad \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2x^{12}} - \frac{691}{210} \cdot \frac{1}{2x^{14}} + etc.; \end{aligned}$$

wann man allso für x eine beliebige Zahl als 10 annimmt, so kan man *per additionem actualem* Z finden: es wird nehmlich

$$Z = 1,197\,531\,985\,674\,193\,251\,668\,686\,286\,978\,0;$$

dahero ist

$$B = Z + \frac{1}{200} - \frac{1}{2000} + \frac{1}{40\,000} - \frac{1}{12\,000\,000} + \frac{1}{1\,200\,000\,000} - etc.$$

und wird

$$B = 1,202\,056\,903\,159\,594.$$

Gleicher Gestalt können auch die *Summae serierum reliquarum potestatum* gefunden werden, nachdem man einige *terminos ab initio actu addi*rt hat. Als es sey

$$Z = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \dots \frac{1}{x^n}$$

und

$$N = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \textit{etc. in infinitum}:$$

so wird seyn

$$\begin{aligned} N \quad = \quad & Z + \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot x^n} + \frac{n}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{2x^{n+1}} - \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{1}{6x^{n+3}} \\ & + \frac{n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,(n+4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \cdot \frac{1}{6x^{n+5}} - \frac{n\,(n+1) \cdots (n+6)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 9} \cdot \frac{3}{10x^{n+7}} \\ & + \frac{n\,(n+1)\,(n+2) \cdots (n+8)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 11} \cdot \frac{5}{6x^{n+9}} - \frac{n\,(n+1) \cdots (n+10)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 13} \cdot \frac{691}{210x^{n+11}} \ \textit{etc.} \end{aligned}$$

Durch diese Regel habe ich nachfolgende *Summas vero proximas* gefun[den:]

$$\begin{array}{lll}
1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \textit{etc.} & = 1,644\,934\,066\,848\,226\,436 & = A \\
1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \textit{etc.} & = 1,202\,056\,903\,159\,594\,281 & = B \\
1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \textit{etc.} & = 1,082\,323\,233\,711\,138\,191 & = C \\
1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \textit{etc.} & = 1,036\,927\,755\,106\,863\,293 & = D \\
1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \textit{etc.} & = 1,017\,343\,061\,984\,449\,139 & = E \\
1 + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} + \textit{etc.} & = 1,008\,349\,277\,386\,601\,872 & = F \\
1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \textit{etc.} & = 1,004\,077\,356\,197\,944\,339 & = G \\
1 + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{3^9} + \textit{etc.} & = 1,002\,008\,392\,826\,082\,210 & = H \\
1 + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \textit{etc.} & = 1,000\,994\,575\,127\,618\,085 & = I \\
1 + \frac{1}{2^{11}} + \frac{1}{3^{11}} + \textit{etc.} & = 1,000\,494\,188\,604\,194\,651 & = K \\
1 + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} + \textit{etc.} & = 1,000\,246\,086\,553\,308\,048 & = L \\
1 + \frac{1}{2^{13}} + \frac{1}{3^{13}} + \textit{etc.} & = 1,000\,122\,713\,347\,585\,744 & = M \\
1 + \frac{1}{2^{14}} + \frac{1}{3^{14}} + \textit{etc.} & = 1,000\,061\,248\,135\,058\,704 & = N \\
1 + \frac{1}{2^{15}} + \frac{1}{3^{15}} + \textit{etc.} & = 1,000\,030\,588\,236\,307\,020 & = O \\
1 + \frac{1}{2^{16}} + \frac{1}{3^{16}} + \textit{etc.} & = 1,000\,015\,282\,259\,408\,657 & = P
\end{array}$$

Bald wird der 7^{te} *Tomus* von den hiesigen *Miscellaneis* zum Vorschein kommen, welcher ziemlich stark seyn wird in dem ich allein in der *Mathemati*schen *Class* auf 28 Bogen habe: darunter ist eine grosse *Piece* von dem *Comet*en des vorigen Jahres, und eine neue Art die *series* $1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \textit{etc.}$ zu *summi*ren, welche bloß allein durch *differentiation* geschieht.[10] Vor etlichen Wochen hat man wiedrum einen *Comet*en allhie gesehen, welcher aber ohne Schwantz und sehr klein war, auch nur 10 Tage lang aus dem *Dracone* durch *ursam majorem* in

Leonem minorem gehend *observi*rt worden: es ist aber keine so *accurate Observation* gemacht worden, wodurch man seinen Lauf bestimmen könnte.[11] Die *Opera Joh*[*annis*] *Bernoullii omnia* werden bald aus der Presse kommen, und Unserm König *dedici*rt werden.[12] Es nimmt mich sehr wunder, ob Ewr. Wohlgeb. mit der *Academie* in gar keiner *Connexion* mehr stehen.

Meine gantze *Famille* lässt sich Ewr. Wohlgeb. gehorsamst empfehlen, und ich verbleibe mit der schuldigsten Hochachtung

Euer Wohlgebohrnen
gehorsamster Diener
Leonh. Euler

Berlin den 26ten *Febr.*
1743.

R 778 Reply to n° 62
Berlin, February 26th, 1743
Original, 3 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 48–50v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 200–208; *Euler-Goldbach* (1965), p. 147–152

65
Goldbach to Euler
Petersburg, March (7th) 18th and (12th) 23rd, 1743

den 18. *Mart.* 1743.

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*

Endlich stellet sich die *demonstratio nova* ein,[1] so im folgenden bestehet:

Lemma 1. Si aequatio B ... $4mn - m - 1 = a^2$ *non est possibilis casu quo* m *est numerus huius formae* $4u - 1$, *neque ullo alio casu ipsius* m *erit possibilis, ut in superioribus litteris ostensum fuit.*

Lemma 2. Si vera est aequatio B, vera etiam erit C ... $4Mn - M - 1 = A^2$ *posito* $M = 2a + m + 4n - 1$, *fiet enim* $A = a + 4n - 1$.

Sed aequatio C non potest fieri vera nisi M sit numerus huius formae $4v-1$ (*per Lemma 1*), *erit igitur* $M = 4v-1 = 2a+4n-1+4u-1$, *ergo* $4v = 2a+4n+4u-1$, *hoc est numerus par = numero impari, quod est absurdum, ergo et aequatio B est absurda.*

Similiter de aequatione D ...[2] $4pmn - m - n\,[= a^2]$ *iudicandum est quae vera esse non potest nisi sit* m *huius formae* $4n^2q - n$ (*ut in superioribus litteris ostensum fuit*), *quo facto erit* $4pnM - M - n = A^2$, *si ponatur* $M = ((4pn - 1) + 2a + m)$, $A = 4pn - 1 + a$; *sed quia* m *est huius formae* $4n^2q - n$ *et*

M huius formae $4n^2Q-n$, *habebitur* $4pn-1+2a+4n^2q=4n^2Q$, *hoc est numerus impar = numero pari, quod est absurdum, ergo et aequatio D est absurda.*

Was ich von den *radicibus imaginariis* erinnern wollen,[3] gehet eigentlich dahin: daß weil die 4 folgenden *radices*:

$$x=\begin{cases} -\dfrac{a}{2}\pm\sqrt{-\dfrac{a^2}{4}+\sqrt{\dfrac{a^4}{4}-f}} \\ +\dfrac{a}{2}\pm\sqrt{-\dfrac{a^2}{4}-\sqrt{\dfrac{a^4}{4}-f}} \end{cases}$$

in se ductae $x^4\pm 2a\left(\dfrac{a^4}{4}-f\right)^{\frac{1}{2}}x+f\ =0$ geben, folglich auch so offt als f und $2a\sqrt{\dfrac{a^4}{4}-f}$ *numeri reales* sind, zweene von gemeldten *radicibus in se ductae numeros reales* hervor bringen müssen, wann aber Ew. Hochedelg. wie Sie in Dero letzterem Schreiben melden die Wahrheit Ihres *asserti* von allen *aequationibus quartae potestatis demonstri*ren können,[4] so *cessi*ret das angeführte *dubium* von selbsten.

Aus den in Eurer Hochedelg. Schreiben beygebrachten Umständen sehe ich wohl daß die von mir angegebene *Summa* aus einem Irrthum entstanden,[5] wobey ich die von *M.r Vaugelas* in den *Remarques sur la Langue Françoise* gemachte Erinnerung *applici*ren muß, wann er saget, daß im fall es sich finden sollte daß er selbst anders geschrieben als er nach seinen *Remarques* hätte schreiben sollen, man alsdenn nicht seinem Exempel sondern seinen Regeln zu folgen habe;[6] es ist mir also sehr lieb daß Ew. H. an meiner *methode* etwas gutes gefunden, ohngeachtet in die von mir angeführten Exempel einige Fehler eingeschlichen sind.

Wäre mir Eurer HochE. *Lemma* wodurch $\dfrac{1}{x^m\,(x+a)^n}$ in andere *series resolvi*ret wird eher bekannt gewesen so hätte ich die erwehnten *Summas* viel leichter und ordentlicher finden können. Ich habe indessen angemercket, daß wann die *summa seriei* deren *formula generalis* ist $\dfrac{1}{(3x-2)^2}$ für bekannt angenommen und $=a$ gesetzt wird, alsdann jede *series cuius terminus generalis est* $\dfrac{1}{(6x+p)^2}$ *ubi p sit numerus quicunque integer exprimi*ret werden kan *per a et quadraturam circuli*, hingegen kan ich die *series huius formae* $\dfrac{1}{(12x+p)^2}$ *dato p numero quocunque* nicht anders *ad quadraturam circuli reduci*ren als *cognitis summis trium casuum* $p=11$, $p=10$, $p=9$ *aut aliorum trium his aequivalentium.*

Es wird Eurer HochE. vermuthlich nicht schwer seyn Ihr *Lemma* auch auf

$$\frac{\alpha x^{2n-2}+\beta x^{2n-3}+\gamma x^{2n-4}+\&c.}{(px+q)^n\,(px+r)^n}$$

zu *extendi*ren, so ist zum Exempel *positis* $p = 4$, $q = -3$, $r = -1$, die *summa seriei* $\dfrac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{(4x-3)^2\,(4x-1)^2}$

$$= \frac{\alpha\left(64u + \pi^2 - 6\pi\right)}{2^9} + \frac{\beta\left(16u + \pi^2 - 4\pi\right)}{2^7} + \frac{\gamma\left(\pi^2 - 2\pi\right)}{2^5}$$

wann u die *summam seriei* $\dfrac{1}{(4x-3)^2}$ andeutet.

Imgleichen wann $p = 4$, $q = -2$, $r = 0$, so wird die *summa seriei* $\dfrac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{(4x-2)^2\,(4x)^2}$

$$= \frac{\alpha\pi^2}{2^9} + \frac{\beta\left(\pi^2 - 8\,\ell\,2\right)}{2^8} + \frac{\gamma\left(\pi^2 - 12\,\ell\,2\right)}{3 \cdot 2^5}.$$

Wann man setzet $v = \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} \ldots + \dfrac{1}{n}$

$$\begin{aligned}
A &=^{[7]} \frac{1}{n^2\,(n+1)} ∺ \frac{(2n+1)}{(n+1)^2\,n^2}\left(v + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{\pi^2}{6\,(n+1)\,n} \\
B &= \frac{1}{(n+1)^2\,(n+2)} - \frac{(2n+3)}{(n+2)^2\,(n+1)^2}\left(v + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) \\
&\quad + \frac{\pi^2}{6\,(n+2)\,(n+1)} \\
C &= \frac{1}{(n+2)^2\,(n+3)} - \frac{(2n+5)}{(n+3)^2\,(n+2)^2}\left(v + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}\right) \\
&\quad + \frac{\pi^2}{6\,(n+3)\,(n+2)}
\end{aligned}$$

so werden die *quantitates* AC *et* B^2 desto weniger von ein ander *differi*ren je grösser der *numerus* n genommen wird.

Was Ew. HochEdelgeb. von der *summa seriei* B in Dero Schreiben beyfügen halte ich für sehr merckwürdig. Die *Dissertation de inventione termini summatorii* erinnere ich mich nicht gesehen zu haben,[8] weiß auch nicht, ob dieselbe in Berlin oder allhie herausgekommen ist. Vor die mir *communicir*ten *summas in terminis decimalibus* dancke ich dienstl[ich]. Bey der letzten Zahl in $P = 1 + \frac{1}{2^{16}} + \frac{1}{3^{16}} +$ *&c.* ist nicht deutlich zu sehen ob die selbe 1 oder 7 heißen soll, wie wohl auch darauf nicht viel ankommt.[9] Ich verbleibe mit besonderer Hochachtung

Eurer Hochedelgebohrnen

ergebenster Diener

Goldbach.

S.ᵗ Petersbourg den 23. *Mart.* 1743.

R 779 Reply to n° 64
Petersburg, March (7th) 18th and (12th) 23rd, 1743
Original, 3 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 65–66v
Partial copy, 6 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 2r–4v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 209–212; *Euler-Goldbach* (1965), p. 152–154

66
Euler to Goldbach
Berlin, April 9th, 1743

Wohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Ewr. Wohlgeb. bin für die mir gütigst überschriebene *Demonstration*, daß $4mn - m - 1$ keine *Quadrat* Zahl seyn kan, gehorsamst verbunden. Die *Raisonnemens* darinn sind wegen der *propositionum exclusivarum* und *infinitarum*, so darinn häuffig vorkommen, so tiefsinnig, daß ich viele Mühe gehabt ehe ich dieselben habe völlig einsehen und auseinander wickeln können, und die gewöhnlichen Regeln der *Logic* scheinen mir dazu kaum hinlänglich zu seyn. Alles beruhet auf dem ersten *Lemmate*, und wann dasselbe seine Richtigkeit hat, so ist an der *Demonstration* nicht das geringste auszusetzen. Ewr. Wohlgeb. beruffen Sich wegen dieses *Lemmatis* auf Dero vorige Briefe,[1] aus welchen ich diese *Demonstration* gezogen:

I. *Si* $4nx - x - 1$ *est quadratum casu* $x = m$*, tum erit etiam quadratum casu* $x = 16mnn - 4n - 1$.

II. *Ergo si* $4nx - x - 1$ *non est quadratum casu* $x = 16mnn - 4n - 1$*, tum eadem formula* $4nx - x - 1$ *non erit quadratum casu* $x = m$.

III. *Cum igitur* $16mnn - 4n - 1$ *contineatur in forma* $4v - 1$*, si demonstretur formula* $4nx - x - 1$ *quadratum esse non posse casu* $x = 4v - 1$*, tum etiam certum erit formulam* $4mn - m - 1$ *quadratum esse non posse.*

IIII. *Quare formula* $4mn - m - 1$ *quadratum esse non poterit, nisi quadratum sit haec formula* $4nx - x - 1$ *existente* x *numero formae* $4v - 1$.

V. *Quoniam ergo hae formulae* $4mn - m - 1$ *et* $4nx - x - 1$ *congruunt formula* $4mn - m - 1$ *quadratum esse non potest, nisi sit* m *numerus formae* $4v - 1$.

Wann diese letste *Conclusion* ihre Richtigkeit hat, als worinn Ewr. Wohlgeb. erstes *Lemma* besteht, so ist die gantze übrige *Demonstration* vollkommen. Allein eben diese letste *Consequentz* erwecket bey mir einen *Scrup*el, welchen ich nicht wohl mit Worten ausdrucken kan. Daß aber dieser mein *Scrup*el gegründet sey, kan ich dadurch zeigen, weilen man auf gleiche Art beweisen könnte, daß $4mn - m + 1$ kein *quadratum* seyn könnte, *nisi sit* m *numerus hujus formae* $4v + 1$, welches doch falsch ist. Diese *Demonstration* würde allso lauten:

I. *Si* $4nx - x + 1$ *est quadratum casu* $x = m$*, erit etiam quadratum casu* $x = 16mnn + 4n + 1$*, fit enim* $64mn^3 - 16mnn + 16nn = 16nn\,(4mn - m + 1)$.

II. *Ergo si* $4nx - x + 1$ *non fuerit quadratum casu* $x = 16mnn + 4n + 1$, *non erit quadratum haec forma* $4mn - m + 1$.

III. *Cum igitur* $16mnn + 4n + 1$ *contineatur in forma* $4v + 1$, *si demonstretur formula* $4nx - x + 1$ *quadratum esse non posse casu* $x = 4v + 1$, *tum simul certum foret, hanc formulam* $4mn - m + 1$ *prorsus quadratum esse non posse.*

IV. *Quare formula* $4mn - m + 1$ *quadratum esse non poterit nisi quadratum sit haec formula* $4nx - x + 1$ *casu* $x = 4v + 1$.

V. *Quoniam ergo formulae* $4mn - m + 1$ *et* $4nx - x + 1$ *congruunt formula* $4mn - m + 1$ *quadratum esse non poterit, nisi sit* m *numerus formae* $4v + 1$.

Da nun in dieser *Demonstration* ein Fehler gewiß steckt, so kan auch die vorhergehende, als welche dieser in allem gleich ist, nicht *admittir*t werden. Vielleicht können aber Ewr. Wohlgeb. von Dero ersten *Lemmate* eine andere *Demonstration* geben, welche dieser *Difficultä*t nicht unterworfen ist, deren Richtigkeit am füglichsten auf gleiche Art erkannt werden kan, wann nehmlich Ewr. Wohlgb. untersuchen werden, ob eben dasselbe *Ratiocinium* nicht auf die *Formul* $4mn-m+1$ sich *applici*ren lasse.

Was die andere *Demonstration* betrifft, daß $4pmn - m - n$ kein *Quadratum* seyn könne, so kommt gleicher gestalt die gantze Sach nur darauf an, daß man richtig beweise, dieselbe *Formul* könne kein[e] *quadrat* Zahl geben *nisi sit* $m = 4nnq - n$. Wann dieser Satz seine Richtigkeit hätte, so würde die folgende *Demonstration* nicht einmal nöthig seyn, weilen *ob eandem rationem* auch seyn müsste $n = 4mmr - m$, und folglich zugleich $m < n$ und $n < m$, welches unmöglich ist. Man könnte aber auf eben diese Art auch beweisen, daß $pmn - m - n$ nimmer ein *Quadratum* seyn könne, dann kraft eben des vorigen *Ratiocinii* müsste $pmn - m - n$ kein *Quadrat* seyn können *nisi sit* $m = nnq - n$; nun aber würde dieser Schluß der Wahrheit doch nicht gemäß seyn.

Ungeacht ich aber auf diese Weise in dem *Ratiocinio* einen Fehler verspühre, so muß ich doch gestehen daß ich denselben nicht deutlich darthun und vor Augen legen kan; welches doch sehr nöthig wäre, um in andern Fällen denselben desto sicherer vermeiden zu können.

Meine Regel um eine solche *Expression* $\dfrac{ax^k + bx^{k-1} + cx^{k-2} + etc.}{(px-q)^m\,(rx-s)^n}$ in ihre *partes simplices* zu *resolvi*ren, wann nur $k < m+n$, verhält sich folgender gestalt.[2] *Sint partes quaesitae*

$$+\frac{A}{(px-q)^m}+\frac{B}{(px-q)^{m-1}}+\frac{C}{(px-q)^{m-2}}+\frac{D}{(px-q)^{m-3}}+\ldots+\frac{M}{px-q}$$
$$+\frac{\mathfrak{A}}{(rx-s)^n}+\frac{\mathfrak{B}}{(rx-s)^{n-1}}+\frac{\mathfrak{C}}{(rx-s)^{n-2}}+\frac{\mathfrak{D}}{(rx-s)^{n-3}}+\ldots+\frac{\mathfrak{M}}{rx-s}.$$

Ponatur brevitatis gratia $\dfrac{ax^k + bx^{k-1} + cx^{k-2} + etc.}{(rx-s)^n} = Q$, *et quaerantur per differentiationem continuam posito dx constante valores* $\dfrac{dQ}{dx}, \dfrac{ddQ}{dx^2}, \dfrac{d^3Q}{dx^3}, \dfrac{d^4Q}{dx^4}$, *etc. eritque*

$$
\begin{aligned}
&A = Q && \textit{posito } x = \frac{q}{p}\\
&B = \frac{1}{1p}\cdot\frac{dQ}{dx} && \textit{posito } x = \frac{q}{p}\\
&C = \frac{1}{1\cdot 2pp}\cdot\frac{ddQ}{dx^2} && \textit{posito } x = \frac{q}{p}\\
&D = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3p^3}\cdot\frac{d^3Q}{dx^3} && \textit{posito } x = \frac{q}{p}\\
&\textit{etc.}
\end{aligned}
$$

Simili modo si ponatur $\dfrac{ax^k + bx^{k-1} + cx^{k-2} + etc.}{(px-q)^m} = S$ *erit*

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{A} = S && \textit{posito } x = \frac{s}{r}\\
&\mathfrak{B} = \frac{1}{r}\cdot\frac{dS}{dx} && \textit{posito } x = \frac{s}{r}\\
&\mathfrak{C} = \frac{1}{1\cdot 2r^2}\cdot\frac{ddS}{dx^2} && \textit{posito } x = \frac{s}{r}\\
&\mathfrak{D} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3r^3}\cdot\frac{d^3S}{dx^3} && \textit{posito } x = \frac{s}{r}\\
&\textit{etc.}
\end{aligned}
$$

Wann allso diese *Formul* $\dfrac{axx+bx+c}{(4x-3)^2\,(4x-1)^2}$ *proponi*rt wird um die *partes*

$$\frac{A}{(4x-3)^2} + \frac{B}{4x-3} + \frac{\mathfrak{A}}{(4x-1)^2} + \frac{\mathfrak{B}}{4x-1}$$

zu finden, so wird erstlich $Q = \dfrac{axx+bx+c}{(4x-1)^2}$; $\dfrac{dQ}{dx} = \dfrac{2ax+b}{(4x-1)^2} - \dfrac{8\,(axx+bx+c)}{(4x-1)^3}$, und *posito* $x = \dfrac{3}{4}$ *ob* $p = 4$ *et* $q = 3$ *erit*

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{\frac{9}{16}a + \frac{3}{4}b + c}{4} = \frac{9}{64}a + \frac{3}{16}b + \frac{1}{4}c\\
B &= \frac{1}{4}\left(\frac{\frac{3}{2}a+b}{4} \quad \frac{-\frac{9}{2}a - 6b - 8c}{8}\right) = -\frac{3}{64}a - \frac{1}{8}b - \frac{1}{4}c.
\end{aligned}
$$

Hernach ist $S = \dfrac{axx+bx+c}{(4x-3)^2}$, $\dfrac{dS}{dx} = \dfrac{2ax+b}{(4x-3)^2} - \dfrac{8\,(axx+bx+c)}{(4x-3)^3}$ und *posito* $x = \dfrac{1}{4}$ *ob* $r = 4$ *et* $s = 1$ *erit*

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{A} &= \frac{\frac{1}{16}a + \frac{1}{4}b + c}{4} = \frac{1}{64}a + \frac{1}{16}b + \frac{1}{4}c\\
\mathfrak{B} &= \frac{1}{4}\left(\frac{\frac{1}{2}a+b}{4} + \frac{\frac{1}{2}a + 2b + 8c}{8}\right) = \frac{3}{64}a + \frac{1}{8}b + \frac{1}{4}c.
\end{aligned}
$$

Folglich wird die *proponir*te *Expression* $\dfrac{axx+bx+c}{(4x-3)^2\,(4x-1)^2}$ in diese *partes resolvir*t:

$$\begin{aligned}
&+a\left(\frac{9}{64\,(4x-3)^2}-\frac{3}{64\,(4x-3)}+\frac{1}{64\,(4x-1)^2}+\frac{3}{64\,(4x-1)}\right)\\
&+b\left(\frac{3}{16\,(4x-3)^2}-\frac{1}{8\,(4x-3)}+\frac{1}{16\,(4x-1)^2}+\frac{1}{8\,(4x-1)}\right)\\
&+c\left(\frac{1}{4\,(4x-3)^2}-\frac{1}{4\,(4x-3)}+\frac{1}{4\,(4x-1)^2}+\frac{1}{4\,(4x-1)}\right).
\end{aligned}$$

Wann allso die gegebene *expressio* ein *terminus generalis seriei infinitae* ist, *ob*[3]

$$\int\frac{1}{4x-3}-\int\frac{1}{4x-1}=\frac{\pi}{4};$$

et

$$\int\frac{1}{(4x-3)^2}+\int\frac{1}{(4x-1)^2}=\frac{\pi\pi}{8}$$

et

$$u=\int\frac{1}{(4x-3)^2}$$

wie Ewr. Wohlgeb. annehmen, so wird derselben *seriei summa* seyn

$$\begin{aligned}
&= a\left(\frac{\pi\pi}{512}+\frac{1}{8}u-\frac{3\pi}{256}\right)+b\left(\frac{\pi\pi}{128}+\frac{1}{8}u-\frac{\pi}{32}\right)+c\left(\frac{\pi\pi}{32}-\frac{\pi}{16}\right)\\
&= \frac{\pi\pi}{512}\,(a+4b+16c)+\frac{u}{8}\,(a+b)-\frac{\pi}{256}\,(3a+8b+16c)\,;
\end{aligned}$$

wann allso $a=-b$ so kan die *summa seriei per solam quadraturam Circuli* angegeben werden.

In der überschriebenen *summa seriei*[4] $1+\dfrac{1}{2^{16}}+\dfrac{1}{3^{16}}+$ *etc.* ist die letste *Figur* ein 7 und nicht 1.

Daß die drey *Formul*n A, B, C, *posito* $v=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}$ so beschaffen sind, daß wann n ein *numerus valde magnus* ist *proxime* $AC=B^2$ seyn wird, deucht mir daraus klar zu seyn, weilen in diesem Fall dieselben *quantitat*en so gar fast einander gleich werden.

Wann die *summa seriei* $\dfrac{1}{(3x-2)^2}$ für bekant angenommen wird so ist auch die *summa seriei* $\dfrac{1}{(3x-1)^2}$ bekannt, und da in beyden die *termini alterni* besonders *summir*t werden können, so findt man daraus die *summam seriei* $\dfrac{1}{(6x\pm n)^2}$ *denotante n numerum quemcunque integrum*; hieraus ist ferner klar, daß um die *seriem* $\dfrac{1}{(12x \pm n)^2}$ zu *summi*ren drey *casus diversi ipsius* n für bekannt angenommen werden müssen.

Ewr. Wohlgeb. *Postscriptum* vom 12ten *Febr.* habe ich wohl erhalten, und weilen ich auf die fürnehmsten *Punct*en schon geantwortet hatte,[5] und nicht wusste daß Denselben die Briefe *franco* zugestellet werden, so habe meine fernere Antwort biß jetzt verspahret. Ewr. Wohlgb. darinn enthaltene *Reflexion* über zwey *series*, deren jede eine *summam infinitam* hat, doch aber unter sich eine *Rationem finitam* haben,[6] ist sehr merkwürdig. Dergleichen *series* können nach Belieben auf folgende Art gefunden werden:

Sit seriei $a+b+c+d+etc. = A$ *summa infinita, hujus autem seriei* $\alpha+\beta+\gamma+\delta+etc. = B$ *summa finita, erit*

$$\begin{array}{llllll} AB = & a\alpha & +b\,(\alpha+\beta) & +c\,(\alpha+\beta+\gamma) & +d\,(\alpha+\beta+\gamma+\delta) & +\mathit{etc.} \\ & & +\beta a & +\gamma\,(a+b) & +\delta\,(a+b+c) & +\mathit{etc.}; \end{array}$$

hier ist aber die *summa seriei inferioris finita*, und folglich *evanesci*rt dieselbe *prae superiori*, dahero ist $\dfrac{AB}{A} = B$ oder

$$\begin{aligned} & \frac{a\alpha + b\,(\alpha+\beta) + c\,(\alpha+\beta+\gamma) + d\,(\alpha+\beta+\gamma+\delta) + \mathit{etc.}}{a+b+c+d+\mathit{etc.}} \\ = \;& \alpha+\beta+\gamma+\delta+\mathit{etc.} \end{aligned}$$

Ferner ist auch $b+c+d+e+etc. = A$, und allso $AB = b\alpha + c\,(\alpha+\beta) + d\,(\alpha+\beta+\gamma) + etc.$ welche zur obigen gethan gibt

$$2AB = (a+b)\,\alpha + (b+c)\,(\alpha+\beta) + (c+d)\,(\alpha+\beta+\gamma) + \mathit{etc.} = C$$

und allso $\dfrac{C}{2A} = B$. Wann

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \mathit{etc.}$$

und

$$B = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \mathit{etc.},$$

so kommen Ewr. Wohlgb. *series* heraus.

Meine *Dissertation de inventione termini summatorii ex dato termino generali seriei*[7] ist in dem 8ten *Tomo Comment*[*ariorum*] gedruckt. Dieselbe besteht kürzlich darinn, daß wann man setzt $\overset{1}{A} + \overset{2}{B} + \overset{3}{C} + \overset{4}{D} + \ldots + \overset{x}{X} = S$, oder wann S den *Terminum summatorium* einer *Seriei* andeutet, deren *Terminus generalis* ist $= X$ das ist eine *Quantitas ex indice x utcunque composita*, so wird seyn

$$\begin{aligned} S \;=\; & \int X\,dx + \frac{X}{1\cdot 2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{dX}{1\cdot 2\cdot 3\,dx} - \frac{1}{6}\cdot\frac{d^3X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\,dx^3} \\ + \; & \frac{1}{6}\cdot\frac{d^5X}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 7\,dx^5} - \frac{3}{10}\cdot\frac{d^7X}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 9\,dx^7} + \frac{5}{6}\cdot\frac{d^9X}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 11\,dx^9} \\ - \; & \frac{691}{210}\cdot\frac{d^{11}X}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 13\,dx^{11}} + \mathit{etc.} \end{aligned}$$

da *ob integrationem* $\int X\,dx$ eine solche *Constans* muß *addi*rt oder *subtrahi*rt werden, daß die ganze *Expressio* wird $= 0$ wann $x = 0$.

Wann allso zum *Exempel* der *terminus summatorius* von dieser *serie*

$$1 + 2^8 + 3^8 + 4^8 + 5^8 + etc. \;\ldots\; x^8$$

gesucht werden soll, so ist $X = x^8$; $\int X\,dx = \frac{1}{9}x^9$; $\dfrac{dX}{dx} = 8x^7$; $\dfrac{ddX}{dx^2} = 7\cdot 8x^6$; $\dfrac{d^3X}{dx^3} = 6\cdot 7\cdot 8x^5$; $\dfrac{d^4X}{dx^4} = 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8x^4$; $\dfrac{d^5X}{dx^5} = 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8x^3$; $\dfrac{d^7X}{dx^7} = 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8x$; $\dfrac{d^9X}{dx^9} = 0$, und die folgenden *Differentialia* alle *evanesci*ren; dahero wird

$$S = \frac{1}{9}x^9 + \frac{1}{2}x^8 + \frac{2}{3}x^7 - \frac{7}{15}x^5 + \frac{2}{9}x^3 - \frac{1}{30}x.$$

So oft allso X eine *functio integra* von x ist, weilen bey einer jeglichen *Differentiation* die *Dimensiones* abnehmen, so muß immer ein *terminus summatorius in forma finita* gefunden werden. Wann aber der *Terminus generalis* X eine *fraction* ist, so gehn auch die *Differentiationes in infinitum* fort, und folglich wird der *terminus summatorius per seriem infinitam exprimi*rt. In diesem Fall kan auch die *Constans adjicienda* nicht anderst gefunden werden, als daß man *datum terminorum numerum actu addi*re und die *constantem* so annehme daß in diesem Fall die bekannte *Summ* herauskomme. Als es sey

$$S = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \ldots + \frac{1}{x^3},$$

so ist $X = \dfrac{1}{x^3}$ und $\int X\,dx = \text{Const.} - \dfrac{1}{2xx}$; ferner $\dfrac{dX}{dx} = -\dfrac{3}{x^4}$; $\dfrac{ddX}{dx^2} = \dfrac{3\cdot 4}{x^5}$; $\dfrac{d^3X}{dx^3} = -\dfrac{3\cdot 4\cdot 5}{x^6}$; $\dfrac{d^5X}{dx^5} = -\dfrac{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{x^8}$; *etc.*; dahero wird

$$S = Const. - \frac{1}{2xx} + \frac{1}{2x^3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x^4} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2x^6} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2x^8} + \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{2x^{10}} - etc.;$$

um die *Constantem* zu finden so *addi*re man *actu* 10 *terminos*; gesetzt die gefundene *Summ* sey N, so muß *posito* $x = 10$, $S = N$ werden; allso wird

$$Const. = N + \frac{1}{2\cdot 10^2} - \frac{1}{2\cdot 10^3} + \frac{1}{2\cdot 2\cdot 10^4} - \frac{1}{2\cdot 6\cdot 10^6} + \frac{1}{2\cdot 6\cdot 10^8} - etc.,$$

woraus diese *Constans verae proxima* leicht gefunden wird.

Hernach kan man leicht die *summam seriei ad datum quemvis terminum* finden, und wann man die *summam in infinitum* verlangt, so setze man $x = \infty$, und da wird $S = Const.$; allso die *Constans inventa* ist die *summa seriei in infinitum continuatae.*

Wann man diese *Seriem*

$$\frac{1}{aa} + \frac{1}{aa+1} + \frac{1}{aa+4} + \frac{1}{aa+9} + \ldots + \frac{1}{aa+aa}$$

actu summirt, so ist die *Summ* deswegen merkwürdig, weil durch dieselbe die *Quadratura circuli* so nahe gefunden werden kan:[8] es sey

$$s = \frac{1}{aa} + \frac{1}{aa+1} + \frac{1}{aa+4} + \frac{1}{aa+9} + \ldots + \frac{1}{aa+aa}$$

so wird *proxime* seyn $\pi = 4as - \dfrac{3}{a} + \dfrac{1}{6aa}$; als wann man setzt $a = 1$, *fit* $s = 1,5$; *et* $\pi = 3,166\,666\ldots$ zu groß; *si* $a = 2$ *fit* $s = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} = 0,575$; $4as = 4,6$ und allso $\pi = 3,141\,666\,66\ldots$ zu groß; *sit* $a = 3$ *fit*

$$s = \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{13} + \frac{1}{18} = 0,343\,589\,743\,589\,743\,589\,7,$$

$$\begin{array}{llcl} 4as = & 12s & = & 4,123\,076\,923\,076\,923\,0 \\ \textit{subtr.} & \dfrac{3}{a} & = & 1, \\ \textit{add.} & \dfrac{1}{6aa} & = & \underline{0,018\,518\,518\,518\,518\,5} \\ \textit{fiet} & \pi & = & 3,141\,595\,441\,595\,441\,5; \end{array}$$

diese *Expression* gibt allso die *Peripherie* immer zu groß. Ich habe demnach den *Excessum* gesucht, und gefunden daß sey

$$\begin{aligned} \pi \quad = \quad & 4as - \frac{3}{a} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 \cdot 3\,aa} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2^2 \cdot 3 \cdot 7\,a^6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2^4 \cdot 5 \cdot 11\,a^{10}} \\ & - \frac{35}{2} \cdot \frac{1}{2^6 \cdot 7 \cdot 15\,a^{14}} + \frac{43\,867}{42} \cdot \frac{1}{2^8 \cdot 9 \cdot 19\,a^{18}} - \frac{854\,513}{6} \cdot \frac{1}{2^{10} \cdot 11 \cdot 23\,a^{22}} \\ & + \frac{769\,779\,27}{2} \cdot \frac{1}{2^{12} \cdot 13 \cdot 27\,a^{26}} - \textit{etc.} \\ & - \frac{4\pi}{\mathrm{e}^{2\pi a} - 1}, \end{aligned}$$

allwo dieser letste *terminus* ungemein klein wird, wann a mittelmässig groß angenommen wird: dann es ist schon $\mathrm{e}^{6\pi} = 153\,552\,990$, weilen $\mathrm{e}^{\pi} = 23,140\,69$. Ewr. Wohlgeb. waren einmal auf *operation*en bedacht wie man Zahlen finden könnte, so ohne einige *legem* fortgiengen, um zu versuchen ob man nicht etwa auf eine solche Art die Zahl $\pi = 3,141\,59$ *etc.* herausbringen könnte.[9] Solche *irregulier*en Zahlen können nun gefunden werden durch die ordentliche *Division* wann man bey jeder *operation* den *Divisorem* um 1 vermehrt: als aus diesem *Exempel* zu sehen

		1	2	2	4	5	2	6	4	4	10	1	10
Dividend	1,	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Divisores	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	12,	13, …
Quotus	0,	4	6	4	7	8	2	7	4	3	9	0	7

	9	6	15	6	9	18	9						
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
…	14,	15,	16,	17,	18,	19,	20						
	6	3	9	3	4	9	4	*etc.*;					

wann ich nehmlich so viel mal nehmen könnte daß nichts übrig blieb, so nehme ich einmal weniger, damit diese *Division in infinitum* fortgehe; wann man nun auf eine solche Art die *Quadraturam Circuli* finden könnte, so hielte ich dieselbe für so gut als würklich gefunden. Auf die vorher beschriebene Art durch die *series* $\pi = 4as - \frac{3}{a} + \frac{1}{6aa}$ *etc.* wann für a eine etwas grosse Zahl als 10 genommen wird, kan der *valor ipsius* π auf viel Figuren ziemlich leicht gefunden werden, allein da die *coefficientes* sehr *irregulär* fortgehen so halte ich keine *methode* bequemer um den *valorem ipsius* π zu finden als diejenige, welche schon längsten einmal gefunden. Ich weiß nicht ob Ewr. Wohlgebohrnen Sich derselben noch erinnern: sie besteht aus 2 *seriebus* deren jede stark *convergi*ret und auch leicht *per approximationes* auf sehr viel Figuren *summir*t werden kan. Es sey nehmlich[10]

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 2^2} - \frac{1}{5\cdot 2^3} - \frac{1}{7\cdot 2^4} + \frac{1}{9\cdot 2^5} + \frac{1}{11\cdot 2^6} - \frac{1}{13\cdot 2^7} - etc. \\ B &= \frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{5\cdot 2^5} - \frac{1}{7\cdot 2^7} + \frac{1}{9\cdot 2^9} - \frac{1}{11\cdot 2^{11}} + \frac{1}{13\cdot 2^{13}} - etc. \end{aligned}$$

so wird seyn $\pi = 4A + 2B$ oder es ist

$$\begin{aligned} \pi = 3 \quad + &\quad \frac{1}{3} - \frac{1}{5\cdot 2} - \frac{1}{6\cdot 2} - \frac{1}{7\cdot 2^2} + \frac{1}{9\cdot 2^3} + \frac{1}{10\cdot 2^3} + \frac{1}{11\cdot 2^4} \\ - &\quad \frac{1}{13\cdot 2^5} - \frac{1}{14\cdot 2^5} - \frac{1}{15\cdot 2^6} + etc. \end{aligned}$$

Da in diesen *seriebus* nur die *potestates binarii* vorkommen, so kan ich auch solche geben, worinn nur die *potestates* von 2 und 3 enthalten sind. Also wann man setzt

$$C = \frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{5\cdot 2^5} - \frac{1}{7\cdot 2^7} + \frac{1}{9\cdot 2^9} - \frac{1}{11\cdot 2^{11}} + etc.$$

und

$$D = \frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} - \frac{1}{7\cdot 3^7} + \frac{1}{9\cdot 3^9} - \frac{1}{11\cdot 3^{11}} + \ etc.,$$

so wird seyn $\pi = 4C + 4D$. Diese *Series* scheinen mir nun weit bequemer zu seyn, als diejenige, welcher sich *Sharp*, *Machin*, und *Lagny* bedienet, als welche ihre grosse Zahlen durch Hülfe dieser *seriei*

$$\pi = \frac{2\sqrt{3}}{1} - \frac{2\sqrt{3}}{3\cdot 3} + \frac{2\sqrt{3}}{5\cdot 3^2} - \frac{2\sqrt{3}}{7\cdot 3^3} + \frac{2\sqrt{3}}{9\cdot 3^4} - etc.$$

[gefunden,] welche nicht so stark *convergir*t als eine von den obigen, und noch dazu dieser Schwierigkeit unterworfen ist, daß man erstlich $\sqrt{3}$ auf so viel Figuren als man haben will suchen, und dann diese beschwehrliche Zahl beständig *dividir*en muß; deswegen kan sich in keinem *termino* eine *revolutio periodica figurarum* finden, wodurch man die folgenden Figuren aus den vorhergehenden finden könnte: dahingegen bey meinen *Seriebus* dieser Vortheil in einem jeden *Termino* statt findet, so daß ich wohl 10 *terminos per fractiones decimales* von meinen *seriebus evolvir*en wolte, ehe *Lagny* einen einzigen von seinen *evolvir*t hat.

Den beygefügten Brief nach Leipzig habe gleich den selben Tag, als ich Ewr. Wohlgeb. Schreiben erhalten, fortgeschickt.[11] So bald von der neuen *Basel Edition* des *Dictionnaire de Trevoux*[12] *Exemplaria* entweder hier oder in Leipzig ankommen werden, so werde nicht ermangeln Ewr. Wohlgeb. *Ordres* ein völliges Genügen zu leisten.

Da nunmehr die über die *Academi*e Hochverordnete *Commission* ihre Endschafft erreichet,[13] so wird die darauf folgende *Resolution* lehren, wie weit ich auf die mir geschehenen *Promess*en Staat machen könne.

Nachdem ich von *M.^{r} Clairaut* vernommen, daß *M.^{r} Demairan* meine im vorigen Jahr an Ihn *addressir*te *Piece* bekommen, und mir darauf noch ein *Recepisse* ausgebeten, so habe ich seit der Zeit gar keine Antwort mehr erhalten;[14] dahero ich noch nicht weiß, ob es rathsam seyn wird dieses Jahr etwas dahin zu schicken.

Der H. *Hedling*er, welcher künftige Woche nach der Schweitz zurükreisen wird,[15] der H. Geh[eime] Rath *Vockerodt*, welcher wegen Seiner *Charge* mit Niemand *Correspondir*en darf,[16] der H. *Prof. Strube*,[17] und meine gantze *Famille* lassen sich nebst mir Ewr. Wohlgeb. gehorsamst empfehlen, und ich verbleibe mit der vollkommensten Hochachtung

Eurer Wohlgebohrnen
gehorsamster Diener
Leonh. Euler

Berlin den 9$^{\text{ten}}$ *April*
1743.

R 780 Reply to n° 63 and n° 65
Berlin, April 9th, 1743
Original, 5 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 53–57v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 213–224; *Euler-Goldbach* (1965), p. 154–161

67
Goldbach to Euler
Petersburg, (April 23rd) May 4th, 1743

HochEdelgebohrner Herr
Insonders Hochgeehrter Herr *Professor*,

Ich sehe in der That, daß das letztlich angeführte[1] *Lemma* 1 nicht alsofort aus dem was ich vorher von der *aequatione* $4mn - m - 1 = a^2$ geschrieben hatte, erhellet, dahero bitte ich nachfolgendes *raisonnement* in *consideration* zu ziehen:

Si in aequatione E ... $4mn - m - 1 = a^2$ *ponatur* $m = 4v - 1$, $v = 4n^2M - n$ *et* $a = 16n^2A^2$, *transmutabitur aequatio E in F* ... $4nM - M - 1 = A^2$, *quae cum non differat ab aequatione E nisi sola specie litterarum* M, A *et* m, a *et pro unaquaque harum litterarum poni possint omnes numeri integri affirmativi,* *necesse est aequationem E et F unam eandemque esse. Si vero in E solus valor* (*ex hypothesi impossibilis*) $m = 4v - 1$ *comprehendit aequationem F in omni sua amplitudine, quae aequatio F revera aequivalet aequationi E; sequitur, per casum* $m = 4v - 1$, *si impossibilis est in E, non magis excludi omnes casus possibiles aequationis F quam omnes casus possibiles ipsius aequationis E, cum nullus casus possibilis reperiatur in E quin sit assignabilis in F.*

Dieses wird sich hoffentlich auch in dem von Eurer HochEdelgebohrnen vorgeschlagenen *parallelismo* mit der *formul* $4nx - x + 1$, deren *casus quadrabilitatis* ich nicht untersuchet habe, *souteni*ren, wo nicht, so wird es mir lieb seyn die Sache ins künfftige besser einzusehen. Ich dancke indessen dienstl[ich] für die in Eurer Hochedelg. Schreiben enthaltenen schönen *theoremata*, wovon ich vieleicht künfftig etwas zu melden gelegenheit haben werde.[2] Die hiesigen *nova litteraria* werden E. H. von den HHn *Professoribus* mit welchen Sie in *Correspondance* stehen besser als von mir erhalten können. Wann E. H. sichere Nachricht haben daß *M^r de Mairan* Dero *Memoire* empfangen,[3] und Sie demselben wissen lassen, daß sein *Recepisse* noch nicht ankommen, so sehe ich nicht daß solches ausbleiben des *Recepisse* Eurer Hochedelg. zu einigem *préjudice* gereichen könne. Dero sämmtl[icher] *familie*, wie auch dem Hn *Chevalier Hedlinger* und Hn *Prof. Strube* bitte mich dienstl[ich] zu empfehlen, und verbleibe mit vieler hochachtung

Eurer hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.^{t} Petersburg den 4. *Maii* 1743.

vert[e]

P. S. Haben Ew. Hochedelgeb. eine *methode* den *valorem* in dem *casu* zu *determini*ren da $f = 1$ und π in der gewöhnlichen Bedeutung genommen wird *in hac formula*?

$$\frac{\pi^2}{6f\,(f-1)} - \frac{(2f-1)}{f^2\,(f-1)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{f}\right) + \frac{1}{f\,(f-1)^2};$$

ich halte dafür, daß der *valor quaesitus* alsdann seyn werde

$$1 - \frac{\pi^2}{6} + \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \&c.\right).^{[4]}$$

Wann ich mich recht erinnere so haben Sie mir ehemahls eine formul *communici*ret welche die *summas serierum quarum formula est* $\dfrac{1}{x^2 + fx}$ *generaliter* giebt *posito pro f numero quocunque etiam fracto*; die formul selbst aber ist mir vorjetzo nicht bekannt.[5]

R 781 Reply to n° 66
Petersburg, (April 23rd) May 4th, 1743
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 67–68v
Partial copy, 3 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 5r–6r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 225-226; *Euler-Goldbach* (1965), p. 162

68
Euler to Goldbach
Berlin, May 21st, 1743

Wohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Aus der Verwandlung dieser *Formul* $4mn - m - 1 = aa$ in diese ähnliche $4Mn - M - 1 = AA$, *facta substitutione* $m = 4v - 1$, $v = 4nnM - n$ *et* $aa = 16n^2A^2$, kan ich nicht sehen daß mehr folget, als, *si formula* $4mn - m - 1$ *quadrata nequeat esse casu* $m = 4v - 1$, *omnino quadratum esse non poterit*; oder wann man *demonstrir*en könnte daß $4mn-m-1$ *nullo casu* $m = 4v-1$ ein *quadrat* wäre, so wäre zugleich richtig erwiesen, daß eben dieselbe *Formul nullo prorsus casu* ein *Quadrat* seyn könnte. Hingegen kan diese *Conclusion* nicht zugegeben werden: *omnes casus, quibus* $4mn - m - 1$ *sit quadratum, habere* $m = 4v - 1$; aber diese *Consequenz* hat wiedrum ihre Richtigkeit, *si cognitus esset casus, quo* $4mn - m - 1 = \square$, *neque tamen fuerit* $\underline{m}$ *numerus formae* $4v - 1$*; ex eo certe alius casus derivari posset quo* $\underline{m}$ *esset numerus formae* $4v - 1$. Um aber die Sach deutlicher zu machen so will ich diese ähnliche *Formul* $9mn - m - 1 = aa$ betrachten welche wann man setzt $m = 9v - 1$, $v = 9nnM - n$ *et* $a = 9nA$ in diese $9Mn-M-1 = AA$ verwandelt wird; wann man nun schliessen wollte diese *Formul* $9mn - m - 1$ könne kein *quadratum* seyn, *nisi m sit numerus formae* $9v - 1$, so würde die Unrichtigkeit dieses Schlusses so gleich erhellen, dann $9mn-m-1$ wird ein *Quadratum* in folgenden *casibus*:

$$\begin{array}{llllll}
n=2; & m=1 & n=3; & m=1 & n=6; & m=10 \\
n=2; & m=10 & n=3; & m=17 & n=6; & m=17 \\
n=2; & m=26 & n=3; & m=37 & n=6; & m=109 \\
n=2; & m=53 & n=3; & m=85 & n=6; & m=130 \\
 & \textit{etc.} & & \textit{etc.} & & \textit{etc.},
\end{array}$$

woraus erhellet daß $9mn - m - 1$ *infinitis modis* ein *Quadratum* seyn könne, ohne daß m ein *numerus hujus formae* $9v-1$ ist, ungeacht eben dasjenige *Raisonnement* hier angebracht werden kan, welches bey der *Formul* $4mn-m-1$ gemacht worden.

Dieses Jahr hat der H. *Prof. Daniel Bernoulli* das gantze *Praemium* erhalten, und meiner *Piece* ist das *Accessit* jedoch ohne meinen Nahmen zuerkannt worden;[1] der H. *Hedling*er ist vergangenen Mittwochen von hier nach der Schweitz zurükgereiset.

Nunmehr sind die *Opera Joh*[*annis*] *Bernoullii omnia*[2] in 4 *Quart* Bänden fertig worden; der Verleger *M.ʳ Bousquet* hat dieselben selbst hieher gebracht und dem König ein *Magnifiq* eingebundenes *Exemplar praesentir*t; ich habe auch eins von dem H. *Bernoulli* zum *Praesent* erhalten; die 3 ersten *Tomi* enthalten alle seine *Piec*en, welche bißher hinundwieder gedruckt worden, der 4[te] aber die *Anecdota*; das *Exemplar* wird nicht anderst als für 20 *fl.* in *Francfort* verkaufft. *M.ʳ Bousquet* hat ein *Contract* mit mir geschlossen kraft welches er alle meine Schrifften, ausgenommen diejenigen welche ich nach *Petersburg* zu schicken schuldig bin, zu drucken [übernimmt], und wird den Anfang mit dem *Tractat de Isoperimetris* machen. Er hätte gern mit der *Scientia Navali* angefangen, ich muß aber erst vernehmen, ob die *Academi*e noch gesinnet seyn wird, dasselbe zu drucken.[3]

Ewr. Wohlgeb. *Problema de inveniendo valore hujus expressionis*

$$P=\frac{\pi^2}{6n\,(n-1)}+\frac{1}{n\,(n-1)^2}-\frac{(2n-1)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ \ldots\ +\frac{1}{n}\right)}{nn\,(n-1)^2}$$

casu quo $n=1$, ist gewiß mit eines von den Schwehrsten in dieser Art; ich habe eben denjenigen *Valorem* herausgebracht, welchen Ewr. Wohlgeb. mir entdecket.[4] Um denselben zu finden habe ich gesetzet $n=1+\alpha$, *denotante* α *numerum evanescentem*: *sit enim hoc casu* $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=Q$, *atque formula proposita abibit*[5] *in hanc*

$$\begin{aligned}
P &= \frac{\pi\pi}{6\alpha\,(1+\alpha)}+\frac{1}{\alpha^2\,(1+\alpha)}-\frac{(1+2\alpha)\,Q}{\alpha^2\,(1+\alpha)^2}\\
&= \frac{\pi\pi}{6}\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)+\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\alpha}+1-Q\,(1+2\alpha)\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{2}{\alpha}+3\right)\\
&= \frac{\pi\pi}{6\alpha}-\frac{\pi\pi}{6}+\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\alpha}+1-Q\left(\frac{1}{\alpha^2}-1\right);
\end{aligned}$$

die gantze Sach kommt allso auf den *Valorem ipsius* Q an, *posito* $n=1+\alpha$. Diesen finde ich allso: *Generaliter* ist $Q=\int\frac{1-x^n}{1-x}dx$, *si post integrationem ponatur* $x=1$; dann es ist $\frac{1-x^n}{1-x}=1+x+x^2+\ \ldots\ +x^{n-1}$, folglich $\int\frac{1-x^n}{1-x}dx=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ \ldots\ +\frac{x^n}{n}$, dahero *facto* $x=1$, *erit* $Q=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ \ldots\ +\frac{1}{n}$, wie angenommen worden. Nun setze ich $n=1+\alpha$, *eritque* $Q=\int\frac{1-x^{1+\alpha}}{1-x}dx=\int\frac{1-x\cdot x^\alpha}{1-x}dx$. *At cum sit generaliter*

$$x^y=1+\frac{y\,\ell\,x}{1}+\frac{y^2\ (\ell\,x)^2}{1\cdot 2}+\frac{y^3\ (\ell\,x)^3}{1\cdot 2\cdot 3}+etc.$$

erit

$$\begin{aligned} Q &= \int \frac{dx}{1-x}\left(1 - x - \frac{\alpha x\,\ell\,x}{1} - \frac{\alpha^2 x\;(\ell\,x)^2}{1\cdot 2} - \frac{\alpha^3 x\;(\ell\,x)^3}{1\cdot 2\cdot 3} - etc.\right) \\ &= x - \alpha \int \frac{x\,dx}{1-x}\ell\,x - \frac{\alpha^2}{2}\int \frac{x\,dx}{1-x}\,(\ell\,x)^2 - \frac{\alpha^3}{6}\int \frac{x\,dx}{1-x}\;(\ell\,x)^3 - etc. \end{aligned}$$

posito post singulas integrationes $x = 1$. Nun *integri*re ich eine jede *formul à part.*

1. ist $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{1-x}\ell\,x = \int dx\,\left(x + x^2 + x^3 + etc.\right)\,\ell\,x$; *at generaliter est* $\displaystyle\int x^m dx\,\ell\,x = -\frac{1}{(m+1)^2}$ *posito post integrationem* $x = 1$. *Ergo erit*

$$\int \frac{x\,dx}{1-x}\ell\,x = -\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} - \;etc. = -A + 1 = 1 - \frac{\pi\pi}{6}$$

posito $A = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{4^2} + etc. = \dfrac{\pi\pi}{6}$.

Secundo est $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{1-x}\,(\ell\,x)^2 = \int dx\,\left(x + x^2 + x^3 + etc.\right)\,(\ell\,x)^2$; *at est generaliter* $\displaystyle\int x^m dx\;(\ell\,x)^2 = \frac{1\cdot 2}{(m+1)^3}$ *posito* $x = 1$, *unde fit*

$$\int \frac{x\,dx}{1-x}\,(\ell\,x)^2 = 2\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \;etc.\right) = 2\,(B-1)$$

posito $B = 1 + \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{3^3} + \dfrac{1}{4^3} + etc.$

Tertio est $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{1-x}\;(\ell\,x)^3 = \int dx\,\left(x + x^2 + x^3 + etc.\right)\,(\ell\,x)^3$; *at est generaliter* $\displaystyle\int x^m dx\;(\ell\,x)^3 = -\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(m+1)^4}$ *posito* $x = 1$, *unde fit*

$$\int \frac{x\,dx}{1-x}\;(\ell\,x)^3 = -6\left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \;etc.\right) = -6\,(C-1)$$

posito $C = 1 + \dfrac{1}{2^4} + \dfrac{1}{3^4} + \dfrac{1}{4^4} + etc.$

Simili modo si ponatur $D = 1 + \dfrac{1}{2^5} + \dfrac{1}{3^5} + \dfrac{1}{4^5} + etc.$, $E = 1 + \dfrac{1}{2^6} + \dfrac{1}{3^6} + \dfrac{1}{4^6} + etc.$, *reperietur tandem*

$$Q = 1 + \alpha\,(A-1) - \alpha^2\,(B-1) + \alpha^3\,(C-1) - etc.,$$

hincque ob $A = \dfrac{\pi\pi}{6}$ *erit*[6]

$$\begin{aligned} P &= \frac{\pi^2}{6\alpha} - \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} + 1 - \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\pi\pi}{6} - 1\right) + B - 1 + 1 \\ &= 1 - \frac{\pi\pi}{6} + B \end{aligned}$$

oder wie Ewr. Wohlgeb. gefunden

$$P = 1 - \frac{\pi\pi}{6} + \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \textit{etc.}\right).$$

Für die *summam seriei* $\dfrac{1}{xx + fx}$ habe ich eine *formulam integralem* schon längst gefunden;[7] nun aber hat mich eben diese Untersuchung auf eine bequemere *Expression* geleitet, welche allem Ansehen nach Ewr. Wohlgeb. bekant seyn und Dieselben ebenfalls auf diese *Materie* geführt haben wird. Dann da *posito* $x = f$ gefunden ist

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{f+1} \\ = \; & 1 + f\,(A-1) - ff\,(B-1) + f^3\,(C-1) - f^4\,(D-1) \;\; \textit{etc.} \end{aligned}$$

erit quoque

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{1+f} = 1 + \frac{f}{2\,(2+f)} + \frac{f}{3\,(3+f)} + \frac{f}{4\,(4+f)} + \textit{etc.}$$

Sit

$$S = \int \frac{1}{xx + fx} = \frac{1}{1\,(1+f)} + \frac{1}{2\,(2+f)} + \frac{1}{3\,(3+f)} + \textit{etc.}$$

erit

$$\begin{aligned} S \;=\; & \frac{1}{f}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{f}\right) \\ =\; & \frac{1}{1+f} + (A-1) - f\,(B-1) + ff\,(C-1) - f^3\,(D-1) + \;\textit{etc.} \end{aligned}$$

Ich verharre mit der schuldigsten Hochachtung
Ewr. Wohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 21ten *May*
1743.

R 782 Reply to n° 67
Berlin, May 21st, 1743
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 60–61v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 227–231; *Euler-Goldbach* (1965), p. 163–165

69
Goldbach to Euler
Petersburg, June (11th) 22nd, 1743[1]

HochEdelgebohrner Herr
Insonders Hochgeehrter Herr *Professor*,

Ew. HochEdelgeb. waren in Dero vorigem Schreiben der Meinung das alles auf dem bewusten ersten *Lemmate* beruhete,[2] und wann dasselbe seine Richtigkeit hätte, an der *Demonstration* des *Theorematis* nicht das geringste auszusetzen wäre, ich wolte dahero in meinem letzten Briefe die Wahrheit des *Lemmatis primi* darthun,[3] und sehe auch daß ich darin nicht übel *réussi*ret, nachdem Ew. Hochedelgeb. zugeben daß "wann man *demonstri*ren könnte daß $4mn - m - 1$ *nullo casu* $m = 4v - 1$ ein *quadrat* wäre, zugleich richtig erwiesen seyn würde daß eben dieselbe formul *nullo prorsus casu* ein *quadrat* seyn könnte".[4] Dieses ist aber der einige Inhalt des *Lemmatis primi*. Ohngeachtet aber beyde *Lemmata* ausser Zweiffel sind, so erkenne ich doch nunmehro daß die *demonstration* aus einer andern Ursache nicht bestehen kan, denn es heisset daselbst: "*aequatio C non potest fieri vera nisi M sit numerus huius formae* $4v-1$ *(per lemma primum)*"; dieses folget aber in der That aus dem *lemmate primo* nicht. Vieleicht findet sich künfftig etwas besseres.

Die *summam* der Formul

$$P = \frac{\pi^2}{6n\,(n-1)} + \frac{1}{n\,(n-1)^2} - \frac{(2n-1)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\,\ldots\,+\frac{1}{n}\right)}{n^2\,(n-1)^2}$$

casu quo $n = 1$, welche Ew. Hochedelg. durch eine so schöne und *generale methode* herausgebracht,[5] hatte ich gantz ohngefehr und nur in selbigem *casu particulari* allein angemercket, denn weil die *series*

$$A\ \ldots\ \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}\left(1+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3\cdot 4}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right)+\frac{1}{4\cdot 5}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}\right)+\&c.$$
$$= z = 1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\ \&c.$$

aus nachfolgenden *numero infinitis seriebus* bestehet[6]

$$B\ldots\frac{1}{1\cdot 2\cdot 1}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 9}+\frac{1}{4\cdot 5\cdot 16}+\&c. = z+1-\frac{\pi^2}{6}$$
$$C\ldots\frac{1}{2\cdot 3\cdot 1}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5\cdot 9}+\frac{1}{5\cdot 6\cdot 16}+\&c. = \frac{1}{2\cdot 1^2}+\frac{\pi^2}{2\cdot 1\cdot 6}-\frac{3}{4\cdot 1^2}\left(1+\frac{1}{2}\right)$$
$$D\ldots\frac{1}{3\cdot 4\cdot 1}+\frac{1}{4\cdot 5\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6\cdot 9}+\frac{1}{6\cdot 7\cdot 16}+\&c. = \frac{1}{3\cdot 2^2}+\frac{\pi^2}{3\cdot 2\cdot 6}-\frac{5}{9\cdot 2^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$$
$$\&c. \qquad\qquad\qquad\qquad \&c.$$

und die *summa generalis omnium serierum* B, C, D, *&c.* ist

$$\frac{\pi^2}{6n\,(n-1)}+\frac{1}{n\,(n-1)^2}-\frac{(2n-1)}{n^2\,(n-1)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$$

so wird die *summa seriei* B (allwo $n=1$) $= z+1-\dfrac{\pi^2}{6}$.

Diejenige *division* welche E. Hochedelg. in Dero Schreiben vom 9. *Apr.* angeführet haben,[7] dienet, so viel ich sehe, nur dazu, daß man in dem *quoto* einen *numerum non circulantem* erhalte, dergleichen *numeri non circulantes* aber können auf unzehliche andere Arten ohne solche mühsahme *division* gefunden werden, zum Exempel der *numerus* 1.1..1...1....1 *&c. in inf*[*initum*] ist gewiß *non circulans*, es mögen die *loca vacua, quae punctis designata sunt*, mit allen Zahlen nach belieben (wann es nur nicht lauter 1 *in infinitum* sind) ausgefüllet werden, als

$$\left.\begin{array}{l}101\,001\,000\,100\,0[0]1\,000\,001 \text{ \&c.}\\ 121\,221\,222\,122\,2[2]1\,222\,221 \text{ \&c.}\\ 101\,231\,141\,126\,7[8]1\,135\,141 \text{ \&c.}\\ \text{\&c.}\end{array}\right\}\ \text{sind } \textit{non circulantes.}^{[8]}$$

Es können alle *fractiones rationales per denominatorem* 100 00 ... *et numeratorem circulantem exprimi*ret werden, welche *numeratores* aber zweyerley sind (1.) *in quibus datur elementum initiale non circulans*, (2.) *in quibus idem est elementum initiale, quod circulans*, als zum Exempel $\dfrac{1}{2}=\dfrac{5\underline{0}}{1\underline{0}}$ allwo das *elementum initiale non circulans* ist 5, das unterstrichene *elementum circulans* ist 0;

$\dfrac{1}{3}=\dfrac{\underline{3}}{1\underline{0}}$ allwo das *elementum initiale* und *circulans idem* ist nehml[ich] 3;

$\dfrac{61}{162}=\dfrac{3\,\underline{765\,432\,198}}{1\underline{0}}$ allwo das *elementum initiale* $=3$, das *elementum circulans* $=765\,432\,198$;

es trifft sich auch bißweilen daß das *elementum circulans* aus so viel Zifern bestehet als in dem *denominatore fractionis* $\dfrac{1}{a+1}$ der *numerus a unitates* hat, *exempli gr*[*atia*] *si* $a=22$ *erit* $\dfrac{1}{23}=\dfrac{\underline{434\,782\,608\,695\,652\,173\,913\,0}}{1\underline{00}}$.

Wann man setzet[9]

$$\left(y^{-1}-1\right)\left(3^2y^{-1}-1\right)\left(5^2y^{-1}-1\right)\left(7^2y^{-1}-1\right)\ \ldots\left((2n-1)^2\,y^{-1}\,[-1]\right)=Y$$

und $dY=P\,dy$, so wird die *formula* $-\dfrac{P\,dy}{Y}-n$ die *summatrix tot terminorum seriei*

$$A\ \ldots\ \frac{1}{y^{-1}-1}+\frac{1}{3^2y^{-1}-1}+\frac{1}{5^2y^{-1}-1}+\text{\&c.}$$

quot n continet unitates, est autem terminus generalis seriei A ...

$$\frac{1}{(2x-1)^2\,y^{-1}-1}$$

posita x pro exponente terminorum, igitur quia si ponatur $y=\dfrac{1}{4}$ *series A transit in*

$$B\ \ldots\ \frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{9\cdot 11}+\frac{1}{13\cdot 15}\ +\ \&c.$$

quae in infinitum continuata[10] *aequalis est semicirculo cuius diameter* $=1$*; erit seriei B summatrix* $-\dfrac{Py}{Y}-n$*, si differentiatione peracta ponatur* $y=\dfrac{1}{4}$*. Sit exempli gratia* $n=2$*, fiet*

$$-\frac{Py}{Y}-2=\frac{10y^{-1}-2}{9y^{-2}-10y^{-1}+1}=\frac{10y-2y^2}{9-10y+y^2}=\frac{38}{105}.$$

Es giebt unzehliche *quadrata* welche zu dieser Formul

$$C\ \ldots\ 4n^2+2\,(2m-1)\,n+m-1$$

denotantibus m et n numeris integris affirmativis nicht gebracht werden können,[11] als 1^2, 2^2, 3^2, 5^2, 7^2 *&c.*; wann man aber eine *formulam infinitorum quadratorum ad formulam C non revocabilium* geben könnte, so wäre auch das *Problema*: *invenire numerum primum dato quocunque maiorem*, *solvi*ret.[12]

Dato termino primo seriei $\dfrac{1}{a}$ *et lege progressionis hac, ut dato quocunque termino* $\dfrac{1}{A}$ *fiat terminus sequens* $=\dfrac{1}{A\,(A-1)+1}$*, erit summa totius seriei* $=\dfrac{1}{a-1}$.[13]

Der H. *Hedlinger* wird vermuthlich zeit seiner Anwesenheit in Berlin einen Stempel mit dem *Portrait* Ihro Königl[ichen] M[ajestä]t verfertiget haben, und in diesem fall möchte ich wissen ob man einen Abdruck davon in Wachs erhalten könnte.[14] Ich verharre mit besonderer Hochachtung

Eurer HochedelGebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.t Petersburg
den 22. *Jun. st. n.* 1743.

R 783 Reply to nº 68
Petersburg, June (11th) 22nd, 1743
Original, 3 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 69–71r
Partial copy, 8 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 6v–9v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 232–236; *Euler-Goldbach* (1965), p. 166–168

70
Euler to Goldbach
Berlin, July 9th, 1743

Wohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Ewr. Wohlgeb. erstes *Lemma*, worauf ich die gantze *Demonstration* gegründet zu seyn glaubte,[1] hatte ich nicht so wohl nach den Worten, womit dasselbe ausgedrückt war, betrachtet, als nach der *Application* desselben in den nachfolgenden *Proposition*en, und habe deswegen die gantze *Demonstration* aus eben dem jenigen Grunde für unrichtig gehalten, welchen Ewr. Wohlgeb. anjetzo Selbst anzeigen.[2] Dann ich gab zu, daß wann $4mn - m - 1$ *nullo casu* $m = 4v - 1$ ein *Quadratum* wäre, eben dieselbe *Formul nullo prorsus casu* ein *Quadratum* seyn könnte. Ich zog aber diesen Satz, worinn die *Application* bestund in Zweifel, *quod omnes casus, quibus unquam formula* $4mn - m - 1$ *quadratum fieri queat, ideo in hac forma* $m = 4v - 1$ *contineantur*. Die Unrichtigkeit dieser *Application* kan durch folgendes *Exemp*el am deutlichsten eingesehen werden. *Si demonstrari posset, nullum numerum imparem esse quadratum, simul demonstratum foret, nullum prorsus numerum esse quadratum*; diese *Propositio hypothetica* hat ihre völlige Richtigkeit, daraus aber folget diese keineswegs: *Ergo si uni dantur numeri quadrati, ii omnes numeri erunt impares.*

Die Art nach welcher Ewr. Wohlgeb. den schönen Satz[3] betreffend den *Valorem Expressionis*

$$\frac{\pi^2}{6n\,(n-1)} + \frac{1}{n\,(n-1)^2} - \frac{(2n-1)\left(1+\dfrac{1}{2}+\ \ldots\ +\dfrac{1}{n}\right)}{n^2\,(n-1)^2},$$

casu $n = 1$, herausgebracht, ist sehr merkwürdig. Man kan auf eine ähnliche Art viel andere dergleichen schöne Sätze herausbringen. Als da

$$\frac{1}{m\,(m-a)^2} = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{(m-a)^2} - \frac{1}{aa}\left(\frac{1}{m-a} - \frac{1}{m}\right)$$

so wird seyn[4]

$$\begin{array}{ll}
B\ \ldots & \dfrac{1}{2\cdot 1^2} + \dfrac{1}{3\cdot 2^2} + \dfrac{1}{4\cdot 3^2} + \dfrac{1}{5\cdot 4^2} + \ \mathit{etc.} = \dfrac{\pi^2}{1\cdot 6} - \dfrac{1}{1^2}\,(1)\\[2ex]
C\ \ldots & \dfrac{1}{3\cdot 1^2} + \dfrac{1}{4\cdot 2^2} + \dfrac{1}{5\cdot 3^2} + \dfrac{1}{6\cdot 4^2} + \ \mathit{etc.} = \dfrac{\pi^2}{2\cdot 6} - \dfrac{1}{2^2}\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\\[2ex]
D\ \ldots & \dfrac{1}{4\cdot 1^2} + \dfrac{1}{5\cdot 2^2} + \dfrac{1}{6\cdot 3^2} + \dfrac{1}{7\cdot 4^2} + \ \mathit{etc.} = \dfrac{\pi^2}{3\cdot 6} - \dfrac{1}{3^2}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)\\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\mathit{etc.}
\end{array}$$

Erit ergo generaliter

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n\cdot 1^2}+\frac{1}{(n+1)\;2^2}+\frac{1}{(n+2)\;3^2}+\frac{1}{(n+3)\;4^2}+etc.\\
=\;&\frac{\pi^2}{(n-1)\;6}-\frac{1}{(n-1)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)\\
=\;&\frac{\pi^2}{(n-1)\;6}-\frac{1}{(n-1)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n\,(n-1)^2}.
\end{aligned}$$

Dahero muß dieser *Expressionis valor casu quo* $n=1$ die *summam hujus seriei* geben $1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+etc.$

Ob diejenige *Division*, wodurch ich einen *numerum in infinitum excurrentem non circulantem* erhalten,[5] in der That einigen Nutzen haben könne, will ich nicht bestimmen; ich dachte aber wann man auf eine solche Art diese Zahlen 3,141 592 65 *etc.* herausbringen könnte, die *Quadratura Circuli* für völlig gefunden gehalten werden könnte. Ewr. Wohlgeb. Art *numeros non circulantes* zu *formi*ren war mir noch sehr wohl bekannt; es ist aber meines Erachtens dienlich viel dergleichen Arten zu bemerken, um etwan mit der Zeit eine solche zu entdecken, wodurch die *Quadratura Circuli* ausgedrückt werden könnte. Es findet sich aber in Ewr. Wohlgeb. Art noch eine gewisse Ordnung, dergleichen in den Zahlen 3,141 59 *etc.* allem Ansehen nach nicht statt findet. Daß alle *Numeri rationales in fractiones decimales circulantes* (das *elementum initiale* ausgenommen) *resolvi*rt werden, ist eine *proprietas essentialis numerorum rationalium*; und es ist leicht zu sehen, daß das *Elementum circulans fractionis decimalis ex hac fractione* $\frac{a}{b+1}$ *ortae* niemalen mehr als b *figur*en enthalte; dann wann man würkl[ich] *dividi*ret, so können nicht mehr als b^{erley} *residua* überbleiben; so offt man aber gleiche *Residua* bekommt, so offt *circuli*rt der *Quotus*.

Die *Expressio summatrix*, welche Ewr. Wohlgeb. für diese *seriem*

$$\frac{1}{y^{-1}-1}+\frac{1}{3^2y^{-1}-1}+\frac{1}{5^2y^{-1}-1}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2\,y^{-1}-1}$$

geben,[6] kan in vielen Fällen sehr nutzlich seyn. Es können aber immer aus *Factoribus per differentiationem series summabiles* gefunden werden. Die von Ewr. Wohlgeb. gefundene *summ* bringe ich solcher gestalt heraus.

Cum sit $\left(y^{-1}-1\right)\left(3^2y^{-1}-1\right)\left(5^2y^{-1}-1\right)\cdots\Big((2n-1)^2\,y^{-1}-1\Big)=Y$ *erit*

$$\begin{aligned}
\ell\,Y\;&=\;\ell\left(y^{-1}-1\right)+\ell\left(3^2y^{-1}-1\right)+\ell\left(5^2y^{-1}-1\right)+\ldots+\ell\Big((2n-1)^2\,y^{-1}-1\Big)\\
&=\;\ell\,(1-y)+\ell\left(3^2-y\right)+\ell\left(5^2-y\right)+\ldots+\ell\Big((2n-1)^2-y\Big)-n\,\ell\,y;
\end{aligned}$$

sumantur differentialia, eritque

$$\frac{dY}{Y}=\frac{P\,dy}{Y}=-\frac{dy}{1-y}-\frac{dy}{3^2-y}-\frac{dy}{5^2-y}+\ldots-\frac{dy}{(2n-1)^2-y}-\frac{n\,dy}{y}.$$

Multiplicetur per $-\dfrac{y}{dy}$ *erit*

$$-\frac{P\,y}{Y}-n=\frac{1}{y^{-1}-1}+\frac{1}{3^2y^{-1}-1}+\frac{1}{5^2y^{-1}-1}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2\,y^{-1}-1}\;\ldots=A.$$

Um aber auf diese Art einen *numerum terminorum finitum* zu *summi*ren, so deucht mir, daß die *additio actualis* nicht schwehrer seyn würde, als die *Execution* dieser *Methode*. Wollte man aber diese *seriem in infinitum excurrentem summi*ren, so würde man auf diese Art um so viel weniger gewinnen, da man die *summam hujus seriei A* alsdann *absolute* anzeigen kan. Denn man suche einen *angulum* $\underline{\alpha}$, *qui sit ad angulum rectum ut* $\sqrt{y}$ *ad* 1; *sit porro radius ad tangentem hujus anguli* $\underline{\alpha}$ *ut* 1 *ad* θ; *dico fore*

$$\frac{1}{y^{-1}-1}+\frac{1}{3^2y^{-1}-1}+\frac{1}{5^2y^{-1}-1}+\textit{etc. in infin[itum]}=\frac{\theta\pi\sqrt{y}}{4},$$

tenente π *valorem consuetum* $3,141\,592\,65$ *etc.* Ich kan auch die *summam hujus seriei* angeben

$$\frac{1}{y^{-1}+1}+\frac{1}{3^2y^{-1}+1}+\frac{1}{5^2y^{-1}+1}+\textit{ etc. [in] inf[initum]}=P.$$

Sit enim $\mathrm{e}=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}+\textit{etc.}$ *ac ponatur* $\mathrm{e}^{\pi\sqrt{y}}=\theta$ *seu sit* $\log.\theta=\pi\sqrt{y}$; *eritque summa quaesita* $P=\dfrac{\theta-1}{\theta+1}\cdot\dfrac{\pi\sqrt{y}}{4}$. *Est vero quoque*

$$\theta=1+\frac{\pi\sqrt{y}}{1}+\frac{\pi^2y}{1\cdot2}+\frac{\pi^3y\sqrt{y}}{1\cdot2\cdot3}+\frac{\pi^4y^2}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\textit{etc.}$$

Vel ponatur $\frac{1}{4}\pi\pi y=n$, *erit sequenti modo*

$$2P=\cfrac{n}{1+\cfrac{n}{3+\cfrac{n}{5+\cfrac{n}{7+\cfrac{n}{9+\cfrac{n}{11+\textit{etc.}}}}}}}.$$

Diese *Expression* ist eine *fractio continua*, von welcher *Materi*e etliche *Dissertation*en im *Academi*schen *Archiv* ligen, um deren *Copi*e ich letstens angehalten, weilen ich das meiste vergessen, und bey mir nirgend angemerkt finde.[7]

Was für *quadrat* Zahlen in dieser *Expression* $4n^2+2\,(2m-1)\,n+m-1$ nicht enthalten sind ist schwehr zu sagen,[8] indem diejenigen *Quadrata*, welche darinn enthalten sind nicht anders als durch unendlich viel *formul*n ausgedruckt werden können. Für das erste habe ich gleich gesehen, daß alle *Biquadrata* in dieser *Formul* enthalten sind. Hernach kan ich unendlich viel *series numerorum* geben, deren *Quadrata* in dieser *Expression* $4n^2+2\,(2m-1)\,n+m-1$ enthalten sind: Nehmlich alle *Quadrat* Zahlen, welche in nachfolgenden *Formulis* enthalten sind, werden zugleich in obiger *expression* begriffen: $(5p\pm1)^2$; $(13p\pm4)^2$; $(17p\pm2)^2$; $(29p\pm6)^2$; $(37p\pm3)^2$; $(41p\pm16)^2$; $(53p\pm15)^2$; $(61p\pm25)^2$; $(73p\pm23)^2$; $(89p\pm17)^2$; $(97p\pm11)^2$; $(101p\pm5)^2$; $(109p\pm38)^2$; $(113p\pm49)^2$; $(137p\pm50)^2$; $(149p\pm22)^2$; $(157p\pm14)^2$; $(173p\pm40)^2$; $(181p\pm81)^2$; $(193p\pm56)^2$; $(197p\pm7)^2$; $(229p\pm61)^2$ *etc.*[9]

Diejenigen *Quadrata* aber, welche in keiner von diesen *Formul*n enthalten sind, sind allein diejenigen, welche Ewr. Wohlgeb. *Expression* nicht in sich begreifft. Es käme allso darauf an, wie man auf leichte Art alle diejenige Zahlen finden solle, welche in keiner der obigen *Formul*n begriffen sind, und da würde man freylich das *Problema de inveniendo numero primo, dato majore* leicht *solvi*ren können: Dann wann man setzt $4n^2+2\,(2m-1)\,n+m-1=aa$ so wird $4m=-4n+3+\dfrac{4aa+1}{4n+1}$; wann allso $4aa+1$ ein *numerus primus* ist, so kan das *Quadratum aa* nicht in jener *Expression* enthalten seyn, und hinwiedrum [sind] alle *quadrata aa* welche nicht in $4n^2+2\,(2m-1)\,n+m-1$ enthalten sind, von dieser Beschaffenheit, daß $4aa+1$ ein *numerus primus* ist. Da nun $4b^4+1$ nimmer ein *numerus primus* ist sondern allzeit zwey oder mehr *divisores formae* $4n+1$ hat, so sind auch alle *numeri biquadrati* in Ewr. Wohlgeb. *Expression* enthalten. Ich erinnere mich daß ich einmal eine *Tabelle* gemacht von allen Zahlen biß auf 1000, deren *Quadrata unitate aucta numeri primi* sind, wovon der H. *Prof. Krafft* Ewr. Wohlgb. eine Abschrifft gemacht.[10] Dieselbe *Tabelle* habe ich fast aus einem gleichen Grund verfertiget, als Ewr. Wohlgeb. bey Dero *Formul* ohne Zweifel vor Augen gehabt haben.

Wann $4n+1$ ein *numerus primus* ist, so ist derselbe immer eine *summa duorum quadratorum, idque unico modo*; es gibt aber allzeit unendlich viel *quadrata quae unitate aucta sint per* $4n+1$ *divisibilia*. Alle diese *Quadrata* können nun leicht in einer *Formula generali exprimi*rt werden folgender gestalt:[11] *sit* $4n+1=r^2+s^2$, *erunt utique* $\underline{r}$ *et* $\underline{s}$ *numeri inter se primi; formetur fractio* $\dfrac{r}{s}$ *et quaeratur in minoribus numeris fractio proxime accedens* $\dfrac{p}{q}$, *ita ut* $ps-qr$ *sit* ±1 (der Bruch $\dfrac{p}{q}$ kan aber durch eine von mir gegebene *Methode* allzeit leicht gefunden werden). *Tum ponatur* $pr+qs=k$, *atque dico omnes numeros, quorum quadrata unitate aucta sint per* $4n+1$ *divisibilia, contineri in hac forma* $(4n+1)\,m\pm k$. *Sic*

1. *Omnes numeri quorum quadrata unitate aucta sint divisibilia per* 5 *continentur in formula* $5m\pm2$
2. *Si sit* $aa+1$ *divisibile per* 13 *erit* $a=13m\pm5$
3. *Si sit* $aa+1$ *divisibile per* 17 *erit* $a=17m\pm4$
4. *Si sit* $aa+1$ *divisibile per* 29 *erit* $a=29m\pm12$

etc.

Ex[emplum]. Quaerantur omnes numeri, quorum quadrata unitate aucta sint divisibilia per numerum primum 1381. *Cum sit* $1381 = 15^2+34^2$ *quaeratur fractio* $\frac{p}{q}$ *tam prope accedens ad* $\frac{15}{34}$ *ut differentiae numerator fiat* $= 1$. *Ad hoc cum duobus numeris* 15 *et* 34 *instituatur operatio, qua maximus communis divisor quaeri solet; hoc modo*

$$\begin{array}{rrrrrr}
15) & 34 & (2 & & & \\
 & \underline{30} & & & & \\
 & 4) & 15 & (3 & & \\
 & & \underline{12} & & & \\
 & & 3) & 4 & (1 & \\
 & & & \underline{3} & & \\
 & & & 1) & 3 & (3 \\
 & & & & \underline{3} & \\
 & & & & 0 &
\end{array}$$

Ex quotis 2*,* 3*,* 1*,* 3*, formetur sequens fractionum series*

$$\begin{array}{ccccc}
2, & 3, & 1, & 3 & \\
\frac{0}{1}, & \frac{1}{2}, & \frac{3}{7}, & \frac{4}{9}, & \frac{15}{34}
\end{array}$$

incipiendo ab $\frac{0}{1}$*; hac lege ut quisque numerator per indicem suprascriptum multiplicatus cum numeratore praecedente praebeat numeratorem sequentem, similique modo denominator quisque per indicem suprascriptum multiplicatus cum praecedente denominatore praebeat denominatorem sequentem. Hoc modo ultima fractio* $\frac{15}{34}$ *semper erit ipsa proposita, penultima vero erit ea proxime accedens* $\frac{p}{q}$*, quam quaero. Jam ergo erit* $k = 4\cdot 15+9\cdot 34 = 366$*, unde omnes numeri, quorum quadrata unitate aucta sunt per* 1381 *divisibilia, continentur in hac forma* $1381m \pm 366$.

Ewr. Wohlgeb. *Summatio*[12] *seriei*

$$\frac{1}{a} + \ldots + \frac{1}{A} + \frac{1}{A\,(A-1)+1}$$

ist so merkwürdig, daß ich anfänglich darüber erstaunet bin in dem diese *Series* so stark *convergir*t, und die grösten *Exponentes ipsius* $\underline{a}$ in den *Denominatoribus* nach der *progressione geometrica dupla* aufsteigen, dergleichen *Series summabiles* sehr *rar* sind. Ich habe aber nach einigem Nachsinnen bald diese *Demonstration* gefunden.

$$\begin{array}{llll} \textit{Sit} & \dfrac{1}{a-1} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b-1} & \textit{erit} & b = a\,(a-1)+1 \\ \textit{porro} & \dfrac{1}{b-1} = \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c-1} & \textit{erit} & c = b\,(b-1)+1 \\ & \dfrac{1}{c-1} = \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{d-1} & \textit{erit} & d = c\,(c-1)+1 \\ & & \textit{etc.} & \end{array}$$

Ergo fiet $\dfrac{1}{a-1} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{d} + \textit{etc.}$ welches Ewr. Wohlgeb. *Series* ist.

Der H. *Hedlinger*[13] ist wieder nach der Schweitz zurük gereiset, nachdem er sich 10 Monath allhier aufgehalten ohne etwas zu arbeiten; die Ursach ist, weilen man ihn selbst hat *engagir*en wollen, und da er solches *refusirt*, auch nichts von seiner Arbeit verlangt. Man hat allso noch keine andere *Medaille*n von Ihro *Majestät*, als welche nicht dörfen aufgewiesen werden.

Vor einiger Zeit ist allhier der H. *Rasumoffski* nebst dem H. *Adjuncto Teploff* hier angekommen; Sie wohnen in meinem Hause, und gedenken einige Zeit bey uns zu bleiben.[14]

Ewr. Wohlgeb. lässt sich meine gantze *Famille* gehorsamst empfehlen, und ich verbleibe mit der schuldigsten Hochachtung

Ewr. Wohlgebohrnen
gehorsamster Diener
Leonhard Euler

Berlin den 9^{ten} *Jul.* 1743.

Auf der letsten Leipziger Meß ist das *Dictionnaire de Trevoux* noch nicht fertig gewesen, indem der Verleger H. *Christ* zu Basel gestorben.[15] Der H. *Prof. Strube*[16] lässt auch seine gehorsamste Empfehlung machen.

Einige *numeri primi*[17] so grösser sind als 1 000 000, welche ich durch obige *Methode* leicht gefunden, sind: 1 008 017; 1 020 101; 1 073 297; 1 110 917; 1 123 601; 1 136 357; 1 144 901; 1 196 837; 1 201 217; *hi enim numeri sunt formae* $aa+1$, *neque ullum habent divisorem primum formae* $4n+1$.

Catalogus numerorum $\underline{a}$
ex quibus fit $4aa+1$ numerus primus.[18]

1; 2; 3; 5; 7; 8; 10; 12; 13; 18; 20; 27; 28; 33; 37; 42; 45; 47; 55; 58; 60; 62; 63; 65; 67; 73; 75; 78; 80; 85; 88; 90; 92; 102; 103; 105; 112; 115; 118; 120; 125; 128; 130; 132; 135; 140; 142; 150; 153; 157; 163; 170; 175; 192; 193; 198; 200; 203; 210; 215; 218; 220; 222; 232; 233; 235; 237; 245; 248; 268; 272; 278; 285; 288; 292; 297; 317; 318; 322; 323; 327; 337; 340; 343; 345; 348; 350; 352; 357; 358; 370; 375; 380; 382;

390; 392; 408; 413; 422; 430; 432; 445; 453; 455; 460; 465; 468; 473; 475; 480; 483; 493; 502; 505; 518; 527; 530; 533; 535; 547; 548;

Sollte in diesen Zahlen eine *Series regularis* enthalten seyn, so wäre das *Problema de inveniendo numero primo datum numerum excedente* leicht *solvir*t; es kommt mir aber diese *series* eben so *confus* vor als die *series numerorum primorum ipsa.*

R 784 Reply to nº 69
Berlin, July 9th, 1743
Original, 5 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 66–67v, 69–70v, 68r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 237–245; *Euler-Goldbach* (1965), p. 168–173

71
Goldbach to Euler
Petersburg, July (19th) 30th, 1743

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*,

Nachfolgende *demonstration*[1] habe ich zu dem Ende in unterschiedene kleine *propositiones* abgetheilet, damit E. Hochedelgeb. die jenige bey welcher Sie einigen Anstand finden möchten, desto bequemer anzeigen könnten.

1. In aequatione $4mn - m - 1 = a^2$ *pono* a^2 *quadratum integrum minimum omnium eorum quae aequationi satisfacere possunt (si quae possunt).*

2. Utrique aequationis parti addo $-4ma + 4m^2$*, fiet* $4m(n - a + m) - m - 1 = (a - 2m)^2$.

3. In hac aequatione non potest fieri $a = m$ (*posset enim altera pars aequationis dividi per* m*, altera non posset*).

4. Neque potest fieri $a > m$*, esset enim* $n - a + m < n$ *adeoque* $(a - 2m)^2 < a^2$*, quod est contra hypothesin, cum* a^2 *sit omnium possibilium minimum.*

5. Restat ergo ut sit $a < m$.[2]

6. Similiter si ad aequationem $4mn - m - 1 = a^2$ *ex utraque parte addatur* $-4an + 4n^2$*, fiet* $4n(m - a + n) - m - 1 = (a - 2n)^2$.

7. In hac aequatione non potest fieri $a = n$*, propterea quod foret* $4mn - m - 1 = n^2$ *seu* $n = 2m + \sqrt{4m^2 - m - 1}$ *qui numerus nequit esse rationalis.*

8. Sed nec potest fieri $a > n$*, quia* $(m - a + n)$ *fieret* $< m$ *et* $(a - 2n)^2 < a^2$ *quod est contra hypothesin.*

9. Restat igitur ut a *sit* $< n$*, et quia iam supra prop*[*ositione*] *5 ostensum est* $a < m$*, sequitur* $a^2 < mn$.

10. Erit igitur $4mn - m - 1 < mn$*, quod est absurdum.*

11. Ergo inter omnia quadrata (si quae sunt) huius formae $4mn - m - 1$ *non datur minimum in integris; ergo datur nullum.*[3]

Was die von Ew. Hochedelg. angeführte *aequation*

$$\frac{1}{m\,(m-a)^2} = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{(m-a)^2} - \frac{1}{aa}\left(\frac{1}{m-a} - \frac{1}{m}\right)$$

für eine *influence* in die *series* B, C, D, *&c.* habe, sehe ich noch nicht.[4]

Mir ist es wahrscheinlich, daß eine solche *series*:

$$\frac{a}{1} + \frac{b}{10} + \frac{c}{100} + \frac{d}{1000} + \&c. = \pi$$

gefunden werden könne, darin die *numeratores* a, b, c, *&c.* (entweder *integri* oder *fracti*) allezeit grösser werden, ob gleich die *methode* selbige *numeratores* zu *determini*ren vieleicht niemahls bekannt werden wird, denn durch *formulas algebraicas* diese *numeratores* zu bestimmen ist in so fern eine vergebliche Mühe, als man *persuadi*ret seyn kan, daß die *ratio diametri ad periph*[*eriam*] nicht *in numeris rationalibus* bestehet, doch giebt es einige merckwürdige *approximationes*. Es ist zum Exempel eine sehr leichte *progressio numerorum secundum hanc formulam* $\dfrac{2x^2-4x+12}{10^x}$ und wann ich 7 solcher *terminorum* zu 2 *addi*re, so wird die *summa* $3,141\,592\,2$.[5]

Ew. Hochedelg. dancke ich dienstl[ich] für die *communication* der Zahlen a, welche $4a^2+1$ *numerum primum* geben; den Aufsatz von dergl[eichen] Zahlen biß 1000 habe ich zwar schon, ich weiß aber denselben jetzo unter meinen andern Schrifften nicht hervor zu finden.[6] Daß aus solchen Zahlen eine ordentliche *series* herauß gebracht werden solte zweiffele ich sehr. Es haben aber nicht allein alle *quadrati* a^2, welche in der *formula* $4n^2+2\,(2m-1)\,n+m-1$ nicht vorkommen,[7] diese Eigenschafft, daß sie in $4a^2+1$ einen *numerum primum* geben, sondern alle *trigonales in illa formula non extantes* geben gleichfalls $4\triangle+1$ *numerum primum*, und die formul $4n^2+2\,(2m-1)\,n+m-1$ kommt dermassen mit dieser $4MN+M+N$ überein,[8] daß kein *casus* in der einen ist, welcher nicht in der andern *assignabilis* wäre (wie denn auch alle *casus* $4n^2+2\,(2m-3)\,n-(m-1)$ in dieser Formul $4MN-M-N$, *et contra*, enthalten sind); wann man also nach der Formul $4MN+M+N$ folgende Tabelle formiren wolte:[9]

$$\begin{array}{cccccccc}
6, & 11, & 16, & 21, & 26, & 31, & 36, & 41\ \ldots\\
 & 11, & 20, & 29, & 38, & 47, & 56, & 65\ \ldots\\
 & & 16, & 29, & 42, & 55, & 68, & 81\ \ldots\\
 & & & 21, & 38, & 55, & 72, & 89\ \ldots\\
 & & & & 26, & 47, & 68, & 89\ \ldots\\
 & & & & & 31, & 56, & 81\ \ldots\\
 & & & & & & 36, & 65\ \ldots\\
 & & & & & & & 41\ \ldots
\end{array}$$

so könnte man festsetzen daß alle in dieser Tabelle nicht enthaltene sowohl *trigonales* als *quadrati per* 4 *multiplicati addita unitate numeri primi* sind.

Ich erinnere mich in den *Götting*[*ischen*] *Gel*[*ehrten*] *Zeitungen* gelesen zu haben, daß wann $4m+1$ ein *numerus primus* ist, selbiger allezeit eine *summa duorum quadratorum* sey, welche *observation* ohne Zweiffel von Ew. H. kommt,[10] und mir schon vorher bekannt war; gleichwie aber auf diese Weise in den *numeris primis huius formae* $4m+1$ allezeit wird[11] $m = a^2 + b^2 \mathbin{:\!+\!:} b$, *hoc est* *duplo trigonali* + *quadrato*, so halte ich davor daß in den *numeris primis* $4m-1$ allezeit seyn wird $m = 2\,(a-1)^2 + \dfrac{b^2-b}{2}$, *hoc est* *duplo quadrato* + *trigonali*.[12] *Sit ex*[*empli*] *grat*[*ia*] $m=1$, *erit* $a=b=1$; $m=2$, *erit* $a=2$, $b=1$; $m=3$, *erit* $a=b=2$, *&c.*

Als ich vor einigen Wochen in einem Buche schon *A*[*nno*] 1718 von mir *noti*ret fand

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{43}+\frac{1}{1807}+\textit{\&c.}=1$$

nebst der *lege denominatorum* $2+1=3$; $2\cdot 3+1=7$; $2\cdot 3\cdot 7+1=43$; $2\cdot 3\cdot 7\cdot 43+1=1807$ *&c.*, schrieb ich gleich dabey: *si terminus primus fuerit* $\dfrac{1}{a}$, *lex progressionis ut dato termino quocunque* $\dfrac{1}{A}$ *fiat terminus sequens* $\dfrac{1}{A\,(A-1)+1}$, *erit summa seriei* $\dfrac{1}{a-1}$; ich erinnere mich aber nicht mehr worin meine *demonstration* bestanden und dancke Eurer HochEdelg. desfalls um soviel mehr daß Sie mir die ihrige *communici*ren wollen, welche gantz *evident* ist. Sonst halte ich auch bey dieser *serie* die leichte Art *dato termino quocunque* die *summam ipsius seriei usque ad hunc terminum* zu finden, für merckwürdig. *Sit terminus quicunque datus* $\dfrac{1}{A}$, *erit summa eiusdem et omnium sequentium terminorum* $=\dfrac{1}{A-1}$, *summa vero ipsius seriei usque ad hunc terminum* $\dfrac{1}{A}$ *exclusive erit* $\dfrac{1}{a-1}-\dfrac{1}{A-1}$.[13]

Daß sich H. *Prof. Strube* meiner noch erinnert erkenne ich mit schuldigstem Danck, und wünschete dem selben allhie worinnen nützlich zu seyn. Daß H. Hedlinger bey seiner langen Anwesenheit in Berlin nicht etwas, so wie in andern *Residentz*en von ihm geschehen, *proprio motu* verfertiget, ist zu bedauren. Den Auszug von des Hn *D*[*octor*] *Kuhn*en *pièce sur l'origine des Fontaines* werden Ew. HochE. vermuthlich schon in den *Act*[*is*] *Erud*[*itorum*] gesehen haben, allwo selbige, wie ich aus den *Zeitungen von Gel*[*ehrten*] *Sachen* vernommen, *recensi*ret ist.[14] Sollten E. H. bey Gelegenheit die Mühe nehmen wollen durch einen Dero guten Freunde in Dantzig vernehmen zu lassen ob der dortige H. *Doctor Joh*[*ann*] *Adam Kulmus* das *artificium steganographicum* davon er in den Breßlauischen Natur- und *Medicin* Geschichten *A*[*nno*] 1724 zwey *specimina* herausgegeben, bekannt gemacht, oder auch nur den verborgenen Inhalt selbiger zwey Brieffe entdecket hat,[15] würden Sie mich dadurch sehr *obligi*ren. Ich erinnere mich daß wir ehemahls in der neuesten *edition* des *Diction*[*aire*] *de Richelet* die Worte *discernement*, *disciple &c.* nicht finden können[16] und dieselben gar ausgelassen zu seyn vermeinet, sie stehen aber würcklich darin unter den Titeln *dicernement*, *diciple &c.*, worin ich den *editorem* nicht *imiti*ren wollte. Daß H. *Rasumowski* und H. *Teplew* bey E. H. *logi*ren und sich noch eine Zeit lang in Berlin aufhalten werden,[17] ist mir sehr lieb; E. H. werden hiedurch nicht allein Gelegenheit haben die Russische Sprache ferner zu *excoli*ren, sondern auch die hiesigen *nova Academica* von denselben recht frisch erhalten können. Ihr Hauß wird vermuthlich in der gegend liegen wo vormahls *M.ʳ Dangicourt Membre de la Societé des Sciences* gewohnet, welchen ich *A*[*nno*] 1718 daselbst gesprochen habe.[18] Für die *attention* wegen des *Diction*[*aire*] *de Trevoux*[19] statte ich schuldigsten Danck ab und bitte mir davon zu gelegener Zeit nähere Nachricht aus. Ubrigens verbleibe nechst schuldigster Empfehlung an Dero Frau Liebste und sämmtliche *Familie*

Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.ᵗ Petersbourg
den 30. *Julii st. n.* 1743.

R 785 Reply to nº 70
Petersburg, July (19th) 30th, 1743
Original, 4 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 72–75v
Partial copy, 8 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 12r–15v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 246–250; *Euler-Goldbach* (1965), p. 174–176

72
Euler to Goldbach
Berlin, August 24th, 1743

Wohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Wann $4mn - m - 1$ in einem Fall ein *Quadratum* wäre, so würde man gleich unendlich viel andere *Casus* daraus finden können. Wann nun Ewr. Wohlgeb. annehmen,[1] daß $\underline{aa}$ das kleinste *Quadratum* sey, welches *in formula* $4mn - m - 1$ enthalten ist, so muß nothwendig $\underline{a}$ kleiner seyn als $\underline{m}$, und daher haben die 5 ersten *Propositiones* ihre völlige Richtigkeit. Wann aber Ewr. Wohlgeb. ferner zu dieser *Aequation* fortgehen $4n\,(m - a + n) - m - 1 = (a - 2n)^2$; weilen dieselbe nicht in der vorgelegten *Form* $4mn - m - 1$ enthalten ist, so folgt auch nicht daß $(a - 2n)^2$ kleiner seyn müsse als a^2; dann $4mn - m - 1$ könnte das kleinste mögliche *Quadratum* geben, ungeacht $4n\,(m - a + n) - m - 1$ einem noch kleinern *Quadrato* gleich wäre, und allso kommt mir die 8ᵗᵉ *Proposition* verdächtig vor, weilen *non obstante hypothesi aa* grösser seyn kan als $(a - 2n)^2$.

Bey diesem *Tentamine* fällt mir ein, ob man dieses *Theorema* nicht etwan auf eine gleiche Art *demonstri*ren könnte wie man zu erweisen pflegt, daß $a^4 + b^4$

oder $a^4 - b^4$ kein *quadratum* seyn könne. Man nimmt nehmlich an *dari casum quo* $a^4 + b^4$ *sit numerus quadratus puta* $= mm$, und leitet daher einen andern $c^4 + d^4 = nn$ dergestalt daß $n < m$. Auf diese Weise zeigt man, daß wann ein *quadratum quantumvis magnum* mm eine *summa duorum biquadratorum* wäre, man daraus sogleich ein kleineres, nn, und daher ferner ein kleineres und so fort finden könnte:[2] man nimmt aber als ein *Postulatum* an, daß *in numeris parvis* kein *casus satisfaciens* begriffen sey. Weil nun ebenfalls gewiß ist, daß *in numeris parvis* $4mn - m - 1$ kein *Quadrat* seyn könne, so würde die *Demonstration* auf folgende Art vollkommen richtig seyn:

I. *Ponamus dari quadratum aa qui in forma* $4mn - m - 1$ *contineatur.*

II. *Inde inveniri posset alius quadratus bb minor quam aa qui pariter in forma* $4mn - m - 1$ *esset contentus.*

III. *Continuo ergo ad numeros quadratos minores perveniretur, quod foret absurdum.*

Die gantze *Demonstration* würde allso auf dem II. Satz ankommen, *an concesso quadrato* $\underline{aa}$ *aliud minus* $\underline{bb}$ *ex eo inveniri possit, quod in forma* $4mn - m - 1$ *contineatur.*

Ewr. Wohlgeb. bin für die *Communication* Dero *Idée* über die *seriem* $\frac{a}{1} + \frac{b}{10} + \frac{c}{100} + \frac{d}{1000} + etc.$ sehr verbunden, dann auf solche Art werden öfters grosse und beschwehrliche Zahlen leicht ausgedrückt werden können. Um diese Zahl $1,141\,592$ durch 7 *Terminos* zu bekommen, brauchen Ewr. Wohlgb. diesen *Terminum generalem* $\frac{2xx - 4x + 12}{10^x}$; ich glaube aber Dieselben haben sich verschrieben, indem 7 *Termini hujus seriei* nicht mehr geben als $1,141\,288\,2$; die verlangte Zahl kommt aber heraus wann man diesen *Terminum generalem* $\frac{10 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x^3}{10^x}$ annimmt.[3]

Ich habe neulich eine *expressionem indefinitam* gefunden, wodurch der *valor ipsius* π ausgedrückt wird. *In circulo cujus radius* $= 1$, *capiatur arcus quicunque* $\underline{u}$, *cujus cosinus* $= \underline{a}$, *et sinus* $= \alpha$, *sit autem sinus arcus* $2u = \beta$, $\sin\ 3u = \gamma$, $\sin\ 4u = \delta$, $\sin\ 5u = \varepsilon$, *etc.; his positis dico fore*

$$\frac{\pi}{2} = u + a\alpha + \frac{1}{2}a^2\beta + \frac{1}{3}a^3\gamma + \frac{1}{4}a^4\delta + \frac{1}{5}a^5\varepsilon + etc.;$$

setzt man $u = \frac{\pi}{4}$ *ob* $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\beta = 1$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\delta = 0$, $\varepsilon = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ *etc.* findet man folgende *seriem*

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} - \frac{1}{5 \cdot 2^3} - \frac{1}{6 \cdot 2^3} - \frac{1}{7 \cdot 2^4} + \frac{1}{9 \cdot 2^5} + \frac{1}{10 \cdot 2^5} + \frac{1}{11 \cdot 2^6} - etc.$$

welche ziemlich stark *convergirt*.[4]

Diese *Aequation* $\dfrac{1}{m\,(m-a)^2} = \dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{(m-a)^2} - \dfrac{1}{aa}\left(\dfrac{1}{m-a} - \dfrac{1}{m}\right)$ hatte ich wo ich nicht irre zu diesem Ende angeführet,[5] um die *summam hujus seriei*

$$\frac{1}{(a+1)\,1^2} + \frac{1}{(a+2)\,2^2} + \frac{1}{(a+3)\,3^2} + \frac{1}{(a+4)\,4^2} + etc.$$

desto leichter zu finden, dann im 1sten *termino* ist $m = a+1$, im 2ten, $m = a+2$, im 3ten ist $m = a+3$, und so fort, dahero diese *series* sogleich in diese *resolvir*t wird

$$\frac{1}{a}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + etc. \quad \ldots\right) = \frac{\pi^2}{6a}$$
$$-\frac{1}{aa}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{a+1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{a+2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{a+3} + etc.\right) = -\frac{1}{aa}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{a}\right),$$

welche *summas* Ewr. Wohlgeb. in Dero letsten Schreiben allem Ansehen nach auf eine andere Art gefunden haben.

Daß alle *numeri quadrati* aa welche in dieser *Formul* $4nn+2\,(2m-1)\,n+m-1$ oder in dieser $4MN+M+N$ (welche mit jener übereinkommt *ponendo* $N = n$ *et* $M = n+m-1$) nicht enthalten sind, einen *numerum primum* für $4aa+1$ geben ist klar; dann wann $aa = 4n^2 + 2\,(2m-1)\,n + m - 1 = 4MN + M + N$, so wird

$$4aa + 1 = (4n + 4m - 3)\,(4n + 1) = (4M + 1)\,(4N + 1)\,,$$

und hat folglich *Factores*;[6] wann allso $4aa+1$ ein *numerus primus* ist, so kan aa in obgedachten *Formulis* nicht enthalten seyn. Ich zweifle aber sehr ob durch solche *Formulas exclusivas* jemals etwas herausgebracht werden wird, indem darinn die gantze Kenntnüß, welche wir von den *numeris primis* haben gegründet ist; dann auf gleiche Art kan man sagen, daß alle *numeri* welche nicht in dieser *Formul* $mn + m + n + 1$ enthalten sind, *numeri primi* seyen.

Ich zweifle auch sehr ob die *Valores* von $\underline{m}$, wann $4m-1$ ein *numerus primus* ist, eine solche gewisse Eigenschaft haben, dergleichen statt findet wann $4m+1$ ein *numerus primus* ist. Dann daß $\underline{m}$ nicht immer sey ein *duplum quadratum* + *numero trigonali*, wann $4m-1$ ein *numerus primus* ist, erhellet aus dem *casu* $4m-1 = 79$; dann hier wird $m = 20$, welche Zahl die vermuthete Eigenschafft nicht hat.[7]

Der H. *Doctor Kühn* hat die Güte gehabt mir seine *Dissertation sur l'origine des Fontaines* zuzuschicken, welche ich mit *attention* gelesen, und verschiedene *dubia* darüber angemerkt, so ich Ihm zugeschickt.[8] Um seine wunderliche Meinung von der so sehr *irregulair*en *Figur* der Erde zu behaupten, so läugnet er die gewissesten *Experimenta*, als über die Verschiedenheit der Länge eines *Penduli*, welches *secund*en weiset, da er doch im gegentheil seine Meinungen auf die ungewissesten Muthmassungen gründet. Weil er von mir verlangt hat, daß ich ihm meine Gedanken darüber aufrichtig entdecken möchte, so habe ich solches jedoch mit aller Höfflichkeit gethan; es scheinet aber, daß so wohl der Herr Bürger Meister als der H. Kühn damit nicht wohl zu frieden gewesen, weilen ich darauf schon seit langer Zeit keine Antwort erhalten. Hiedurch ist allso meine *Correspondenz* nach Dantzig unterbrochen worden, weswegen ich mich nicht im Stande befinde, Ewr. Wohlgeb. Begehren, betreffend die *steganographi*sche *Piece* des H. *Dr. Kulmus* ein Genügen zu leisten.[9] Des H. *Rasumoffski* Vorsatz allhier in meinem Hause zu verbleiben, ist von Hofe auf eine überaus gnädige Art *approbir*t worden, und schreibe ich deswegen mit der heutigen *Post* an des H. Ober-Jäger Meisters *Excellenz*.[10] Der H. *Nartoff* hat mir die *Pension*, welche mir von der *Academi*e *accordir*t, und von der *Commission* aufs nachdrücklichste *confirmir*t worden, aufgekündet; ein gleiches Schicksaal hat alle ausländische *Pensionnaires* betroffen, worüber der H. *Bernoulli inconsolabel* ist.[11] Weil ich nun auch von meiner *Obligation* gegen die *Academi*e frey gesprochen bin, so lasse meine *Scientiam navalem* bey *M.^{r} Bousquet* in *Lausanne* drucken.[12]

Ewr. Wohlgeb. werden ohne Zweifel schon vernommen haben, daß die neue *Societä*t der Wissenschafften allhier den 1$^{\text{sten}}$ dieses Monaths ihren Anfang genommen, und daß die beyden HH. *Cabinets Ministres* Graf von *Podewils* und von Bork, wie auch der H. *General* Feld*marschall* von Schmettau sich nicht nur zu Mitgliedern erklärt sondern auch den Versammlungen fleissig beywohnen. Wir haben einen *Directorem* und *Vice Directorem* welche alle halbe Jahre abgewechselt, und durch *balloti*ren besetzt werden sollen: für dieses erste halbe Jahr ist der Feld *Marschall* von Schmettau zum *director*en und der *Marquis d'Argens* zu *Vize Directori* erwählt worden. Ihro Königl[iche] *Majestä*t haben zu diesem neuen *Etablissement* 2 Zimmer auf dem Schloß Allergnädigst *accordir*t; weilen aber dieselben noch nicht zugerüstet sind so wurden die zwey ersten *Assemble*en bey dem H. *Directori*, die letsteren 2 aber bey dem H. *Cabinetsministre* von *Bork* gehalten, weilen der H. *General Feldmarschal* nach Achen verreiset. Die Versammlungen werden alle Donnerstage von 4 biß 6 Uhr gehalten, und in der letsten habe ich eine *Piece* vorgelesen.[13] Die Mitglieder sind entweder *honoraires* oder *ordinaires*, jener Zahl erstreckt sich auf 24, dieser aber auf 20; alle Jahre soll ein *Tomus* von den vorgelesenen *Piec*en herauskommen; es werden aber alle *pieces d'eloquence* und *Poesi*en ausgeschlossen. Ihro Königl[iche] *Majestä*t haben allergnädigst *declarir*t diese *Societä*t mit Dero allerhöchsten Gegenwart zu beehren, und *solenniter* zu *confirmi*ren. Vielleicht kan diese Nachricht der *Academi*e in *Petersburg* zur Aufnahme gereichen, als welche zu diesem Ende sogleich an den H. *Prof. Heinsium* überschrieben.[14] H. *Dangicourt*[15] hat auf der Neustadt neben der Neustadtischen Kirche gewohnet, mein Haus ist aber auf der Friedrichsstatt nächst an der Neustadt, wo vor dem der Stattgraben gewesen, und ist erst *A*[*nno*] 1731 diese Gegend bebauet worden. Von neuen Büchern habe ich seit der Zeit gelesen, *Maclaurin*s *Treatise of Fluxions* und *Jacquier*s *Commentarium* über die *Principia philosophiae naturalis*[16] *Neutoni*, welches gewiß zwey fürtreffliche Bücher sind.

Ich habe die Ehre Ewr. Wohlgeb. meiner vollkommensten Hochachtung zu versichern, und zu bleiben

Ewr. Wohlgebohrnen

gehorsamster Diener

Leonh. Euler

Berlin den 24ten *Aug.*
1743.

R 786 Reply to nº 71
Berlin, August 24th, 1743
Original, 4 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 74–76v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 251–254; *Euler-Goldbach* (1965), p. 177–179

73
Goldbach to Euler
Petersburg, September (17th) 28th, 1743

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*

Aus Eurer Hochedelgeb. Erinnerung gegen die vorige *demonstration* habe ich die *prop*[*ositionem*] *6. ipsius demonstrationis* allerdings unrichtig befunden, dahero ich dieselbe nebst den darauf folgenden in meinem letzteren Schreiben auszustreichen und an deren Stelle folgende zu *substitui*ren bitte:[1]

6. Ad hanc aequationem $(4n-1)\,m-1=a^2$ *ex utraque parte addatur*

$$-\,2a\,(4n-1)+(4n-1)^2\,,$$

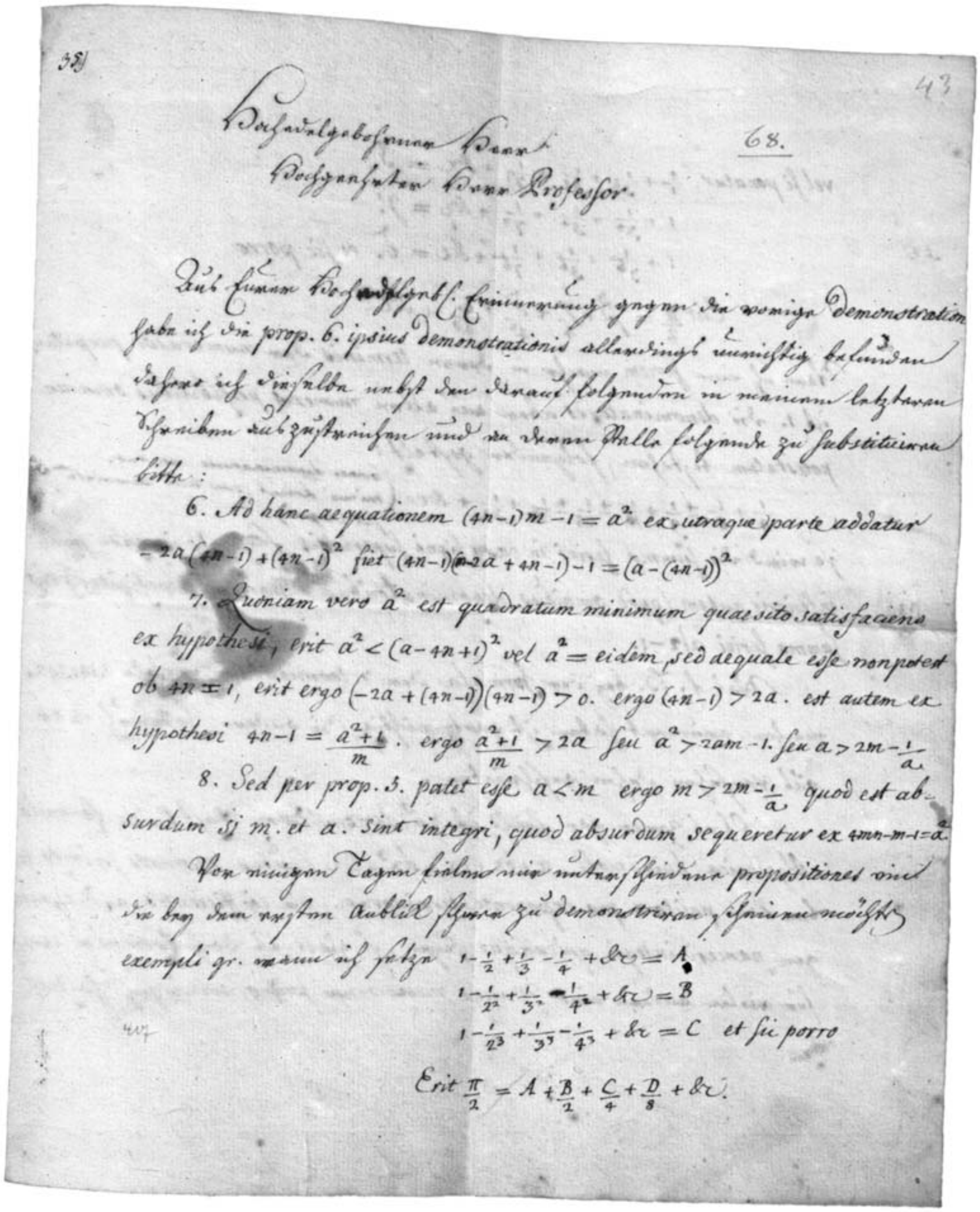
fiet[2]

$$(4n-1)\,(m-2a+4n-1)-1=(a-(4n-1))^2\,.$$

7. Quoniam vero a^2 *est quadratum minimum quaesito satisfaciens ex hypothesi, erit* $a^2<(a-4n+1)^2$ *vel* $a^2=$ *eidem, sed aequale esse non potest ob* $4n\neq 1$*, erit ergo* $(-\,2a+(4n-1))\,(4n-1)>0$*, ergo* $(4n-1)>2a$*; est autem ex hypothesi* $4n-1=\dfrac{a^2+1}{m}$*, ergo* $\dfrac{a^2+1}{m}>2a$ *seu* $a^2>2am-1$ *seu* $a>2m-\dfrac{1}{a}$.
8. Sed per prop[*ositionem*] *5 patet esse* $a<m$*, ergo* $m>2m-\dfrac{1}{a}$ *quod est absurdum, si* m *et* a *sint integri, quod absurdum sequeretur ex* $4mn-m-1=a^2$.[3]

Vor einigen Tagen fielen mir unterschiedene *propositiones* ein, die bey dem ersten Anblick schwer zu *demonstri*ren scheinen möchten, *exempli gr*[*atia*] wann ich setze

$$\begin{aligned} 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\&c. &= A\\ 1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\&c. &= B\\ 1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^3}+\&c. &= C \end{aligned}$$



381 43

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr Professor 68.

Auf Euer Hochedelgeb. Erinnerung gegen die vorige demonstration habe ich die prop. 6. ipsius demonstrationis allerdings unrichtig befunden daher ich dieselbe nebst den daraus folgenden in meinem letzteren Schreiben auszustreichen und an deren Stelle folgende zu substituiren bitte:

6. Ad hanc aequationem $(4n-1)m-1=a^2$ ex utraque parte addatur $-2a(4n-1)+(4n-1)^2$ fiet $(4n-1)(m-2a+4n-1)-1=(a-(4n-1))^2$

7. Quoniam vero a^2 est quadratum minimum quaesito satisfaciens ex hypothesi, erit $a^2<(a-4n+1)^2$ vel $a^2=$ eidem, sed aequale esse non potest ob $4n\pm 1$, erit ergo $(-2a+(4n-1))(4n-1)>0$. ergo $(4n-1)>2a$. est autem ex hypothesi $4n-1=\frac{a^2+1}{m}$. ergo $\frac{a^2+1}{m}>2a$ seu $a^2>2am-1$. seu $a>2m-\frac{1}{a}$

8. Sed per prop. 5. patet esse $a<m$ ergo $m>2m-\frac{1}{a}$ quod est absurdum si m. et a. sint integri, quod absurdum sequeretur ex $4mn-m-1=a^2$.

Vor einigen Tagen fielen mir unterschiedene propositiones ein, die bey dem ersten Anblick schwer zu demonstriren scheinen möchten, exempli gr. wenn ich setze
$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\&c=A$$
$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\&c=B$$
$$1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^3}+\&c=C \quad \text{et sic porro}$$
$$\text{Erit } \frac{\pi}{2}=A+\frac{B}{2}+\frac{C}{4}+\frac{D}{8}+\&c.$$

Goldbach's letter n° 73 to Euler, September (17th) 28th, 1743: reproduction of the first page (PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 76r)

The paragraphs numbered 6–8 complete Goldbach's proof by infinite descent that there are no squares of the form $(4n-1)m-1$. In his reply (cf. n° 74, note 4), Euler will acknowledge his surprised satisfaction at Goldbach's "magnificent" proof.

et sic porro, erit

$$\frac{\pi}{2} = A + \frac{B}{2} + \frac{C}{4} + \frac{D}{8} + \&c.$$

vel si ponatur

$$\begin{aligned} \frac{1}{1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \&c. \quad &= \quad \beta \\ 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \&c. \quad &= \quad \gamma \\ 1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \&c. \quad &= \quad \delta \end{aligned}$$

et sic porro, erit

$$\frac{\pi}{2} = \beta + \frac{\gamma}{4} + \frac{\delta}{4^2} + \frac{\varepsilon}{4^3} + \&c.^{[4]}.$$

Wann ich eine *seriem* mache in deren *terminis* der *numerator perpetuus* ist 1, die *denominatores* aber aus allen *numeris possibilibus omnium potestatum* bestehen, folgender gestalt:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} \pm \frac{1}{9} + \frac{1}{16} \pm \frac{1}{25} \pm \frac{1}{27} + \frac{1}{32} + \&c.,$$

so wird die *summa seriei in casu signi superioris* seyn 1, *in casu signi inferioris autem* (*quod omnibus denominatoribus imparibus praefigitur*) *erit summa seriei* $2\,\ell\,2 - 1$.[5]

Was E. H. bey der *Formula* der 7 terminorum welche 1,141 592 machen, erinnert haben ist gantz richtig, die andere Formul war aus versehen dahin geschrieben.[6]

Ob es zwar gar leicht ist zu *demonstri*ren daß keine *formula Algebraica huiusmodi* $a + bx + cx^2 + dx^3 + \&c.$ lauter *numeros primos* geben kan *posita* x *pro exponente terminorum*, die *coëfficientes* a, b, c, *&c.* mögen *numeri integri quicunque* seyn,[7] so giebt es doch *formulas* welche für vielen andern eine Menge *numerorum primorum* in sich halten; dergleichen ist die *series* $x^2 + 19x - 19$ so in den ersten 47 *terminis* nur 4 *numeros non primos* hat.[8]

Gleichwie *in casu* $4m+1 =$ *numero primo*, m *est* $=$ *duobus triangularibus* $+\,\square$, so könnte dennoch wohl seyn *in casu* $4m - 1 =$ *numero primo* daß $m =$ *duobus quadratis* $+\,\triangle$ wäre[9] *uti* $20 = 1 + 4 + 15$, wie wohl ich es noch nicht *probi*ret, und fernerer Untersuchung anheim stelle.

Der H. *Prof. Knutzen*[10] hat mir geschrieben daß er auf Eurer Hochedelgeb. einrathen seine *pensées* von dem *Magnet*en an die *Acad*[*emie*] *des Sciences* in Pariß gesandt hat, ich weiß aber nicht ob Eurer H. schon bekannt ist wie selbige dort aufgenommen, in welchem fall ich mir es zu melden bitte. Vor die Nachricht von den glücklichen *progres*sen der Königl[ich] Pr[eußischen] *Societ*ät der Wissenschafften[11] dancke ich dienstl[ich]. Die *Situation* Dero jetzigen Hauses hat mir der H. *Brigadier de Baudan* deutlich beschrieben.[12]

Von dem H. *Poleni* bin ich ersuchet worden ihm Eurer H. *Musicam*, wie auch *Comment*[*ariorum*] *Petrop*[*olitanorum*] *vol.* X und andere Bücher so bey der hiesigen *Acad*[*emie*] nach *A*[*nno*] 1738 heraus kommen,[13] als vor welche das Geld an H. *Marinoni* in Wien ausgezahlet werden soll, zu übersenden;[14] da es aber vorjetzo unmöglich ist ihm selbige von hieraus zu *procuri*ren,[15] so wird vieleicht ein Buchhändler in Berlin sich mit dieser *commission* zu *chargi*ren und das Geld davor an einen Kaufman in Wien zu *assigni*ren gefallen lassen. Wann nun E. H. hiezu etwas betragen wollten, würden Sie auch mich dadurch sehr *obligi*ren.[16]

Was die bewuste *pension* betrifft so beklage ich zwar daß dieselbe Eurer H. theils abgesprochen worden, glaube aber daß davon nichts eher mit Gewißheit gemeldet werden kan biß der *Etat* der *Acad*[*emie*] auf einen beständigen Fuß gesetzet seyn wird.[17]

Diese beyden *propositiones*: daß $8n + 3$ allezeit *in* 3 *quadrata*, und n *in tres trigonales resolvi*ret werden kan, sind *aequivalentes* und *concessa una sequitur altera*.

Es scheinet mir sehr *probable*, daß wann in der obgedachten Formul $x^2 + 19x - 19$ vor x gesetzt wird 2^m, alsdann *posito m numero quocunque integro aff*[*irmativo*] allezeit ein *numerus primus* herauskommt; wann aber dieses auch wahr wäre, würde es doch schwer zu *demonstri*ren seyn, imgleichen daß dieselbe Formul $x^2 + 19x - 19$ keinen *divisorem huiusmodi* $10n + 1$ hat.[18]

Ich verbleibe mit besonderer Hochachtung
Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.[t] Petersburg
den 28. *Sept.* 1743.

R 787 Reply to n° 72
Petersburg, September (17th) 28th, 1743
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 76–77v
Partial copy, 4 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 18v–20r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 255–257; *Euler-Goldbach* (1965), p. 180–182

74
Euler to Goldbach
Berlin, October 15th, 1743

Wohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats*-Rath

Nunmehr hat Ewr. Wohlgb. *Demonstration*, daß $(4n - 1)\, m - 1 \neq aa$, ihre völlige Richtigkeit;[1] dann da Dieselben vorher erwiesen, daß *posito aa omnium quadra-*

torum, si quae darentur, minimo, seyn müße $m > a$, anjetzo aber *pro eodem casu*, daß $(4n-1) > 2a$, so muß folglich seyn $(4n-1)\,m > 2aa$; nun aber ist $(4n-1)\,m = aa+1$, und wäre allso $aa+1 > 2aa$, welches nicht seyn kan *nisi sit* $a = 0$, *vel* $a = 1$ (dann hier muß das Zeichen $>$ nicht *majus*, sondern *non minus* heissen). Wann man aber setzt *vel* $a = 0$, *vel* $a = 1$, so wird die *Aequation* $(4n-1)\,m - 1 = aa$ unmöglich. Ich muß gestehen, daß ich nicht geglaubet hatte, daß dieses *Theorema* auf eine so leichte und schöne Art bewiesen werden könnte, und bin dahero versichert daß die meisten *Theoremata Fermatii* auf eine gleiche Art bewiesen werden können, weswegen ich Ewr. Wohlgeb. um so viel mehr für die *Communication* dieser Herrlichen *Demonstration* verbunden bin. Ungeacht nun daraus folget, daß auch diese *Formul* $4mn-m-n$ kein *Quadrat* seyn könne, so habe ich doch nach Ewr. Wohlgb. Anleitung darüber folgende *Demonstration* gemacht.

Qui negat veritatem propositionis $4mn-m-n \neq aa$, *is statuere debet dari quadratum aa minimum, cui formula* $4mn-m-n$ *aequari possit. Sit ergo aa hoc quadratum minimum, sitque* $4mn-m-n = aa$, *erit* $(4m-1)\,(4n-1)-1 = 4aa$. *Addatur utrinque* $-8a\,(4n-1)+4\,(4n-1)^2$, *erit*

$$(4m-1-8a+4\,(4n-1))\,(4n-1)-1 = 4\,(a-4n+1)^2 = \Box.$$

Quod cum praecedente minus esse nequeat, sequitur

$$(4m-1-8a+4\,(4n-1))\,(4n-1) > (4m-1)\,(4n-1)$$

ideoque $4n-1 > 2a$ *(ubi signum* $>$ *mihi significat* <u>non minus</u>*). Simili modo demonstrabitur esse* $4m-1 > 2a$. *Sit ergo* $4m-1 = 2a+p$ *et* $4n-1 = 2a+q$, *eritque* $p > 0$ *et* $q > 0$, *unde fiet* $(4m-1)\,(4n-1) = 4aa+2a\,(p+q)+pq$, *at est* $(4m-1)\,(4n-1) = 4aa+[1]$ *et ideo* $2a\,(p+q)+pq = 1$, *quod fieri nequit nisi sit* $a = 0$, *et* $p = [1]$ *et* $q = 1$. *Verum aliunde constat esse non posse* $a = 0$. *Quamobrem non datur quadratum minimum* <u>*aa*</u> *formulae* $4mn-m-n$ *aequale et consequenter haec formula quadratum nullo modo esse potest. Q.* [*E. D.*]

Ich habe noch einen grossen Vorrath von dergleichen *Theorematis*, welcher *Demonstration*, wann solche auf gleiche Art solte herausgebracht werden können, gewiß nicht wenig zu Erweiterung dieser Wis[sen]schafft bey tragen würde. Diese *Theoremata*, wie ich sie der Ordnung nach herausgebracht habe, sind folgende: nehmlich alle nachfolgende *Formulae* können *nullo modo numeros quadratos* geben:

I.	$4mn-1\,(m+n)$
II.	$4mn+3\,(m+n)$
III.	$8mn-1\,(m+n)$
IV.	$8mn-3\,(m+n)$
V.	$8mn\pm 3\,(m-n)$
VI.	$8mn\pm 5\,(m-n)$
VII.	$8mn+5\,(m+n)$
VIII.	$8mn+7\,(m+n)$

$$\begin{array}{rl}
\text{IX.} & 12mn - 1\,(m+n) \\
\text{X.} & 12mn + 5\,(m+n) \\
\text{XI.} & 12mn \pm 5\,(m-n) \\
\text{XII.} & 12mn \pm 7\,(m-n) \\
\text{XIII.} & 12mn - 7\,(m+n) \\
\text{XIV.} & 12mn + 11\,(m+n) \\
\hline
\text{XV.} & 20mn - 1\,(m+n) \\
\text{XVI.} & 20mn - 3\,(m+n) \\
\text{XVII.} & 20mn \pm 3\,(m-n) \\
\text{XVIII.} & 20mn - 7\,(m+n) \\
\text{XIX.} & 20mn \pm 7\,(m-n) \\
\text{XX.} & 20mn - 9\,(m+n) \\
\text{XXI.} & 20mn + 11\,(m+n) \\
\text{XXII.} & 20mn \pm 13\,(m-n) \\
\text{XXIII.} & 20mn + 13\,(m+n) \\
\text{XXIV.} & 20mn \pm 17\,(m-n) \\
\text{XXV.} & 20mn + 17\,(m+n) \\
\text{XXVI.} & 20mn + 19\,(m+n) \\
\hline
\text{XXVII.} & 24mn - 1\,(m+n) \\
\text{XXVIII.} & 24mn - 5\,(m+n) \\
\text{XXIX.} & 24mn - 7\,(m+n) \\
\text{XXX.} & 24mn \pm 7\,(m-n) \\
\text{XXXI.} & 24mn - 11\,(m+n) \\
\text{XXXII.} & 24mn \pm 11\,(m-n) \\
\text{XXXIII.} & 24mn \pm 13\,(m-n) \\
\text{XXXIV.} & 24mn + 13\,(m+n) \\
\text{XXXV.} & 24mn \pm 17\,(m-n) \\
\text{XXXVI.} & 24mn + 17\,(m+n) \\
\text{XXXVII.} & 24mn + 19\,(m+n) \\
\text{XXXVIII.} & 24mn + 23\,(m+n) \\
 & \textit{etc.};
\end{array}$$

ferner ist auch $7mn - m - n \neq aa$.

Ausser diesen habe ich auch noch einige, welche *generaler* sind,[2] als $4kmn - m - n \neq \square$, oder auf folgende Art *exprimir*t:

Theorema. Existente $\underline{mn}$ *divisore quocunque numeri* N, *dico formulam* $4N - m - n$ *quadratum nunquam esse posse.*

Hernach kan auch diese *Formul* $4\,(4k+1)\,mn - (8k+1)\,(m+n)$ nimmer ein *Quadratum* geben.

Die *Theoremata*, welche Ewr. Wohlgeb. durch unendlich viel *series* den *valorem* $\frac{\pi}{2}$ zu *exprimi*ren gefunden,[3] waren mir schon längst bekant: dann da

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} - \frac{2}{3} + \frac{2}{5} - \frac{2}{7} + \textit{etc.}$$

so wird seyn
$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{2-1} - \frac{2}{4-1} + \frac{2}{6-1} - \frac{2}{8-1} + etc.$$
oder
$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4-\frac{1}{2}}\ etc.;$$
wann nun ein jeglicher *terminus in progressionem geometricam resolvir*t wird, so kommt
$$\begin{array}{ccccccc}
\frac{\pi}{2} = & 1 & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{2^2} & +\frac{1}{2^3} & +\frac{1}{2^4} & etc. \\
& -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2\cdot 4} & -\frac{1}{2^2\cdot 8} & -\frac{1}{2^3\cdot 16} & -\frac{1}{2^4\cdot 32} & etc. \\
& +\frac{1}{3} & +\frac{1}{2\cdot 9} & +\frac{1}{2^2\cdot 27} & +\frac{1}{2^3\cdot 81} & +\frac{1}{2^4\cdot 243} & etc. \\
& & & & etc. & &
\end{array}$$
$$\begin{aligned}
&+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\ etc. \\
&+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{25}\ etc.\right) \\
= \quad &-\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{8}+\frac{1}{27}-\frac{1}{64}+\frac{1}{125}\ etc.\right) \\
&+\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{16}+\frac{1}{81}-\frac{1}{256}+\frac{1}{625}\ etc.\right) \\
&\qquad\qquad etc.
\end{aligned}$$
Gleicher gestalt, da $\frac{\pi}{2} = \frac{4}{1\cdot 3} + \frac{4}{5\cdot 7} + \frac{4}{9\cdot 11}$ *etc.* so wird seyn
$$\frac{\pi}{2} = \frac{4}{2^2-1} + \frac{4}{6^2-1} + \frac{4}{10^2-1} + etc. = \frac{1}{1^2-\frac{1}{4}} + \frac{1}{3^2-\frac{1}{4}} + \frac{1}{5^2-\frac{1}{4}} + etc.;$$
wann nun ein jeglicher *terminus* in eine *seriem geometricam resolvir*t wird, so komt Ewr. Wohlgb. andere *Expression* heraus:
$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{2} \quad = \quad & 1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+etc. \\
&+\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+etc.\right) \\
&+\frac{1}{16}\left(1+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+etc.\right) \\
&etc.
\end{aligned}$$
In der *Serie* $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\pm\frac{1}{9}+\frac{1}{16}\pm\frac{1}{25}\pm\frac{1}{27}+\frac{1}{32}+\frac{1}{36}+etc.$ wovon Ewr. Wohlgeb. *casu signorum superiorum* die *summ* $=1$, *at casu signorum inferiorum* die *summ*

$= 2\,\ell\,2 - 1$ angeben, wird ein Versehen seyn, indem alle *denominatores unitate minui debebant.* Alsdann aber kommen eben diejenigen *theoremata* heraus, welche Ewr. Wohlgeb. mir schon längst *communici*ret, und gütigst erlaubet, dieselben nebst Dero *Demonstration* im 9ten *Tomo* zu *publici*ren.[4]

Die *series* deren *terminus generalis* ist $xx + 19\,(x-1)$ ist in der That wegen der häuffigen *numerorum primorum*, so darinn vorkommen, sehr merkwürdig.[5] Inzwischen finden sich doch die *numeri compositi* um so viel häuffiger ein, je weiter man die *Seriem continuir*t; dann da in den ersten 47 *terminis* nur 4 *numeri non primi* kommen, so kommen in den ersten 75 *ter*[*minis*] schon 14 *numeri non primi* hervor: So weit habe ich diese *seriem continuir*t, und dieses war genug, um Ewr. Wohlgb. beyde Muthmassungen über die Beschaffenheit dieser *Progression* zu wiederlegen.[6] Dann erstlich habe ich gesehen, daß nicht immer ein *Numerus primus* herauskommt, wann vor x eine *potestas binarii* gesetzt wird: der 64ste *Terminus* ist $= 5293 = 67 \cdot 79$. Hernach weiset der 73ste *Terminus* $6697 = 37 \cdot 181$, daß die *divisores formae* $10n + 1$ nicht *excludirt* werden. Was im übrigen die *divisores terminorum hujus seriei* anlangt, so ist zu merken, daß keine andern Statt finden, als welche zugleich *divisores numerorum hujus formae* $19aa - 23bb$ sind und *vicissim*.[7]

Ewr. Wohlgb. *Observation*, daß, wann $4m - 1 =$ *numero primo*, auch m ein *numerus* sey *ex duobus quadratis et triangulari compositus*, kan ich weder *refuti*ren, noch *demonstri*ren, in dem ich noch nicht einmahl einen *numerum* habe finden können, der nicht *in duo quadrata et numerum trigonalem resolubilis* wäre:[8] zum wenigsten gibt es unter 100 keinen. Sollten nun alle *numeri* diese Eigenschafft haben, so hätte auch diese *Observation* ihre Richtigkeit, aber auf eine solche Art, als wann ich sagen wollte, daß m immer eine *summa trium trigonalium* oder 4 *quadratorum* wäre.

Daß diese beyden *Propositiones* $8m + 3 =$ *summae* $3\,\square$ *et* $m =$ *summae* $3\,\triangle$ *aequivalentes* sind, ist leicht einzusehen und *dependi*ret eben davon auch die *Demonstration*, daß *omnis numerus summa* 4 *quadratorum* sey. Dann *si* $m = \dfrac{aa+a}{2} + \dfrac{bb+b}{2} + \dfrac{cc+c}{2}$ *erit* $8m + 3 = (2a+1)^2 + (2b+1)^2 + (2c+1)^2$, folglich ist immer $8m + 4$ eine *summa* 4 *quadratorum*; und ferner *ejus quadrans* $2m + 1$ folglich *omnis numerus impar et per consequens omnis omnino numerus erit in* 4 *quadrata resolubilis.* Bey dieser *form* $8m + 3$ ist zu merken, daß so offt dieselbe ein *numerus primus* ist, [sie] auch in dieser *form* $2aa + bb$ enthalten sey. Um dieses und andere dergleichen *theoremata* zu beweisen, kommt das meiste auf folgende *Lemmata* an, wovon ich noch keine rechte *Demonstration*en habe finden können.

I. *Si numerus integer* $\underline{n}$ *non sit summa duorum quadratorum integrorum, talis quoque non erit in fractis, seu nullus numerus npp in duo quadrata integra resolvi poterit. Atque vicissim si npp fuerit summa duorum quadratorum, etiam numerus* $\underline{n}$ *erit summa duorum quadratorum idque in integris.*

II. *Si numerus* $\underline{n}$ *non fuerit summa* 3 *quadratorum in integris, etiam talis non erit in fractis.*

III. *Si numerus npp fuerit summa quatuor quadratorum, erit quoque numerus* $\underline{n}$ *summa quatuor quadratorum integrorum cyphra non exclusa.*[9]

Ich kan mich nicht errinnern, ob Ewr. Wohlgeb. nachfolgende *Expression* bekannt ist:[10]

$$\begin{aligned} a^m \quad &- \quad \frac{n}{1}(a+b)^m + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(a+2b)^m \\ &- \quad \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(a+3b)^m + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(a+4b)^m - etc.; \end{aligned}$$

wann $\underline{m}$ *et* $\underline{n}$ *numeri integri* sind und $m < n$ so ist die gantze *Expression* immer $= 0$.

Nachfolgendes *Theorema* scheint mir auch merkwürdig zu seyn: *Si fuerit* $aa+4n$ *numerus primus* $= p$*, atque d sit divisor quicunque numeri* $\underline{n}$*, erit p numerus in hac forma* $dxx+yy$ *contentus (idque unico modo). E*[*xempli*] *Gr*[*atia*] *Sit* $n = 30$*, sumto* $a = 11$ *fit* $4n + aa = 241 = p$*. Continetur ergo numerus* 241 *in sequentibus formis* $xx + yy$; $2xx + yy$; $3xx + yy$; $5xx + yy$; $6xx + yy$; $10xx + yy$; $15xx + yy$; *et* $30xx + yy$; *in unaquaque autem semel tantum continetur.*[11] Gleich wie eine *summa duorum quadratorum inter se primorum* $aa + bb$ keine andere *divisores* haben kan, als welche in dieser *form* $4n + 1$ enthalten sind, allso kan ich auch *demonstrir*en daß alle *divisores formae* $a^4 + b^4$ in dieser *formul* $8n + 1$ enthalten sind; gleicher gestalt, daß alle *divisores* von $a^8 + b^8$ *numeri hujus formae* $16n + 1$ seyn müssen.

Et generaliter:[12] *Numerorum in hac forma* $a^{2^m} + b^{2^m}$ *contentorum alii diviso*[*res*] *non dantur, nisi hujus naturae* $2^{m+1}n + 1$.

Wann diese *Factores in infinitum* würklich mit einander *multiplicir*t werden,

$$(1-n)\left(1-n^2\right)\left(1-n^3\right)\left(1-n^4\right)\left(1-n^5\right)\left(1-n^6\right)\ etc.$$

so kommt nachfolgende *series* heraus

$$1 - n^1 - n^2 + n^5 + n^7 - n^{12} - n^{15} + n^{22} + n^{26} - n^{35} - n^{40} + n^{51} + n^{57} - \ etc.$$

wovon *per inductionem* leicht erhellt, daß *omnes termini in hac forma* begriffen sind $n^{\frac{3xx\pm x}{2}}$, und das *signum* + *praefixum* haben, wann x ein *numerus par*, das *signum* − aber, wann x ein *numerus impar* ist. Ich habe aber noch keine *methode* finden können, wodurch ich die *Identitaet* dieser 2 *Expression*en *demonstri*ren könnte; der H. *Prof. Nicolaus Bernoulli* hat auch *praeter inductionem* nichts darüber herausbringen können.[13]

Ich habe vor einigen Wochen von Ewr. Wohlgeb. *Corresponde*[*nten*] in Königsberg H. *Theg*en einen Brief bekommen, mit einem Einschluß von Denselben, davon die überschrifft war *A Mons*[*ieur*] *le Baron de Heimenthal à Königs*berg: der H. Thegen schrieb mir dabey nichts anders, als weilen der H. Kammerherr von Korff schon durch Königsberg *passir*t wäre, daß ich diesen Brief bestellen möchte.[14] Diese *Commission* hat mich über die massen *embarassir*t, indem ich keine *Connexion* zwischen dem H. Kammerherrn Korff und dem H. *Baron* von *Heimenthal* daraus abnehmen konnte, und aus der überschrifft schliessen musste daß der letstere Sich in Königsberg aufhalten müsste, von wannen mir doch der Brief zugeschickt worden. Weil ich nun nicht wusste was dabey zu thun, so habe ich den H. *Prof. Strube* zu Rath gezogen, deßen Meinung dahin gegangen, daß, weilen H. Thegen *absolute* von dem H. *Cammer*herr Korff Erwehnung gethan, der Brief an Denselben (nach Stralsund) geschickt werden müsste, als welcher Zweifels ohne schon wissen würde, was damit anzufangen: und dieses ist auch durch den H. *Prof. Strube* geschehen. Inzwischen glaube ich doch fest, daß hierinn ein grosses Versehen muß begangen worden seyn. Daran ist aber der H. Thegen einig und allein Schuld, und ich glaube alle *Precaution*en genommen zu haben, um alle Schuld von mir abzulehnen. Ich wollte erstlich den Brief sogleich Ewr. Wohlgeb. wiedrum zusenden, ich musste aber beförchten daß Sachen von *Importanz* darinn enthalten welche keinen so langen Aufschub leiden könnten.

Was die *Academie* von *Paris* über des H. *Prof. Knutzen Piece de Magnete* urtheilen wird, solches wird erst künfftiges Jahr nach Ostern bekannt werden.[15]

Von H. *Poleni* habe ich seit langer Zeit keine Briefe gehabt. Die Bücher welche er verlangt, sind hier nicht zu haben, und das *Volumen X Comment*[*ariorum*] ist ja noch nicht einmal gedruckt, in dem das *V*[*olumen*] *IX* noch nicht herausgekommen. Was aber seit *A*[*nno*] 1738 *publicir*t worden, befindet sich in *Leipzic*, daher es verschrieben werden müsste. Durch diesen *Canal* könnte es aber der H. *Marinoni directe* kommen lassen, indem zwischen *Leipzic* und Wien ein beständiges *Commercium* ist. Allhier wüsste ich nicht einmal einen Buchhändler zu finden, welcher nach Wien etwas bestellen könnte.[16]

Die *Assemblées* der neuen *Societä*t werden noch beständig fortgesetzet, und jederzeit wie in *Petersburg* eine *Piece* vorgelesen; die HH. Staats *Ministri* von *Podewils* und *Borck*, der H. *General* Feld *Mar*schall von *Schmettau* und andre Standes *Person*en wohnen denselben fleissig bey, letstens besuchte uns auch *M.*^{r} *de Voltaire*. Ihro *Majestä*t der König aber haben darüber noch keine *positive resolution* ertheilet. Inzwischen versichern die Herren *Ministri* daß sol[ches] nicht ausbleiben werde.[17]

Verwichenen *Michaelis* haben wir endlich unser Hauß bezogen, nach dem ich für etliche 100 Rthl. darinn *repari*ren lassen, und wohnen darinn nebst dem H. Kammer Junker *Rasumoffski* und H. *Teploff* vergnügt beysammen.[18] Wir erwarten aber sämmtlich mit dem grösten Verlangen die erfreuliche Nachricht von völliger Wiederherstellung der *Academi*e in *Petersburg*, und *in specie* des H. Schumacher.[19]

Das betrübte Schicksaal des H. *Brigadier Baudan* beklage ich von Herzen, und wünsche Ihm ein baldiges erwünschtes *Engagement*.[20]

Der H. *Prof. Strube*, welchem H. *Nartoff* auch seine *Gage refusir*t, und meine gantze *Familie* empfehlen sich Ewr. Wohlgeb. gehorsamst, und ich verbleibe mit der schuldigsten Hochachtung

Ewr. Wohlgebohrnen

gehorsamster Diener

L. Euler.

Berlin den 15^{ten} *Octobr.*
1743.

R 788 Reply to n° 73
Berlin, October 15th, 1743
Original, 4 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 81–84v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 258–265; *Euler-Goldbach* (1965), p. 182–187

75
Goldbach to Euler
Petersburg, December (3rd) 14th, 1743[1]

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*

Aus Eurer Hochedelgebohrnen Schreiben vom 15. *Oct.* habe ich mit vergnügen ersehen, daß endlich aus meiner *demonstration* etwas geworden ist;[2] ob mir nun wohl meine andere *occupationes* fast keine Zeit übrig gelassen die von E. H. beygefügten andere *Theoremata* etwas genauer zu untersuchen, so hoffe ich doch daß man künfftig in dieser *generali aequatione impossibili* $emn - f\,(m+n) \neq a^2$ die *conditiones numerorum* e *et* f in unendlich vielen *casibus* wird bestimmen können.[3]

In der *serie* $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} \pm \frac{1}{9} + \frac{1}{16} \pm \frac{1}{25} \pm \frac{1}{27}$ *&c.* und den von mir angegebenen *summis* ist gar kein Fehler, wie solches Ew. Hochedelgeb. wann Sie selbige noch ein mal zu betrachten belieben, leicht ersehen werden.[4]

Daß die *divisores formae* $10n+1$ in der *serie cuius terminus generalis est* $x^2+19x-19$, nicht *excludi*ret werden, ist so offenbar, daß es mir des morgens nach abgang meines vorigen Briefes, als ich ohngefehr daran dachte selbst beyfiel, ich achtete aber die *gloriam* der ersten Entdeckung dieses *erroris* nicht so wichtig daß ich selbige durch ein besonderes nur bloß dazu gewidmetes Schreiben *notifici*ren sollte.[5]

Die *series* $a^m - n\,(a+b)^m + n\,(n-1)\,(a+2b)^m -$ *&c.* $= 0$ ist mir vorher gar nicht bekannt gewesen; um mich von der Wahrheit derselben zu *convinci*ren, wollte ich *gradatim* erst $m = 1$, $m = 2$, *&c.* setzen, und denn *successive* auch $n = 1$, $n = 2$, *&c.* nehmen, so würde es sich zeigen, daß auch in den grössern *valoribus* m *et* n die *series* sich allezeit *destrui*ren müsse.

Bey der *serie* $(1-n)\left(1-n^2\right)\left(1-n^3\right)$ (*&c.*) ist mir ein besonderes *problema* eingefallen: *Data serie A infinitorum terminorum, signis* $+$ *et* $-$ *dato ordine variantibus procedentium invenire seriem B huius naturae ut in producto AB signa* $+$ *et* $-$ *eodem ordine sibi succedant, quo ordine sibi succedebant in A.* Dieses *problema* kan sehr leicht *solvi*ret werden in dem *casu* $A = (1-n)\left(1-n^2\right)\left(1-n^3\right)$ *&c.*, obgleich darin, wie E. Hochedelgeb. angemerckt haben, die *signa* +, − auf eine gar ungewöhnliche Art abwechseln, dan wann ich setze

$$B = (1 - n^{\frac{1}{2}})(1 - n^{\frac{3}{2}})(1 - n^{\frac{5}{2}})\ \&c.$$

so wir[d] *A multiplicata per B* eine neue *series* welche dies[elbe] *variationem signorum* in sich hält.[6]

Es thut mir sehr leyd daß der Brief dessen E. H. Erwehnung thun, Deroselben einige Mühe verursachet.[7] Der H. *Leg[ations] Secretaire Strube* hat Eurer H. hierin einen guten Rath gegeben dafür ich demselben sehr verbunden bin. Ich *gratuli*re Eurer H. von hertzen zu Dero neuen Wohnung und wünsche Deroselben darin alles ersinnliche Vergnügen, wornechst ich mit vieler Hochachtung verharre

Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S. Petersbourg
den *Dec.* 1743.[8]

(*vert[e]*)

Dieses wird durch meinen *Correspondent*en in Königsberg[9] bestellet werden und dahero vieleicht einen Post-Tag später ankommen.

R 789 Reply to n° 74
Petersburg, December (3rd) 14th, 1743
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 78–79v
Address (fol. 79v): "*A Monsieur / Monsieur Euler / de l'Academie des Sciences / à / Berlin.*"
Partial copy, 3 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 20r–21r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 266–267; *Euler-Goldbach* (1965), p. 188–189

76
Euler to Goldbach
Berlin, January 21st, 1744

Wohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats*-Rath

Bey dem Antritt dieses neuen Jahrs habe zuvorderst die Ehre Ewr. Wohlgeb. meine gehorsamste *Gratulation* abzustatten, und mich sammt den meinigen Dero beständigen Wohlgewogenheit und Freundschafft ergebenst zu empfehlen.

Ausser den vorhergemeldten *Theorematibus* über die *formulas, quae quadratos numeros praebere nequeunt*,[1] habe ich seit der Zeit in dieser *Materie* nichts andres angemerkt, als daß diese *Formul* $2abc-b-c$ kein *Quadratum* seyn könne, *si vel b vel c fuerit numerus impar formae* $4n-1$.[2] Ferner kan auch diese *Formul* $2abc-b+c$ kein *quadrat* seyn, *si fuerit a numerus impar, et b numerus vel hujus* $4n+1$ *vel* $4n+2$ *formae*. Hernach kan auch $2abc+b\pm c$ nimmer ein *Quadratum* seyn, *si fuerit a numerus impar, et b vel hujus formae* $4n-1$ *vel hujus* $4n-2$. Ich kan aber von allen diesen *Proposition*en noch keine andere völlig *demonstri*ren, als diejenigen, welche aus $4mn-m-n \neq aa$ fliessen, und welche Ewr. Wohlgeb. folglich auch durch Dero letstgemeldte *Methode demonstri*ren können.

Ich kan noch nicht einsehen, daß kein Schreibfehler in der von Ewr. Wohlgb. letst angeführten *Serie*

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\pm\frac{1}{9}+\frac{1}{16}\pm\frac{1}{25}\pm\frac{1}{27}+\frac{1}{32}+\textit{etc.}$$

solte unterlauffen seyn.[3] Dann da Ewr. Wohlgeb. gefunden daß

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{26}+\textit{etc.}$$

so muß diese *series* $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+$ *etc.* nothwendig kleiner als 1 seyn, indem so gar der *Defectus* angegeben werden kan, welcher ist

$$\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{7\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 9}+\frac{1}{15\cdot 16}+\frac{1}{24\cdot 25}+\textit{etc.}$$

Gleichergestalt da fest *demonstrir*t worden daß

$$2\,\ell\,2-1=\frac{1}{3}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{15}-\frac{1}{24}-\frac{1}{26}+\frac{1}{31}+\textit{etc.}$$

so kan ja eben diese *series*, *si singuli denominatores unitate augeantur*, unmöglich eben diese *summ* $2\,\ell\,2-1$ haben: dahero noch mehr in meiner Meinung gestärket werde, daß Ewr. Wohlgeb. vergessen die *Denominatores* um 1 zu vermindern.

Daß diese *Series* $a^m-n\,(a+b)^m+\frac{n\,(n-1)}{1\cdot 2}\,(a+2b)^m-$ *etc.* $=0$ *si fuerit* $n>m$, erhellet *ex natura serierum recurrentium.* Dann da alle *progressiones algebraicae ad genus recurrentium* gehören, dergestalt daß ein jeder *terminus ex aliquot praecedentibus determinir*t werden kan, so muß auch diese *series* a^m, $(a+b)^m$, $(a+2b)^m$, *etc.* eine *series recurrens* seyn, und eine beständige Verhältnüß zwischen einem jeden *Termino* und einigen vorhergehenden statt finden. Dieses kan so gar *infinitis modis* geschehen, indem die *scala relationis* seyn kan

$$1-n+\frac{n\,(n-1)}{1\cdot 2}-\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\textit{etc.}$$

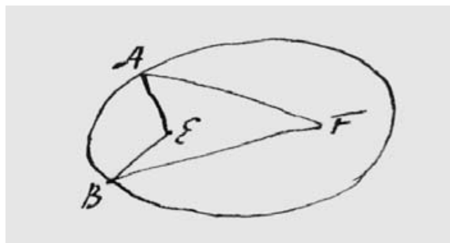
wann nur $n>m$.

Ich zweifle sehr ob man eine leichtere *Demonstration* davon wird finden können, als diese welche *ex natura serierum recurrentium* von selbsten folget, dann wann man sich schon *per Inductionem* von der Wahrheit davon überführet, so siht man doch nicht den Weg so dazu geführet, ein.

Ewr. Wohlgeb. *Reflexion* über die *Expression* $(1-n)\left(1-n^2\right)\left(1-n^3\right)$ *etc.* in Ansehung eines *factoris* $(1-n^{\frac{1}{2}})(1-n^{\frac{3}{2}})(1-n^{\frac{5}{2}})$ *etc.* also daß das *factum si evolvatur* eine gleiche Abwechslung der *signorum* + *et* − gebe,[4] könnte vielleicht bey andern Untersuchungen einigen Vortheil bringen; allein in der *serie*, welche ich daraus hergeleitet, habe ich daraus noch keinen Nutzen ziehen können.

Man siehet hier schon seit mehr als 8 Tagen einen ziemlich grossen *Cometen*, welcher da er *in Coelo* fast gar keinen *motum* zu haben, und doch immer grösser zu werden scheinet, allem ansehen nach gerad auf die Erde zu geht.[5]

In den *Act*[*is*] *Lips*[*iensibus*] *M*[*ensis*] *Nov.* ist ein *Problema proponir*t worden, solches Inhalts:



Circa data duo puncta E et F lineam curvam describere hujusmodi, ut si ex duobus ejus punctis quibusvis A et B ad illa puncta E et F ducantur rectae, area AEB futura sit semper proportionalis angulo AFB. Vel si corpus in peripheria hujus curvae revolvatur, ut areae, quas circa punctum E describit, proportionales sint angulis, quos circa alterum punctum F absolvit.[6]

Ich verbleibe mit der vollkommensten Hochachtung
Ewr. Wohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 21 *Jan.*
1744.

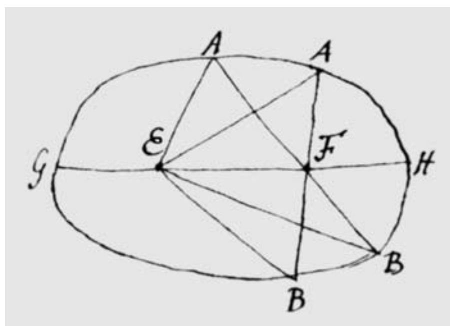
R 790 Reply to n° 75
Berlin, January 21st, 1744
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 88–89r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 268–270; *Euler-Goldbach* (1965), p. 189–190

77
Goldbach to Euler
Moscow, March (1st) 12th, 1744

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*

Ohngeachtet meine Dancksagung für den von Eurer Hochedelgeb. an mich abgestatteten gütigen Neujahrswunsch[1] etwas spät kommet, so wünsche ich nichts desto weniger Deroselben aus aufrichtigem hertzen zu dem längst angefangenen Jahre alles ersinnliche Wohlergehen wovon es mir jederzeit sehr lieb seyn wird mehrere Nachrichten zu erhalten.

Das *Problema*[2] dessen Ew. Hochedelg. aus den *Actis Lips*[*iensibus*] Erwehnung thun werden Sie ohne zweiffel schon *solvi*ret haben.[3]



So viel ich sehe hat die *curva* unter andern diese Eigenschafft daß wann sie durch eine *rectam quamcunque per punctum F transeuntem* in zwey Theile getheilet, und von dem jenigen Theile in welchem das *punctum E* stehet das *triangulum rectilineum AEB* abgezogen wird, das *trilineum residuum AEB* allezeit eine *aream constantem areae dimidiae totius curvae aequalem* habe, oder daß die *pars curvae EAGB* allezeit = sey der *parti curvae EAHB*.

Die vermeinten *Summae Serierum* sind allerdings auß einem offenbaren Fehler entstanden.[4]

Die von Eurer HochE. angegebenen vielen *casus* wodurch die *quantitates* e und f in $emn - f\,(m+n) \neq a^2$ bestimmet werden,[5] geben mir ursach zu vermuthen daß selbige noch viel *general*er *determini*ret werden können ob mir gleich dazu bißhero keine *methode* bekannt ist, indessen scheinet doch auch diese kleine *observation* einigen Nutzen zu haben, daß die *aequatio impossibilis*, so wie sie angedeutet worden, allezeit ihre Richtigkeit hat wann $a^2 \leqslant 4\,(e-f)^2$, allwo das *signum* $\leqslant$ *minus* oder = bedeutet gleich wie ich seit E. H. vorigem Schreiben das *signum* $\geqslant$ vor *maius vel* = zu meinem eigenen Gebrauch angenommen.[6]

Den 12. *Febr.* ☿ *st. n.* bin ich um 11 uhr vor Mittage von *S.* Petersburg abgereiset und den 22. ♄ um Mittage in *Moscau* angekommen.

Ich habe zwar vernommen daß die *Societ*ät der Wissenschafften in Berlin eine sehr *solenn*e Zusammenkunfft gehalten, die gedruckte Beschreibung aber habe ich noch nicht gesehen.[7] Ich verbleibe mit vieler hochachtung

Eurer HochEdelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

Moscau den 12. *Mart. st. n.* 1744.

P. S. Ich wolte nicht daß Eurer Hochedelgeb. durch Einlage an Hn *Marinoni*[8] einige Beschwerde verursachet würde, sondern bitte nur den Brief bey vorfallender Gelegenheit *franco* nach Wien zu befördern und im fall sich dazu keine Gelegenheit innerhalb 2 biß 3 Monaten zeigen sollte mir selbigen alsdann wieder zurückzusenden.

In einer Gelehrten Zeitung habe ich, wo ich mich recht erinnere, gelesen, daß eines gewissen *Medici* Hn *D*[*octor*] Müllers Gedancken von der *causa gravitatis* eine fernere Untersuchung *meriti*rten; diese werden Eurer HochE. ohne Zweiffel schon bekannt seyn.[9]

Ich möchte wohl wissen ob nicht bey einem dortigen Buchhändler ein frantzösisches Reimbuch[10] darin die Reimwörter so man verlanget nach einander zu finden sind, als *ame*, *dame*, *lame*, *trame &c.* zu bekommen wäre?

Auf das *Couvert* bitte ich künfftig, damit mir die Briefe desto eher zugesandt werden, zu setzen: *Conseiller d'Etat au Departement des Affaires Etrangeres à Moscou.*

R 791 Reply to n° 76
Moscow, March (1st) 12th, 1744
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 80–81r
Partial copy, 2 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 21v–22r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 271–272; *Euler-Goldbach* (1965), p. 191–192

78
Euler to Goldbach
Berlin, April 25th, 1744

Wohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

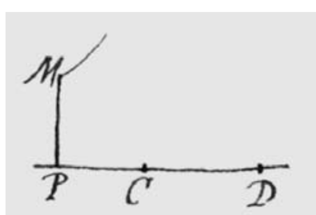
Ewr. Wohlgeb. Schreiben an H. *Marinoni*[1] habe ich dem hiesigen Buchhändler H. *Haude* abgegeben, welcher mir versprochen dasselbe ohne Verzug dergestalt zu bestellen, daß solches dem H. *Marinoni franco* eingehändiget werde: und kürzlich hat er mich versichert, daß das selbe schon würklich überliefert worden.

Keiner von den hiesigen Buchhändlern will etwas von einem Frantzösischen Reim-Register wissen;[2] der H. *Prof. Strube* aber, welcher Ewr. Wohlgeb. seine gehorsamste Empfehlung macht, meint, daß er einmal ein solches Buch gesehen, er konnte sich aber nicht recht erinnern, und hat mir auch bißher keine weitere Nachricht geben können.

Ich kan mich nicht besinnen, etwas von eines *D*[*octor*] Müllers Gedancken *de causa gravitatis* gelesen zu haben; die Gelehrten Zeitungen werden mir auch sehr unrichtig *communicir*t. Inzwischen kan ich mir doch nicht einbilden, daß dieser *Auctor* etwas merkwürdiges hierüber entdecket haben sollte, dann hiezu gehört eine solche tiefe Einsicht in die *sublim*ste *Mechanic*, dergleichen bey einem noch unbekannten Mann nicht leicht zu vermuthen ist. Und ohne diese Erkänntnüß verfällt man gemeiniglich auf blosse *Chimer*en, und *contradictori*sche *Hypotheses*, welche eben so wenig mit den wahren *Principiis* der *Physic* bestehen, als den *Phenomen*en ein Genügen leisten können.[3]

Ich bin in Verfertigung meiner *Piece*, welche ich über den *Magnet*en im vorigen Jahr nach *Paris* geschickt,[4] auf einen Einfall um die *Causam Gravitatis* zu erklären, gerathen, welcher mir je länger je gründlicher vorkommt; ungeacht ich mich noch nicht im Stande befinde denselben völlig auszuführen.[5] Anjetzo sollte man hier schon wissen können, wer dieses Jahr den Preiß bey der *Academie* zu *Paris* erhalten, weil mir nun der H. *Clairaut* noch nichts davon gemeldet, so kan ich gewiße Rechnung machen, daß ich dismal wieder leer ausgegangen. Ich kan auch die Ursach leicht errathen, dann da ich um meine Erklärung zu bekräftigen, die Meinung der Engelländer von der *Attraction* als einem *attributo essentiali corporum* ziemlich stark angegriffen und wiederleget, so wird dieses den Herrn *Commissariis*, welche, wie ich seit der Zeit erfahren, dieser Meinung völlig beystimmen, gar nicht gefallen haben.

Die Eigenschafft, welche Ewr. Wohlgeb. von den *curvis* dem in den *Actis Lipsiensibus proponir*ten *problemati satisfacientibus* entdecket haben[6] hat ihre völlige Richtigkeit, und ist allso allen den unendlich vielen krummen Linien wodurch das *problema solvir*t wird gemein. Ich habe vor etwas Zeit eine ausführliche *Solution* darüber nach Leipzig geschickt, darinn ich *ex quolibet curvarum algebraicarum ordine* eine angegeben. Aus den *Sectionibus conicis satisfacir*t der *Circul*, da ein *punctum* im *Centro* das andere in der *Peripheri*e angenommen wird.



*Ex lineis tertii ordinis satisfacir*t diese *Aequation* $yy = \dfrac{3axx - x^3}{x-a}$ *positis* C *et* D *duobus illis punctis, circa quorum illud* C *sint areae proportionales angulis ad* D *formatis, et vocatis* $CD = a$, $DP = x$, $PM = y$.

Ausser diesen *Curvis algebraicis* gibt es unendlich viel, deren *Construction a quadratura circuli dependir*t, die übrigen aber lassen sich durch keine *Quadratur construi*ren, ich habe aber eine *general-Construction per motum tractorium* gegeben.

Über die *Theoremata numerica* habe ich seit der Zeit nichts neues entdecket. Was die neuen Zeichen $\geqslant$ und $\leqslant$ betrifft,[7] dergleichen in diesen *Speculation*en öffters höchst nöthig sind, so wollte ich nach der *Analogi*e dieses Zeichens $\neq$, welches *non aequale* bedeutet, vielmehr diese $\nless$ und $\ngtr$ gebrauchen, deren jenes *non minus* das ist entweder *aequale* oder *majus* $\geqslant$, dieses aber $\ngtr$ *non majus*, das ist so viel als $\leqslant$ *minus* oder *aequale* bedeutet.

Nächstens wird bey dem H. *Bousquet* mein *Tractat de problemate Isoperimetrico* herauskommen; und darauf wird er ein andres Werk, *Introductio ad Analysin infinitorum*, drucken, worinn ich so wohl den *Partem sublimiorem Algebrae* als *Geometriae* abgehandelt.[8] Ich habe für nöthig befunden dieses vor der *Analysi infinitorum* selbst hergehen zu lassen, an welcher ich jetzt würklich arbeite.

Jetzt wird hier an einer *Dissertation de motu Planetarum et Cometarum* worinn ich die *Orbitam* des letsten *Comet*en bestimmet, gedruckt. Es ist bey diesem *Comet*en merkwürdig, daß derselbe den 4ten *April* so nahe bey dem *Mercurio* vorbeygegangen, daß man daher eine *Perturbation* in dieses *Planet*en Lauf zu vermuthen Ursach hat. Bißher ist aber der *Mercurius* noch unsichtbar, daß man sich allso hierüber noch nicht hat *eclairci*ren können.[9]

Vorgestern wurde in den hiesigen Zeitungen die Einrichtung der neuen *Academi*e *publicir*t.[10]

Zu der glücklichen Ankunft in *Moscau gratuli*ren von Herzen, und empfehle mich zu Ewr. Wohlgeb. beständigen Gewogenheit, der ich mit der schuldigsten Hochachtung verharre

Ewr. Wohlgebohrnen
gehorsamster Diener
Leonh. Euler.

Berlin den 25ten *April*
1744.

Wegen meiner Großmuter Tod petschiere ich schwarz.[11]

R 792 Reply to n° 77
Berlin, April 25th, 1744
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 93–94r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 273–275; *Euler-Goldbach* (1965), p. 192–193

79
Goldbach to Euler
Moscow, (May 21st) June 1st, 1744

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*

Vor wenigen Tagen habe ich gantz unvermuthet gefunden, daß die *aequatio* $emn \pm fm + gn = a^2$ allezeit *possibilis* ist, nemlich, daß *datis numeris* e, f *&* g allezeit angegeben werden können m, n, *&* a. Die *demonstration* ist sehr leicht: *ponatur* $m = eg \pm f \pm 2g$, $n = g$, *erit* $a = eg \pm f \pm g$; wie aber bey solcher bewandniß der Sache 25 von den 38 *casibus* welche Ew. Hochedelgeb. in Dero Schreiben vom 15. *Oct.* als *aequationes impossibiles* anführen, sich werden *legitimi*ren können, lasse ich (nach der bewusten *phrasi*) gar sehr an seinen Ort gestellet seyn.[1]

Uber den Tod Dero Fr[au] Großmutter werden Sie sich vermuthlich in ansehung des hohen Alters so dieselbe erreichet hat, leicht *consoli*ren,[2] ich wünsche nur daß E. Hochedelg. in diesem Stücke in der selben Fußstapffen treten und dem Hn *Bousquet* in *Geneve* noch vielen Vortheil schaffen mögen.

Von H. *Prof. Strube* hoffe ich bey dessen Zurückkunfft[3] einige *particularia* von den dortigen *Savans* als *M.^rs Jordan*, *d'Argens*, *Algarotti* &c. zu vernehmen. Ew. H. werden auch ohne zweiffel einen gewissen *M.^r des Champs* kennen welcher einen, mir annoch unbekannten, *Cours de la Philosophie Wolfienne* geschrieben hat; in diesem Buche soll eine *passage* vorkommen da *ad marginem* stehet: *M.^r Huygens critiqué*;[4] wo sie so beschaffen ist, wie mir hinterbracht worden, wird es E. H. nicht gereuen selbige gelesen zu haben.

Dem Hn *Haude* bitte ich bei Gelegenheit für die Besorgung des Briefs an Hn *Marinoni*[5] von mir dienstlichen Danck abzustatten und denselben zu versichern, daß es mir sehr lieb seyn würde ihm dieser Orten wiederum einige Gefälligkeiten zu erweisen.

Weil ich die frantzösischen Zeitungen nicht ordentlich lese so weiß ich noch nicht wie es mit dem *praemio* welches verwichene Ostern bey der *Acad*[*emie*] *R*[*oyale*] *des Sciences* ausgetheilet werden sollen, endlich abgelauffen ist.[6]

Vor die *communication* der *aequationis ad curvam* dancke ich dienstlich und werde Eurer HochE. *dissertation*, so bald ich die *Acta Erud*[*itorum*] bekomme, mit vergnügen lesen.[7] Mit der angeführten Veränderung der *signorum* bin ich auch wohl zufrieden.[8]

Aus einem Stück der hamburgischen Nachrichten habe ein *favorabl*es *judicium* von des Hn *Prof. Knutzen Tractat* von den *Comet*en ersehen; es wird daselbst bey dieser Gelegenheit gemeldet, daß zwar schon einige Gelehrte gewesen, die *Comet*en auf eine gewisse Zeit vorausprophezeyet haben, die *Comet*en hätten sich aber nicht eingefunden, so daß unter allen der Hr. *Pr*[*ofessor*] *Knutzen* der erste gewesen welcher einen *Comet*en, nehmlich den von *A*[*nno*] 1744, in einer öffentlichen Schrifft schon 7 Jahre voraus vermuthet hat.[9]

Aus dem was von der *Theorie de la figure de la Terre par M.^{r} Clairaut* in den *Leipz*[*iger*] *Gel*[*ehrten*] *Zeit*[*ungen*] gesagt wird, schliesse ich daß es ein sehr schönes Buch seyn muß.[10]

Wenn ein völliger *tomus* von Eurer HochE. *operibus* herausgekommen seyn wird, bitte ich mir *notice* davon zu geben.

Ich erinnere mich daß E. H. mir schon vor einigen Jahren gesagt haben auf was für art Sie ein *Capital* von 10 000 Rthl. imfall Sie es erwerben sollten, zu *employi*ren gesonnen wären, nemlich ein Landgut *in patria* zu kauffen und darauf zu leben; ohngeachtet nun vermuthlich der *casus in terminis* bald *existi*ren wird, so will ich doch nicht hoffen, daß Sie ihr damaliges *project* zur Erfüllung bringen werden.[11]

Ich verbleibe mit besonderer Hochachtung
Eurer HochEdelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

Moscau den 1. *Junii st. n.* 1744.

R 793 Reply to nº 78
Moscow, (May 21st) June 1st, 1744
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 82–83r
Partial copy, 1 p. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 22r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 276–277; *Euler-Goldbach* (1965), p. 194–195

80
Euler to Goldbach
Berlin, July 4th, 1744

Wohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats*-Rath

Daß diese *Formul* $emn \cdots fm \cdots gn$ *generaliter* ein *Quadratum* seyn könne wann nur entweder f oder g ein *numerus affirmativus* ist, wie Ewr. Wohlgb. angemerket haben, kan mit meinen vormals überschriebenen *Theorematibus* gar wohl bestehen.[1] Dieselben waren zweyerley entweder von dieser *Form* $4emn - pm - pn$ oder von dieser $4emn \pm pm \mp pn$; die erstere leidet nun durch Ewr. Wohlgeb. *Observation* keine Noth; die letstere aber würde umgestossen, wann nicht eine *Condition* hinzugethan werden müste, davon ich mich nicht mehr errinnere, ob ich in meinem Briefe damals Meldung gethan habe oder nicht:[2] nehmlich m und n *respectu* p *numeri primi* seyn. Wann ich allso sage daß $8mn - 3m + 3n$ nimmer ein *Quadrat* seyn könne, so muß diese *Condition* dabey gemeldet werden, daß n kein *multiplum* 3^{rii} sey. Dann wann man dörfte $n = 3$ oder überhaupt $n = 3hh$ setzen, so könnte diese *Formul* $8mn - 3m + 3n$ *infinitis modis* ein *Quadrat* seyn. Diese *Restriction* folget unmittelbar aus der Art, welche mich dazu geführet, und welche ich auch in der *Piece*, so ich vor einiger Zeit über diese *Materie* nach *S.ᵗ Petersburg* geschickt habe, ausdrüklich angemerkt.[3] Dann $8mn-3m+3n$ kan deswegen kein *Quadrat* seyn weil diese *Formul* $aa-2bb$ keinen *divisorem primum hujus formae* $8n\pm 3$ haben kan; dahero werden diejenigen *casus* ausgenommen, wann n ein *multiplum* von 3 ist, eben wie auch in jener $aa-2bb$ diese *Condition* hinzugethan werden muß, daß a und b *numeri inter se primi* seyn sollen; dann ohne diese *restriction* könnte $aa-2bb$ *per quemcunque numerum divisibilis* seyn.

Ich arbeite anjetzo an einem *Tractat* über den *Calculum differentialem*, in welchem ich verschiedene *curieuse Decouverten* über die *Series* gemacht habe, wovon ich die Freyheit nehme Ewr. Wohlgebohrnen einige zu *communiciren*:

I. *Sumto in circulo arcu quocunque* a*, cujus sinus sit* $=\alpha$*, sinus arcus dupli* $=\beta$*, sinus arcus tripli* $=\gamma$*, sinus quadrupli* $=\delta$*, quintupli* $=\varepsilon$*, etc., dico hujus seriei infinitae*

$$\frac{1}{2}a+\alpha+\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{3}\gamma+\frac{1}{4}\delta+\frac{1}{5}\varepsilon+etc.$$

summam semper exprimere longitudinem arcus 90° *in eodem circulo.*[4]

II. *Posito radio circuli* $=1$*, atque arcus cujuscunque* a *statuatur ut sequitur*

$$\begin{array}{lllll} sinus\ a=\alpha; & sinus\ 2a=\beta; & sinus\ 3a=\gamma; & sinus\ 4a=\delta; & sin.\,5a=\varepsilon\ \ etc. \\ cosinus\ a=A; & cosinus\ 2a=B; & cosinus\ 3a=C; & cosinus\ 4a=D; & cos.\,5a=E\ \ etc. \end{array}$$

sitque π *longitudo semicircumferentiae, erit*

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{A}+\frac{\beta}{2A^2}+\frac{\gamma}{3A^3}+\frac{\delta}{4A^4}+\frac{\varepsilon}{5A^5}+etc. &= \frac{\pi}{2} \\ 1+\frac{A}{A}+\frac{B}{A^2}+\frac{C}{A^3}+\frac{D}{A^4}+\frac{E}{A^5}+etc. &= 0 \\ 1+A+B+C+D+E+etc. &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$ [5]

III. Nachfolgende *Series* sind *ex divisione arcus* entsprungen.

Posito radio $=1$*, sumatur arcus quicunque* $=s$*, cujus sinus sit* $=a$*, cosinus dimidii arcus sit* $=\alpha$*; cosinus* $\frac{1}{4}s=\beta$*; cosinus* $\frac{1}{8}s=\gamma$*; cosinus* $\frac{1}{16}s=\delta$ *etc., erit* $s=\dfrac{a}{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\ etc.}$.[6]

IV. *Si ponatur arcus cujuscunque* s *tangens* $=A$*; tangens* $\frac{1}{2}s=B$*; tangens* $\frac{1}{4}s=C$*; tangens* $\frac{1}{8}s=D$*; tangens* $\frac{1}{16}s=E$*, etc., erit*

$$\frac{1}{2}B+\frac{1}{4}C+\frac{1}{8}D+\frac{1}{16}E+etc.=\frac{1}{s}-\frac{1}{A}.$$ [7]

V. *Si cognita fuerit summa hujus seriei* $a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+etc.$ *quam ponam* $=z$*; dico semper assignari posse summam hujus seriei:*

$$Aa+Bbx+Ccx^2+Ddx^3+Eex^4+Ffx^5\ +\ etc.$$

dummodo series horum coefficientium A, B, C, D, E etc. tandem habeat differentias constantes.[8] *Sit enim* $B-A=P$; $C-2B+A=Q$; $D-3C+3B-A=R$; *etc. Deinde quia* z *datur per* x, *statuatur* $\frac{dz}{dx}=p$; $\frac{dp}{dx}=q$; $\frac{dq}{dx}=r$; $\frac{dr}{dx}=s$ *etc. Hisque valoribus inventis erit seriei*

$$Aa+Bbx+Ccx^2+Ddx^3+etc.$$

summa

$$=Az+Ppx+\frac{1}{2}Qqx^2+\frac{1}{6}Rrx^3+\frac{1}{24}Ssx^4+etc.$$

Sit exempli gratia $z=1+x+x^2+x^3+x^4+etc.=\frac{1}{1-x}$, *erit* $\frac{dz}{dx}=\frac{1}{(1-x)^2}=p$; $\frac{dp}{dx}=\frac{2}{(1-x)^3}=q$; $\frac{dq}{dx}=\frac{6}{(1-x)^4}=r$; *etc., et pro* A, B, C, D, *etc. sumatur haec series*

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
1, & & 3, & & 7, & & 13, & & 21, & & 31, & & 43, & & etc. \\
& 2, & & 4, & & 6, & & 8, & & 10, & & 12, & & & \\
& & 2, & & 2, & & 2, & & 2, & & 2, & & & & \\
& & & 0, & & 0, & & 0, & & 0, & & & & &
\end{array}$$

deren *formula generalis* ist $nn-n+1$; davon die *Differentz*en genommen wird $A=1$; $P=2$; $Q=2$; $R=0$; $S=0$ *etc.*, folglich ist die *Summa seriei*

$$1+3x+7x^2+13x^3+21x^4+etc.=\frac{1}{1-x}+\frac{2x}{(1-x)^2}+\frac{2x^2}{(1-x)^3}.$$[9]

Gleichwie man vermittelst der *Neutoneani*schen *Evolution* des *Binomii* alle *aequationum purarum* $x^n-A=0$ *radices per series infinitas exprimi*ren kan, so habe ich auf eine ähnliche *Methode* gedacht, um aller *Aequationum affectarum radices* gleichfalls *per series infinitas* zu *exprimi*ren: Es sey gegeben diese *Aequation*

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+Cx^{n-3}+etc.=0,$$

deren eine *radix* sey $x=f$, welche ich folgender gestalt *per seriem exprimi*re. Ich setze

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+Cx^{n-3}+etc.=y,$$

und suche *per differentiationem* die *Valores* folgender *quantität*en $p=\frac{dx}{dy}$; $q=\frac{dp}{dy}$; $r=\frac{dq}{dy}$; $s=\frac{dr}{dy}$; *etc.* welche alle in x gegeben seyn werden. Nun nehme man nach Belieben für x einen *valorem determinatum* an, und bestimme daraus die *valores* von y, p, q, r, s, *etc.*, *quo facto summa hujus seriei*:

$$x-py+\frac{1}{2}qy^2-\frac{1}{6}ry^3+\frac{1}{24}sy^4-etc.$$

semper aequalis erit uni radici aequationis propositae $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + etc.$ $= 0$. Nimmt man nun für x einen solchen Werth an, welcher einer *radici* schon sehr nahe kommt, so wird die *series convergens*, und weiset die *radicem proxime.*

Man kan diese *Proposition* auch folgender Gestalt ausdrucken. *Si fuerit* $y = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + etc.$ *hincque definiantur sequentes quantitates* $p = \frac{dx}{dy}$; $q = \frac{dp}{dy}$; $r = \frac{dq}{dy}$; $s = \frac{dr}{dy}$; *etc., ex quibus formetur haec series*

$$x - py + \frac{1}{2}qy^2 - \frac{1}{6}ry^3 + \frac{1}{24}sy^4 - etc.,$$

dico hujus seriei summam, quicunque valor pro x ponatur, semper aequari uni radici hujus aequationis

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + etc. = 0.$$ [10]

Wann man sich eine *Lineam curvam* vorstellet von dieser *Natur*

die *Abscissae* sind:	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	*etc.*
die *Applicatae*:	1,	1,	2,	6,	24,	120,	720,	5040,	*etc.*

dergestalt daß wann die *A[b]scissa* gesetzt wird $= x$, die *applicata* wird $y = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots x$, so kan diese *Curva per infinita puncta* leicht beschrieben werden. Wann ich mich recht errinnere, so haben Ew. Wohlgeb. mir einmal Anlaß gegeben auf diese *Curvam* zu denken: Unlängst da mir diese *Materie* wiedrum vorkam, so habe ich die *Naturam* dieser krummen Linie durch folgende *Aequationem differentialem exprimir*t:

Man setze

$$\begin{array}{lll} A = & 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + etc. & = 1{,}644\,934\,066\,848 \\ B = & 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + etc. & = 1{,}202\,056\,903\,159 \\ C = & 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + etc. & = 1{,}082\,323\,233\,711 \\ D = & 1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + etc. & = 1{,}036\,927\,755\,106 \\ E = & 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^5} + etc. & = 1{,}017\,343\,061\,984 \\ F = & 1 + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} + \frac{1}{4^7} + etc. & = 1{,}008\,349\,277\,386 \\ & \qquad etc. & \end{array}$$

und ferner sey $n = 0{,}577\,215\,664\,9$; so wird seyn: $\frac{dy}{y\,dx} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{x} - n$, woraus die *positio tangentis* so offt x ein *numerus integer* ist erkannt wird; wann aber x ein *numerus fractus* oder *irrationalis* ist, so dienet diese *Aequatio infinita*:

$$\frac{dy}{y\,dx} = Ax - Bx^2 + Cx^3 - Dx^4 + Ex^5 - etc. - n;$$

oder auch diese

$$\frac{dy}{y\,dx} = \frac{x}{1+x} + \frac{x}{4+2x} + \frac{x}{9+3x} + \frac{x}{16+4x} + \frac{x}{25+5x} + etc. - n.$$

Aus der *Figur* dieser *Curvae* ist leicht zu sehen, daß dieselbe eine *Applicatam minimam inter abscissas* 0 *et* 1 haben muß; wann man nun setzt $dy = 0$, so kommt *proxime* heraus $x = 0,460\,96$ oder $x = \frac{6}{13}$. Um aber aus einer jeden *abscissa* x die gehörige *applicatam* y zu finden, so habe ich diese *logarithmi*sche *aequation* herausgebracht:

$$\ell\, y = \frac{1}{2}\ell\, 2\pi + \left(x + \frac{1}{2}\right)\ell\, x - x \quad + \quad \frac{1}{12x} - \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\,x^3} + \frac{1}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 6\,x^5} - \frac{3}{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\,x^7} + etc.;$$

wann allso x eine sehr grosse Zahl ist, so ist *proxime* $y = \dfrac{x^{x+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{\mathrm{e}^x}$ *posito* $\mathrm{e} = 2,718\,281\,8$; setzt man aber

$$x - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2x} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6x^3} - \frac{1}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 6\,x^5} + \frac{3}{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\,x^7} - etc. = z,$$

so ist *accurat* $y = \dfrac{x^x\sqrt{2\pi x}}{\mathrm{e}^z} = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots x$.[11]

Der H. *Prof. Strube* läst Ewr. Wohlgeb. seine gehorsamste Empfehlung vermelden; er weiß noch nicht wann, oder wohin er von hier verreisen wird.[12] Was diejenigen hiesigen Gelehrten betrifft, von welchen Ewr. Wohlgeb. einige Nachricht erwarten, so habe die Ehre zu melden, daß *M.*ʳ *Jordan* welcher vormals ein Frantzösischer Prediger gewesen, sich hauptsächlich auf die *Litteratur applici*ret, und eine schöne *Bibliothec* sammelt, indem ihm der König alle Bücher, welche Ihro *Majestät* gesandt werden, darein schenkt. Daß der *Marquis d'Argens* bloß von den *Belles lettres fait* macht, wird Ewr. Wohlgeb. genugsam bekannt seyn, und ungeacht er jetz anfängt auch *Physicali*sche *Materi*en mit unter seine Schrifften zu mengen, so ist doch nichts gründliches davon anzutreffen. Der Graf *Algarotti* ist schon lange Zeit nicht mehr hier, und hat nach den letsten Zeitungen Dienste bey dem König von Polen genommen. *M.*ʳ *Deschamps* ist ein *pur*er *Wolfianer*, und weilen ich weder mit ihm in genauer Bekantschafft stehe, noch seine Schrifften gelesen habe, so habe ich ihn durch einen Freund fragen lassen, worinn er *praetendi*re den *Hugenium critiquir*t zu haben. Hierauf hat er nun geantwortet, daß solches über sein *Ratiocinium sur la probabilité* gewesen sey, weilen er vermeint hätte, der H. Wolf hätte solches auch schon *critisir*t; da er aber seit der Zeit gesehen, daß des H. Wolfs Worte anders verstanden werden müssten, so ziehe er seine *Critic* wieder zurück.[13]

Die *Academi*e in *Paris* hat dieses Jahr das *Praemium* gar nicht ausgegeben, sondern eben dieselbe *Quaestion* vom *Magnet*en wiedrum auf *A*[*nnum*] 1746 *proponir*t, mit einem 3 fachen Preiß von 7500 *Livres.* Ich habe mir aber vorgenommen nicht ferner darüber zu *concurri*ren, sondern meine *Dissertation* nächstens allhier drucken zu lassen.[14]

So *favorable* das *Judicium* in den *Hamburg*ischen Zeitungen über des H. *Prof. Knutzen* Meinung von dem letsten *Comet*en ist,[15] so ist doch so wohl der Grund, als seine Ausführung völlig falsch. Er nimmt erstlich an daß dieser *Comet* ein *Tempus periodicum* von $45\frac{3}{4}$ Jahren habe, weil er aus dem *Catalogo Heveliano* gesehen, daß fast immer nach Verfliessung dieses *Intervalli* ein *Comet* erschienen. Ferner glaubt er daß der *Comet* von 1698 eben derselbe gewesen, der *A*[*nno*] 1652 gesehen worden, da man doch wann man die Sach genau untersuchet kaum zwey *Comet*en finden wird welche so viel von einander *differi*ren als diese zwey. Hernach ist auch der letste *Comet* von diesen beyden so stark unterschieden, daß man mit eben der *Raison* den *Mercurium* für den *Saturnum* halten könnte, wann man nicht öffters beyde zugleich am Himmel sähe. Ich habe auch dem H. *Prof. Knutzen* alle diese Gründe überschrieben, wogegen er nichts anders einzuwenden findet, als daß gleichwohl seine Meinung oder *Prophez*eyung eingetroffen, und daß er fast nicht glauben könne daß solches *par hazard* geschehen.[16] Ich habe über diesen *Comet*en eine weitläuffige *Dissertation* geschrieben, welche jetzt bald wird gedruckt seyn,[17] darinn ich den Lauf dieses *Comet*en auf das genauste bestimmet, und gantz deutlich gewiesen, daß sein *Tempus periodicum* sich über etliche *Saecula* erstrecke: wie sich dann auch unter allen *Comet*en, so seit 300 Jahren *observir*t worden keiner findet, dessen Lauf nur im geringsten mit dem letsten übereinkäme.

Die *Theorie de la figure de la Terre par M^r Clairaut* ist in der That ein unvergleichliches Werk,[18] so wohl in Ansehung der *profund*en und schwehren *Quaestion*en welche darinn abgehandelt werden, als der angenehmen und leichten *Methode* nach welcher er die *sublim*sten Sachen gantz klar und deutlich vorzubringen weiß.

Ob mein *Tractat de problemate isoperimetrico*[19] in *Lausanne* schon völlig gedruckt ist, habe ich noch keine Nachricht erhalten. Ich habe inzwischen ein neues Werk dahin geschickt unter dem *Titul Introductio ad Analysin infinitorum*,[20] worinn ich so wohl den *partem sublimiorem* der *Algeber* als der *Geometri*e abgehandelt, und eine grosse Menge schwehrer *Problematum* ohne den *Calculum infinitesimalem resolvir*t, wovon fast nichts anderswo anzutreffen. Nachdem ich mir einen *Plan* von einem vollständigen *Tractat* über die *Analysin infinitorum formir*et hatte, so habe ich bemerkt, daß sehr viele Sachen welche dazu eigentlich nicht gehören, und nirgend abgehandelt gefunden werden, vorhergehen müssten, und aus denselben ist dieses Werk als ein *Prodromus ad Analysin infinitorum* entstanden.

Die neue *Academi*e allhier wird nächstens einen *Tomum* von den darinn abgelesenen *Piecen* herausgeben. Es wird darinn eine große Anzahl *Piecen* von mir kommen:[21] Weilen nun die H. Staats *Ministri* fleissig zugegen sind, so habe um diesen Herren keinen Ekel zu erwecken, meine *Dissertation*en *frantzös*isch abgelesen, nachdem solche von dem H. *Prof. Naudé corrigir*t worden; ich habe auch um dieser Ursach willen *pure Mathemati*sche *Speculation*en und *Calculos* zu *eviti*ren gesucht, und mehrentheils *physicali*sche *materien* abgehandelt: Darunter befindet sich eine neue *Theorie* von dem Licht und Farben, wodurch ich alle *phaenomena* auf das deutlichste erkläre, und alle Schwierigkeiten, welchen andere *Theori*en unterworfen sind, vermeide. Hernach habe ich *demonstrir*t daß die *forcen*, welche von einem Stoß oder Schlag herkommen, jederzeit mit einer blossen *Pression comparir*t werden können, oder daß die *Vires vivae* und *mortuae* unter sich *homogeneae* seyen. Ich habe auch *ex natura Gravitatis* dargethan, daß die *ultimae moleculae omnium corporum* unter sich alle gleich dicht, oder *eandem gravitatem specificam* haben müssen, wodurch das *Principium indiscernibilium* einiger keinen geringen Stoß zu leiden scheinet.[22]

So bald ich von *Lausanne Exemplaria* von demjenigen was dort gedruckt wird, bekommen werde, und so bald meine *Theoria Cometarum* alhier gedruckt seyn wird, so werde ich nicht ermangeln mit der ersten Gelegenheit Ewr. Wohlgeb. damit aufzuwarten.

Ich habe die *Opera Jacobi Bernoulli* welche in *Geneve* in 2 *Tomis cum annotationibus* des H. *Cramers* herausgekommen, noch nicht gesehen, ich bin aber versichert, daß so wohl das Werk selbst als insonderheit die *Annotationes* sehr herrlich seyn werden. Ferner sind auch daselbst herausgekommen die *Principia Philos*[*ophiae*] *Nat*[*uralis*] *Newtoni* in 3 *Voluminibus cum commentariis P*[*atrum*] *le Sœur* und *Jacquier*, und auch die übrigen *Opuscula Newtoni* gleichfalls in 3 *Voluminibus*, welche beyde Werke alles Lob verdienen.[23]

Meine Umstände haben sich jetzt dergestalt geändert, daß ich thöricht seyn müsste, wann ich mir eine andere Lebens Art wünschen sollte. Wann aber auch dieses nicht wäre, so fehlte doch noch so viel an derjenigen *Summ* von 10 000 Rthl., welche ich vormals zu Erkauffung eines Land-Guts *in Patria* anwenden wollte, daß ich kaum Hoffnung haben kan, zu derselben jemals zu gelangen.[24]

Ich habe vor einiger Zeit nachfolgenden *logogryphum* entworfen, worinn alle *Characteres* Buchstaben bedeuten, und der *Text* latein ist:

1 Pxqswlznjdvynstiddkqxhleebfpxdfgtlzbccfbksodxokfnglqxn
2 schejmlckzxhrfwjgfhxvzjnbgyxcdgixkoxjmlncoigdxvzflmesnf
3 yjqfangvnylrcxfonbfjalrkwsnbfpjoizoxqknubrofadgiaxwkcbr
4 bcklofrnjwngszfhgjfcbcfvqjtxeevtbzfyjsbzhfmlnbgfsqjwglnx
5 vzfkonbcoigdxvrkfjalzxtsnilenfgvcboofcfxnnfgnkbcjnnjyn
6 xvplgnbfzfoxeejdgxbcjcnsdyvdbhzlnvyxmbcblobbcyfekonbcei
7 obfplwsxzxfjcndbhrlzqxssonbcoljfsyqfmjeevhleexoiexmgi
8 cfdnktvoldxnfbxofcktvpxrnv.

Ungeacht hier die Bedeutung der *Characterum* nicht veränderlich ist, so deucht mich doch, daß dergleichen Schrifft nicht leicht *dechiffrir*t werden kan.[25]

Allhier wird stark *Schach* gespielt: es befindet sich unter andern ein Jud hier welcher ungemein gut spielt, ich habe einige Zeit bey ihm *Lectiones* genommen, und es jetz so weit gebracht, daß ich ihm die meisten *Parti*en abgewinne.[26]

Mit der vorigen *Post* hat mir der H. Rath *Schumacher* die erfreuliche Zeitung überschrieben daß Ihro Kaiserl[iche] *Majestä*t Allergnädigst befohlen allen auswärtigen Mitgliedern ihre *Pension*en auszuzahlen.[27]

Die hiesige *Academi*e wird auch nächstens ein *Praemium* von 140 Rthl. aussetzen, womit jährlich *continuir*t werden soll; für das künftige Jahr wird die *causa physica electricitatis* das *sujet* der *Question* seyn.[28]

Hiemit habe die Ehre Ewr. Wohlgeb. mich gehorsamst zu empfehlen, der ich mit der vollkommensten Hochachtung verharre

Ewr. Wohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 4^{ten} *Julii*
1744.

R 794 Reply to nº 79
Berlin, July 4th, 1744
Original, 4 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 95–98v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 278–293; *Euler-Goldbach* (1965), p. 195–200

81
Goldbach to Euler
Moscow, July (5th) 16th, 1744

Hochedelgebohrner Herr
Insonders Hochgeehrter Herr *Professor*

Nachdem *Tit*[*ulo*] H. *Prof. Krafft* mir durch ein Schreiben aus Petersburg vom 28. *Jun. st. v.* zu wissen gethan daß er im begriff sey die Reise zur See biß Stetin anzutreten so habe, weil meine Antwort denselben vermuthlich in Petersburg nicht mehr antreffen dörffte, solche an Ew. Hochedelgeb. zu *adressi*ren die Freyheit genommen in der Hofnung daß sie (dafern der H. *Prof. Krafft* nicht einen *excellent voilier* biß Stetin bekommet) noch vor dessen Ankunfft in Berlin eintreffen werde.[1]

Daß die Austheilung des Preißes bey der *Ac*[*ademie*] der Wiss[enschaften] in Pariß abermal verschoben worden habe ich aus den Zeitungen ersehen, ich vermuthe aber, daß es Eurer Hochedelg. nur eine kleine *addition* zu Dero *piece* kosten wird um den künfftigen Preiß zu erhalten.[2]

Das neulich erwehnte Reimbuch ist, wie ich es nachgehends *allegui*ret gefunden, unter diesem Titel herauskommen: *Dictionnaire des Rimes par Richelet*.[3]

Ich möchte wohl wissen ob Ew. HochE. ein Buch gelesen haben davon mir nur der folgende Titel bekannt ist: *La methode des Fluxions par M.^{r} Newton, à Paris* 1740.[4]

Im übrigen beziehe ich mich auf mein letztes Schreiben vom 1. *Jun.* und verbleibe mit besonderer Hochachtung
Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

Moscau den 16. *Jul. st. n.* 1744.

P. S. Ich halte diese *proposition* für gewiß ohngeachtet ich glaube daß die *demonstration* davon nicht leicht zu finden sey: *dato numero primo huius formae* $4n+1$

datur alius numerus huius formae a^2+1 *quem ille dividat*[5] (daß aber *invento uno* a^2+1 noch *innumeri alii* von dieser Eigenschafft gefunden werden können ist an sich offenbar). In gewissen Fällen ist die *solution* gar leicht, als zum Exempel wann in dem gegebenen *numero primo* $4n+1$ der *numerus* n *quadratus* oder *triangularis* ist.[6]

R 795 Sequel to n° 79
Moscow, July (5th) 16th, 1744
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 84–85r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 294; *Euler-Goldbach* (1965), p. 201–202

82
Goldbach to Euler
Moscow, August (6th) 17th, 1744

HochEdelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*

Am letztverwichenen 16. *Jul. st. n.* habe ich an Ew. HochEdelg. ein Schreiben nebst einem Einschluß an Hn *Prof. Krafft* abgesandt welches vermuthlich schon abgegeben seyn wird.[1]

Wann die *numeri* m *&* n in den bißherigen *theorematibus* nicht jederzeit *numeros integros affirmativos* angedeutet und Eur. HochEdelgeb. nicht in Dero damaligem Schreiben ausdrücklich gesaget hätten daß die 38 *formulae* in welchen diese *numeri* m *&* n vorkommen *nullo modo quadrata* seyn könnten, würde ich einige derselben nicht so leicht in zweiffel gezogen haben und glaube nunmehro gern daß sie nach der von Ew. HochE. angeführten *restriction* alle richtig sind.[2] Vieleicht wäre es aber besser wann man bemeldte *numeros* allezeit in ihrer *general*en Bedeutung liesse, und zum Exempel an statt der *formula* $8mn-3m+3n \neq a^2$ (so einer *restriction* nöthig hat) *generaliter* sagte

$$8\,(3m\mp 1)\,(3n\pm 1)-3\,(3m\mp 1)+3\,(3n\pm 1)\neq a^2,$$

worin dasjenige so bey dem *theoremate essentiel* ist, bestehet. Ich habe ferner *observi*ret daß wann $emn-m-n$ kein *quadratum* seyn kan, auch $emn-n-e\neq\Box$ oder wann e ein *numerus integer huius conditionis* ist daß $\dfrac{a^2+n}{en-1}$ niemals ein *numerus integer* seyn kan alsdenn auch $\dfrac{a^2+e}{en-1}$ kein *numerus integer* ist.

Vor die mir *communici*rten fürtrefflichen *Theoremata* dancke ich verbundenst und verbleibe mit besonderer hochachtung

Eurer HochEdelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

Moscau den 17. *Aug.* 1744.

P. S. Unlängst haben I[hro] Kays[erliche] *M*[*ajestä*]^t mich (wiederum *praeter meritum et petitum*) zum würckl[ichen] *E*[*tat*s] R[at][3] nebst dem *appointement* von 2000 R. ernennet.

R 796 Reply to n° 80
Moscow, August (6th) 17th, 1744
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 86–87r
Partial copy, 2 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 23v–24r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 295–296; *Euler-Goldbach* (1965), p. 202–203

83
Euler to Goldbach
Berlin, September 19th, 1744

Wohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats*-Rath

Ewr. Wohlgebohrnen würde ich nicht ermangelt haben zu Dero bey dem letsten Feste neuerhaltenen Würde[1] meine gehorsamste *Gratulation* so gleich abzustatten, wann mich nicht die Ankunft und Anwesenheit der HH. *Prof. Heinsius* und Krafft[2] dermassen *distrahi*ret hätten, daß ich seit einigen Wochen sehr wenig Zeit auf Nachdenken dergleichen Ewr. Wohlgeb. mir letst überschickte Blätter erfordern, habe anwenden können. Ewr. Wohlgeb. *gratuli*re ich allso zu diesem neuen *Avancement* von Grund meines Herzens; und da Ihro Kaiserl[iche] *Majestät* hiedurch ein so deutliches Merkmaal Dero Allerhöchsten Gnade gegen Ewr. Wohlgeb. an den Tag geleget, so wünsche ich, daß sowohl diese als alle künftige Gnaden Bezeugungen zu Ewr. Wohlgeb. wahrem Vergnügen und beständigem Wohlseyn gereichen mögen. Hiebey nehme ich aber auch die Freyheit mich sammt den meinigen zu Ewr. Wohlgeb. gegen mich bißher bezeugten gantz besonderen Gewogenheit fernerhin gehorsamst zu empfehlen.

Der H. *Prof. Heinsius* ist nebst dem H. *Mag*[*ister*] *Gellert* schon vor einigen Wochen, nachdem er sich acht Tage hier aufgehalten, weiter nach Dresden fortgereiset. Bald darauf ist endlich auch der H. *Prof. Krafft* allhier glückl[ich] angekommen, nachdem er durch den *contrair*en Wind wiedrum nach *Cronstatt* zurückgetrieben, und erst den 2$^{\text{ten}}$ *Aug.* von neuem in die See zu gehen genöthiget worden. Ich habe demselben sogleich bey seiner Ankunfft Ewr. Wohlgeb. Schreiben eingehändiget,[3] welcher sich hierdurch gehorsamst bedancken und zu Dero Wohlgewogenheit empfehlen lässt.

M.^{r} *Clairaut* hat mich von neuem versichert, daß bey der letsten Untersuchung der eingeschickten *Pieces* über den *Magnet*en die meinige die gröste *Approbation* gefunden, daß aber drey von den fünf dazu ernannten *Commissariis*, welche *Neutoniani*sche *Attractionist*en seyn, in dem Gedanken stehen, daß diese Frage nimmer auf eine *Mechani*sche Art erklärt werden könne; nach 2 Jahren müsse aber nach den Gesetzen der *Academie* der Preiß nothwendig ausgetheilet werden.[4] Unterdessen deucht mich, daß wann die Herren die Auflösung dieser Frage für unmöglich halten, dieselben die von neuem darauf gesetzten 2500 *Livres* auf eine ihrem Urtheil nach mögliche und nützlichere Frage hätten setzen sollen.

Ich bekomme allhier selten neue Bücher zu sehen; dahero ist mir auch dasjenige dessen Ewr. Wohlgeb. unter dem *Titul La methode des fluxions* Meldung thun nicht bekannt, ich zweifle aber nicht, eben dieser *Tractat* werde sich in der *Collectione Omnium Opusculorum Newtoni*, welche kürzlich zu *Lausanne* herausgekommen, befinden.[5]

Ewr. Wohlgeb. *Observation*,[6] daß, wann $emn - m - n \neq \square$ auch $emn - m - e \neq [\square]$, kan zu Entdeckung vieler neuer *Theorematum* Anlaß geben; dann wann $emn - m - n \neq \square$ so wird auch wann man setzt $n = pmm - m$, seyn $epm^3 - emm - pmm \neq \square$ oder $emp - p - e \neq \square$.

Ewr. Wohlgeb. thun in Dero Briefe nicht die geringste Meldung, warum Dieselben die aus Dero Reiße *Journal* ausgeschnittenen Blätter bey gefüget haben.[7] Ich vermuthe aber daß hiezu die *Series* $\frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{96} + \frac{1}{216} + etc.$ deren *summ* von dem *Hugenio* $= \frac{1}{4}$ soll angegeben worden seyn, mag Anlaß gegeben haben;[8] ich kan aber die *legem progressionis* der *seriei* nicht einsehen: wann 256 an statt 216 stehen sollte, so würde ich glauben, daß von dieser *serie*

$$\frac{1}{8 \cdot 1} + \frac{1}{8 \cdot \frac{4}{1}} + \frac{1}{8 \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{6}{2}} + \frac{1}{8 \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{8}{3}} + etc.$$

die Rede wäre, deren *summ*

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{16 \cdot 2} + \frac{1}{32 \cdot 3} + \frac{1}{64 \cdot 4} + etc. = \frac{1}{4}\,\ell\, 2,$$

und folglich kleiner als $\frac{1}{4}$. Die übrigen *summas*, welche Ewr. Wohlgeb. in diesen Blättern aufgezeichnet, habe ich bald *demonstrir*en können. Die *Formula generalis*

$$\frac{anxh^{x+1} - (anx + an)\,h^x}{m^2h^{2x+1} + mnxh^{x+1} + (mnx + mn)\,h^x + nnxx + nnx}$$

*resolvir*t sich in

$$\frac{\frac{an}{m}x}{mh^x + nx} - \frac{\frac{an}{m}(x+1)}{mh^{x+1} + n\,(x+1)}.$$

Wann nun die *series*, so aus dem ersten Glied entspringt, ist $A + B + C + D + etc.$ so gibt das andere Glied diese *seriem* $B + C + D + etc.$; folglich ist die *Summa* $= A = \dfrac{an}{mmh + mn}$.

Was Ewr. Woh[l]geb. in den folgenden Blättern von den *Imaginariis* und *negativis negativorum* schon vor so vielen Jahren *meditir*t haben, ist der Wahrheit dergestalt gemäß, daß man dadurch alle Schwierigkeiten, welche über diese Materie gemacht zu werden pflegen, aus dem Grunde heben kan.[9]

Übrigens, damit Ewr. Wohlgeb. geführte *Correspondenz* nicht unvollständig werde, so schicke hiemit die mir gütigst zugesandten Blätter wiedrum zurück, und bedanke mich zugleich für die *Communication* derselben gehorsamst, der ich mit der schuldigsten Hochachtung lebenslang verharre

Eurer Wohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 19^{ten} *Sept.*
1744.

P. S. Daß *dato numero primo hujus formae* $4n+1$ allezeit eine Zahl von dieser Form $aa+1$ gefunden werden könne, welche sich durch $4n+1$ theilen lasse, ist deswegen gewiß, weilen der *numerus primus* $4n+1$ allzeit eine *summa duorum quadratorum* ist.[10] Dann wann $4n+1=pp+qq$ so können immer solche Zahlen f und g gefunden werden, daß $gp-fq=\pm 1$, oder daß der Bruch $\frac{f}{g}$ dem Bruch $\frac{p}{q}$ so nahe kommt, daß wann man einen von dem andern *subtrahir*t, im Zehler nur 1 überbleibt. Wann nun solchergestalt der Bruch $\frac{f}{g}$ gefunden worden, so ist $a=fp+gq$ oder *generaliter* $a=(4n+1)\,m\pm(fp+gq)$. Der Bruch $\frac{f}{g}$ kan aber allzeit durch meine *methode* die Brüche in kleinern Zahlen *proxime* auszudrücken, lei[cht] gefunden werden. Als wann $4n+1=853$ so ist $4n+1=18^2+23^2$; und folglich $\frac{p}{q}=\frac{23}{18}$. Nun stelle ich zwischen den Zahlen 23 und 18 die *Operation* an, welche zu Findung des *maximi communis divisoris* gebraucht wird, als

$$\begin{array}{cccccccccc}
18) & 23 & (1 & & & & & & & \\
 & \underline{18} & & & & & & & & \\
 & 5) & 18 & (3 & & & & & & \\
 & & \underline{15} & & & & & & & \\
 & & 3) & 5 & (1 & & & & & \\
 & & & \underline{3} & & & & & & \\
 & & & 2) & 3 & (1 & & & & \\
 & & & & \underline{2} & & & & & \\
 & & & & 1) & 2 & (2 & & & \\
 & & & & & \underline{2} & & & & \\
 & & & & & 0 & & & &
\end{array}$$

Diese *Quotos* schreibe ich hinter einander, und *formi*re daraus folgende Brü[che]

$$\begin{array}{ccccc}
1, & 3, & 1, & 1, & 2 \\
\frac{1}{0}, & \frac{1}{1}, & \frac{4}{3}, & \frac{5}{4}, & \frac{9}{7}
\end{array}$$

nehmlich ein jeder *Numerator* oder *Denominator* mit der obgeschriebenen Zahl *multiplici*rt gibt nebst dem vorhergehenden *Num.* oder *Denom.* *addir*t den folgenden *Num.* oder *Denom.*; allso ist $9 = 1 \cdot 5 + 4$; $7 = 1 \cdot 4 + 3$, *etc.* Der letste Bruch $\frac{9}{7}$ kommt nun dem $\frac{23}{18}$ so nahe daß die *Differentz* $\frac{1}{7 \cdot 18}$ durch einen Bruch *exprimi*rt wird, dessen Nenner[!] $= 1$. Da allso $\frac{p}{q} = \frac{23}{18}$ so ist $\frac{f}{g} = \frac{9}{7}$ und allso $a = 9 \cdot 23 + 7 \cdot 18 = 333$: folglich $333^2 + 1$ *divisibel* durch 853.

Exempl[*um*] 2. Es sey $4n + 1 = 178\,481 = 391^2 + 160^2$; so *operi*re ich allso:

$$\begin{array}{lllllll}
160) & 391 & (2 & & & & \\
 & \underline{320} & & & & & \\
 & 71) & 160 & (2 & & & \\
 & & \underline{142} & & & & \\
 & & 18) & 71 & (3 & & \\
 & & & \underline{54} & & & \\
 & & & 17) & 18 & (1 & \\
 & & & & \underline{17} & & \\
 & & & & 1) & 17 & (17 \\
 & & & & & \underline{17} & \\
 & & & & & 0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
2, & 2, & 3, & 1, & 17 & & \\
\frac{1}{0}, & \frac{2}{1}, & \frac{5}{2}, & \frac{17}{7}, & \frac{22}{9} & \ldots & \frac{391}{160}:
\end{array}$$

dahero ist $a = 22 \cdot 391 + 9 \cdot 160 = 10\,042$, welches die kleinste Zahl ist deren *Quadrat* $+1$ theilbar ist durch 178 481, da[nn] $aa + 1 = 100\,841\,765 = 178\,481 \cdot 565$.

P. S.[11] Diesen Augenblick wird durch einen Königl[ichen] *Officier* die erfreuliche Nachricht überbracht, daß sich die Statt Prag an Unsern Allergnädigsten König ergeben, und die aus 16 000 Mann bestehende Besatzung zu Kriegs Gefangnen gemacht worden.[12]

R 797 Reply to n° 82
Berlin, September 19th, 1744
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 105–106v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 297–301; *Euler-Goldbach* (1965), p. 203–206

84
Goldbach to Euler
Moscow, October (1st) 12th, 1744[1]

HochEdelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*

Eurer Hochedelgebohrnen bin ich für die an mich abgestattete *gratulation*[2] dienstlich verbunden, und würde mich sehr freuen wann ich Deroselben so wohl als Dero werthesten Angehörigen einige Gefälligkeiten zu erweisen Gelegenheit hätte. Ich bitte mir künfftig zu melden was mein lieber Pathe *Johannes Albertus* bißhero für *Progressen* gemachet und ob er eine *inclination* zur *Mathematic* bezeiget, in welchem Fall ich nicht zweiffele daß er es in wenig Jahren sehr weit bringen werde.

Ich lasse dahin gestellet seyn ob bey jetzigen Zeitläufften nicht *independamment de toute attraction Newtonienne, trente raisons* mögen gewesen seyn wodurch man die austheilung des Preises zu *differi*ren genöthiget worden.[3]

Mein voriger Brief wurde in solcher Eyle geschrieben, daß ich gar vergessen zu melden, warum ich die eingeschlossenen Blätter beygefüget.[4] Ich habe in vorigen Jahren von unterschiedenen Briefen die es nicht werth gewesen *copi*en behalten, wovon, als ich dieselbe unlängst durchgeblättert, ein gutes Theil *cassi*ret worden, weil aber doch in den übersandten Blättern einige Anmerckungen über die *numeros negativos* waren, so sich wohl möchten behaupten lassen, habe ich selbige Eurer HochEdelg. gleichsam vor die lange weile *communici*ren wollen; was sonsten von *Seriebus* darinnen enthalten seyn mag, hat mir damals neu geschienen und ist nunmehro von keiner Erheblichkeit.

Eurer HochEdelgeb. *methode*[5] die *numeros* a^2+1, so durch den *numerum primum* $4n+1$ *divisibiles* sind, zu finden gefället mir sehr, ich glaube kaum daß ein anderer *processus* in diesem Falle möglich sey und daß der selbe wohl niemanden vor Eurer HochEdlen bekannt gewesen seyn mag.

Es ist mir[6] unlängst bey der *formula* $emn \cdots fm \cdots gn$ folgendes eingefallen: *Innumerabiles sunt numeri qui ad hanc formulam* $10mn \pm (m+7n)$ *redigi non possunt ut* 1, 3, 4, 6, 9, 10, *&c. sed nulla potest dari formula generalis algebraica* $a + bx + cx^2 +$ *&c.* (*ubi* x *designet numerum integrum variabilem,* a, b, c, *&c. constantes*) *ita comparata ut dici possit*

$$10mn \pm (m+7n) \neq a + bx + cx^2 + \&c.,$$

quem ad modum dici potest $4mn - m - n \neq x^2$. Man könnte zwar sagen daß auch mn für sich allein dieselbe Eigenschafft hat, es ist aber selbiges theils alsofort *evident*, theils gehöret mn nicht eigentlich zur *formula* $emn \cdots fm \cdots gn$ allwo durch e, f, *&* g *numeri integri* verstanden werden.

Ich möchte wohl wissen[7] ob Ew. Hochedelg. den *numerum* e in dieser *proposition A* ... $emn - m - n \neq a^2$, ausser dem *casu* da e ein *multiplus quaternarii* ist, auf vielerley Art *determini*ren können? Dieses kan ich indessen *demonstri*ren daß die *propos*[*ition*] *A* allezeit falsch ist wann e nicht diese Form hat $(4hk - h + 1)$ so daß h und k *numeri integri affirmativi* seyen; dann wann e diese Form nicht hätte, so wäre A *evidenter* falsch *in casu* $n = 1$ und folglich nicht *universaliter negans.*[8]

Als mir neulich ein Theil von den *Memoires de l'Ac*[*ademie*] *pour l'année* 1734 *in* 8. in die hände gerathen, habe ich daselbst *p.* 268 *s*[*equentibus*] des Hn *Clairaut solution de plusieurs problemes &c.* angetroffen. Die *solution* so er giebt kan meines erachtens nicht *generalior* erdacht werden, und was er von dem *probleme troisieme* sagt scheinet mir auch sehr merckwürdig.[9] Der H. *Bouguer* brauchet vor das *signum* so E. HochE. schreiben $\nless$, dieses $\geqq$ welches zwar nicht *compendi*öß, aber sehr *expressif* ist.[10]

Die Nachricht von der Eroberung Prag[s] habe zu erst aus Ew. HochEd. Schreiben ersehen[11] und noch selbigen Tages die völlige *Confirmation* davon vernommen.

Ich verharre mit besonderer Hochachtung
Eurer HochEdelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

Moscau den 1. *Oct. st. n.*[12]
1744.

R 798 Reply to n° 83
Moscow, October (1st) 12th, 1744
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 88–89v
Partial copy, 2 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 24v–25r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 302–304; *Euler-Goldbach* (1965), p. 206–207

85
Euler to Goldbach
Berlin, November 17th, 1744

Wohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Eurer Wohlgebohrnen gantz besondere Gewogenheit gegen mich und die meinigen erkenne ich mit der gehorsamsten Verpflichtung, und habe wegen Dero Pathens[1] die Ehre zu berichten: daß ungeacht derselbe in den *Studiis* noch nicht so weit gekommen als ich wünsche, die Ursach davon doch weder einer Nachlässigkeit noch einem Mangel des *Ingenii* zugeschrieben werden könne. Er hatte in Petersburg die Schwindsucht schon in einem solchen Grad, daß die *Medici* fast alle Hoffnung zu seiner Genesung verlohren hatten, die See Lufft und See Krankheit bekam ihm aber so wohl, daß er allem Ansehen nach völlig gesund hieher gebracht worden; seit der Zeit ist er aber alle Winter mit einem *Recidiv* überfallen worden, daß er immer einige Monathe bettlägerig gewesen, in welchem Zustand er dann immer wiedrum einen guten Theil desjenigen, was er in den Sommer Monathen erlernet hatte, vergessen. Vergangenes Früh Jahr hat er nebst unsern übrigen Kindern die Poken gehabt, welche Gott sey Dank eine so gute Würkung gehabt, daß er von der vorigen Krankheit gäntzlich befreyet zu seyn scheinet, und sich noch bey der jetzigen *Saison*, welche für ihn sonst die gefährlichste gewesen, wohl auf befindet. Er ligt allso den *Studiis* mit allem Fleiß ob, und ist auch an seiner Fähigkeit nichts auszusetzen; die meiste Zeit bring ich mit ihm im lateinischen zu, und laße ihn täglich verschiedene *Exercitia* machen. über dieses aber *tracti*re ich die *Arithmetic* und *Geometri*e immer mit ihm, worinn er alles bald begreifft, und ich habe ihm auch schon die ersten Anfänge der *Algebra* beygebracht; dahero ich hoffe, daß ich ihn, wann er von keiner neuen Krankheit überfallen wird, mit Gottes Hülfe ziemlich weit bringen werde.

Daß Ewr. Wohlgeb. meine *Methode* die *numeros* $aa+1$ zu finden so durch den *Numerum primum* $4N+1$ theilbar sind, einiger *Attention* gewürdiget,[2] erfreuet mich sehr; der Beweiß davon ist dieser:

Wann $aa+bb$ *divisores* haben soll, so müßen die Buchstaben a und b allso beschaffen seyn, $a = mp + nq$ und $b = mq - np$: dann da[mit] wird $aa + bb = (mm + nn)\,(pp + qq)$,[3] und folglich ist $aa + bb$ *divisibel* du[rch] $pp + qq$. Da nun $4N+1$ immer auf die *Form* $pp+qq$ gebracht werden ka[n,] so müssen solche Zahlen für m und n gefunden werden, damit b gleich wird ± 1; oder $mq - np = \pm 1$. Wann ich allso aus der *Aequalität* $4N + 1 = pp + qq$ den Bruch $\frac{p}{q}$ *formi*re, so muß ein anderer Bruch $\frac{m}{n}$ gesucht werden dergestalt, daß wann diese brüche $\frac{m}{n} \times \frac{p}{q}$ *per crucem multiplicir*t werden die *producta* mq und np nur *unitate differi*ren: oder der Bruch $\frac{m}{n}$ muß *in minoribus numeris* dem Bruch $\frac{p}{q}$ *proxime* gleich seyn. Wann ich nun mit den Zahlen p und q die *Operation* anstelle, welche man um den *maximum communem divisorem* davon zu finden, zu machen pflegt, und aus den *Quotis* auf vorher beschriebene Art *fractiones formi*re, so ist der letste Bruch $= \frac{p}{q}$; und da in einer solchen Reihe Brüche zwey neben einander stehende immer so beschaffen sind, daß die *producta ex multiplicatione per crucem orta* nur um 1 von einander *differi*ren, so kan die *fractio penultima* für $\frac{m}{n}$ angenommen werden, da dann herauskommt $a = mp + nq$.

So viel ich mich erinnere, so sind mir die in den jüngstens überschickten Briefen enthaltenen Begriffe von den *numeris imaginariis*[4] sehr gründlich vorgekommen.

Wann $emn + fm + gn \neq a + bx + cxx$, so würde auch

$$4cemn + 4cfm + 4cgn \neq 4ac + 4bcx + 4ccxx = 4ac - bb + (b + 2cx)^2 :$$

und folglich würde $4cemn + 4cfm + 4cgn - 4ac + bb \neq \square$. Ob es nun möglich ist dergleichen *formuln* zu finden, so kommt es darauf an ob es solche *Formuln* gebe, $emn \pm fm \pm gn \pm h$, welche nimmer ein *quadrat* werden können. Ich habe aber auf dergleichen *Formuln* vorher nicht gedacht, und darüber auch noch jetzt nichts entdeket, welches an Ewr. Wohlgebohrnen überschrieben zu werden verdiente.

Was die *Formul* $emn - m - n$ betrifft, so habe ich sehr weit hinaus alle Zahlen für e gesucht, in welchen diese *Formul* ein *Quadratum* wer[den] kan, und habe gefunden daß für e alle Zahlen gesetzt werden können, ausser diesen: 4, 7, 8, 12, 15, 16, 20, 23, 24, 28, 31, 32, 36, 39, 40, 44, 47, 48, 52, 55, 56, 60, 63, 64, 68, 71, 72; so weit bin ich mit meiner Untersuchung gekommen;[5] da nun in diesen Zahlen keine andere, als welche in diesen beyden *Formuln* $4k$ und $8k - 1$ enthalten sind vorkommen, so deucht mich die *Induction* richtig zu seyn, wann ich sage, daß so wohl diese *Formul* $4kmn - m - n$ als diese $(8k - 1)\,mn - m - n$ kein *Quadrat* werden könne.[6] Ich habe noch nicht nur keine von diesen beyden *Formuln* falsch befunden, sondern wann auch für e irgend eine andere Zahl ausser $4k$ und $8k - 1$ angenommen wird, so habe ich noch immer die *Formul* $emn - m - n$ auf ein *Quadrat* bringen können.[7]

Auf Ewr. Wohlgeb. Veranlassung habe ich des H. *Clairaut Piece* in den *Memoires A*[*nni*] 1734 nachgelesen. Die *solution* der beyden erstern ist die *Newtoni-ani*sche, und kan freylich nicht allgemeiner seyn. Das dritte *Problema* ist in der That sehr merkwürdig; die *solution* ist aber so beschaff[en,] daß dieselbe auf keinen andern als einen rechten Winkel *applicir*t werden kan; da doch der *Casus* wann der *angulus* nicht *rectus* ist eben so möglich ist. Ich habe mit dem H. *Clairaut* viel darüber *correspondir*t, wir haben a[ber] beyde diesen letstern *Casum* nicht ins reine bringen können.[8]

Meine gantze *Familte* lässt sich Ewr. Wohlgeb. gehorsamst empfeh[len,] und ich habe die Ehre mit der schuldigsten Hochachtung zu seyn

Eurer Wohlgebohrnen
gehorsamster Diener
Leonhard Euler

Berlin den 17 *Nov.*
1744.

R 799 Reply to n° 84
Berlin, November 17th, 1744
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 107–108v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 305–307; *Euler-Goldbach* (1965), p. 207–208

86
Goldbach to Euler
Petersburg, January (15th) 26th, 1745

HochEdelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*

Eurer HochEdelgebohrnen erstatte ich dienstlichen Danck für die mir auf mein Verlangen ertheilte Nachricht von den *Progress*en Dero ältesten Hn Sohnes;[1] bey des selben annoch zartem Alter und schwächlichen Gesundheit kan ich Eurer Hoched. Behutsamkeit, indem Sie ihn mit vielem *memori*ren und lernen verschonen, nicht gnugsam loben. Dasjenige welches bey so gar jungen Jahren versäumet oder ausgesetzet wird kan künfftiger zeit wann die Leibes und Gemüths kräffte zunehmen gar leicht nachgeholet werden da es hingegen bey anhaltender Kranckheit sehr unverantwortlich seyn würde selbigen durch vieles *mediti*ren noch mehr zu schwächen und bey *continui*render solcher Leibes *Constitution* viel rathsamer für ihn wäre ein solches *genus vitae* zu erwehlen welches kein grosses nachdencken oder besondere Gelehrsamkeit erfordert.

Aus Eurer HochEdelgeb. letzterem Schreiben[2] habe ich ersehen daß Sie zu der *aequatione* $emn - m - n$ keine andere *valores* vor e als die entweder *multipli quaternarii* oder $= 8k - 1$ sind, gefunden haben; weil Sie sich aber hierin bloß auf eine *induction* beziehen,[3] so habe hiebey anmercken wollen, daß wenigstens ausser diesen beyden *casibus* die *propositio* $emn - m - n \neq a^2$ allezeit falsch ist und die *quadrata* denen $emn - m - n$ gleich wird, sogar angegeben werden können so offt entweder e oder $e - 1$ ein *divisor* von einem *quadrato unitate aucto* seyn kan.[4] Denn *in casu primo ubi* $be = c^2 + 1$, *fiat* $n = b + 1$, $m = b + b^2$, *erit*

$$emn - m - n = eb\,(b+1)^2 - b\,(b+1) - (b+1) = (eb-1)\,(b+1)^2 = c^2\,(b+1)^2\,;$$

in casu secundo wann $e - 1$ ein *divisor* ist von $a^2 + 1$, *ponatur* $m = 1$, $n = \dfrac{a^2+1}{e-1}$. *Igitur nullae aliae sunt formulae possibiles pro* e *in propositione* $emn - m - n \neq a^2$, *nisi cum* e *est vel quaternarius (aut eius multiplus quicunque) vel cum* e *est* $= 8k - 1$*; utrovis enim casu tam* e *quam* $e - 1$ *nullo modo dividere possunt quadratum unitate auctum; hinc fit, ut quamvis* $4k - 1$ *non possit dividere quadratum unitate auctum, tamen ad exprimendum valorem* e *in propositione* $emn - m - n \neq a^2$ *ineptum sit, propterea quod* $e - 1 = 4k - 2$ *potest esse divisor quadrati unitate aucti; ex quibus sequitur praeter numeros in formula* $4k$ *et* $8k - 1$ *comprehensos alios nullos posse substitui pro* e*, quoniam scilicet nulli alii hac gaudent proprietate ut tam* e*, quam* $e - 1$ *dividere nequeat quadratum unitate auctum,*[5] *et si nondum demonstratum sit omnes numeros huius formae* $8k - 1$ *pro* e *positos satisfacere quod tamen verisimillimum arbitror, nec dubito quin aliqua ratione quae mihi nunc non suppetit, demonstrari possit.*

Auf meiner Rückreise von *Moscau* hieher ist mir eingefallen daß vieleicht die *propositio de numeris primis huius formae* $4n+1$ *qui sunt summae duorum quadratorum* nur ein *corollarium huius theorematis* seyn möchte: *Omnes numeri huius formae* $4n+1$*, qui dividi nequeunt per numerum huius formae*[6] $4m \mathbin{\overset{..}{\underset{..}{+}}} 1$*, tot modis sunt summa duorum quadratorum, quot modis dispesci possunt in duos factores;*[7] *exempli gratia*

65 *est numerus huius formae* $4n + 1$ *nec dividi potest per numerum ullum huius formae* $4m - 1$*, ergo* 65 *tot modis est summa duorum quadratorum quot modis dispesci potest in duos factores, nempe duobus modis* (1.) $1 \cdot 65$ (2.) $5 \cdot 13$; *est igitur aggregatum duorum quadratorum* (1.) $1 + 64$, (2.) $16 + 49$.

Similiter 25 *est numerus huius formae* $4n+1$ *nec dividi potest per numerum huius formae* $4m-1$*; igitur cum dupliciter resolvi possit in duos factores nempe* (1.) *in* 1 *et* 25, (2.) *in* 5 *et* 5, *erit dupliciter summa duorum quadratorum nempe* (1.) $0+25$, (2.) $9+16$.

Similiter numerus 625 *eiusdem naturae tripliciter resolvitur in duos factores* (1.) $1\cdot 625$, (2.) $5\cdot 125$, (3.) $25\cdot 25$; *ergo tripliciter est summa duorum quadratorum* (1.) 0^2+25^2, (2.) 7^2+24^2, (3.) 15^2+20^2.

Numerus 493 *eiusdem naturae duobus modis resolvi potest in duos factores* (1.) $1\cdot 493$, (2.) $17\cdot 29$; *ergo duobus modis est summa duorum quadratorum* (1.) 3^2+22^2, (2.) 13^2+18^2 *&c.*

Übrigens habe ich zwey *method*en wann die *aequatio* $emq-q-m=a^2$ in einem *casu q possibilis* ist *innumeros alios casus pro aequatione* $emn-m-n=b^2$ zu finden, nemlich *si fiat*

(I.) $\left(q-2ak+(em-1)\ k^2\right)=n$,

(II.) $((em-1)\ h+1)^2\,q-hm\,((em-1)\ h+2)=n$,

ubi h et k sint numeri quicunque modo n fiat integer; deren Wahrheit *per ipsam substitutionem* alsofort *demonstri*ret wird.

Ich verharre mit vieler hochachtung
Eurer HochEdelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.ᵗ Petersburg[8]
den 26. *Jan. st. n.* 1745.

R 800 Reply to nº 85
Petersburg, January (15th) 26th, 1745
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 90–91v
Partial copy, 5 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 25v–27v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 308–310; *Euler-Goldbach* (1965), p. 209–210

87
Euler to Goldbach
Berlin, February 16th, 1745

Wohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats*-Rath

Ewr. Wohlgeb. erkenne ich mich gehorsamst verbunden für Dero gantz besondere Wohlgewogenheit gegen unseren *Albrecht*. Weilen derselbe nun diesen Winter meistens ohne Krankheit überstanden, so haben wir das gute Vertrauen, daß sich sein bißheriger kränklicher Zustand nach und nach verlieren, und er dadurch noch in Stand kommen werde, mit Gottes Hülfe etwas rechts zu erlernen. Er kan schon ziemlich fertig alle *algebrai*schen Aufgaben, welche auf *Aequationes simplices* führen, *solvi*ren, und seit etlichen Tagen führe ich ihn zu *quadrati*schen *Aequation*en an, worein er sich gleichfalls wohl findet. Das Latein geht auch ziemlich von statten, ungeacht ich ihn mit vielem Auswendiglernen nicht beschwehre.

Daß diese *Formul* $emn-m-n$ nimmer ein *Quadrat* seyn könne wann e entweder eine solche Zahl $4k$ oder eine solche $8k-1$ ist, habe ich nur aus einer *Induction* geschlossen. Diese *Observation* erhält aber durch Ewr. Wohlgeb. Entdeckung einen weit grösseren Grad der Gewißheit.[1] Dann dadurch wird unwiedersprechlich dargethan, daß so offt entweder e oder $e-1$ ein *Divisor* ist von $cc+1$ für m *et* n allzeit solche Zahlen gefunden werden können, daß $emn-m-n$ ein *Quadrat* wird; weil nun weder $4k$ noch $8k-1$ immer hierinn Platz finden können, so kan auf diese Art weder für $e=4k$ noch für $e=8k-1$ die *Formul* $emn-m-n$ zu einem *Quadrat* gebracht werden. Um aber die *Demonstration* vollkommen zu machen, so müsste man auch die *Propositionem conversam* beweisen können, daß so offt $emn-m-n$ ein *Quadrat* seyn kan, auch entweder e oder $e-1$ ein *divisor* sey von einer solchen Zahl $cc+1$. So lang allso dieses nicht erwiesen ist, so lang kan man auch nicht behaupten, daß der obige Satz völlig bewiesen worden, ob man gleich daran gar keine Ursach zu zweifeln hat.[2] Es gibt in der *Arithmetic* eine grosse Menge solcher Sätze, an welchen niemand zweifelt, ungeacht man dieselben nicht *demonstri*ren kan: Ich habe zum *Exemp*el diesen Satz noch nirgend bewiesen gefunden: *qui numerus in integris non est summa duorum quadratorum, eundem ne in fractis quidem esse posse summam duorum quadratorum.*[3] Um dieses zu beweisen, müsste man zeigen daß wann ann einer *summae duorum quadratorum* gleich ist, auch allzeit a eine *summa duorum integrorum quadratorum* seyn müsse. Gleicher Gestalt ist leicht zu *demonstri*ren, daß das *Product ex binis summis duorum quadratorum* auch eine *summa duorum quadratorum* sey: hieraus erhellet aber noch nicht, daß wann eine *summa duorum quadratorum per summam duorum quadratorum dividir*t wird, der *Quotus* auch eine *summa duorum quadratorum* seyn müsse: woran doch niemand zweifelt. Es ist auch meines Bedünkens noch nicht erwiesen, daß eine *summa duorum quadratorum inter se primorum* keine andere *Divisores* haben könne, *nisi qui sint ipsi duorum quadratorum summae*. Eine gleich[e] Bewandtnüß hat es auch mit dieser *Prop*[*osition*]: *Omnem numerum primum hujus formae* $4n+1$ *semper esse summam duorum quadratorum idque unico modo*.[4] Wann man nun dieses voraussetzt, so lassen sich Ewr. Wohlgeb. *Theoremata* leicht erweisen. Dann wann $4n+1$ keinen *divisorem* hat *formae* $4m-1$ so müssen alle *factores* von dieser *Form* $4m+1$ und folglich *summae duorum quadratorum* seyn: es ist aber *generaliter*

$$(aa+bb)\,(cc+dd)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2=(ad+bc)^2+(ac-bd)^2$$

und allso *duplici modo in duo quadrata resolubile*.[5] Hernach lässt sich auch leicht erweisen, *quod, si quis numerus duplici modo in duo quadrata fuerit resolubilis, eum non esse primum; sit enim* $N=aa+bb=cc+dd$ *erit*

$$N=\frac{\left((a-c)^2+(b-d)^2\right)\left((a+c)^2+(b-d)^2\right)}{4\,(b-d)^2}.$$

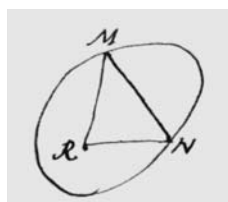
Ferner hat auch dieser Satz seine Richtigkeit: *Si numerus* $4n+1$ *unico modo in duo quadrata resolvi possit, tum certo erit numerus primus;*[6] *sin autem* $4n+1$ *nullo modo fuerit summa duorum quadratorum, tum non erit primus, sed factores habebit formae* $4m-1$ *vel duos vel* 4, *vel* 6, *etc. At si* $4n+1$ *pluribus modis fuerit summa duorum quadratorum tum quoque binos pluresve habebit factores formae* $4m+1$. Und aus diesem Grunde ist nicht schwehr, sehr grosse Zahlen $4n+1$ zu untersuchen ob dieselben *primi* sind oder nicht?[7]

Gleich wie ich bewiesen habe daß alle *divisores primi hujus formae* a^2+b^2 in dieser *Expression* $4n+1$ enthalten sind, allso kan ich auch *demonstri*ren daß alle *divisores* von a^4+b^4 in dieser *Form* $8n+1$, und *generaliter*, daß alle *divisores* von $a^{2^m}+b^{2^m}$ in dieser *Form* $2^{m+1}n+1$ enthalten sind. Folgende *Theoremata* kan ich auch *rigorose* beweisen:

I. *Si* a^m-b^m *fuerit divisibilis per numerum primum* $2n+1$ *atque* p *sit maximus communis divisor numerorum* m *et* $2n$ *tum quoque* a^p-b^p *per* $2n+1$ *divisibilis erit.*

II. *Si haec formula* af^n-bg^n *fuerit divisibilis per numerum primum* $mn+1$, *tum quoque* a^m-b^m *per* $mn+1$ *erit divisibile. Si ergo pro* f *et* g *ejusmodi numeros invenire liceat, ut* af^n-bg^n *sit divis[ibilis] per* $mn+1$, *tum formula* a^m-b^m *necessario erit per* $mn+1$ *divisibilis.*[8]

Ich bin letstens auf dieses *Problema* gefallen:[9]



Circa datum punctum radians R *curvam describere ejusmodi, ut singuli radii ex* R *egressi post duplicem reflexionem in* M *et* N *in ipsum punctum* R *revertantur.* Es gibt ausser der *Ellipsi alterum focum in R habente* noch unendlich viel andere Linien *Quaesito satisfacientes* so wohl *algebraicae* als *transcendentes*: und dieses *Problema* deucht mich eines von den schwehrsten *in hoc genere* zu seyn.

Haec aequatio $ay\,dy + y\,dx\,(3ax+b) + dx\,\left(ax^3+bxx+cx+f\right) = 0$ *potest separari et integrari.*[10]

Hiemit habe die Ehre Ewr. Wohlgeb. mich auf das gehorsamste zu empfehlen, und mit der vollkommensten Hochachtung lebenslang zu verharren

Ewr. Wohlgebohrnen

gehorsamster Diener

Leonh. Euler

Berlin den 16 *Febr.*

1745.

R 801 Reply to n° 86
Berlin, February 16th, 1745
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 111–112v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 311–314; *Euler-Goldbach* (1965), p. 211–212

88
Goldbach to Euler
Petersburg, May (18th) 29th, 1745

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*,

Eurer Hochedelgeb. Schreiben vom 16. *Febr.* habe ich zwar schon längst erhalten, bin aber bißhero durch unvermeidliche Geschäffte darauf zu antworten verhindert worden.

Die *integrationem aequationis*[1]

$$ay\,dy + y\;(3ax + b)\;dx + \left(ax^3 + bx^2 + cx + f\right)\;dx = 0$$

halte ich vor sehr leicht indem ich alsofort gefunden

$$y = -\,x^2 + \beta x + \gamma,$$

ubi

$$a^2\beta^3 + 2ab\beta^2 + \left(ac + b^2\right)\beta + bc = af$$

et[2]

$$\gamma = \frac{-\,a\beta^2 \mp b\beta - c}{a}.$$

Was das andere *problema* betrifft[3] so wird die *curva* nachfolgende *proprietates* haben:

1. muß *posita* $AB = x$, $BC = y$, $HA = a$, $AG = b$,[4] y eine solche *functio ipsius* x seyn, daß *positis* $x = -\,a$ *et* $x = b$, $y = 0$ werde.

2. weil die *pars axis inter radium incidentem* AC *et radium reflexum* CD *intercepta*, nemlich AD, *per* x *et* y *ope normalis* CN bekannt wird, folglich *posita* $AD = u$, u *per* x *et* y *data* ist so muß auch *positis* $AF = x'$, $FE = y'$ die *inter radios* AE *et* ED *intercepta eadem pars axis* AD *per* x' *et* y' gegeben seyn, durch welche *aequation* y' *eliminiret* wird.

3. *Fiat*

$$\begin{array}{ccccccc} CB & & BD & & DF & & EF \\ y & : & u - x & :: & x' - u & : & \dfrac{(u-x)\,(x'-u)}{y} = y', \end{array}$$

wodurch x' *eliminiret* wird; wann endlich auch

4. die *summa radiorum incidentis et reflexi usque ad axem* entweder *constans* (wie in der *ellipsi*) oder *certae cuidam functioni ipsius x* gleich gesetzt wird, so kan dadurch auch *y per x determini*ret werden, wie wohl ich dieses alles jetzo nicht gnugsam einsehe und Eurer Hochedelg. besseren Beurtheilung überlasse.[5]

Den inliegenden Brief an Hn *Pr*[*ofessor*] *Gesner recommandi*r[e] ich bestens;[6] ich habe den selben ersuchet, wann er etwas an mich schreiben wollte, es an E. H. zu *adressi*ren, in der hofnung es werde ohne Deroselben *incommodi*tät um so viel mehr geschehen können weil der *casus* vermuthlich nicht mehr als einmal im Jahr *existi*ren wird.

Ich verharre mit vieler Hochachtung
Eurer HochEdelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.t Petersburg
den 29. *Maii st. n.* 1745.

R 802 Reply to n° 87
Petersburg, May (18th) 29th, 1745
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 92rv
Partial copy, 3 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 27v–28v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 315–316; *Euler-Goldbach* (1965), p. 213–214

89
Euler to Goldbach
Berlin, June 19th, 1745

Wohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats*-Rath

Ewr. Wohlgeb. Briefe an die HH. *Gesner* und *Heinsius*[1] habe ich noch den selben Tag, als ich sie bekommen, fortgeschickt; ich gedachte anfänglich diese meine Antwort aufzuschieben, biß aus Göttingen etwas an Ewr. Wohlgeb. einlauffen würde; da aber dieses noch einige Zeit anstehen dürfte, so habe ich mit meiner schuldigsten Antwort nicht länger warten wollen.

Ich habe letstens in des *Neaulme*s Buchladen allhier das *Dictionnaire de Trevoux*[2] in 6 starken *Foliant*en *magnific* gebunden angetroffen, man forderte aber darfür 60 Rthl. Wegen eines *Dictionnaire de Rimes*[3] habe noch keine zuverlässige Antwort erhalten können. Jetzo habe ich auch das *Commercium Epistolicum Leibnizii et Bernoullii* in 2 *Vol.* 4*to* bekommen, worinn sehr viel schöne und wichtige Sachen enthalten sind. Die *Opera Joh*[*annis*] *Bernoullii* sind in 4 *Vol.* 4*to*, und *Jacobi Bernoullii* in 2 *Vol.* gedruckt; ingleichem ist jetzt auch die *Edition Princip*[*iorum*] *Math*[*ematicorum*] *Phil*[*osophiae*] *Nat*[*uralis*] *Newtoni, cum*

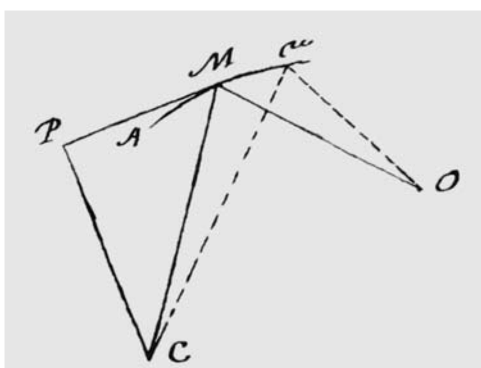
Notis P[atrum] Le Sœur et ... völlig herausgekommen, welches Werk sehr wohl gerathen.[4] Sollten Ewr. Wohlgeb. etwas von diesen neuen Werken verlangen, so würde von dieser Gelegenheit *profiti*ren Denselben zugleich *Exemplaria* von meinen bißher herausgekommenen Schrifften gehorsamst zu *praesenti*ren, welche allein zu schicken der Mühe nicht werth sind.

Da ein jegliches *Integrale* wann es vollständig seyn soll, eine neue *Quantitatem constantem* in sich enthalten muß, welche in dem *Differentiali* nicht gewesen, so ist die *formula* $y = -xx + \beta x + \gamma$ nicht das vollständige *Integrale* der *Aequation*[5]

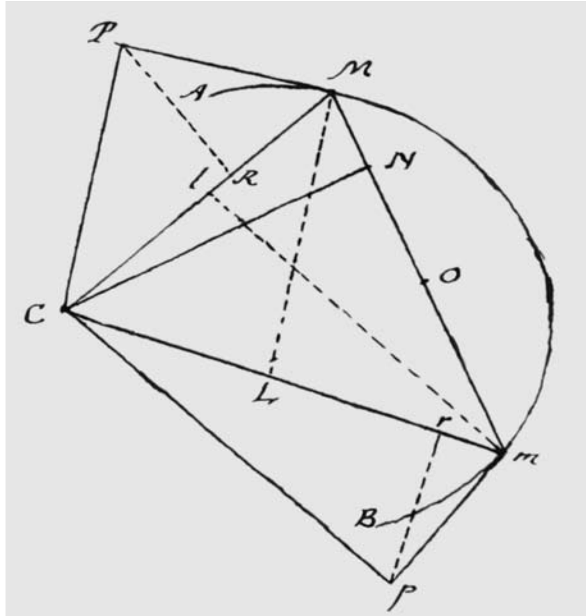
$$ay\,dy + y\,(3ax + b)\,dx + \big(ax^3 + bxx + cx + f\big)\,dx = 0;$$

solches kan aber aus dem *Integrali particulari* leicht gefunden werden, wann man setzt $y = z - xx + \beta x + \gamma$.

Was das andere *Problema* anlangt, welches jetz in den *Actis Lipsiensibus* herauskommen,[6] da die *Radii ex puncto dato emanantes post duplicem reflexionem* in eben dasselbe *Punct* zurükkommen sollen: so hat das *Tentamen* Ewr. Wohlgeb. seine völlige Richtigkeit, und dienet um die *Curvam infra axem constitutam* zu finden, wann die obere als bekannt angenommen wird. Die gröste Schwierigkeit aber beruhet darauf, daß beyde *Curvae eandem curvam continuam* ausmachen;[7] welcher Umstand von Ewr. Wohlgebohrnen nicht in Betrachtung gezogen worden. Ich habe anfänglich die *solution* auch auf eben diese Art *tentir*et; die *Formulae* werden aber allzu weitläuffig und verwirrt, als daß ich dieser letst gedachten Bedingung hätte ein Genügen leisten können. Ich glaubte daß die Annehmung einer Axe daran schuldig wäre, in dem man wenig hinreichenden Grund hat, warum man vielmehr diese als eine andere Linie für die Axe annehmen sollte. Dahero habe ich diese Betrachtung völlig bey seits gesetzt, und meine *solution* folgender gestalt vorgenommen:



Lemma. Si ex foco C in curvam AM radii CM incidant, atque ex C in tangentem MP demittatur perpendiculum CP: vocatis $CM = y$, $CP = p$; *erit longitudo radii reflexi* $MO = \dfrac{py\,dy}{2y\,dp - p\,dy}$.



Probl[ema]. Circa datum punctum C describere curvam $AMmB$, ut radii ex C egressi post duplicem reflexionem in M et m in idem punctum C revertantur.

Solutio: Ad M et m ducantur tangentes MP, mp, in easque ex C demittantur perpendicula CP, Cp. Vocentur $CM = y$; $CP = p$; $MP = q = \sqrt{(yy - pp)}$, item $Cm = Y$; $Cp = P$; $mp = -Q = -\sqrt{(YY - PP)}$. Sit MO radius reflexus incidenti CM respondens et mO radius reflexus incidenti Cm respondens, erit per lemma: $MO = \dfrac{py\,dy}{2y\,dp - p\,dy}$ et $mO = \dfrac{PY\,dY}{2Y\,dP - P\,dY}$, et

$$Mm = \frac{py\,dy}{2y\,dp - p\,dy} + \frac{PY\,dY}{2Y\,dP - P\,dY}\,.$$

Bisecentur anguli CMm, CmM rectis ML, ml, quae erunt normales ad curvam ac propterea perpendiculis CP, Cp parallelae. Jam cum anguli MCP vel CML sit sinus $= \dfrac{q}{y}$, et cosinus $= \dfrac{p}{y}$, erit anguli dupli CMm sinus $= \dfrac{2pq}{yy}$, cosinus $= \dfrac{pp - qq}{yy} = \dfrac{2pp - yy}{yy}$ et anguli CmM sinus $= -\dfrac{2PQ}{YY}$ et cosinus $= \dfrac{PP - QQ}{YY} = \dfrac{2PP - YY}{YY}$. Ergo perpendiculum $CN = \dfrac{2pq}{y} = -\dfrac{2PQ}{Y}$: et $MN = \dfrac{2pp}{y} - y$, atque $mN = \dfrac{2PP}{Y} - Y$: unde nascuntur hae duae aequationes

I. $\dfrac{pq}{y} + \dfrac{PQ}{Y} = 0$; *et*

II. $\dfrac{2pp}{y} - y + \dfrac{2PP}{Y} - Y = \dfrac{py\,dy}{2y\,dp - p\,dy} + \dfrac{PY\,dY}{2Y\,dP - P\,dY}$

seu $\dfrac{pp}{y} + \dfrac{PP}{Y} = \dfrac{yy\,dp}{2y\,dp - p\,dy} + \dfrac{YY\,dP}{2Y\,dP - P\,dY}$.

Ad has aequationes simpliciores reddendas ex P et p in CM et Cm demittantur perpendicula PR et pr, et vocentur $CR = r$; $PR = s$; $Cr = R$ et $pr = -S$ quia in plagam oppositam vergit, eritque $r = \dfrac{pp}{y}$; $s = \dfrac{pq}{y}$, et ob $y = \dfrac{pp}{r}$ et $dy = \dfrac{2p\,dp}{r} - \dfrac{pp\,dr}{rr}$ erit $2y\,dp - p\,dy = \dfrac{p^3 dr}{rr}$ ideoque

$$\frac{yy\,dp}{2y\,dp - p\,dy} = \frac{p\,dp}{dr} = r + \frac{s\,ds}{dr}$$

ob $pp = rr + ss$; simili modo erit $R = \dfrac{PP}{Y}$; $S = \dfrac{PQ}{Y}$;

$$\frac{YY\,dP}{2Y\,dP - P\,dY} = \frac{P\,dP}{dR} = R + \frac{S\,dS}{dR}\,.$$

Quibus valoribus substitutis binae aequationes solutionem continentes abeunt in has:

I. $s + S = 0$,

II. $r + R = r + \dfrac{s\,ds}{dr} + R + \dfrac{S\,dS}{dR}$

seu II. $\dfrac{s\,ds}{dr} + \dfrac{S\,dS}{dR} = 0$.

Quodsi jam ponatur $s = t$ et $\dfrac{s\,ds}{dr} = u$ erit $S = -t$ et $\dfrac{S\,dS}{dR} = -u$; quare cum puncta M et m ad eandem curvam pertinere debeant, eandem relationem inter t et u atque inter $-t$ et $-u$ esse oportet; et quia s exprimitur per radicale $\sqrt{(pp - rr)}$, necesse est ut aequatio inter t et u ita sit comparata, ut non mutetur sive t et u capiantur negative sive affirmative; si itaque pro relatione inter t et u assumatur hujusmodi aequatio

$$\alpha tt + \beta uu = aa, \quad \textit{seu} \quad aa = \alpha tt + \beta uu + \gamma t^4 + \delta ttuu + \varepsilon u^4 \ \textit{etc.},$$

semper prodibit curva quaesito satisfaciens. Assumta autem hujusmodi idonea aequatione inter t et u: erit $s = t$; et $\dfrac{s\,ds}{dr} = \dfrac{t\,dt}{dr} = u$, unde fit $r = \int \dfrac{t\,dt}{u}$; $p = \sqrt{(rr + ss)}$, et $y = r + \dfrac{ss}{r}$; sicque obtinetur relatio inter quemvis radium CM et respondens perpendiculum in tangentem CP, ex qua relatione curva construi potest.

Si pro aequatione inter t et u assumatur $tt + uu = aa$ erit $u\,du = -t\,dt$ et $r = b - u$; existente $s = t = \sqrt{(aa - uu)}$, unde $p = \sqrt{(aa + bb - 2bu)}$ et

$$y = \frac{pp}{r} = \frac{aa + bb - 2bu}{b - u},$$

seu ob $u = \dfrac{aa+bb-pp}{2b}$, *erit*

$$r = \frac{bb-aa+pp}{2b}$$

et

$$y = \frac{2bpp}{bb-aa+pp}$$

seu

$$pp = \frac{(bb-aa)\,y}{2b-y},$$

quae aequatio praebet omnes ellipses alterum focum in C habentes. Sumtis igitur aliis aequationibus inter t et u supra descriptam indolem habentes, infinitae aliae curvae satisfacientes prodibunt, inter quas quoque curvae algebraicae reperientur: wie ich dann unter andern auch eine *ordinis sexti* gefunden habe.[8]

Hiemit empfehle ich mich zu Ewr. Wohlgeb. beständigen Gewogenheit und verbleibe mit der vollkommensten Hochachtung

Ewr. Wohlgeb.
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 19 *Jun.*
1745.

Daß mein Vater gestorben,[9] glaube ich Ewr. Wohlgeb. schon berichtet zu haben.

R 803 Reply to nº 88
Berlin, June 19th, 1745
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 117–118v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 317–320; *Euler-Goldbach* (1965), p. 214–216

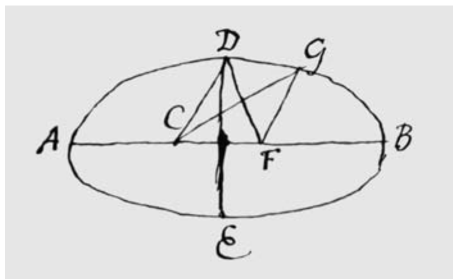
90
Goldbach to Euler
Petersburg, July 1745

HochEdelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*

Ich weiß nicht eigentlich ob mir bey abgang meines letzteren Schreibens schon bekannt gewesen daß Ew. Hochedelg. das *Directorium* der *Mathemati*schen *Classe* in der Königl[ichen] *Academie* der Wissenschafften erhalten,[1] in welchem fall ich Deroselben (dieses *relativum* gehet so wohl auf Ew. H. als auf die *Acad*[*emie*] selbst) schon damahls, wie ich es jetzo thue, dazu hätte *gratuli*ren sollen. Das absterben

Dero Hn Vaters habe zu allererst aus dem letzten Briefe vernommen,[2] und wie den Verlust so Sie hiedurch erlitten von hertzen bedaure so wünsche hingegen daß Ew. Hochedelg. ein gleiches Alter bey guter Gesundheit und allem Vergnügen erreichen mögen.

Für die mir *communicir*te *Solution*[3] dancke ich dienstl[ich]; ich zweiffele nicht daß die selbe so kurtz sey als nur möglich, allein sie erfordert doch eine besondere *application* um alles recht einzusehen; ohngeachtet nun zur *solution* die *consideratio unius puncti* C: aus welchem die *radii* ausgehen und wohin sie *post duplicem reflexionem* zurückkehren, gnugsam ist, so halte ich doch davor daß ausser diesem noch ein anderes *punctum* in allen dergleichen *curvis*, *in eadem a centro distantia* zugegen seyn muß welches eben dieselbe *propriet*ät als das *punctum* C haben wird dahero, wann das *problema* folgender gestalt *concipi*ret würde:



Datis diametris curvae AB *&* DE, *invenire in axe* AB *punctum* C, *ex quo omnes radii &c.* so möchte ich gern sehen wie dergleichen *curva non-ellipsis* von einer *ellipsi differ*iren würde denn ich zweiffele sehr ob eine *curva* deren 4 *quadrantes* nicht *similes et aequales* sind (wie in der *ellipsi*) zur *solution* geschickt seyn könne;[4] ist aber die *curva* solcher gestalt beschaffen, so kan man die Probe ob eine *aequatio data satisfac*iret, auch folgender massen, nach Eurer HochEdelg. Anleitung anstellen: *Sit radius quicunque ex puncto* C *in curvam incidens* $CD=y$, *radius a curva reflexus (in axem)* $DF = y'$, *radius ab axe reflexus (ita ut* $\text{ang.}\,CFD = \text{ang.}\,BFG$*)* $FG = y''$, *radius a curva reflexus* $GC = y'''$. *Requiritur ut spatium in axe interceptum* CF *inter* y *et* y', *item inter* y'' *et* y''' *sit idem.*

Meine Bücher liegen, ausser sehr wenigen die ich auch fast gar nicht lese, schon seit mehr als 3 Jahren[5] in 7 grossen Kisten vernagelt und sind mir solchergestalt mehr zur Last als nützlich dahero ich denn auch die vormahls verlangten Bücher deren Ew. H. Erwehnung thun bey meiner jetzigen *Situation* (mit welcher ich jedoch höchst vergnüget bin) nicht verlange,[6] sondern nur bitte Dero eigenen Schrifften die *Epistolas Lacrosi*, so viel derselben herausgekommen, *in duplo* beyzufügen und wann sich eine bequeme Gelegenheit findet anhero zu senden,[7] das davor ausgelegte soll alsofort auf Dero Anweisung allhie bezahlet werden und ich verharre mit besonderer Hochachtung

Eurer HochEdelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.^{t} Petersburg
den [8] *Julii st. n.* 1745.

vert[*e*]

P. S. H. *Prof. Gretsch*[9] hat mich schon längst ersuchet ihn bey Eurer HochEdelg. aufs beste zu empfehlen.

R 804 Reply to n° 89
Petersburg, July 1745
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 93–94v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 321–322; *Euler-Goldbach* (1965), p. 217–218

91
Euler to Goldbach
Berlin, August 7th, 1745

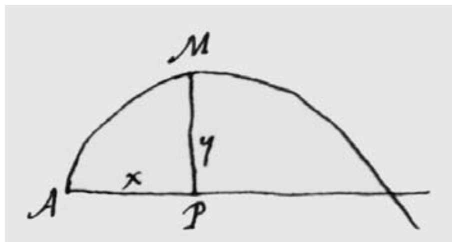
Wohlgebohrner Herr *Etats*-Rath
Hochgeehrtester Herr

Diesen Augenblick erhalte ich den beygeschlossenen Brief aus Göttingen,[1] welchen mit diesen Zeilen zu begleiten nicht habe ermangeln können. Inzwischen werden Ewr. Wohlgebohrnen meine Schuldigste Antwort auf Dero letstere geehrteste Zuschrifft richtig erhalten haben; welche wie ich vermuthet hatte, allzulang hätte aufschieben müssen, wann ich damit auf die Antwort des Herrn *Prof. Gesners* aus Göttingen hätte warten wollen.[2]

Ich habe seit einiger Zeit mit dem H. *Prof. Nicolao Bernoulli* zu Basel eine kleine *Dispute* über die *series divergentes*,[3] dergleichen diese ist $1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 + 720 -$ *etc.* gehabt; indem Derselbe geläugnet, daß alle dergleichen *series* eine *determinir*te *summ* haben, ich aber das gegentheil behauptet; weilen ich glaube daß eine jegliche *series* einen bestimmten Werth haben müsse. Um aber allen Schwürigkeiten, welche dagegen gemacht worden, zu begegnen, so sollte dieser Werth nicht mit dem Nahmen der *Summ* beleget werden, weil man mit diesem Wort gemeiniglich einen solchen Begriff zu verknüpfen pflegt, als wann die *summ* durch eine würkliche *Summi*rung herausgebracht würde: welche *Idée* bey den *seriebus divergentibus* nicht statt findet. Da nun eine jegliche *series* aus der *Evolution* einer *expressionis finitae* entstehet, so habe ich diese neue *Definition* von der *summ* einer jeglichen *seriei* gegeben:

Summa cujusque seriei est valor expressionis illius finitae, ex cujus evolutione illa series oritur.

Der H. *Bernoulli* hat diese *Definition* vollkommen *approbir*t, zweifelt aber noch, ob nicht öffters eben dieselbe *series divergens* aus verschiedener *expressionum finitarum evolutione* entstehen könne, allso daß man nach dieser *Definition* verschiedene Werthe zugeben müsste. Darüber hat er zwar kein *Exemp*el gegeben, ich glaube aber Gewiß zu seyn, daß nimmer eben dieselbe *series* aus der *evolution* zweyer würklich verschiedener *expressionum finitarum* entstehen könne. Und hieraus folget dann unstreitig, daß eine jegliche *series* so wohl *divergens* als *convergens* einen *determi*[*ni*]*r*ten Werth oder *summam* haben müsse: dahero wann die *summ* dieser *seriei* $1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 +$ *etc.* gefunden werden soll, so muß man den *Valorem* derjenigen *Formul* anzeigen, aus deren *Evolution* diese *series* entsteht.[4] Um diese zu finden, so stelle man sich eine krumme Linie vor, deren *abscissa* $= x$ und *applicata* $y = \dfrac{1}{1 - \ell\, x}$.



Da nun $\ell\, 0 = -\infty$ und $\ell\, 1 = 0$, so wird diese *Curva* eine solche *Form* haben, und die *Area* derselben $APM = \int y\, dx = \int \dfrac{dx}{1 - \ell\, x}$ wird

$$= xy - 1xy^2 + 2xy^3 - 6xy^4 + 24xy^5 \textit{ etc.}$$

Setzt man nun $AP = x = 1$, so wird auch $y = 1$, und die *Area* APM wird seyn $1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 +$ *etc.*; dahero der Werth dieser *Seriei* der *Areae* APM gleich seyn muß, welche nicht nur *determi*[*ni*]*r*t, sondern auch wie aus der *Figur* erhellt etwas grösser ist als $\frac{1}{2}$. Einen solchen Werth habe ich auch durch verschiedene *Method*en, wodurch ich dieselbe *series* in *convergentes* verwandelt habe, herausgebracht. Anjetzo aber kan ich beweisen daß diese *series* gleich sey dieser *expression*

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{3}{1 + \cfrac{3}{1 + \cfrac{4}{1 + \cfrac{4}{1 + \cfrac{5}{1 + \cfrac{5}{1 + \textit{etc.}}}}}}}}}}}}$$

welche nicht nur stark *convergir*t, sondern auch *limites continuo propiores* angibt, *intra quos valor contineatur*. Dann wann die *summa seriei* $1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 + etc.$ gesetzt wird $= s$, so ist

$$s < 1;$$
$$s > \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2};$$
$$s < \frac{1}{1+\frac{1}{1+1}} = \frac{2}{3};$$
$$s > \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+2}}} = \frac{4}{7},\ etc.$$

Hieraus habe ich nun gefunden, daß *proxime* sey $s = 0{,}596\,347\,592\,2$.[5] Es wäre allso zu untersuchen, ob dieser Werth nicht etwa durch die *Quadraturam circuli*, oder *logarithmos* angegeben werden könnte. Auf gleiche Weise kan ich auch diese *Seriem generalem*

$$s = 1 - ma + m\,(m+n)\,a^2 - m\,(m+n)\,(m+2n)\,a^3 + etc.$$

*summi*ren, dann es ist

$$s = \cfrac{1}{1+\cfrac{ma}{1+\cfrac{na}{1+\cfrac{(m+n)\,a}{1+\cfrac{2na}{1+\cfrac{(m+2n)\,a}{1+\cfrac{3na}{1+\cfrac{(m+3n)\,a}{1+\cfrac{4na}{etc.}}}}}}}}}$$

allso ist

$$s < 1;$$
$$s > \frac{1}{1+ma};$$
$$s < \frac{1+na}{1+(m+n)\,a};$$
$$s > \frac{1+(m+2n)\,a}{1+2\,(m+n)\,a+m\,(m+n)\,a^2} \quad etc.$$

Ewr. Wohlgeb. wird zur Gnüge bekannt seyn, wie ein großes Unglük durch die *Glor*reiche *Victori*e bey Friedberg von unserer Statt abgewendet worden, als welcher von den Feinden der gäntzliche Untergang geschworen gewesen. Anjetzo leben wir in Furcht und Hoffnung, und einer Erwartung der wichtigsten Dinge, welche sich allem Ansehen nach in kurzer Zeit äussern müßen. Ich habe aber die feste Zuversicht, daß durch die Göttliche Vorsehung wie bißher allso auch hinführo alles zu unserem Besten *dirigir*t werden werde.[6]

Nachdem bey unserer *Academi*e das jährlich festgesetzte *Praemium* von 50 *Ducat*en dieses Jahr dem H. Waitz in *Cassel*, als dessen *Piece* über die *Causam electricitatis* am besten befunden worden, erhalten,[7] so ist auf das künftige Jahr die hier beyligende Frage *proponir*t worden.[8]

Die *Academi*e zu *Paris* hat für dieses Jahr das *Praemium* wieder zurükgehalten, und die vorgelegte Frage nochmals auf das Jahr 1747 mit einem doppelten *Praemio* verleget.[9] Auf das künftige Jahr *concurri*re ich wiedrum über die *Quaestion* vom *Magnet*en;[10] alsdann muß nach den *statutis* der *Academi*e das *Praemium* unumgänglich ausgegeben werden.

Ungeacht der H. *Maupertuis* schon vor geraumer Zeit von *Paris* abgereiset, so ist Er doch hier noch nicht angekommen, um das *Praesidium* anzutretten: nach den Holländischen Zeitungen soll er grades Wegs nach Böhmen zur Königl[ichen] *Armée* gegangen seyn.[11]

Hiemit empfehle ich mich zu Ewr. Wohlgeb. beständigen Wohlgewogenheit, und habe die Ehre mit der schuldigsten Hochachtung zu seyn

Ewr. Wohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

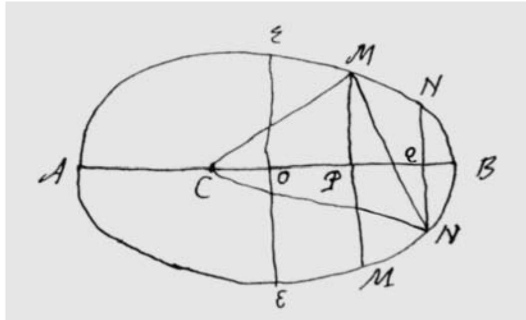
Berlin den 7 *Aug.* 1745.

P. S.

Indem ich den obigen Brief schliessen will, so erhalte Ewr. Wohlgeb. vom ... *Julio*,[12] und statte Denselben für Dero gütige *Condolenz* wegen des Absterbens meines sel[igen] Vaters allen gehorsamsten Dank ab.[13]

Ich bin noch bey der alten *societä*t zum *Director* der *mathemati*schen *Classe* gemacht worden, ohne vorher ein Mitglied davon gewesen zu seyn, und in dieser *Qualitä*t bin ich auch von Ihro Königl[ichen] *Majestä*t bey der neuen *Academi*e *confirmir*t worden; und ziehe darfür jährlich 100 Rthl. Ich habe aber diese Sach noch niemals mit solchen Augen angesehen, daß ich davon an irgend jemand meiner Freunde Nachricht gegeben hätte; auch so gar in meinem Haus weiß niemand etwas davon. Inzwischen bin ich Ewr. Wohlgeb. für Dero *Gratulation* dazu gehorsamst verbunden.[14]

Meine vormals überschriebene *Solution* des *Problematis catoptrici*[15] habe seit der Zeit kürzer zusammen gezogen, und zum Gebrauch dergestalt eingerichtet, daß alle *satisfaci*rende krumme Linien nicht nur leicht erkannt, sondern auch alle, welche *algebra*ische sind, leicht angezeigt werden können. Ewr. Wohlgebohrnen haben gantz recht, daß alle diese Linien einen *Diameter* nothwendig haben müssen, als AB; es folget aber nicht, daß ausser diesem noch eine andere Linie als EE die *Curvam in duas partes similes et aequales* schneide.[16]



Um alle mögliche *Curvas* zu finden und durch *general formul*n auszudrücken, so nehme man für v eine solche *Function* von u, welche verwandelt werde in $-v$, wann für u gesetzt wird $-u$: dergleichen *function*en sind u, u^3, u^5, u^7, $\frac{1}{u}$, $\frac{1}{u^3}$ *etc.* und so daraus zusammen gesetzt werden als $\alpha u + \beta u^3 + \frac{\gamma}{u} + \frac{\delta}{u^3}$ *etc.* Wann nun für v eine solche *functio ipsius* u angenommen worden, so suche man $p = \frac{dv}{du}$: und daraus wird die *curva* folgender Gestalt bestimmt werden: man nehme die *abscissam*

$$CP = x = \frac{up^2\,(cc-uu)}{c\,(a+v)} - \frac{2p\,(cc-uu)}{c} - \frac{u\,(a+v)}{c}$$

so wird die *applicata*

$$PM = y = \pm\left(\frac{pp\,(cc-uu)}{c\,(a+v)} + \frac{2up}{c} - \frac{a-v}{c}\right)\sqrt{(cc-uu)}\,.$$

Setzt man nun $v = u$, so kommt die *Ellipsis* heraus, deren *Focus* in C. Dann da $v = u$, so wird $p = \frac{dv}{du} = 1$, und

$$x = -\frac{(aa+cc)\;u - 2acc}{c\,(a+u)}$$

und

$$y = \frac{(cc-aa)\sqrt{(cc-uu)}}{c\,(a+u)}.$$

Wenn man nun u *eliminir*t, so bekommt man

$$aa\,(xx+yy) = (aa-cc-cx)^2\,.$$

Setzt man aber $v = \frac{cc}{u}$ und $c = a$, so wird $p = \frac{dv}{du} = -\frac{cc}{uu}$, und folglich

$$x = \frac{3a^3 - a^2u - 3auu - u^3}{uu}$$

und

$$y = \frac{a^3 - a^2u - 3auu - u^3}{u^3} \sqrt{(aa - uu)}\,,$$

woraus sich die *Figur* der krummen Linie leicht bestimmen lässt; wollte man aber u *eliminir*en und eine *Aequation* zwischen x und y suchen, so würde dieselbe, wofern sich nichts *destruir*t, auf 12 *dimension*en steigen.

Übrigens ist bey den vorgegebenen *general Formul*n zu merken daß daraus die Länge des *Radii* $CM = \dfrac{pp\,(cc-uu)}{a+v} + a + v$; wodurch die *Construction* nicht wenig erleichtert wird. Wann ferner auf diese Art das *Punctum primae reflexionis* M bestimmt wird, so darf man nur, um das *Punctum alterius reflexionis* N zu finden, setzen $u = -u$, da dann v in $-v$ verwandelt wird, p aber den vorigen Werth behält. Es wird nehmlich:

$$CQ = -\frac{upp\,(cc-uu)}{c\,(a-v)} - \frac{2p\,(cc-uu)}{c} - \frac{u\,(a-v)}{c}$$

und

$$QN = \pm\left(\frac{pp\,(cc-uu)}{c\,(a-v)} - \frac{2up}{c} - \frac{a+v}{c}\right)\sqrt{(cc-uu)}\,;$$

$$CN = \frac{pp\,(cc-uu)}{a-v} + a - v.$$

Endlich werde die erste bequeme Gelegenheit nicht versäumen, um Ewr. Wohlgeb. mit meinen geringen Schrifften aufzuwarten, und denselben die *Epistolas La Crosi in Duplo* beyzulegen,[17] von welchen meines Wissens erst ein Theil herausgekommen. Inzwischen wünsche, daß Ewr. Wohlgeb. gegenwärtige obgleich höchst vergnügte *Situation* sich dergestalt ändern möchte, daß Denselben zu noch grösserem Vergnügen auch Dero *Bibliothec* nicht mehr vernagelt zur Last seyn möge.[18]

An den H. *Prof. Gret*sch bitte gleichfalls mein *Compliment* zu vermelden.[19] In *Halle* ist die *Professio Juris publici* noch [*vacant*], wozu ich schon längst den H. *Prof. Gret*sch vorgeschlagen; weil aber meine Unwissenheit in diesem *Studio* weltbekannt, so zweifle sehr, daß meine *Recommendation* so wie in *Mathem*[*aticis*] in Betrachtung gezogen werde. Ich möchte aber wünschen etwas von dem H. *Gret*sch allhier aufweisen zu können.

R 805 Reply to nº 90
Berlin, August 7th, 1745
Original, 3 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 119–121v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 323–328; *Euler-Goldbach* (1965), p. 218–221

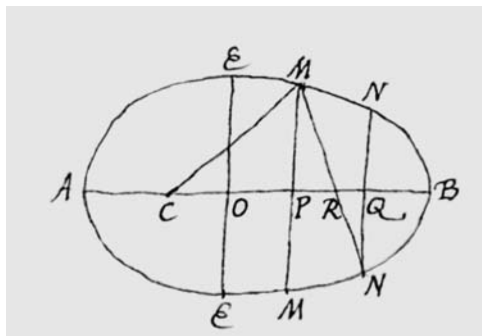
92

Goldbach to Euler

Petersburg, September (14th) 25th, 1745[1]

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*

Eurer Hochedelgebohrnen habe ich zuforderst im Nahmen des Hn *Pr*[*ofessor*] *Gretsch* schuldigsten Danck für Dero geneigte *intention* gegen denselben abzustatten und zugleich zu berichten daß derselbe vorjetzo an kein auswärtiges *établissement* gedencket indem er mit seinen Umständen so sich täglich verbessern zu frieden ist.[2]



Wann[3] ich in der hiebey gefügten *Figur* das *spatium quod inter radium incidentem et reflexum in diametro intercipitur* CR nach Eurer Hochedelg. *formulis exprimi*re, so wird selbiges in der *ellipsi constans* seyn, in den andern *curvis* aber jederzeit solche *limites* haben, daß wann CO die *abscissa respondens applicatae maximae* OE ist, das *spatium interceptum* $CR = 2CO$ zwischen diesen *limitibus* begriffen sey; es lässet sich zwar dieses *spatium interceptum* durch die *aequation* $CR = \dfrac{CP \cdot NQ + MP \cdot CQ}{MP + NQ}$ *generaliter* leicht bestimmen, aber in der *application* auf Eurer Hochedelg. *formulas* scheinet sie mir etwas weitläufftig zu werden.[4]

In demjenigen was Ew. Hochedelgeb. von den *Seriebus divergentibus* schreiben bin ich völlig Dero Meinung.[5] So viel ich mich erinnere sind dergleichen *Series* von einigen *Mathematicis* darum verworffen worden, weil sie aus einer *divisione praepostera* entstehen, allein zu geschweigen daß man selbige nach belieben ohne einige *division formi*ren kan, so lassen sich auch die *Summae* auf unterschiedene Arten finden wann man diese *Series terminorum signis alternantium* in *series terminorum mere affirmativorum* verwandelt. Ich erinnere mich nicht ob etwa schon in den *Comment*[*ariis*] *Petr*[*opolitanis*] einer *methode* Erwehnung geschehen die in folgendem bestehet:[6] *Datae seriei*

$$A \;\ldots\; \alpha - \beta + \gamma - \delta + \&c.$$

singuli termini fiant aequales singulis terminis seriei

$$B \ \ldots \ a - \frac{1}{2}(b-a) + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}(c-2b+a) - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}(d-3c+3b-a) + \&c.$$

hoc est $a=\alpha$, $b=\alpha+2\beta$, $c=\dfrac{3\alpha+12\beta+8\gamma}{1\cdot 3}$, *erit series A aequalis termino qui respondet exponenti* $\frac{1}{2}$*in serie*

$$C \ \ldots \ a+b+c+d+\&c.;$$

sumantur termini reciproci seriei C et fiat series

$$D \ \ldots \ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\&c.;$$

erit terminus respondens exponenti $\frac{1}{2}$ *in serie D aequalis seriei*

$$E \ \ldots \ \frac{1}{a} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right) + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{1}{c}-\frac{2}{b}+\frac{1}{a}\right) - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\left(\frac{1}{d}-\frac{3}{c}+\frac{3}{b}-\frac{1}{a}\right) + \&c.;$$

quodsi iam summa seriei E ponatur $=p$, *dico summam seriei A esse* $=\dfrac{1}{p}$ *unde sequitur summam seriei* $2-6+24-120+\&c.$ *esse* $=1:\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{14}+\dfrac{29}{210}+\ \&c.\right)$.

Es ist aber auch die *Series* $2-6+24-120+\&c.$ gleich dieser $1-2+9-48+300-2160+\&c.$ in welcher alle *termini affirmative considerati* diese *legem progressionis* haben: *Sit exponens terminorum* $n-2$, *terminus illi exponenti respondens A, summa omnium terminorum usque ad terminum A exclusive* $=S$, *erit terminus sequens* $B=nA+S$. *Si verbi gratia dato termino tertio* $=9$ *quaeratur quartus, erit exponens termini dati* $n-2=3$, $n=5$, *et summa omnium terminorum praecedentium* $1+2=3=S$, *ergo terminus quartus* $=nA+S=5\cdot 9+3=48$. Die *summa* dieser *Seriei* aber wird nach voriger *methode* also *exprimi*ret
$1:\left(1+\dfrac{2}{3}+\dfrac{13}{55}+\ \&c.\right)$ allwo die ersten drey *termini* des *numeratoris* viel weiter gehen als in der vorher angegebenen *Summa*, ohngeachtet beyde *Summae* einander gleich seyn müssen.[7]

Vor die Beforderung des Briefes von Hn *Pr*[*ofessor*] *Gesner* dancke ich Eurer Hochedelgeb. dienstl[ich].[8] Es ist mir nachgehends eingefallen daß ich meine Briefe an denselben künfftig fast gantz biß nach Göttingen nemlich biß *Duderstadt* werde *franqui*ren können, dahero ich nur bitte diejenigen so er etwa an Ew. H. *adressi*ren möchte, welches auch sehr selten geschehen wird, anzunehmen und mir nach Dero Bequemlichkeit, weil gar kein *periculum in mora* ist, zuzusenden.

Da E. H. des Hn *Maupertuis* Erwehnung thun[9] erinnere ich mich desjenigen Briefes davon Ew. Hoched. etwa schon vor 5 Jahren zugeschrieben wurde: *man* *könne nichts gnädigers erdencken*; der eigentliche *concipient* desselben ist mir sehr wohl bekannt.[10] Ich verharre mit besonderer Hochachtung Eurer Hochedelgebohrnen

ergebenster Diener
Goldbach.

R 806 Reply to n° 91
[Petersburg, September (14th) 25th, 1745]
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 4–5r
Partial copy, 3 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 31v–32v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 329–331; *Euler-Goldbach* (1965), p. 222–223

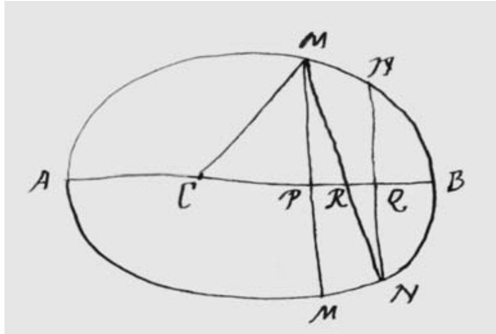
93
Euler to Goldbach
Berlin, October 23rd, 1745

Wohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats*-Rath

Ewr. Wohlgeb. hatten vergessen in Dero letstem Schreiben das *Datum* beyzusetzen,[1] dahero ich eigentlich nicht weiß, wie lang ich dasselbe unbeantwortet gelassen; dann da ich anjetzo endlich neue *Tabulas Astronomicas pro Sole et Luna* zu Stande gebracht,[2] so habe ich seit einiger Zeit so viel mit Rechnungen zu thun gehabt, daß ich an kein Brief schreiben gedenken konnte. Nunmehro bin ich zwar fertig, allein wann ich der HH. *Paris*er *Astronomorum* Gutachten und *Observationes* darüber werde erhalten haben, so dürfte darinn noch hin und wieder etwas zu ändern vorfallen.

Ich habe schon vor einiger Zeit ein kleines Päcklein Bücher für Ewr. Wohlgeb. an den H. *Hainchelin* nach *Petersburg* abgeschickt,[3] welches vielleicht schon mag angekommen seyn; wann Dieselben Sich darnach zu erkundigen belieben wollten: es sind darinn, ausser den von mir herausgegebenen Sachen, welche Ewr. Wohlgeb. gehorsamst zu *praesentir*en die Ehre habe, noch die 2 *Volumina* von *La Croze*s *Commercio litterario*[4] enthalten, welche nicht mehr als 20 groschen kosten. Diese *summ* möchte nun viel zu gering seyn, als daß ich zu Empfang derselben den H. *Hainchelin* vorschlagen dörfte.

Aus meinen *Formulis* für die *curvas, quae radios e foco emissos eodem reflectant*, wird das *spatium* CR sehr leicht und kurz ausgedruckt, ungeacht der *Calculus* um solches zu finden, wie Ewr. Wohlgeb. angemerket haben, ziemlich weitläuffig wird.[5]



Dann wann v eine solche *function* von u andeutet, *quae posito* $-u$ *loco* $+u$ *ipsa in sui negativam* $-v$ *abeat*, so ist

$$\begin{aligned} CP &= \frac{u\,(a+v)}{c} + \frac{2\,dv\,\,(cc-uu)}{c\,du} - \frac{u\,dv^2\,(cc-uu)}{c\,du^2\,(a+v)} \\ PM &= \left(\frac{dv^2\,(cc-uu)}{du^2\,(a+v)} + \frac{2u\,dv}{du} - a - v\right)\frac{\sqrt{(cc-uu)}}{c} \end{aligned}$$

und für das *punctum* N

$$\begin{aligned} CQ &= -\frac{u\,(a-v)}{c} + \frac{2\,dv\,\,(cc-uu)}{c\,du} + \frac{u\,dv^2\,(cc-uu)}{c\,du^2\,(a-v)} \\ QN &= \left(\frac{dv^2\,(cc-uu)}{du^2\,(a-v)} - \frac{2u\,dv}{du} - a + v\right)\frac{\sqrt{(cc-uu)}}{c}. \end{aligned}$$

Wann man nun diese *Expression*en *in aequatione* $CR = \dfrac{CP\cdot NQ + MP\cdot CQ}{MP+NQ}$ *substituir*t, so findet man $CR = \dfrac{2c\,dv}{du}$, woraus erhellet, daß dieses *spatium* in keinem andern Fall *constans* sey, als wann $v = \alpha u$, woraus die *Ellipsis* entspringt. Wo aber die *applicata maxima* sey lässt sich *generaliter* nicht bestimmen, noch zwischen dem Ort derselben und dem *spatio* CR eine Verhältnüß entdecken.

Ewr. Wohlgeb. höchst sinnreiche *Methode* alle *series divergentes in convergentes* zu verwandeln, indem Dieselben *demonstrir*t daß wann

$$\begin{aligned} s = a \quad &+ \quad n\,(b-a) + \frac{n\,(n-1)}{1\cdot 2}\,(c-2b+a) \\ &+ \quad \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\,(d-3c+3b-a) + etc. \end{aligned}$$

so sey

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} = \frac{1}{a} \quad &+ \quad n\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right) + \frac{n\,(n-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{c}-\frac{2}{b}+\frac{1}{a}\right) \\ &+ \quad \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{d}-\frac{3}{c}+\frac{3}{b}-\frac{1}{a}\right) + etc., \end{aligned}$$

ist mir sehr wohl bekannt gewesen;[6] und dieselbe weiset freylich gantz klar, daß keine *series* so *divergens* seyn könne, deren *summa* nicht immer durch eine *seriem convergentem* ausgedruckt werden könne. Diejenigen aber welche die *Divisionem praeposteram* nicht zulassen wollen werden hier ebenfalls Einwendungen machen, daß man *supponir*e, man komme zu letst auf *differentias constantes* oder *evanescentes*; allein alle dergleichen Einwürfe werden durch meine obgemeldte *Definitionem summae cujusque seriei* leicht gehoben. Für die *seriem* $1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 + etc.$ findet man auch auf diese Art bald den *valorem prope verum*; ich glaube aber daß es sehr schwehr seyn würde auf diese Art den *Valorem summae* nur auf $\frac{1}{1000}$ genau zu bestimmen; dann ungeacht anfänglich die *Termini seriei conversae affirmativi* werden, so kommen doch auch bald *negativi* zum Vorschein, und alsdann nehmen auch die *termini* nicht mehr merklich ab. Auf die von mir letst überschriebene Art[7] aber hat man die *Approximation* in seiner Gewalt, und kan die *summ* in *Decimal fraction*en so weit genau finden als man will.

Künftigen Donnerstag wird der H. *de Maupertuis* Hochzeit halten, und nach der Zurükkunft Ihro Königl[ichen] *Majestä*t Seine *Praesident*en Stelle antretten.[8] Wegen der *Expression*: *man könne nichts gnädigers erdenken*, kan ich mich nichts anders erinnern, daß mir dieselbe der H. *Bernoulli* zugeschrieben, als er mich berichtete, wie Gnädig Ihro *Majestä*t Unser König dem *M.*^{r} *de Maupertuis* zugeschrieben habe.[9]

Ich habe die Ehre mit der schuldigsten Hochachtung zu verharren
Ewr. Wohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

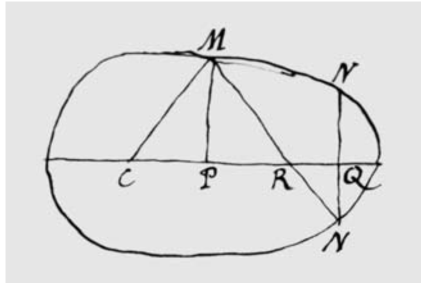
Berlin den 23$^{\text{ten}}$ *Octobr.*
1745.

R 807 Reply to n° 92
Berlin, October 23rd, 1745
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 137–138r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 332-334; *Euler-Goldbach* (1965), p. 224–225

94
Goldbach to Euler
Petersburg, (October 29th) November 9th, 1745

HochEdelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*,

Eurer Hochedelgebohrnen Schreiben vom 23. *Oct.* habe ich sehr zeitig, nemlich den 4. *Nov.* allhie erhalten.



Aus dem *spatio* CR, so Sie $= \dfrac{2c\,dv}{du}$ gefunden lässet sich die *applicata maxima* ohne Schwierigkeit bestimmen wann man setzet $CP = \dfrac{CR}{2}$ und den *valorem u per a et c expressum* in der *formula PM substitui*ret; wobey denn merckwürdig ist, daß die *quantitas u*, wann das *differentiale ipsius PM* $= 0$ gesetzet wird, denselben *valorem* haben muß den es *ex aequatione* $CP = \dfrac{CR}{2}$ bekömmt; imgleichen wann man den *radium MR* suchen wollte welcher *perpendiculariter ad axem reflecti*ret wird, so müste (weil alsdann die *puncta P*, *Q & R* in eines zusammen fallen) die *quantitas u* in diesen dreyen *aequationibus* $CP = CR$, $PM = QN$ und $CP = CQ$ einerley *valorem* haben. In dem *casu* wo $v = u^3$ finde ich aus der *aequatione* $PM = \dfrac{CR}{2}$ $\quad 2u^3 - 3c^2u - a = 0$, und in demselben *casu* wann $v = u^3$ finde ich *pro radio perpendiculariter ad axem reflexo* aus der *aequatione* $CP = CR$ $u = \left(\dfrac{a+3c}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$, welcher *valor* von u dann auch aus den andern beyden *aequationibus* $PM = QN$ und $CP = CQ$ herauß kommen muß, so ich aber lieber glauben als mich durch die Erfahrung davon *convinci*ren will. Ich werde auch von diesem *genere curvarum* einen besseren Begriff bekommen wann Ew. HochEdelg. mir melden wollen durch was für Linien die *quantitates constantes a et c*, *item* die *variabilis u*, *seorsim consideratae* in der *curva exprimi*ret werden; indessen[1] kan ich beweisen daß die *curva* in allen Fällen *contradictoria* wird wo v eine solche *functionem ipsius u* andeutet daß $\dfrac{dv}{a+v}$ grösser wird als $\dfrac{du}{c^2+u}$.

Weil kein Zweiffel ist daß in dem *numero* $\dfrac{31\,415\,\ldots}{10\,000\,\ldots}$ so die *circumferentiam circ[uli] data diametro* 1 *exprimi*ret eine jede von den Ziffern des *numeratoris* ihre Plätze nach einer gewissen, ob wohl sehr schweren und undeutlichen Ordnung einnimmt und ein grosses Theil dieser Schwierigkeit aus der Abwechselung von zehnerley Ziffern entstehet, so könnte man wenigstens diese letztere sehr erleichteren wann man setzte

$$\textit{circumf[erentia]} = m + \frac{a}{10} + \frac{b}{100} + \frac{c}{1000} + \frac{d}{10\,000} + \&c.$$

allwo m *pro lubitu* so angenommen werden kan daß $\textit{circumf[erentia]} - m < \dfrac{1}{9}$, hernach aber ein jeder von den *numeratoribus* a, b, c, *&c.* entweder 0 oder 1 würde, welches allezeit möglich ist.[2] Wann nun solchergestalt die *Series*, deren *numeratores* alle entweder 0 oder 1 sind, auf eine gewisse Anzahl von *terminis continui*ret worden so stünde zu versuchen ob sich nicht unter diesen 0 und 1 eine gewisse Ordnung zeigen möchte? Daß ein *ordo numerorum circulantium* herauskommen sollte ist zwar nicht zu vermuthen, weil sonst der gantze *numerus rationalis* seyn müste, es kan aber nichtsdestoweniger *progressiones non circulantes* geben die eine offenbare Ordnung halten als

$$0+1+0+0+1+0+0+0+1+\ \&c.$$

und unzehliche andere; wann nun *in praesenti casu* ein *ordo certa lege variabilis* entdecket würde so glaubte ich daß die *quadratura circuli in numeris decimalibus* noc[h] vi[el bess]er[3] gefunden wäre als es nach der gewöhnlichen *extractione radicis* möglich ist $\sqrt{2}$ zu finden; man könnte auch $\sqrt{2}$ so *exprimi*ren $\frac{a}{1}+\frac{b}{2}+\frac{c}{4}+\frac{d}{8}+\ \&c.$, daß a, b, c, *&c.* allezeit 0 oder 1 würden und hie sollte ich fast glauben daß sich bald eine Ordnung zeigen möchte.[4]

Nachfolgende *series* scheinet einige *attention* zu *meriti*ren:[5]

$$\begin{aligned}\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{2}\pi^2 \quad &+ \quad \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 2^2}\cdot\frac{1}{6}\pi^4+\frac{1}{1\cdot 2\cdots 6\cdot 7\cdot 2^4}\cdot\frac{1}{6}\pi^6\\ &+\quad \frac{1}{1\cdot 2\cdots 8\cdot 9\cdot 2^6}\cdot\frac{5}{6}\pi^8+\frac{1}{1\cdot 2\cdots 10\cdot 11\cdot 2^8}\cdot\frac{691}{210}\pi^{10}\ +\ \&c.\\ &= \quad 4-\pi.\end{aligned}$$

Vor das übersandte *paquet* dancke ich dienstl[ich].[6] Den mir annoch gantz unbekannten Hn *Hainchelin* werde suchen ausfragen zu lassen und das ausgelegte auf eine bequeme art zu *restitui*ren.

Ich verharre mit besonderer Hochachtung Eurer HochEdelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.^{t} Petersbourg
den 9. *Nov.* 1745.

P. S. Der Brief an *M.^{r} Maupertuis*[7] ist nicht aus Berlin, sondern aus Petersb[urg], schon einige Zeit vor Eurer Hochedelg. Abreise von hier, geschrieben worden.

R 808 Reply to nº 93
Petersburg, (October 29th) November 9th, 1745
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 95–96r
Address (fol. 96v): "*A Monsieur / Monsieur Euler / de l'Academie des Sciences / à / Berlin.*"
Partial copy, 4 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 33r–34v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 335–337; *Euler-Goldbach* (1965), p. 225–227

95
Goldbach to Euler
[Petersburg], November (1st) 12th, 1745

Gegenwärtiges *P. S.* zu machen nöthiget mich ein in meinem letzten Schreiben eingeschliechener Fehler,[1] da ich c^2 anstatt c gesetzet, und es heissen sollte, daß die *curva* allezeit *impossibilis* wird wann $\dfrac{dv}{a+v} > \dfrac{du}{c+u}$. Den Grund hievon werden Ew. HochEdelgeb. bald einsehen, weil CR nicht grösser seyn kan als $CM + MR$. Das übrige so ich daselbst geschrieben wird hoffentlich seine Richtigkeit haben.

Den 12. *Nov. st. n.* 1745.

R 809 Supplement to n° 94
[Petersburg], November (1st) 12th, 1745
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 98r
Partial copy, 1 p. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 35r
Published: *Euler-Goldbach* (1965), p. 227

96
Euler to Goldbach
Berlin, November 30th, 1745

Wohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Vor einiger Zeit ist allhier das Gerücht gegangen, als wann Ewr. Wohlgeb. von dem Sächsischen Hofe in den *Baron*en Stand wären erhoben worden;[1] weil aber Ewr. Wohlgeb. Selbst davon keine Erwehnung thun, so darf ich mich nach dieser Nachricht nicht richten; ich habe aber den H. *Dr. Gmelin* ersuchet,[2] Ewr. Wohlgeb. in meinem Nahmen auf das gehorsamste zu *gratulir*en, im Fall diese Zeitung, wie ich wünsche, gegründet seyn sollte.

Über das *Problema Catoptricum* nehme die Freyheit Ewr. Wohlgeb. meine *Solution* hiemit zu übersenden,[3] deren *Analysis* alle Umstände hinlänglich erläutern wird. Ewr. Wohlgeb. Vorschlag die *expression* $3,141\,592\,653\,5$ *etc.* auf eine bequeme Art vorzustellen,[4] daß daraus zugleich die *Lex progressionis* erhelle, läufft darauf hinaus, daß man eine bekannte Zahl m ausfündig machen soll, deren *Cyph*ren *in infinitum* mit den obigen entweder einerley oder nur um 1 kleiner wären: dann solcher gestalt würde der Rest $\pi - m$ durch eine solche *decimal Fraction* ausgedrückt werden, deren alle Figuren entweder 0 oder 1 seyn würden. Ich sehe aber noch keine *Methode* ein, wie man nur zur Erfindung der gemeldten Zahl m gelangen könnte. Ich wollte allso vielmehr die *Differentz* $\pi - m$ als bekannt annehmen, als zum *Exempel* $\pi - m = 0,01\,001\,0001\,00001$ *etc.* so würde $m = 3,131\,582\,652\,589\,78$, und nun müsste man sehen, ob diese Zahl durch eine *expressionem irrationalem finitam* ausgedruckt werden könnte.

Ich erinnere mich auch schon einmal einer gewissen leichten *operation* Meldung gethan zu haben,[5] wodurch man Zahlen bekommt, deren Werth vielleicht *nullo modo in finitis* ausgedruckt werden kan. Ich verfahre nehmlich wie in der *ordinair*en *Division*, nur daß ich bey jeder *operat*[*ion*] den *Divisorem* um 1 vermehre: wie aus folgendem *Exempel* zu ersehen:

$$\begin{array}{ll}
1) & 100\,000\,000\,000\,000\,000\,000 \quad (\ 0\,464\,782\,743\,907\,639 \\
 & \underline{0} \\
2) & 10 \\
 & \underline{8} \\
3) & 20 \\
 & \underline{18} \\
4) & 20 \\
 & \underline{16} \\
5) & 40 \\
 & \underline{35} \\
6) & 50 \\
 & \underline{48} \\
7) & 20 \\
 & \underline{14} \\
8) & 60 \\
 & \underline{56} \\
9) & 40 \\
 & \underline{36} \\
10) & 40 \\
 & \underline{30} \\
11) & 100 \\
 & \underline{99} \\
12) & 10 \\
 & \underline{0} \\
13) & 100 \\
 & \underline{91} \\
14) & 90 \\
 & \underline{84} \\
15) & 60 \\
 & \underline{45} \\
16) & 150 \\
 & \textit{etc.}
\end{array}$$

Wann nun diese Zahl $0,464\,782\,743\,907\,639$ *etc.* zur *peripherie* des Zirkuls eine bekannte Verhältnuß hätte, so hielte ich die *peripherie* so gut als gefunden, indem dieselbe mit leichter Müh, auf so viel Figuren als man immer verlangt, gefunden werden könnte. Man kan auch hierinn auf unendlich vielerley Weise *varii*ren und die *Divisores* nach Belieben verändern.

Nach der *Arithmetica dyadica* wird $\sqrt{2}$ folgender Gestalt ausgedruckt gefunden: da $\sqrt{2} = 1,414\,213\,562\,36$ so *operi*re man *continuo duplando* hinter der *ver-*

tical Linie folgender gestalt[6]

1	41 421 356 236
0	82 842 712 472
1	65 685 424 944
1	31 370 849 888
0	62 741 699 776
1	25 483 399 552
0	50 966 799 104
1	01 933 598 208
0	03 867 196 416
0	07 734 392 832
0	15 468 785 664
	etc.

die vor der *vertical* Linie herausgekommenen Zahlen 0 *et* 1 geben die gesuchte *fractionem dyadicam*, nehmlich

$$\sqrt{2} = 1,011\,010\,100\,000\,100\,111\,100\,110\,011\,001\,111\,110\,01$$

worinn sich aber keine *Lex* wahrnehmen lässt.[7]

Die von Ewr. Wohlgeb. überschriebene *series*[8] ist allerdings sehr merkwürdig: dieselbe kan folgender gestalt *generaler* ausgedruckt werden. Es sey die *tangens* dieses Winkels $\frac{1}{n}\,90^\circ = t$ so wird

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\pi}{2nt} \quad = \quad & \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\,n^2}\cdot\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{1\cdot 2\,\cdots\,5\,n^4}\cdot\frac{1}{6}\pi^4 + \frac{1}{1\,\cdots\,7\,n^6}\cdot\frac{1}{6}\pi^6 \\ & + \frac{1}{1\,\cdots\,9\,n^8}\cdot\frac{3}{10}\pi^8 + etc.; \end{aligned}$$

setzt man nun $n = 2$ so kommt Ewr. Wohlgeb. *series* heraus.

Wegen des erwehnten Briefs den *M.^{r} De Maupertuis*[9] betreffend kan ich mich nichts recht erinnern; ich habe darüber den H. *de Maupertuis* selbst befraget, welcher mir nicht nur keine Erläuterung geben könnte, sondern er hat mich auch sehr gebeten bey Ewr. Wohlgeb. um eine deutlichere Erklärung zu bitten, und Denselben hiemit sein ergebenstes *Compliment* abzustatten.

H. *Hainchelin* hat in *Petersburg* des H. Kühns *Negotium* übernommen,[10] und wird nicht ermangeln sich, so bald die gemeldten Bücher angekommen seyn werden, bey Ewr. Wohlgeb. zu melden.

Seit einiger Zeit ist allhier eine solche Bestürzung und Furcht unter den Leuten gewesen, daß sich sehr viel von hier *retirir*t haben. Der Anschlag welchen die Königin von Unga[rn] und Sachsen gegen uns geschmiedet, war allzu grausam als daß er von jemand gebilliget werden könnte. Allein unser *Glor*würdigster *Monarch* hat diesen Anschlag dergestalt zernichtet, daß wir hier vor dieser grausamen Feinde Boßheit durch Gottes Gnade jetz ruhig seyn können.[11]

Meine gantze *Famille* lässt sich Ewr. Wohlgeb. gehorsamst empfehlen, und ich habe die Ehre mit der vollkommensten Hochachtung zu verbleiben

Ewr. Wohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

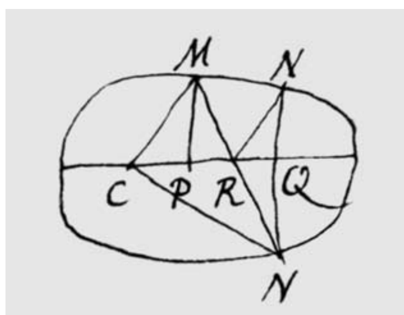
Berlin den 30 *Nov.*
1745.

R 810 Reply to n° 94
Berlin, November 30th, 1745
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 143–144v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 338–341; *Euler-Goldbach* (1965), p. 227–229

97
Goldbach to Euler
Petersburg, December (17th) 28th, 1745

HochEdelgebohrner Herr
Insonders Hochgeehrter Herr *Professor*,

Eurer Hochedelgebohrnen sage ich für die mir übersandte ausführliche *solution*[1] des *problematis in act*[*is*] *Lips*[*iensibus*] *propositi* schuldigsten Danck.



Ehe selbige noch ankam hatte ich schon vor mich *observi*ret, daß[2] $CM + MR = 2\,(a+v) - \dfrac{2u\,dv}{du}$ und $CN + NR = 2\,(a-v) + \dfrac{2u\,dv}{du}$ (woraus denn folget daß die 3 *latera* $\triangle$ $CM + MN + NC = 4a$) und daß $MR = \dfrac{c\,PM}{\sqrt{c^2-u^2}}$ folglich MR nur in dem einigen *casu* $= PM$, wann $u = 0$, ob zwar *generaliter* wahr ist daß MR *normalis ad axem* wird wann nur $y = \dfrac{4a^2 - x^2}{4a}$ (*abstrahendo a valore ipsius* x). Ich habe auch nicht gefunden daß Ew. HochE. den *casum determini*ret wann das *spatium interceptum* CR ein *maximum* wird. Die *solution* selbst soll, so bald es Ew. H. verlangen, zurückgesandt werden.

Was ich von dem *numero* 31415 ... so durch 0 und 1 zu *exprimi*ren wäre geschrieben, ist allerdings unrichtig[3] und müste nur von der *Arithmetica dyadica* verstanden werden, welches aber auch allem ansehen nach eine vergebliche Mühe seyn würde.

Aus der Zahl so $\sqrt{2}$ *in arithmetica dyad*[*ica*] vorstellet erhellet zwar noch keine Ordnung,[4] es ist aber doch zu *consideriren* daß ein *numerus ex lege non circulante constans per additionem alterius numeri circulantis* so verstellet werden kan, daß man nicht leicht eine *legem* darin entdecken wird.

Den *modum* durch *divisores continue auctos* einen *quotum non circulantem* herauszubringen haben mir Ew. H. schon sonst *communici*ret,[5] wann aber der Endzweck nur bloß seyn soll *numeros certa lege non-circulantes* zu finden so halte ich diese *methode* für etwas weitläufftig.

Um zu sagen daß jemand die *quadraturam circuli in numeris* gefunden habe, müste man, meines erachtens, zuvorderst den *gradum facilitatis qua ille numerus ab inventore exprimendus sit determini*ren, denn ohne dergleichen *determination* dürffte man nur die *Seriem Leibnitii* oder eine andere *actu addi*ren, und ich glaube daß man in dieser *Supposition* nach der Billigkeit die *inventionem quadr*[*aturae*] *circ*[*uli*] dem jenigen nicht absprechen könnte welcher den *numerum* 31415 ... eben so leicht als man $\sqrt{2}$ durch eine würckliche *extractionem rad*[*icis*] *quadr*[*atae*] findet, hervorzubringen vermögend wäre.

Die in meinem vorigen Schreiben enthaltene *Series* scheinet Eurer Hochedelgeb. schon vorher bekannt gewesen zu seyn.[6]

Wann x den *exponentem terminorum* andeutet, [so ist] *posito termino generali* $xa^{\pm x}$ die *summa generalis*[7]

$$\frac{a}{(a \mp 1)^2}\left(xa^{\pm(x+1)} - (x+1)\, a^{\pm x} + 1\right)$$

wie wohl hierin ausser dem *arrangement* der *formulae Summatricis* nichts neues ist.[8]

Zu dem dortigen *établissement* des Hn *de Maupertuis*[9] welches ich aus den Zeitungen mit besonderer Freude vernommen, bitte ich dem selben meine schuldigste *gratulation* abzustatten und wünsche hertzlich das die *consideration* welche der König für dessen *merit*en hat noch viel gutes zum Aufnehmen der Wissenschafften nach sich ziehen möge.

Ich bitte der Fr[au] *Professor*in und Dero sämmtl[ichen] *familie* mich bestens zu empfehlen und verharre mit vieler Hochachtung Eurer HochEdelgebohrnen

ergebenster Diener

Goldbach.

S.^{t} *Petersburg*

den 28. *Dec.* 1745.

·/·

P. S.[10] Der Brief ist von dem gewesenen Gr[oß] *Admiral* an den Hn *Maupertuis* zu der Zeit da Ew. HochEdelg. noch in Petersburg waren, geschrieben worden.[11]

Das Gerücht dessen Sie Erwehnung thun ist ohne grund, es kan aber dazu das bereits den 23. *Aug. dati*rte und mir ohne mein Ansuchen und ohne alle meine Unkosten verliehene *diploma*, so ein *renouvellement de noblesse* enthält, gelegenheit gegeben haben.[12]

R 811 Reply to n° 96
Petersburg, December (17th) 28th, 1745
Original, 3 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 99–100r, 97r
Address (fol. 100v): "*A Monsieur / Monsieur Euler / de l'Academie des Sciences / à / Berlin*"
Partial copy, 4 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 35r–36v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 355–357; *Euler-Goldbach* (1965), p. 238–239

98
Euler to Goldbach
Berlin, January 25th, 1746

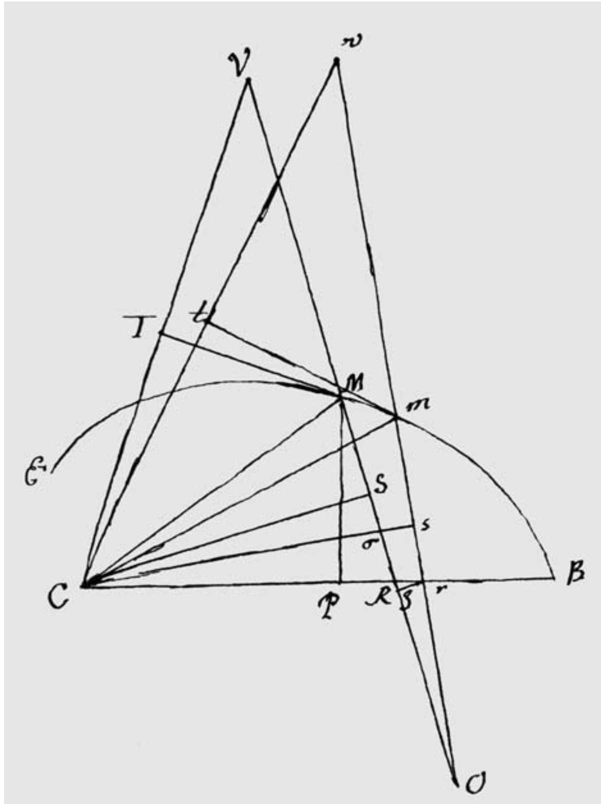
Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats*-Rath

Wie Ewr. Hochwohlgeb. zu dem Antritt dieses Jahrs von Herzen alles Wohlseyn anwünsche, allso *gratuli*re gleichfalls zu dem so Gnädig ertheilten *Diplomate* über das *Renouvellement de Noblesse*;[1] und empfehle mich sammt den meinigen zu Ewr. Hochwohlgeb. ferneren Gewogenheit und Gnade.

Aus Ewr. Hochwohlgeb. Stillschweigen wegen der von mir übersandten Bücher schliesse ich daß dieselben noch nicht angekommen; dahero ich mich allhier bey dem H. *Hain*schelin *informi*ren werde, wo dieselben etwan unter Wegs ligen geblieben.[2] Die *Solution* meines *Problematis Catoptrici*, welches Ewr. Hochwohlgeb. zu übersenden die Ehre gehabt,[3] ist vorher hier *copir*t worden; ich habe aber seit der Zeit eine weit kürzere *solution* gefunden, wobey alle in der vorigen befindlichen Weitläuffigkeiten nicht nöthig sind.

In beygefügter *Figur*,[4] da C das *Punctum radians* und EMB eine *curva reflectens quaecunque* ist, welche die *radios* CM und Cm nach MO und mO *reflectir*t; wann die *curva* EMB gegeben ist, so kan für ein jegliches *Punctum* M das *intervallum respondens* CR[5] *in axe* CB nebst dem Winkel CRM gefunden werden: Nun kehre ich die Frage um, und suche die *curvam* EMB zu bestimmen, wann eine *Aequatio quaecunque inter spatium* CR *et angulum* CRM gegeben wird. Dann wann dieses *Problema resolvir*t worden, so ist es hernach sehr leicht das Haupt*problema* zu *solvi*ren.

Es sey demnach das *spatium* $CR = r$, der Winkel $CRM = \varphi$, sein *sinus* $= s$ und *cosinus* $= u$, *posito sinu toto* $= c$[6] so daß $ss + uu = cc$ und $d\varphi = \dfrac{c\,ds}{u} =$ ang. O.



Wann nun O der *concursus duorum radiorum reflexorum proximorum* ist, so ist klar daß die *particula curvae* Mm zu einer *Ellipsi* gehören müße, deren beyde *Foci* in C und O befindlich, und folglich wird seyn: $CM + MO = Cm + mO$. Man verlängere allso OM und Om in V und v so daß $MV = CM$ und $mv = Cm$, so wird seyn $OV = Ov$, und die *tangentes* in M und m werden die *rectas* CV und Cv *bifariam perpendiculariter* schneiden. Man lasse ferner aus C *perpendicula* CS und Cs auf OV und Ov: so wird der *angulus* $SCs = O = d\varphi = \dfrac{c\,ds}{u}$. Es ist aber in dem $\triangle\ CSR$:

$$sin\,tot.\,(c)\ :CR\,(r) = sin\,CRS\,(s)\ :CS = \frac{rs}{c}$$

und $RS = \dfrac{ru}{c}$. Allso ist $S\sigma : CS = d\varphi\left(\dfrac{c\,ds}{u}\right) : sin\,toto\,(c)$ oder $S\sigma = \dfrac{rs\,d\varphi}{cc} = \dfrac{rs\,ds}{cu}$; da aber $s\,ds + u\,du = 0$ so wird $S\sigma = -\dfrac{r\,du}{c}$. Nun setze man $SV = t$, so ist $sv = t + dt$ und $vs - VS = dt$: da nun $vs = V\sigma$ so wird $dt = S\sigma = -\dfrac{r\,du}{c}$: und allso $t = a - \int \dfrac{r\,du}{c}$. Aus der zwischen r und u gegebenen Verhältnüß wird allso die Linie $VS = t$ bestimmt, zu welcher wann man *addir*t $RS = \dfrac{ru}{c}$ so bekommt man die Linie $RV = a + \frac{ru}{c} - \int \frac{r\,du}{c} = a + \int \frac{u\,dr}{c}$, welches noch viel kürzer hätte gezeigt werden können, da $rv - RV = d.\,RV = R\rho = \frac{u\,dr}{c}$, weil $Rr = dr$. Hat man allso $RV = a + \int \frac{u\,dr}{c}$ gefunden, so ziehe man CV, schneide dieselbe in zwey gleiche Theile in T, und richte darauf die *perpendicular* Linie TM auf, welche in M nicht nur ein *Punctum in curva quaesita* sondern auch die *positionem tangentis* geben wird; dahero aus einer jeden gegebenen *Aequation inter* $CR = r$ *et cosinum ang*[*uli*] $CRM = u$ die *curva quaesita* EMB *determinir*t und leicht *construir*t werden kan: indem man nur immer zu nehmen hat $RV = a + \int \frac{u\,dr}{c}$.

Hieraus ist es nun leicht das *proponir*te *problema catoptricum* zu *solvir*en, dann da muß aus dem *Angulo* CRM das *spatium* $CR = r$ dergestalt bestimmet werden, daß wann man den Winkel CRO anstatt des Winkels CRM setzt, für CR einerley Werth herauskomme. Da nun des Winkels CRO *sinus* ist $= -s$ und der *cosinus* $= -u$, so muß r eine solche *functio* seyn von s und u welche einerley Werth behalte, wann gleich für s und u ihre *negativa* $-s$ und $-u$ gesetzt werden: folglich muß r eine *functio parium dimensionum* seyn von s und u, als zum *exempel* $r = b + \frac{\alpha ss + \beta su + \gamma uu}{c}$. Hat man nun r solcher gestalt angenommen so kan daraus die *curva problemati satisfaciens* folgender gestalt bestimmt werden. Man setze $MR = z$, so wird

$$CM = \sqrt{\left(rr + zz - \frac{2urz}{c}\right)} = RV - z = a + \int \frac{u\,dr}{c} - z;$$

folglich wird

$$rr - \frac{2urz}{c} = \left(a + \int \frac{u\,dr}{c}\right)^2 - 2\left(a + \int \frac{u\,dr}{c}\right) z,$$

und allso

$$z = \frac{\left(a + \int \frac{u\,dr}{c}\right)^2 - rr}{2\left(a + \int \frac{u\,dr}{c} - \frac{ur}{c}\right)}.$$

Aus z findet man ferner $PM = y = \frac{sz}{c}$; und $PR = \frac{uz}{c}$; dahero wird $CP = x = r - \frac{uz}{c}$, und wie schon gefunden ist $CM = a + \int \frac{u\,dr}{c} - z$. Will man nun *curvas algebraicas* haben, so muß für r eine solche *functionem*[!] von s und u, jedoch nach der obigen Vorschrifft angenommen werden, daß sich die *formula* $\int \frac{u\,dr}{c}$ *integrir*en lasse.

Um aber *formulas generales* für alle mögliche *curvas algebrai[cas]* zu finden, so setze ich

$$\int \frac{u\,dr}{c} = \frac{ur}{c} - \int \frac{r\,du}{c} = \frac{ur}{c} - v;$$

oder $\int \frac{r\,du}{c} = [v.]$ Weil nun r eine *functio parium dimensionum ipsarum s et u* [seyn] muß, so wird $v = \int \frac{r\,du}{c}$ eine *functio imparium dimensionum*. Man nehme allso für v eine solche *functionem quamcunque* an, so wird $r = \frac{c\,dv}{du}$; und $\int \frac{u\,dr}{c} = \frac{u\,dv}{du} - v$. Hieraus wird ferner

$$RM = z = \frac{\left(a - v + \dfrac{u\,dv}{du}\right)^2 - \dfrac{cc\,dv^2}{du^2}}{2\,(a-v)};$$

das ist

$$MR = z = \frac{a-v}{2} + \frac{u\,dv}{du} - \frac{(cc-uu)\;dv^2}{2\,(a-v)\;du^2} = \frac{a-v}{2} + \frac{u\,dv}{du} - \frac{ss\;dv^2}{2\,(a-v)\;du^2}$$

wegen $ss = [cc - uu;]$

$$PM = y = \frac{(a-v)\;s}{2c} + \frac{su\,dv}{c\,du} - \frac{s^3\;dv^2}{2\,(a-v)\;c\,du^2}$$

$$CP = x = \frac{ss\,dv}{c\,du} - \frac{u\,(a-v)}{2c} + \frac{uss\;dv^2}{2\,(a-v)\;c\,du^2}$$

$$CM = \frac{a-v}{2} + \frac{ss\;dv^2}{2\,(a-v)\;du^2}\,.$$

Hieraus ist $CM + MR = a - v + \frac{u\,dv}{du}$ und *positis u, s negativis*, in wel[chem] Fall auch v *negativum* wird, so bekommt man die *summam radiorum in[fra] axem* $= a + v - \frac{u\,dv}{du}$; dahero klar ist daß die *summa omnium radiorum*, das ist der Weg, welchen ein jeglicher *radius ex C egressus, donec eodem post geminam reflexionem revertatur*, seyn wird $= 2a$. Welche Eigenschafft, ungeacht sie unmittelbar aus der Betrachtung, daß $CM + MO = Cm + m[O,]$ folget, so haben doch Ewr. Hochwohlgeb. mir dieselbe zu erst entdecke[t.] Im übrigen kommen diese *formul*n mit meinen vorhergehenden völlig über ein, nur daß diese 2mal kleiner sind als jene. Wann das *spatium CR maximum* wird, ist aus der *formul* $CR = \frac{c\,dv}{du}$ leicht zu sehen, nehmlich wann $ddv = 0$. Es ist aber hiebey zu merken daß s und u immer kleiner seyn müßen als c, indem sonst die *formulae imaginariae* werden. Es sey zum *exempel* $v = u^3 : cc$ so wird $CR = \frac{3uu}{c}$, dessen Werth am grösten wird, wann $u = \pm c$; allso ist in diesem Fall der gröste *Valor* $CR = 3c$, und der kleinste $CR = 0$. Man bekommt allso die völlige *curvam*, wann man *successive* dem u alle mögliche *Valores* gibt von -1 biß zum $+1$.

Es ist gantz richtig, daß der auf die *Quadraturam Circuli* gesetzte Preiß demjenigen mit Recht gebührte, welcher eine der *Extractioni radicis quadratae* ähnliche *Operation* erfünde, um die Zahl 3, 14159 *etc.* nach Belieben immer weiter fort zu setzen. In dieser Absicht bin ich auf den Gedanken gekommen, ob es nicht möglich *divisores certa lege progredientes* zu finden, aus welchen nach der letst beschriebenen *Divisionsregul*[7] eben diese Zahl 3, 14159 herausgebracht würde; dann diese Art schien mir eben den *gradum facilitatis*, welchen Ewr. Hochwohlgeb. verlangen, noch vor der *extractioni radicis* zu haben.

M.ʳ de Maupertuis läst Sich Ewr. Hochwohlgeb. schönstens empfehlen, und für die Erläuterung wegen des erwehnten Briefs ergebenst bedanken.[8] Da nunmehr der Friede auf eine so *glorieuse* Art wiedrum hergestellt, so ist kein Zweifel, die hiesige *Academi*e werde bald in einen herrlichen Zustand gesetzet werden.[9]

Meine gantze *Familie* lässt sich Ewr. Hochwohlgeb. auf das gehorsamste Empfehlen, und ich habe die Ehre mit der schuldigsten Hochachtung zu seyn

Ewr. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 25ten *Jan.*
1746.

R 812 Reply to nº 97
Berlin, January 25th, 1746
Original, 4 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 145–147r, 145a
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 358–362; *Euler-Goldbach* (1965), p. 239–241

99
Euler to Goldbach
Berlin, February 5th, 1746

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Ewr. Hochwohlgeb. bitte nicht ungütig zu deuten, daß ich die Freyheit nehme Denselben nachfolgende *Problemata* betreffend einige *Medailles*, welche I[hro] K[önigliche] *M*[*ajestät*] prägen zu lassen Allergnädigst befohlen haben, vorzulegen: dann als nach dem ersten Schlesischen Krieg Ewr. Hochwohlgb. die Güte gehabt mir einige *Invention*en zu den damals *projectir*ten *Medailles* zu überschicken,[1] so haben dieselben bey dem Staats *Ministerio* allhier eine völlige *Approbation* erhalten, obgleich wegen anderer Umstände keine *Medailles* zum Vorschein gekommen.

Anjetzo ist mir nun wiedrum eine *Ordre* aus dem *Ministerio* zugeschickt worden, in welcher 5 *Invention*en zu *Medailles* verlangt werden.[2]

I. Auf die *Bataille* bey *Sorr.*
II. Auf die *Expedition* nach Sachsen
da Ihro Königl[iche] *Majestät* Sich so schnell gegen Görlitz gewendet und allda den Feind bis in Böhmen zurükgetrieben.
III. Auf die *Bataille* bey Kesselsdorf
IV. Auf die Einnahm von Dresden
diese beyden könnten wohl in eine gebracht werden.
V. Auf den doppelten Frieden mit Östreich und Sachsen.

Ewr. Hochwohlgeb. werden Sich wundern, daß über solche Sachen von mir Vorschläge gefordert werden, allein ausser dem daß ich das vorige mal die besten geliefert, so befinden sich hier in der That sehr wenige, welche es besser machen könnten als ich, wann ich auch mich unterstehen sollte selbst etwas darauf zu ersinnen. Sinnbilder weiß ich gar nicht zu finden, aber folgende *Inscription*en sind mir darüber eingef[allen,] welche ich aber nicht im Stande bin auszu*polir*en.

I. *Gravissimus hostium impetus*
summa fortitudine a Rege reprim[itur.]
II. *Hostes ferrum flammamque minitantes*
repentino Regis adventu perculsi aufugiunt.
III. IV. *Hostibus ad Kesselsdorff ingenti proelio profligatis*
Metropolis Dre[sda] occupatur.
V. *Rex pace non minus quam Bello invictus*
hostibus ad incitas redactis pacem largitur;

bey dem letsten wollte ich nehmlich diesen Gedanken anbringen, *Rex pace non minus quam bello hostes devicit*, aber ich gestehe daß derselbe mit dem übrigen nicht recht zusammen passt.

Sollte der Gute Freund, von welchem Ewr. Hochwohlgeb. mir das vo[rige] mal *Invention*en zuzusenden die Güte gehabt,[3] auch auf diese *Punct*en ein[ige] Aufmerksamkeit wenden, so ersuche Ewr. Hochwohlgeb. gehorsamst mir d[es]selben Gedancken darüber zu *communicir*en, der ich mit der schuldig[sten] Hochachtung bin

Ewr. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 5 *Febr.*
1746

R 813 February 5th, 1746
Original, 1 fol. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 148rv
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 363–364; *Euler-Goldbach* (1965), p. 242

100
Goldbach to Euler
Petersburg, February (15th) 26th, 1746

Hochedelgebohrner Herr,
Hochgeehrter Herr *Professor*

Da ich mich nach reiffer überlegung nicht getraue solche *inscriptiones* die der Hoheit des *Sujet*s einiger massen *conform* wären[1] zu erfinden, und vielmehr davor halte, daß der berühmte H. *Baron* von *Stosch*, als welcher *in re numaria* eine ungemeine *connoissance* hat, zu diesem Endzwecke für vielen andern geschickt wäre, so habe solches zur schuldigen Antwort zu melden nicht unterlassen wollen.[2]

Die Bücher[3] sind mir wie wohl mit einigem *defect* in der *theoria motus cometarum*[4] und in den *epistol*[*is*] *Wolffii*[5] den 20. *Januar.* abgeliefert worden.

Dero Schreiben vom 25. *Jan.* habe ich auch erhalten und werde darauf ehestens antworten. Indessen verharre mit besonderer Hochachtung

Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.t Petersburg
den 26. *Febr. st. n.* 1746.

R 814 Reply to nº 99
Petersburg, February (15th) 26th, 1746
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 101r
Address (fol. 102r): "A Monsieur / Monsieur Euler / de l'Academie des Sciences / à / Berlin."
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 365; *Euler-Goldbach* (1965), p. 243

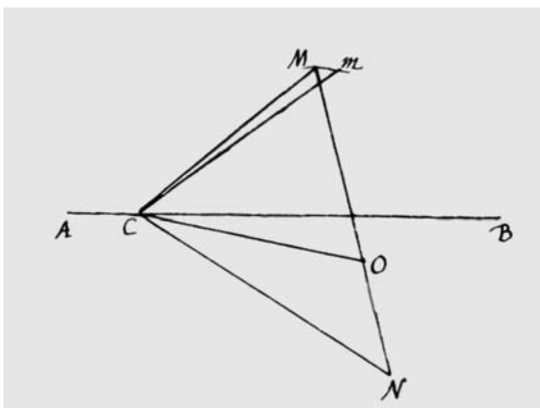
101
Goldbach to Euler
Petersburg, March (1st) 12th, 1746

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*,

Eurer Hochedelgebohrnen dancke ich zuvorderst vor Dero wohlgemeinten Neujahrswunsch,[1] und wie ich dergleichen von meiner Seite an Ew. Hochedelg. schon längst *mentaliter* abgestattet habe, so wünsche ich von der Erfüllung desselben und Dero eigenem, wie auch Dero sämmtlichen *Famili*e, welcher ich mich bestens zu empfehlen bitte, ferneren Wohlergehen in diesem und folgenden Jahren viele angenehme Nachrichten zu erhalten. Hiernechst bin ich auch Eurer Hochedelg. für die mir übersandten Bücher gar sehr verbunden. Der in meinem vorigen Schreiben bereits erwehnte *defect*[2] ist nicht in dem *tomo II. epist*[*olarum*] *Lacrosei*[3] sondern *in tomo I.* allwo alles von *p.* 368 biß ins Register *ad verba*: *Lycaonum ingenium* fehlet, und in der *theoria mot*[*us*] *comet*[*arum*][4] fehlen 6 Bogen von *p.* 96 biß *p.* 145. Die Bücher waren aber als ich sie empfing so nachlässig zusammen gebunden, daß die fehlenden Bogen wohl erst hie verlohren seyn könten; das ausgelegte werde zu *restitui*ren bedacht seyn. Ich bitte mir künfftig zu melden wer der H. *Uhlen* ist welcher diese Briefe heraußgegeben, und demselben die hiebeyliegende *note*, wann sich dazu eine Gelegenheit findet, zukommen zu lassen.[5]

Die Fragen nebst den Antworten von den *Comet*en[6] habe ich alsofort durchgelesen und zweiffele nicht es werden die selben wegen ihrer deutlichkeit und richtigkeit eine *general*e *approbation* erhalten haben. Wenn man annimmt daß der *Comet* ein entzündeter Cörper ist so lasset es sich vieleicht am besten darthun (1.) daß er keine solche *phases* als der Mond oder die *Venus* zeigen kan, (2.) daß er sein eigenes Licht *quaquaversus* von sich wirfft, ohngeachtet selbiges vor den Sonnenstralen nicht anders als *in parte a sole aversa* unter dem Namen der *comae* oder *caudae* kenntbar wird, (3.) daß diese *cauda cometae* desto grösser werden muß je länger sich der *Comet* in der nähe der Sonnen aufhält und je mehr er von derselben entzündet wird.

Ich glaube[7] daß man das *problema catoptricum* auch ohne *consideration* einiges *anguli* folgender massen *solvi*ren kan:



Sit axis curvae $AB = a$, *radius incidens* $CM = \dfrac{a \pm p}{2}$, *radius reflexus* $MO = \dfrac{a \mp p}{2}$, *ita ut* $CM + MO = CN + NO = a$. *Sit* CO (*functio quaecunque ipsius* p, *sed maior quam* p) $= q$, *erit elementum curvae quaesitae* $\dfrac{dp\sqrt{a^2 - p^2}}{2\sqrt{q^2 - p^2}} = Mm$.

Wann der H. *Uhlius* welcher den *Thesaurum epist*[*olicum*] *Lacroz*[*ei*] heraus gegeben in Berlin ist bitte ich dem selben nach Gelegenheit die hiebeyliegende *Note communici*ren zu lassen.[8]

Ich verharre mit vieler Hochachtung
Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.^{t} Petersburg
den 12. *Mart. st. n.* 1746.

<u>*vert*[*e*]</u>

P. S. Ich habe schon längst *observi*ret, daß die *series* deren *lex progressionis* ist $A^2 + 4A = B$, *designante A terminum quemcunque, et B terminum proxime sequentem*, diesen *terminum generalem* hat $a^{-2^x} - 2 + a^{2^x}$, und hieraus läst sich auch der *terminus generalis huius seriei* $1 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 \cdot 5 + 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17 + 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 257 +$ *&c.* finden[9] davon die *factores terminorum* lauter Zahlen sind welche *Fermatius pro numeris primis* gehalten.[10]

R 815 Reply to n° 98
Petersburg, March (1st) 12th, 1746
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 103–104v
Partial copy, 2 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 40rv
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 366–367; *Euler-Goldbach* (1965), p. 243–244

102
Euler to Goldbach
Berlin, April 5th, 1746

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats*-Rath

Daß sich in den Ewr. Hochwohlgeb. zugesandten Büchern so grosse *Defect*e befunden,[1] darüber hat sich H. *Haude* nicht wenig geärgert; weil er aber mit der ersten Gelegenheit eine *Parti*e Bücher an den H. *D*[*octo*]^r *Sanches* überschicken soll, so wird er für Ewr. Hochwohlgeb. nicht nur diese *Defecte*, sondern auch den dritten *Tomum Epist*[*olarum*] *La Croz*[*ei*][2] beylegen. H. Uhle war vormals immer bey dem sel[igen] H. Geh[eimen] Rath *Jordan*, und hatte die Aufsicht über seine *Bibliothec*; durch dessen Hülfe er in Frankfurt an der Oder *Professor* worden; er ist noch ein junger Mann und *passir*t für sehr gelehrt. Ich habe mit ihm keine sonderbare Bekanntschafft, werde ihm aber das beygelegte Blättlein durch einen guten Freund zustellen lassen.[3]

Daß Ewr. Hochwohlgeb. meine ziemlich in Eyl aufgesetzte Fragen über die *Comet*en einiger Aufmerksamkeit gewürdiget,[4] erkenne ich als ein Zeichen Dero gantz besonderen Gewogenheit. Ich habe aber noch starke Zweifel, ob sich die *Phaenomena Cometarum eorumque Caudarum* bloß allein dadurch erklären lassen, daß man annimmt, ihre Cörper seyen würklich entzündet. Dann ausser dem daß eine blosse Erleuchtung nicht hinlänglich ist, in dem *Aethere* eine Helle hervorzubringen, sondern dazu noch in derselben Gegend solche Cörperlein erfordert werden, welche die Erleuchtung empfangen, und daher einen Schein zu uns zurük werfen; so ist auch die Abweichung des *Caudae* eines *Comet*en *ab Oppositione solis* ein solches *Phaenomenon*, welches eine besondere Erklärung zu erfordern scheinet. Die *Idée* welche ich in diesen Fragen kürtzlich entworfen, und darinn besteht, daß die durch die grosse *Atmosphaer* eines *Comet*en durchstreichenden Sonnen Straalen einige *subtil*e *particulas* daraus mit sich fort reissen, habe ich letstens weitläuffiger ausgeführt[5] und ziemlich deutlich dargethan, daß auf solche Art nicht nur die *Comet*en Schweife, sondern auf unsrer Erde die *Lumina borealia*, und um die Sonne selbst das *Lumen Cassinianum* entstehen. Diese Ausführung hat auch dem H. *De Maupertuis* so wohl gefallen, daß Er derselben völlig beypflichtet.

Ewr. Hochwohlgeb. *Idée* das *Problema Catoptricum* zu *solvi*ren, gibt zwar leichte *Formul*n; allein da die *Positio Lineae CO* nicht bestimmet wird, und das *Elementum Curvae Mm* wenig zu Bestimmung der krummen Linien, insonderheit wann *Algebra*ische verlangt werden, beyträgt, so sehe ich noch nicht ab, wie die *natura functionis q determinir*t werden müsste, daß die beyden *reflexions puncta M et N in eandem lineam curvam continuam* zu ligen kämen.

Über die *Seriem* $1+1\cdot3+1\cdot3\cdot5+1\cdot3\cdot5\cdot17+$ *etc.* erstaunte ich anfänglich,[6] als ich aber dieselbe genauer betrachtete, sahe ich bald daß ich den *Terminum generalem* davon schon vor einiger Zeit unter andern Umständen ausgedruckt hatte. Dann ich fand daß wann

$$(1+a)\left(1+a^2\right)\left(1+a^4\right)\left(1+a^8\right)\left(1+a^{16}\right)\cdots\left(1+a^{2^n}\right)=s$$

so ist $(1-a)\ s=1-a^{2^{n+1}}$; und allso $s=\dfrac{a^{2^{n+1}}-1}{a-1}$. Dahero wann $a=2$, so ist

$$1\cdot3\cdot5\cdot17\cdots\left(2^{2^n}+1\right)=2^{2^{n+1}}-1.$$

Dieses hatte ich schon angemerkt als ich suchte was für eine *series* heraus komme wann man dieses *Productum infin*[*itum*]

$$(1+a)\left(1+a^2\right)\left(1+a^4\right)\left(1+a^8\right)\left(1+a^{16}\right)\ etc.$$

würklich *evolvir*te: da ich dann gefunden, daß diese *series geometrica*

$$1+a+a^2+a^3+a^4+\ etc.=\frac{1}{1-a}$$

herauskomme. *Evolvir*t man aber dieses *Product*

$$(1-a)\left(1-a^2\right)\left(1-a^4\right)\left(1-a^8\right)\left(1-a^{16}\right)\ etc.$$

so bekommt man

$$1-a-a^2+a^3-a^4+a^5+a^6-a^7-a^8+a^9+a^{10}-a^{11}+a^{12}-a^{13}-a^{14}+a^{15}-a^{16}+a^{17}\,etc.$$

wo die[!] *Ordo signorum* merkwürdig ist.[7] Von dieser Art habe ich noch nachfolgende *Theoremata* gefunden:

Th[eorema]. Si sit

$$s = (1-na)\left(1-n^2a\right)\left(1-n^3a\right)\left(1-n^4a\right)\left(1-n^5a\right) \textit{ etc. in infin[itum]}$$

er[it]

$$\begin{aligned} s = 1 \quad & - \quad \frac{na}{1-n} + \frac{n^3a^2}{(1-n)(1-n^2)} - \frac{n^6a^3}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)} \\ & + \quad \frac{n^{10}a^4}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)(1-n^4)} - \textit{ etc.} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} = 1 \quad & + \quad \frac{na}{1-n} + \frac{n^2a^2}{(1-n)(1-n^2)} + \frac{n^3a^3}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)} \\ & + \quad \frac{n^4a^4}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)(1-n^4)} + \textit{ etc.} \end{aligned}$$

Ewr. Hochwohlgeb. glaube ich auch schon geschrieben zu haben,[8] daß wann man dieses *Productum infinitum*

$$(1-a)\left(1-a^2\right)\left(1-a^3\right)\left(1-a^4\right)\left(1-a^5\right) \textit{ etc.}$$

*evolvir*t, diese *series* heraus komme:

$$1 - a^1 - a^2 + a^5 + a^7 - a^{12} - a^{15} + a^{22} + a^{26} - a^{35} - a^{40} + \textit{ etc.}$$

wo der *Ordo exponentium* sehr merkwürdig ist, und sich *per inductionem* allso bestimmen lässt, daß alle *in hac formula* $\frac{3xx \pm x}{2}$ enthalten sind, ungeacht ich diese *Legem observatam* noch nicht *ex rei natura* habe her[aus] bringen können.

Th[eorema]: Si fuerit in serie $\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \overset{3}{C}, \ldots \overset{x}{P}, \overset{x+1}{Q}$:

$$Q = mP^2 + nP + \frac{nn - 2n\,[-8]}{4m},$$

ubi m *et* n *sunt numeri constantes; quaerantur numeri* F *et* G *ut sit* $F + G = mA + \frac{1}{2}n$ *et* $FG = 1$ *eritque*

$$P = \frac{F^{2^{x-1}} + G^{2^{x-1}}}{m} - \frac{n}{2m}.$$

Th[eorema]: Si fuerit in serie $\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \overset{3}{C}, \ldots \overset{x}{P}, \overset{x+1}{Q}$:

$$Q = mP^2 + nP + \frac{nn - 2n}{4m},$$

erit

$$P=\frac{\left(mA+\frac{1}{2}n\right)^{2^{x-1}}}{m}-\frac{n}{2m},$$

welches Ewr. Hochwohlgb. *Theoremata* sind.

Folgende *Theoremata* scheinen auch einiger Aufmerksamkeit werth zu seyn:

Th[*eorema*]: *Si n sit numerus integer affirmativus quicunque erit:*

$$\frac{1-a^n}{1-a}+\frac{(1-a^n)\left(1-a^{n-1}\right)}{1-a^2}+\frac{(1-a^n)\left(1-a^{n-1}\right)\left(1-a^{n-2}\right)}{1-a^3}+\ etc.=n.$$

Theor[*ema*] *Si n sit numerus integer affirmativus quicunque erit:*

$$1-a^{n-1}+a^{2n-3}-a^{3n-6}+a^{4n-10}-a^{5n-15}+a^{6n-21}-\ etc.=0$$

exclusis scilicet terminis, qui exponentes habent negativos.

Theor[*ema*]:[9] *Sit in circulo arcus* $90^\circ=q$; *sumaturque arcus quicunque* s, *cujus sinus sit* $=a$; *sinus* $A.\,2s=b$; *sinus* $A.\,3s=c$; *sinus* $A.\,4s=d$; *etc. erit semper*

$$q=\frac{1}{2}s+a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{3}c+\frac{1}{4}d+\frac{1}{5}e+\ etc.$$

Th[*eorema*]: *In Circulo radii* $=1$ *capiatur arcus quicunque* s, *cujus tangens sit* $=a$; *tang* $A\,\frac{1}{2}s=b$; *tang* $A\,\frac{1}{4}s=c$; *tang* $A\,\frac{1}{8}s=d$; *tang* $A\,\frac{1}{16}s=e$ *etc. erit*

$$\frac{1}{s}=\frac{1}{a}+\frac{1}{2}b+\frac{1}{4}c+\frac{1}{8}d+\frac{1}{16}e+\ etc.$$

Ich bin jetzund mit Durchlesung derjenigen *Piecen*, welche über die von der *Academi*e aufgegebene Frage von der Ursach und der Ordnung der Winde sind eingesandt worden, beschäfftiget: Es sind darüber 10 eingelauffen, unter welchen sich eine, so vor allen anderen in Betrachtung gezogen zu werden verdienet, befindet.[10] Die *Devise* so sich zu Ende derselben befindet ist auch schön, sie lautet allso:

Haec ego de ventis: dum ventorum ocyor alis
Palantes pellit populos Fridericus, et orbi
Insignis Lauro ramum praetendit Olivae.

Neulich kam mir der *Address Calender* von Schlesien in die Hände; darinn ich im Durchblättern Ewr. Hochwohlgeb. Nahmen verschiedene mal antraff; ein Bürger Meister von Breslau, wo ich nicht irre, nennet sich von Goldbach.[11]

Meine gantze *Famille* lässt sich Ewr. Hochwohlgebohrnen gehorsamst empfehlen, und ich habe die Ehre mit der vollkommensten Hochachtung zu verharren

Ewr. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 5 *April.*
1746.

R 816 Reply to n° 101
Berlin, April 5th, 1746
Original, 3 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 160–162r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 368–372; *Euler-Goldbach* (1965), p. 244–246

103
Goldbach to Euler
Petersburg, (April 22nd) May 3rd, 1746

HochEdelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*

Die Nachricht daß der Herr Haude einige Bücher an den Hn Leib-*Medicum Sanches* übersendet, ist mir sehr lieb; sollten selbige Bücher noch nicht abgegangen seyn so ersuche ich Ew. Hochedelgeb. dienstlich inliegenden Zettel dem Hn *Haude* nebst meiner Empfehlung zu zusenden und den selben ersuchen zu lassen daß er das jenige so von solchen Büchern vorhanden seyn möchte, beyfügen wolle.

Den[1] *terminum gener[alem] seriei* $1 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 \cdot 5 + 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17 +$ *&c.*[2] hatte ich, als mein letztes Schreiben abgieng, nur *in potestate* und dachte nicht daß selbiger so leicht seyn sollte, in dem ich dessen sonst gar keine Erwehnung gethan haben würde.

Ich weiß nicht ob man *method*en hat[3] von dergleichen *seriebus* als diese ist

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 8} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 10} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 12} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 14} + \&c. = 2^{-\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}} - 2,$$

cuius lex progressionis est $\dfrac{-A\,(2x+5)\,(x+3)}{2\,(x+2)\,(x+4)} = B$, die *Summas* zu finden.

Die in meinem vorigen angeführte *idée* einer *solution*[4] gehet noch weiter wann man vor q eine *functionem quamcunque ipsius* p annimmt nur mit der *limitation* daß $q > p$ und $q < a$ (denn ich sehe zum wenigsten nicht daß *ex natura problematis* mehrere *limitationes* erfordert werden) und ferner

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \frac{(a \pm p)^2}{4}; \\ dx^2 + dy^2 &= \frac{\left(a^2 - p^2\right)\, dp}{4\,(q^2 - p^2)}, \end{aligned}$$

so wird die *abscissa ad applicatam in curva quaesita* seyn wie x zu y.[5]

Inliegendes an Hn *Schuster* in Leipzig[6] wird bestens *recommandi*ret und ich verharre mit besonderer Hochachtung

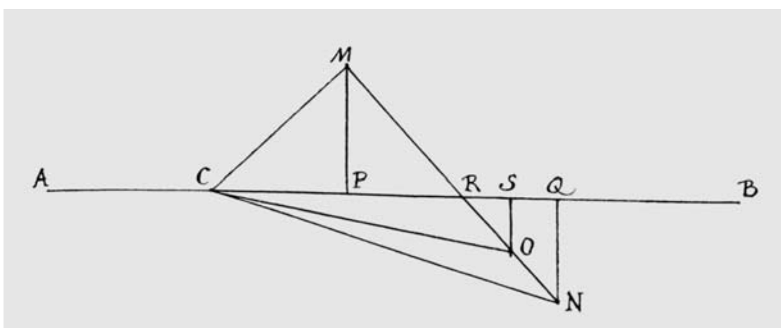
Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.[t] Petersburg
den 3. *Maii* 1746.

R 817 Reply to n° 102
Petersburg, (April 22nd) May 3rd, 1746
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 105r
Partial copy, 1 p. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 43r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 373–374; *Euler-Goldbach* (1965), p. 247

104
Goldbach to Euler
Petersburg, May (10th) 21st, 1746

P. S. Es ist mir gestern eingefallen daß sich das *Problema catoptricum* auch folgender massen *solvi*ren lässet:



Sit AB axis curvae $= a$; punctum radians C. Sint CM et CN radii in curvam incidentes; MR et NR radii ad idem punctum axis R reflexi; capiatur in MN punctum O ita ut sint $CM + MO = CN + NO = a$, et ponatur recta $CO = q$, $CM = \dfrac{a-p}{2}$, $MO = \dfrac{a+p}{2}$, $CN = \dfrac{a+v}{2}$, $NO = \dfrac{a-v}{2}$ (ubi v iam datur per p et q; est enim[1] *$v = \dfrac{(2a+p)\,q^2 + a^2 p}{a^2 + 2ap + q^2}$); ponatur porro $RO = z$, $RS = uz$, invenietur spatium quod inter radium incidentem et reflexum in axe intercipitur*

$$\begin{aligned} CR &= CS - RS = \sqrt{q^2 - z^2\,(1-u^2)} - uz \\ &= CQ - RQ = \frac{1}{2}\sqrt{(a+v)^2 - (a-v+2z)^2\,(1-u^2)} - \frac{(a-v+2z)\;u}{2} \\ &= CP + PR = \frac{1}{2}\sqrt{(a-p)^2 - (a+p-2z)^2\,(1-u^2)} + \frac{(a+p-2z)\;u}{2}. \end{aligned}$$

Sed cum v iam supra data sit in p et q; per has aequationes pro CR inventas dari etiam poterunt u et z in p et q, qui valores deinde substituendi sunt in applicata

$$MP = \left(\frac{a+p-2z}{2}\right)\sqrt{1-u^2}$$

et in abscissa

$$CP = \sqrt{\frac{(a-p)^2}{4} - \overline{MP}^2}.$$

vert[e].

Ob nun zwar die würckliche *determination* der *quantitatum* u und z durch p und q etwas weitläufftig seyn möchte, so ist doch hingegen zu *consideri*ren daß in dieser *solution* keine *differentialia* vorkommen.

S.^{t} Petersburg den 21. *Maii st. n.* 1746.[2]

R 818 Postscript to n° 103
Petersburg, May (10th) 21st, 1746
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 106rv
Copy, 2 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 43v–44r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 374–375; *Euler-Goldbach* (1965), p. 247–248

105
Euler to Goldbach
Berlin, May 28th, 1746

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats*-Rath

Ungeacht die Bücher und *Defect*en, so Ewr. Hochwohlgebohrnen das vorige mal verlanget[1] schon vor geraumer Zeit an den H. Leib-*Medicum Sanches* (oder den H. *D[octo]*^{r} Schreiber) abgegangen, so wird doch nächstens wiedrum an Denselben eine *Parti*e Bücher versendet werden, bey welcher Gelegenheit der H. Haude nicht ermangeln wird die letstens verlangten, so schon bereits der gegebenen Ordre gemäß theils gehefftet theils gebunden sind, an Ewr. Hochwohlgeb. zu überschicken.

Die von Ewr. Hochwohlgeb. gemeldte *Series*[2]

$$\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{5}{8} - \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{7}{10} + \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{9}{12} - \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10}\cdot\frac{11}{14} + etc.$$

kan durch meine *Methode* leicht gefunden werden. Dann wann ich nach der *Lege progressionis* noch die 2 vorhergehenden *Terminos* dazu setze so kommt:

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{6} + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{5}{8} - \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{7}{10} + \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{9}{12} - etc.$$

Diese ist in der folgenden enthalten, wann man setzt $x = 1$,

$$s = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{6}x^6 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{5}{8}x^8 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{7}{10}x^{10} + etc.$$

Man *differentir*e diese *Seriem* und theile allenthalben durch dx so bekommt man:

$$\frac{ds}{dx} = 1x^3 - \frac{1}{2}\cdot 3x^5 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot 5x^7 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot 7x^9 + etc.$$

Man *multiplicir*e durch $\dfrac{dx}{x^3}$, so wird:

$$\frac{ds}{x^3} = 1\,dx - \frac{1}{2}\cdot 3xx\,dx + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot 5x^4dx - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot 7x^6dx + etc.;$$

wann man nun *integrir*t so bekommt man:

$$\int\frac{ds}{x^3} = x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^5 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^7 + etc.$$

Hier sieht man leicht daß diese *Series* ist $= x\ (1+xx)^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{x}{\sqrt{(1+xx)}}$; folglich ist $\displaystyle\int\frac{ds}{x^3} = \frac{x}{\sqrt{(1+xx)}}$ und $\dfrac{ds}{x^3} = \dfrac{dx}{(1+xx)^{\frac{3}{2}}}$; allso

$$s = \int\frac{x^3dx}{(1+xx)^{\frac{3}{2}}} = \int\frac{x\,dx}{\sqrt{(1+xx)}} - \int\frac{x\,dx}{(1+xx)^{\frac{3}{2}}} = (1+xx)^{\frac{1}{2}} + (1+xx)^{-\frac{1}{2}} - 2,$$

dann hier muß die *quantitas constans* 2 *subtrahir*t werden, weil *posito* $x = 0$ werden muß $s = 0$. Setzt man nun $x = 1$ so bekommt man:

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{6} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{5}{8} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{7}{10} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{9}{12} - etc. = 2^{\frac{1}{2}} + 2^{-\frac{1}{2}} - 2.$$

Letstens bin ich auf nachfolgende *Seriem* gekommen, deren *summ* ob sie gleich so leicht ausgedruckt wird, dennoch durch diese *Methode* nicht wohl gefunden werden kan, dann ich komme auf eine *differentio-differential aequation*, welche sich *generaliter* nicht *integrir*en lässt. Die *Series* ist diese:

$$1 + \frac{n}{4} + \frac{n\,(n+3)}{4\cdot 8} + \frac{n\,(n+4)\,(n+5)}{4\cdot 8\cdot 12} + \frac{n\,(n+5)\,(n+6)\,(n+7)}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16} + etc. = 2^n;$$

wann allso $n = 1$ so ist:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1\cdot 4}{4\cdot 8} + \frac{1\cdot 5\cdot 6}{4\cdot 8\cdot 12} + \frac{1\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16} + \frac{1\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16\cdot 20} + etc. = 2;$$

diese wird leicht in diese Form verwandelt:[3]

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1\cdot 3}{4\cdot 6} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{4\cdot 6\cdot 8} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10} + etc. = 2\left(1 - (1-1)^{\frac{1}{2}}\right) = 2,$$

in welchem Fall die Richtigkeit leicht zu ersehen.

Ich glaube kaum daß die *ratio diametri ad peripheriam* $1 : \pi$ leichter *per approximationem* gefunden werden könne als durch Hülfe beyder folgenden *serierum*:

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} - \frac{1}{7\cdot 5^7} + \frac{1}{9\cdot 5^9} - \frac{1}{11\cdot 5^{11}} + etc. \\ q &= \frac{1}{239} - \frac{1}{3\cdot 239^3} + \frac{1}{5\cdot 239^5} - \frac{1}{7\cdot 239^7} + \frac{1}{9\cdot 239^9} - \frac{1}{11\cdot 239^{11}} + etc. \end{aligned}$$

Dann wann hieraus die Werthe von p und q gefunden werden so ist $\pi = 16p - 4q$.[4]

Nach dem letst ergangenen Urtheil der *Academie* zu *Paris* über den *Magneten* ist meiner *Piece* der dritte Theil des dreyfachen Preißes zuerkannt worden,[5] wie Ewr. Hochwohlgeb. schon aus unseren Zeitungen werden ersehen haben. H. *Bernoulli* hat auch einen Drittel bekommen. Hingegen haben wir den Preiß der hiesigen *Academie* von 50 *Ducat*en über die Winde der *Piece*: *Haec ego de ventis: dum etc.* zuerkannt, davon der *Auctor* H. *D'Alembert* aus *Paris* ist.[6]

Der Brief nach Leipzig an H. Schuster[7] ist denselben Tag abgegangen, von H. *Haude* werde vielleicht eine Rechnung vorläuffig hier beylegen,[8] damit Ewr. Hochwohlgeb. sehen, was für Bücher gesandt werden, und wie hoch sich dieselben belauffen.

Meine gantze *Familie* lässt sich Ewr. Hochwohlgeb. gehorsamst empfehlen und ich habe die Ehre mit der vollkommensten Hochachtung zu verbleiben

Eur. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 28 *Maij*
1746.

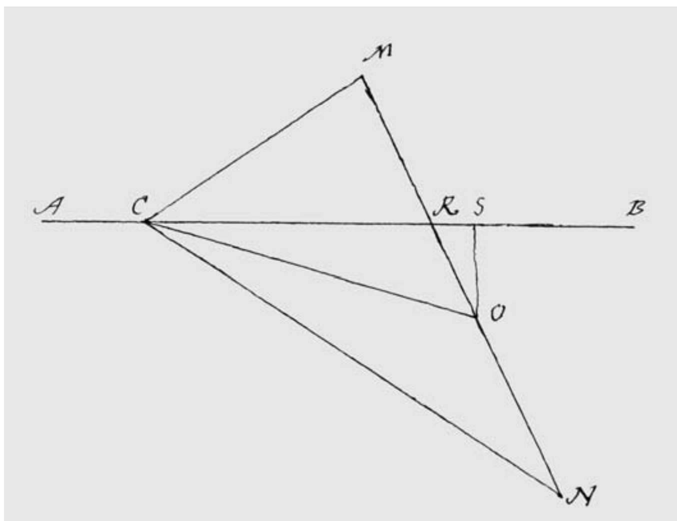
Die beyligende Rechnung ist ursach daß die Absendung dieses Briefes biß den 4^{ten} *Junii* verschoben worden.

R 819 Reply to nº 103
Berlin, May 28th, 1746
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 171–172r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 376–378; *Euler-Goldbach* (1965), p. 249–251

106
Euler to Goldbach
Berlin, June 14th, 1746

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats*-Rath

Ewr. Hochwohlgeb. letst überschriebene *Solution* des *Problematis Catoptrici*[1] hat mich anfänglich nicht wenig *frappir*t, da dieselbe keine *Differentialia* in sich enthält, und ich doch versichert bin, daß die Betrachtung der *Reflexion* nothwendig *differentialia* erfordere. Als ich aber die Sach genauer erwogen, habe ich bald gesehen, daß die drey gefundenen *Formul*n für die Linie CR unmöglich zwey *Quantitates incognitas determinir*en können, sondern nachdem man eine bestimmet, eine *Aequatio identica* herauskommen müsse.



Dann in einem jeglichen *Triangulo* CMN kan eine Seite MN allzeit in O dergestalt geschnitten werden, daß $CM + MO = CN + NO$: wodurch allso keine besondere Beschaffenheit bestimmet wird. Wann man nun setzt $CM+MO = CN+NO = a$; $CM = \frac{a-p}{2}$; $MO = \frac{a+p}{2}$; $CN = \frac{a+v}{2}$ und $NO = \frac{a-v}{2}$: so kan daraus die Linie $CO = q$ bestimmt werden, dann es wird $qq = \frac{aa\,(v-p) + 2apv}{2a - v + p}$ oder $qq + aa = \frac{2a\,(aa + pv)}{2a - v + p}$. Setzt man nun ferner $RO = z$, und den *Cosinum* des Winkels $BRO = u$, so kan *per* p, v, z und a der Werth von u gefunden werden. Das *Intervallum* z aber bleibet willkührig, weil noch kein Umstand in Betrachtung gezogen worden, wodurch z bestimmt werden könnte. Sollen aber die Linien CM und MO, *item* CN und NO *lege reflexionis aequaliter ad curvam inclinir*t seyn, so müste *in situ proximo* das *punctum* O unverändert bleiben und folglich so wohl *diff.* $CS = 0$ als *diff.* $SO = 0$, wodurch das *problema plusquam determinatum* würde oder vielmehr nur eine einzige *Lineam satisfacientem* nehmlich die *Ellipsin* geben würde. Die Ursach davon ist diese, daß man ohne Nothwendigkeit angenommen $CM + MO = CN + NO$: da diese beyden *Valores* auch ungleich seyn können wann nur ihre *summ* $CM + MN + NC$[2] *constans* bleibt. Endlich ist auch hier nicht der Haupt Umstand in Betrachtung gezogen worden, daß die beyden *Puncta* M und N *in eadem linea curva continua* seyn müssen. Übrigens glaube ich kaum daß von diesem *Problemate* eine kürzere und leichtere *solution* gefunden werden könne als diese:[3]

Sit $CMNC$ *radius post geminam reflexionem ad* C *reversus, sumtaque pro lubitu recta* CB *pro axe, ad quem curvae quaesitae aequatio referatur; vocetur* $CR = r$*, angulus* $CRM = \varphi$*; ejus sinus* $= s$ *et cosinus* $= u$*, posito radio* $= 1$ *ita ut sit* $ss + uu = 1$ *et* $d\varphi = \frac{ds}{u} = -\frac{du}{s}$*. Hic angulum* φ *consideravi, quatenus ad punctum* M *spectat, pro puncto* N *autem is abibit in* CRO*, et quia in partem contrariam cadit erit is* $= -180° + \varphi$*; ejusque ergo sinus* $= -s$ *et cosinus* $= -u$*. Quia jam punctum* R *ad utrumque punctum* M *et* N *aequaliter pertinere debet, quantitatem* $CR = r$ *ita per* s *et* u *exprimi oportet, ut eundem valorem retineat, etiamsi pro* s *et* u *ponantur* $-s$ *et* $-u$*. Unde hujusmodi erit relatio inter* r *et* s, u*:*

$$r = \alpha + \beta ss + \gamma su + \delta uu + \varepsilon s^4 + \zeta s^3 u \text{ etc.}$$

vel in fractionibus:

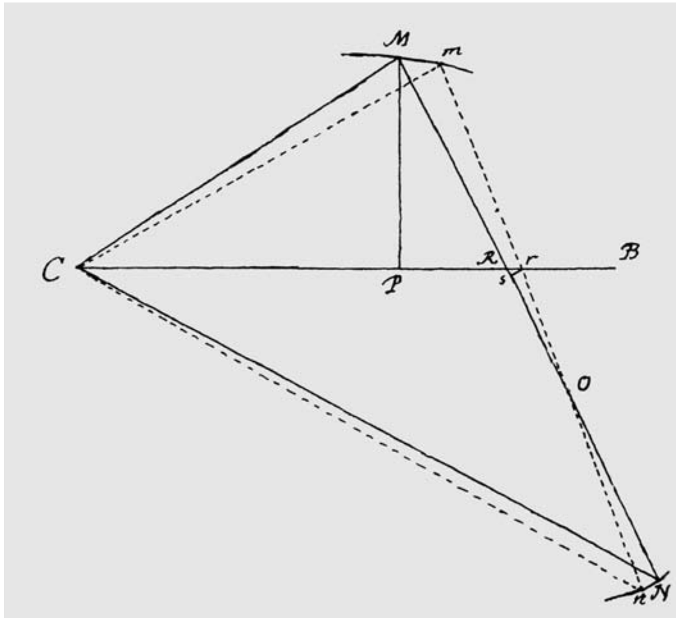
$$r = \frac{\alpha + \beta ss + \gamma su + \delta uu + \varepsilon s^4 + \zeta s^3 u + \eta s^2 u^2 + \vartheta su^3 + \text{etc.}}{A + Bss + Csu + Duu + Es^4 + Fs^3 u + Gs^2 u^2 + Hsu^3 + \text{etc.}}$$

vel etiam

$$r = \frac{\alpha s + \beta u + \gamma s^3 + \delta s^2 u + \varepsilon su^2 + \zeta u^3 + \eta s^5 + \vartheta s^4 u + \text{etc.}}{As + Bu + Cs^3 + Ds^2 u + Esu^2 + Fu^3 + Gs^5 + Hs^4 u + \text{etc.}}$$

Quaecunque ergo hujus generis aequatio pro r *definiendo assumitur, punctum* R *aeque respiciet utrumque punctum* M *et* N*, ac propterea puncta* M *et* N *in una eademque linea curva continua erunt sita. Superest ergo ut ex hujusmodi aequatione inter* r*,* s *et* u *assumta, ipsa curva definiatur, et aequatio inter coordinatas* $CP = x$ *et* $PM = y$ *eliciatur. In hunc finem consideretur reflexio proxima* $CmnC$*, sitque* O *intersectio rectarum* MN *et* mn*: atque ex natura reflexionis manifestum est, fore particulam curvae* Mm *elementum ellipseos focis* C *et* O *atque* Nn *elementum ellipseos iisdem focis* C *et* O *descriptae: Hinc ergo habebimus* $CM + MO = Cm + mO$*, et* $CN + NO = Cn + nO$*: sed sufficit alteram tantum conditionem* $CM + MO = Cm + mO$ *spectasse, quia per determinationem ipsius* r *alterius ratio jam simul involvitur.*

Cum igitur sit $CR = r$*, erit* $Rr = dr$*, et ex* r *in* OM *demisso perpendiculo* rs *fiet* $rs = s\,dr$ *et* $Rs = u\,dr$*. Appelletur* $CM + MR = q$*; erit* $Cm + mr = q + dq$*; ideoque ob* $CM + MO = Cm + mO$ *fiet* $q + OR = q + dq + Or$ *seu* $OR - Or = Rs = dq = u\,dr$*; ita ut hinc prodeat* $q = a + \int u\,dr = CM + MR$*. Sit*



jam $MR = z$, *erit* $PM = y = sz$; $PR = uz$; *et* $CP = x = r - uz$, *unde fit* $CM = \sqrt{(rr - 2urz + zz)}$ *ob* $ss+uu = 1$. *At est* $CM = q-z$, *ergo* $\sqrt{(rr - 2urz + zz)} = q - z$ *sumtisque quadratis:* $rr - 2urz = qq - 2qz$; *qua fit* $z = \dfrac{qq - rr}{2q - 2ur}$. *Assumto ergo valore quocunque idoneo pro* r *in* s *et* u *expresso, hinc quaeratur* $q = a + \int u\,dr$; *porroque* $z = \dfrac{qq - rr}{2q - 2ur}$; *quibus inventis erit* $x = r - uz$ *et* $y = sz$, *sicque habebitur curva problemati satisfaciens: quae quidem erit transcendens, si formula* $\int u\,dr$ *algebraice exprimi nequeat. Ad curvas ergo algebraicas inveniendas ejusmodi functionem pro* r *eligi oportet, ut formula* $\int u\,dr$ *fiat integrabilis; quod quidem hoc modo generaliter praestari potest: cum sit* $\int u\,dr = ur - \int r\,du$ *ponatur* $\int r\,du = v$; *fietque* $r = \dfrac{dv}{du}$. *Quo igitur* r *fiat functio parium dimensionum ipsarum* s *et* u, *ut supra requirebatur, necesse est ut* v *sit functio imparium dimensionum ipsarum* s *et* u *seu talis, quae abeat in* $-v$, *si pro* s *et* u *ponantur* $-s$ *et* $-u$. *Hujusmodi ergo functione pro* v *assumta, erit* $r = \dfrac{dv}{du}$; *ubi ob* $ds = -\dfrac{u\,du}{s}$ *differentialia destruentur, ita ut* r *fiat quantitas finita algebraica. Inventa autem* r *erit* $\int u\,dr = ur - v$ *et* $q = a + ur - v$ *atque* $z = \dfrac{qq - rr}{2q - 2ur}$; *ex quibus denique elicientur coordinatae* $CP = x = r - uz$ *et* $PM = y = sz$, *ambae per* s *et* u *expressae: unde curva construi, et aequatio inter* x *et* y *eliminandis* s *et* u *ope* $ss + uu = 1$, *erui poterit.*

Ex[*empli*] *gr*[*atia*]. *Cum* v *debeat esse functio imparium dimensionum ipsarum* s *et* u, *assumatur* $v = bs + cu$ *erit* $dv = b\,ds + c\,du = -\dfrac{bu\,du}{s} + c\,du$ *atque*

$r = -\dfrac{bu}{s} + c$: *tum*

$$q = a - \frac{buu}{s} + cu - bs - cu = a - \frac{b}{s}:$$

porro ob $qq = aa - \dfrac{2ab}{s} + \dfrac{bb}{ss}$ *et* $rr = \dfrac{bbuu}{ss} - \dfrac{2bcu}{s} + cc$ *erit*

$$z = \frac{aa - \dfrac{2ab}{s} + bb + \dfrac{2bcu}{s} - cc}{2a - 2bs - 2cu}$$

seu

$$z = \frac{(aa + bb - cc)\ s - 2ab + 2bcu}{2s\,(a - bs - cu)}:$$

Unde fiunt coordinatae:

$$\begin{aligned} CP &= x = \frac{2ac - 2bcs - (aa - bb + cc)\ u}{2\,(a - bs - cu)}; \\ PM &= y = \frac{-\,2ab + 2bcu + (aa + bb - cc)\ s}{2\,(a - bs - cu)}, \end{aligned}$$

unde eliminandis s et u aequatio resultat inter x et y duarum tantum dimensionum, qua natura ellipsis ad rectam quamcunque per focum C tanquam axem relata exprimitur: si sit $b = 0$, *recta CB per alterum quoque focum transibit.*

Letstens habe gefunden daß diese *Expressio* $\left(\sqrt{-1}\right)^{\sqrt{-1}}$ einen *valorem realem* habe, welcher *in fractionibus decimalibus* $= 0{,}207\,879\,576\,3$, welches mir merkwürdig zu seyn scheinet.[4] Übrigens beziehe mich auf mein voriges Schreiben, der ich mit der vollkommensten Hochachtung und *Veneration* verharre

Ewr. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 14ten *Junii*
1746

Auf künftiges Jahr ist von der Hiesigen *Academie* die Frage: *de natura elementorum corporum seu monadum* aufgegeben worden.[5]

R 820 Reply to nº 104
Berlin, June 14th, 1746
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 173–174v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 379–383; *Euler-Goldbach* (1965), p. 251–253

107
Goldbach to Euler
Petersburg, (June 24th) July 5th, 1746

HochEdelgebohrner Herr,
Hochgeehrter Herr *Professor*,

Eurer HochEdelgebohrnen Schreiben vom 28. *Maii* habe ich den 16. *Jun.* und das vom 14. *Jun.* ungewöhnlich zeitig, nemlich den 25. *eiusd*[*em*] erhalten.[1] In der *Specification* von Büchern,[2] vor deren übersendung ich Eurer Hochedelgeb. dienstlichen Danck erstatte, ist zwar nicht gemeldet an wen das Geld bezahlet werden soll, ich hoffe aber, wann die Bücher selbst ankommen werden, eine *assignation* dabey zu finden. Daß Ew. Hochedelg. einen Theil des neulich *distribui*rten Preises von Pariß bekommen würden, hatte ich zwar fest vermuthet, habe aber die eigentliche Nachricht davon nicht eher als aus Dero letztem Schreiben bekommen, wie mir denn auch die dritte Person so an diesem Preise Theil gehabt biß *dato* unbekannt ist.[3] Die zum künfftigen *praemio* bey der Parisischen *Acad*[*emie*] *des Sciences* ausgesetzte Frage[4] giebt mir auch vor Ew. H. sehr gute Hofnung. Ich bitte mir bey gelegenheit zu melden wie viel male Dero *pieces* schon bey selbiger *Acad*[*emie*] *victorieuses* gewesen sind?

Es gehöret meines erachtens schon eine ziemliche Fertigkeit dazu daß man aus der *serie*

$$x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^5 - \&c.$$

die *summam*

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{6} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{5}{[8]} - \&c.$$

nach Eurer HochE. *methode* finde,[5] und von der *Serie*[6]

$$1 + \frac{n}{4} + \frac{n\,(n+3)}{4\cdot 8} + \frac{n\,(n+4)\,(n+5)}{4\cdot 8\cdot 12} + \&c.$$

habe ich folgendes angemercket: Wann man setzet

$$2^n = 1 + \beta n + \gamma n^2 + \delta n^3 + \&c.$$

so ist kein Zweiffel daß die *quantitates* β, γ, δ, *&c.* ihre *determinatos valores* haben, wie denn *exempli gr*[*atia*] β = ist $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} +$ *&c.*; machet man aber *series* in deren *terminis* immer mehr *potestates ipsius* n vorkommen, so werden zwar die *series* aus welchen die *quantitates* β, γ, δ, *&c.* bestehen (wie solches in der *serie* $1 + \frac{n}{4} + \frac{n\,(n+3)}{4\cdot 8} + \&c. = 2^n$ geschiehet) gleichsam mit einander verwickelt, aber diese *quantitates* an sich selbst bleiben nichts desto weniger *invariabiles.* So offt also dergleichen *Series* wo die *quantitas indeterminata* n in jedem *termino ad diversas potestates evecta* ist, vorkommen, so meyne ich der sicherste Weg die *summam* zu finden wäre, daß man zuforderst die *coefficientes* β, γ, δ, *&c.* suchte.[7]

Bey Gelegenheit des von E. H. gefundenen *valoris*[8] vor $\left(\sqrt{-1}\right)^{\sqrt{-1}}$ ist mir etwas eingefallen an dessen möglichkeit ich noch den Tag zuvor sehr würde gezweifelt haben, nemlich daß auch diese *Series*

$$A \ldots\ \alpha a - \beta a^4 + \gamma a^9 - \delta a^{16} + \&c.$$

und *generatim* alle, wo die *exponentes numeri a ad formulam generalem reduci*ret werden können,[9] *summabiles* sind, nachdem die *coefficientes* α, β, γ, *&c. determini*ret werden, dann wann gesetzet wird

$$\begin{aligned}
\alpha &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} + \&c.\\
\beta &= 1\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} + 3\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} + 4\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} + \&c.\\
\gamma &= 1\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} + 3\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} + 6\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} + 10\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10} + \&c.\\
\delta &= 1\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} + 4\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} + 10\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}\\
&\qquad\qquad + 20\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12} + \&c.\\
&+ \quad \&c.,
\end{aligned}$$

so ist die *Series* $A = a^{\frac{1}{4}}$, und nach eben den selben *valoribus pro* α, β, γ, δ, *&c.* wird[10]

$$B \ \ldots\ \alpha a^a - \beta a^{2a^2} + \gamma a^{3a^3} \mp \delta a^{4a^4} + \&c. = \sqrt{a^{\sqrt{a}}} = a^{\frac{a}{2}^{\frac{1}{2}}}.$$

Meine *continui*rliche *distractions* sind zum theil daran schuld daß sich in meine Briefe manche Fehler einschleichen, die ich wohl verhüten könnte, und so ist es auch mit meinem letzten *P. S.* ergangen[11] indem ich bey genauerer Betrachtung desselben noch vor ankunfft Eurer HochE. Schreibens bemercket daß beyde *quantitates u et z* auf solche art nicht *eliminir*et werden können, sondern eine davon übrig bleibet,[12] wie denn die 3 *valores* von u so durch selbige 3 *aequationes* gefunden werden nichts anders sind, als (*posito* $m = 2a + p - v$)

$$\frac{(av + ap - mz)^2}{m^2q^2 - 2a\,(p+v)\ mz + m^2z^2} = u^2.$$

Die *Solution* welche E. H. in Dero letztem Schreiben anführen,[13] hat wegen ihrer Kürtze und Deutlichkeit für den vorigen, in meinen Augen, einen grossen Vorzug; nur dieses scheinet mir noch bedencklich: daß weil das *differentiale* von $RO \quad = -\,dq$ und folglich $CM + MO = Constanti$, wann dieses *constans* a gesetzt wird nicht nur Mm ein *elementum ellipseos*, sondern die gantze *curva quaesita* eine *ellipsis* seyn wird deren *axis* durch die *focos* C und O gehet und $= a$ ist, nur mit dem Unterscheide daß die *abscissae* CP und die *applicatae* MP (wie sie von E. H.

durch r und u bestimmet sind) nicht *ad ipsum axem curvae*, sondern *ad rectam positione datam et per focum C productam* genommen werden müssen, es mag im übrigen r eine *functionem quamcunque ipsius u* andeuten.

Wann man von nachfolgender *Serie*

$$1+\frac{5}{3}+\frac{43}{3\cdot 5}+\frac{531}{3\cdot 5\cdot 7}+\frac{8601}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}+\&c.$$

deren *lex progressionis* diese ist, daß *dato termino quocunque A et exponente eius x* der *terminus sequens* sey $B=\dfrac{4xA+1}{2x+1}$, die *formulam generalem* geben könnte, dörffte man nur in dem *termino generali* setzen $x=\frac{1}{2}$, so würde die *area circuli cuius diameter* $=1$ heraus kommen.[14]

Dem Hn *Pr*[*ofessor*] *Uhle* bitte ich nechst meiner schuldigsten Empfehlung zu melden daß der kürtzeste Weg das verlangte *Carmen* des Hn *Prof.* Gesners zu erhalten meines erachtens seyn würde den Hn *D*[*octor*] *Lilienthal* darum zu ersuchen welcher von vielen Jahren her des Seel[igen] Hn Bayers guter Freund gewesen und das *Carmen*, so vermuthlich in Königsberg gedruckt ist, leicht zu finden wissen wird.[15]

Ich verharre übrigens mit besonderer Hochachtung
Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S. Petersburg
den 5. *Jul.* 1746.

R 821 Reply to n° 105 and n° 106
Petersburg, (June 24th) July 5th, 1746
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 107–108v
Partial copy, 3 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 44r–45r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 384–387; *Euler-Goldbach* (1965), p. 254–255

108
Euler to Goldbach
Berlin, July 26th, 1746

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats*-Rath

Die Bücher, welche Ewr. Hochwohlgeb. von hier verlangt haben[1] werden wie ich von dem H. *Haude* gehört nächstens von hier weggeschickt werden, weil sich dazu bißher keine bequeme Gelegenheit gefunden: und die Bezahlung wird alsdann am füglichsten durch den H. *Hainchelin* geschehen können. Für Dero hochgeneigte

Gratulation zu dem erhaltenen Theil des Pariser Preises statte allen gehorsamsten Dank ab; dieses war das vierte mal, daß ich etwas von diesem Preiß bekommen:[2] auf das künftige Jahr, da die Frage von Findung der Zeit durch himmlische Beobachtungen zur See vorgelegt ist, habe ich auch schon eine *Piece* hingeschickt;[3] die Frage aber für 1748 ist meines Erachtens so schwehr, daß ich noch nicht weiß, ob ich im Stande seyn werde, etwas darüber zu verfertigen; indessen wollte ich mir von Ewr. Hochwohlgeb. dazu eine schöne *Devise* gehorsamst ausgebeten haben.[4]

Daß die *Summ* dieser *Seriei*

$$1+\frac{n}{4}+\frac{n\,(n+3)}{4\cdot 8}+\frac{n\,(n+4)\,(n+5)}{4\cdot 8\cdot 12}+etc.$$

gleich ist 2^n hatte ich auf eine sehr weitläuffige Art herausgebracht, und kam mir um so viel merkwürdiger vor, weil ich solches durch keine mir bekannte *Methode* füglich beweisen konnte. Auf eine ähnliche Weise habe ich seit der Zeit gefunden, daß diese *Series*:

$$\begin{aligned} 1 \quad + \quad & \frac{n}{4}x^2+\frac{n\,(n+3)}{4\cdot 8}x^4+\frac{n\,(n+4)\,(n+5)}{4\cdot 8\cdot 12}x^6+\frac{n\,(n+5)\,(n+6)\,(n+7)}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}x^8 \\ + \quad etc. \quad = \quad & 2^n\left(\frac{1-\sqrt{(1-xx)}}{xx}\right)^n \end{aligned}$$

welche *Series* wann $x=1$ in die vorige verwandelt wird.[5] Setzt man $xx=\frac{1}{2}$ so wird

$$\begin{aligned} 1 \quad + \quad & \frac{n}{8}+\frac{n\,(n+3)}{8\cdot 16}+\frac{n\,(n+4)\,(n+5)}{8\cdot 16\cdot 24}+\frac{n\,(n+5)\,(n+6)\,(n+7)}{8\cdot 16\cdot 24\cdot 32}+etc. \\ = \quad & \left(4-2\sqrt{2}\right)^n. \end{aligned}$$

Wollte man aber um die *Summ* dieser *Seriei* zu finden, alle *coëfficientes evolvir*en, und die *Seriem* nach den *Potestät*en des *n rangir*en, so würde man auf so sehr verwirrte *Series* kommen, daß schwehrlich daraus etwas zu finden seyn würde. Dann wann man zum *Exemp*el setzt,

$$\begin{aligned} A \quad \ldots \quad 1 \quad + \quad & \frac{n}{4}+\frac{n\,(n+3)}{4\cdot 8}+\frac{n\,(n+4)\,(n+5)}{4\cdot 8\cdot 12}+etc. \\ = \quad & 1+\beta n+\gamma n^2+\delta n^3+\varepsilon n^4+etc. \end{aligned}$$

so wird

$$\beta=\frac{1}{4}+\frac{3}{4\cdot 8}+\frac{4\cdot 5}{4\cdot 8\cdot 12}+\frac{5\cdot 6\cdot 7}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}+\frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16\cdot 20}+etc.$$

welche *Series negative sumta* $(-\beta)$ den *Terminum exponentis* $\frac{1}{2}$ in dieser *Serie* ausdrückt:[6]

$$\overset{\frac{1}{2}}{-\beta};\quad \overset{1}{0};\quad \overset{2}{\frac{1}{2}};\quad \overset{3}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}};\quad \overset{4}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}};\quad \overset{5}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}};\quad \overset{6}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}};\ etc.$$

folglich ist der *terminus indicis* $\frac{3}{2} = -\beta + 1$; der *terminus indicis* $\frac{5}{2}$ $= -\beta + 1 + \dfrac{1}{3}$; und der *terminus indicis* $\left(\infty + \frac{1}{2}\right)$

$$= -\beta + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \textit{etc.};$$

der *Terminus indicis* ∞ aber ist

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \textit{etc.}$$

Da nun *lege seriei* die *termini infinitesimi* einander gleich seyn müssen,[7] so wird $\beta = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{7} - \textit{etc.}$wie Ewr. Hochwohlgeb. angemerket. Dieses gibt sich aber aus der *summ* der *seriei* A, welche ist $= 2^n$: dann wann $\ell\, 2$ oder $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} - \textit{etc.}$ gesetzt wird $= \beta$ so ist:

$$2^n = 1 + \beta n + \frac{\beta^2 n^2}{1 \cdot 2} + \frac{\beta^3 n^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\beta^4 n^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \textit{etc.};$$

folglich ist in der angenommenen *Form* $1 + \beta n + \gamma n^2 + \delta n^3 + \varepsilon n^4 + \textit{etc.}$: $\gamma = \dfrac{1}{2}\beta^2$; $\delta = \dfrac{1}{6}\beta^3$; *etc.*, welches aus der *serie* A selbst schwehrlich würde herausgebracht werden können.

Gleiche Schwierigkeit würde man finden, wann man auf diese Art die *summ* dieser *seriei* suchen wollte,

$$[B] \quad \ldots \quad 1 + \frac{n^2}{1 \cdot 2} + \frac{n^2\left(n^2+4\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{n^2\left(n^2+4\right)\left(n^2+16\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{n^2\left(n^2+4\right)\left(n^2+16\right)\left(n^2+36\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} + \textit{etc.}$$

Wann $\pi = 3,141\,59$ *etc.* und $\mathrm{e} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}[!] + \textit{etc.}$ so ist die *summ* dieser *seriei* $B = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}n\pi} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}n\pi}$.

Hingegen ist diese *series*:

$$[C] \quad \ldots \quad 1 + \frac{n^2}{1 \cdot 2} + \frac{n^2\left(n^2+1\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{n^2\left(n^2+1\right)\left(n^2+4\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{n^2\left(n^2+1\right)\left(n^2+4\right)\left(n^2+9\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} + \textit{etc.} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{3}n\pi} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}n\pi}$$

oder es ist

$$C = 1 + \frac{n^2\pi^2}{3 \cdot 6} + \frac{n^4\pi^4}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12} + \frac{n^6\pi^6}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 15 \cdot 18} + \textit{etc.};$$

folglich hat man

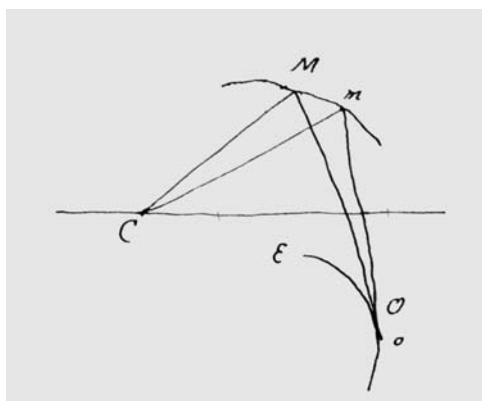
$$\frac{\pi^2}{18} = \frac{1}{1 \cdot 2} \quad + \quad \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12} + etc.$$

und

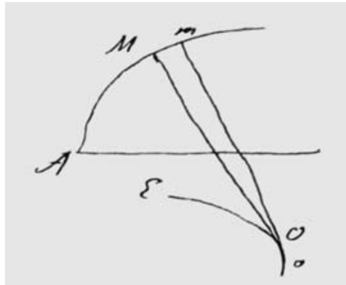
$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \frac{1}{8} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} \cdot \frac{1}{10} + etc.$$ [8]

Ewr. Hochwohlgeb. Erfindung von der *summ* solcher *Serierum*: $\alpha a - \beta a^4 + \gamma a^9 - \delta a^{16} + etc.$ wann α, β, γ, δ *etc.* gewisse Werthe haben,[9] ist ungemein sinnreich. Ich habe zwar bald gesehen, daß solche *Series* herauskommen, wann man den *Terminum exponentis* $\frac{1}{2}$ in dieser *Serie* a^1, a^4, a^9, a^{16} , *etc.* welcher ist $\sqrt[4]{a}$ auf gewöhnliche Art suchet: allein es ist zu bedauren, daß alle diese *coëfficientes* α, β, γ, δ, *etc.* unendlich werden, indem $\alpha = (1-1)^{-\frac{1}{2}}$; $\beta = \frac{1}{2}\,(1-1)^{-\frac{3}{2}}$; $\gamma = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,(1-1)^{-\frac{5}{2}}$; $\delta = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\,(1-1)^{-\frac{7}{2}}$; *etc.* werden.

Der Zweifel, welchen Ewr. Hochwohlgeb. gegen meine *Solution* des bekannten *Problematis Catoptrici* zu machen belieben,[10] als wann dieselbe nur allein die *Ellipsin* gäbe, wird dadurch leicht gehoben, wann man betrachtet, daß das *punctum* O nicht *constans* sondern *variabile* angenommen wird, indem es ein *punctum in caustica* EOo ist.



Dann ungeacht *ex natura reflexionis* ist $CM + MO = Cm + mO$ so ist doch nicht *diff.* $(CM + MO) = 0$ sondern $= Oo$, und allso $CM + MO =$ *Const.* $+$ *arcu causticae* EO: welche Eigenschafft allen *Causticis* gemein ist. Übrigens geben meine *Formul*n solche *Curvas*, welche offenbar keine *Ellipses* sind. Es eräugnet sich hier nehmlich eben der Fall, als bey Untersuchung des *radii osculi* MO einer krummen Linie AM.



Dann ungeacht $MO = mO$, so folgt doch nicht daß *diff.* $MO = 0$, noch daß $MO =$ *const.*: sondern weil das *punctum O variabile* nehmlich *in Evoluta* so ist *diff.* $MO = mo - MO = [Oo]$ und allso $MO =$ *Const.* + *arcu evolutae EO*.

Wann von der *Serie*

$$1 + \frac{5}{3} + \frac{43}{3\cdot 5} + \frac{531}{3\cdot 5\cdot 7} + \frac{8601}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} + etc.$$

der *terminus ordine* $\frac{1}{2}$ gesucht wird,[11] so wird derselbe $= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + etc.$ Aus welcher Betrachtung Ewr. Hochwohlgeb. ohne Zweifel jene *seriem* gefun[den.] Es ist aber merkwürdig, daß die *Lex progressionis* sich so bequem ausdrücken lässt.

Stirling hat angemerkt[12] daß die *summ* von dieser *serie*:

$$\frac{1}{t} + \frac{u}{t\,(t+1)} + \frac{u\,(u+1)}{t\,(t+1)\,(t+2)} + \frac{u\,(u+1)\,(u+2)}{t\,(t+1)\,(t+2)\,(t+3)} + etc.$$

sey $= \dfrac{1}{t-u}$; ich habe aber gefunden, daß diese *series* noch weit *generaler* gemacht werden kan:

$$\frac{1}{t} + \frac{u}{t\,(t+a)} + \frac{u\,(u+a)}{t\,(t+a)\,(t+b)} + \frac{u\,(u+a)\,(u+b)}{t\,(t+a)\,(t+b)\,(t+c)} + etc. = \frac{1}{t-u}$$

wann nur a, b, c, d, *etc.* dergestalt fort gehen, daß $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{d} + [etc.]$ eine *summam infinitam* aus machen: Da nun solches geschieht wann a, b, c, d, [*etc.*] die *numeri primi* sind,[13] so kan man sagen, daß zum *Exempel*

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 4}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 7} + \frac{1\cdot 3\cdot 4\cdot 6}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 7\cdot 9} + etc. = 1$$

oder daß

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{4\cdot 5} + \frac{3\cdot 4}{4\cdot 5\cdot 7} + \frac{3\cdot 4\cdot 6}{4\cdot 5\cdot 7\cdot 9} + \frac{3\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{4\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 13} + etc. = 1$$

wo die *factores* der Zehler sind *numeri primi* $+1$, die *factores* der Nenner aber *numeri primi* $+2$.

Hiemit empfehle ich mich zu Ewr. Hochwohlgebohrnen ferneren beständigen Wohlgewogenheit und verbleibe mit der schuldigsten Hochachtung

Ewr. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 26 *Julii* 1746.

R 822 Reply to n° 107
Berlin, July 26th, 1746
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 181–182v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 388–393; *Euler-Goldbach* (1965), p. 256–258

109
Goldbach to Euler
Petersburg, August (16th) 27th, 1746

Hochedelgebohrner Herr
Insonders Hochgeehrter Herr *Professor*

Ich erinnere mich nicht ob ich in meinem vorigen Schreiben bereits erwehnet, daß mir die bewusten *defect*e nebst dem *Tomo III. Thes*[*auri*] *epist*[*olici*] *Lacroz*[*iani*][1] von dem Hn Leib-*Medico Ribeyro* zugesandt worden, für deren Besorgung ich Eurer Hochedelg. dienstlich dancke; es stehet zwar auf dem Titel: *praefationem praemisit &c.*, daß aber diese *praefation* dabey nicht zu finden halte ich noch zur zeit für keinen *defect*, sondern glaube vielmehr daß selbige damahls noch nicht fertig gewesen. Wann H. *Haude* künfftig einige Bücher hieher senden wird, solte es mir sehr lieb seyn die auf inliegendem Zettel *notir*te mit selbiger Gelegenheit zu erhalten.[2]

So offt in den *Summis Serierum* selbst *quantitates per series infinitas exprimendae* vorkommen, mögen die *coefficientes ipsius n* wohl aus sehr schweren *seriebus* bestehen, daß aber die *series*

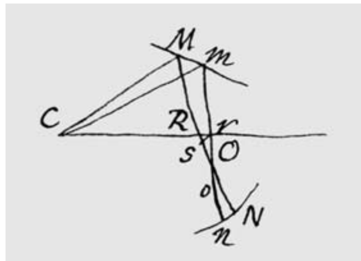
$$\beta = \frac{1}{4} + \frac{3}{4\cdot 8} + \frac{4\cdot 5}{4\cdot 8\cdot 12} + \&c. = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \&c.,$$

hatte ich auf eine von Eurer Hochedelg. *methode* sehr unterschiedene art und so gar ohne die *terminos* $\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4\cdot 8} + \&c.$ zu *evolvi*ren aus diesem einigen *raisonnement* gefunden: weil

$$2^n = (1+1)^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 3\cdot 4} + \&c.$$

und in dieser *serie* der *coefficiens ipsius n* ist[3] $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \mp \frac{1}{4} + \&c.$, so muß er auch in allen *seriebus* welche = sind 2^n eben denselben *valorem* haben; nun zweiffelte ich im geringsten nicht daß die von Eurer Hochedelg. angeführte *Series* nicht recht sollte *summi*ret seyn, und konnte dahero den *valorem* β mit grosser Gewißheit angeben.

Daß die in meinem vorigen angenommenen *quantitates* α, β, γ, *&c.* unendliche *valores* andeuten habe ich wohl gewust[4] und zweiffele sehr ob es möglich ist an deren Stelle *valores finitos* zu *substitui*ren; warum aber $\alpha = (1-1)^{-\frac{1}{2}}$, $\beta = \frac{1}{2}(1-1)^{-\frac{3}{2}}$ *&c.*, sehe ich noch nicht ein.



Daß das *punctum* O nicht anders als in der *ellipsi fixum* seyn könnte[5] hatte ich zwar gesehen, aber ohne gnugsame Betrachtung vermeinet daß weil OR *in situ proximo* in Or verwandelt würde, auch $RS = dq$ das *differentiale* von OR wäre, folglich $CM + MO$ eine *constans* und die gantze *curva* eine *ellipsis* seyn müste; nach dem von Eurer H. gegebenen *éclaircissement* aber ist es deutlich daß Oo das *diff*[*erentiale*] von $CM+MO$ sey und dahero RO *in situ proximo* ro werde so daß wann $RO = w$, $ro = w - dq + Oo$ seyn muß. Es ergiebet sich auch aus dieser *figur*, daß wann CR ein *maximum* ist, die *puncta* O und R *in axe* zusammen kommen und so offt dieses geschiehet $CM = CN$ seyn müsse.

Die *summa*[6] *seriei*

$$\frac{1}{t} + \frac{u}{t\,(t+a)} + \frac{u\,(u+a)}{t\,(t+a)\,(t+b)} + \frac{u\,(u+a)\,(u+b)}{t\,(t+a)\,(t+b)\,(t+c)} + \&c. = A$$

lässet sich folgender gestalt finden: *Sit* $b = c = d = \&c. = 0$, *erit ipsa series*

$$A = \frac{1}{t} + \frac{u}{t\,(t+a)} + \frac{u\,(u+a)}{t\,(t+a)}\left(\frac{1}{t} + \frac{u}{t^2} + \frac{u^2}{t^3} + \frac{u^3}{t^4} + \&c.\right)$$

(*hoc est, ob* $\frac{1}{t} + \frac{u}{t^2} + \frac{u^2}{t^3} + \frac{u^3}{t^4} + \&c. = \frac{1}{t-u}$) *erit*

$$A = \frac{1}{t} + \frac{u}{t\,(t+a)} + \frac{u\,(u+a)}{t\,(t+a)\,(t-u)} = \frac{1}{t-u}.$$

Sit $c = d = e = \&c. = 0$, *erit ipsa series*

$$A = \frac{1}{t} + \frac{u}{t\,(t+a)} + \frac{u\,(u+a)}{t\,(t+a)\,(t+b)} + \frac{u\,(u+a)\,(u+b)}{t\,(t+a)\,(t+b)}\left(\frac{1}{t} + \frac{u}{t^2} + \frac{u^2}{t^3} + \frac{u^3}{t^4} + \&c.\right)$$

seu

$$A = \frac{1}{t} + \frac{u}{t\,(t+a)} + \frac{u\,(u+a)}{t\,(t+a)\,(t+b)} + \frac{u\,(u+a)\,(u+b)}{t\,(t+a)\,(t+b)\,(t-u)} = \frac{1}{t-u}.$$ [7]

Eben diese Eigenschafft haben c, d, e, *et alii* *lusus naturae* wann sie so weit als man will *reales*, alle übrige aber $= 0$ gesetzt werden.

Ich verharre mit sonderbarer Hochachtung
Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.^{t} *Petersbourg*
den 27. *Aug. st. n.* 1746.

R 823 Reply to n° 108
Petersburg, August (16th) 27th, 1746
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 109–110r
Partial copy, 1 p. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 45v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 394–396; *Euler-Goldbach* (1965), p. 259–260

110
Euler to Goldbach
Petersburg, September 20th, 1746

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats*-Rath

Es ist mir aus *S.*^{t} *Petersburg* geschrieben worden, daß I[hro] K[aiserliche] *M*[*ajestät*] Ewr. Hochwohlgeb. mit ansehnlichen Gütern in Liefland begnadiget[1] wozu ich allso gehorsamst *gratuli*re: ungeacht mir dadurch alle Hoffnung gäntzlich benommen wird, Ewr. Hochwohlgeb. jemals wieder zu sehen. Man hat mir auch geschrieben, daß in *Petersburg* ein Gerücht ausgesprenget worden, als wann ich die *Proposition*en, welche mir von des H. *Praesident*en Grafen von *Rasumoffski Excell*[*enz*] zu einem neuen *Engagement* bey der *Academi*e gemacht worden, angenommen hätte, und würklich bald wiedrum dahin kommen würde. Allein ich kan Ewr. Hochwohlgeb. versichern: daß ich diesen Antrag gäntzlich von mir abgelehnet,[2] und mich hier so wohl befinde, daß es die gröste Verwegenheit seyn würde, wann ich mir den geringsten Gedanken zu einer Verändrung einkommen liesse. Der H. *Prof.* Krafft hat mir auch geschrieben, daß ihm ein gleicher Antrag gemacht worden, mit der Versicherung, daß ich mich schon entschlossen hätte, wiederum dahin zu gehen.[3] Ich stehe wegen dieses falschen Gerüchts nicht wenig in Sorgen, wann solches etwa vor Ihro Königl[ichen] *Majestät* Ohren kommen sollte.

Die *Praefation* zu dem *III Tomo Thes*[*auri*] *Epist*[*olici*] *La Croz*[*ei*] ist würklich noch nicht zum Vorschein gekommen. Seit der Zeit sind noch die in beyligender Rechnung *specificir*ten Bücher von dem H. *Haude* an Ewr. Hochwohlgeb. geschickt worden;[4] wann solche angekommen, so ersuchet H. *Haude*, das Geld darfür nur an H. *Hainchelin* in *S.*^{t} *Petersburg* zu bezahlen.

Für die mir Gütigst überschickten *Devis*en zu meiner künftigen *Piece* über die Verwirrungen der Bewegungen des ♄ und ♃ statte allen gehorsamsten Dank ab; solche schicken sich vollkommen auf die Art meiner Abhandlung; ich habe davon die mittlere erwehlet, als welche mir mit meinem Vortrag auf das genauste überein zu kommen schien.[5] Ich habe dabey jetz alle Schwierigkeiten fast gäntzlich überwunden, welche von einer gantz andern Art sind als die so ich bey dem Mond angetroffen; dann der *Saturnus* behalt bey nahe eben die Bewegung, als wann er von der Sonne allein angezogen würde; und wird nur von dem *Jupiter* etwas wenig verwirrt, dahingegen die Bewegung des Monds grösten Theils nach der Krafft der Erde richtet, und von der Krafft der Sonne etwas geändert wird. Beyde Fälle haben dieses gemein daß die Verwirrungen sehr klein sind: und eben dieses ist das einige Mittel die Schwierigkeiten der Rechnung zu überwinden, indem die gantze Sach auf *Approximation*en ankommt. Es wären aber *Casus* möglich, wo man auf keine Art die Bewegung eines *Planet*en würde bestimmen können. Es ist klar, wann der Mond sehr viel weiter von der Erde entfernet wäre, derselbe alsdann kein *Satelles* der Erde mehr seyn, sondern als ein *Planeta primarius* seinen Lauf um die Sonne verrichten, dabey aber von der Erde einige Verwirrung, wie der *Saturnus* vom *Jupiter*, leiden würde: welche Bewegung noch könnte bestimmt werden: Wann aber der Mond von der Erde nur so weit entfernet wäre daß die beyden Kräffte der Sonne und der Erde einander beynahe gleich würden, und der Mond allso weder ein *Planeta primarius* noch ein *Satelles* der Erde seyn könnte: so würde seine Bewegung so *irreguliere* seyn, daß dieselbe auf keinerley Art und Weise bestimmt werden könnte. Es ist demnach ein grosses Glück für die *Astronomi*e, daß sich kein solcher Fall in unserem *Systemate planetario* befindet. Wann der Mond, anstatt daß er jetzt ungefehr 60 *radios telluris* von uns entfernt ist, etwan 300 *radios* weit weg wäre: so würde sich der erwehnte Fall eräugnen. Hernach habe ich auch angemerkt, daß wann der Mond bey seiner gegenwärtigen Entfernung nur entweder eine grössere *Excentricitä*t hätte, oder seine *Orbita* nach einem weit grösseren Winkel auf die *Ecliptic inclinir*t wäre, auch alle bisherige Kunstgriffe nicht hinreichend seyn würden, seinen Ort nur ungefehr voraus zu bestimmen. Da sich nun auch dieser Fall nicht in unserem *Systemate* befindet, so scheinet es allerdings, daß die Einrichtung dieses *Systematis* nach den Gräntzen unsrer Erkänntnüß gemacht worden: und daß sich vielleicht solche Fälle nur in andern *Systematibus*, wo die Einwohner einen höheren Verstand, und eine tiefere Einsicht in die *Analysin* besitzen, befinden.[6] Dann nach der *lege mutuae gravitationis*, wornach sich alle Bewegungen in der Welt zu richten scheinen, beruhet die Bestimmung der Bewegung solcher Körper auf der *Integration* einiger *Differentio-differential Aequation*en, und kommt allso die gantze Sach auf unsere Fähigkeit in der *Analysi* an.

Daß die *Coefficientes* α, β, γ, *etc.* bey Ewr. Hochwohlgeb. neulich überschriebenen *Formul* nicht nur alle *infiniti* werden, sondern auch *per potestates negativas* des *binomii* $1-1$ ausgedruckt werden können, habe ich allso gefunden:[7] es sey vorgelegt diese *Series*: a^A, a^B, a^C, a^D, a^E, a^F *etc.* wovon der *Terminus indici* x

respondens seyn soll a^X, so wird:

$$\begin{aligned} a^X &= a^A + \frac{x-1}{1}\left(a^B - a^A\right) + \frac{(x-1)(x-2)}{1\cdot 2}\left(a^C - 2a^B + a^A\right) \\ &\quad + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(a^D - 3a^C + 3a^B - a^A\right) \text{ [+ } \textit{etc.}] \end{aligned}$$

Es sey $\frac{x-1}{1} = \mathfrak{A}$; $\frac{(x-1)(x-2)}{1\cdot 2} = \frac{x-2}{2}\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$; $\frac{x-3}{3}\mathfrak{B} = \mathfrak{C}$; $\frac{x-4}{4}\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$, *etc.* so wird

$$\begin{aligned} a^X = \quad & a^A \left(1 - \mathfrak{A} + \mathfrak{B} - \mathfrak{C} + \mathfrak{D} - \textit{etc.}\right) \\ & + a^B \left(\mathfrak{A} - 2\mathfrak{B} + 3\mathfrak{C} - 4\mathfrak{D} + 5\mathfrak{E} - \textit{etc.}\right) \\ & + a^C \left(\mathfrak{B} - 3\mathfrak{C} + 6\mathfrak{D} - 10\mathfrak{E} + 15\mathfrak{F} - \textit{etc.}\right) \\ & + a^D \left(\mathfrak{C} - 4\mathfrak{D} + 10\mathfrak{E}\,[-]\,20\mathfrak{F}\,[+]\,35\mathfrak{G} - \textit{etc.}\right). \end{aligned}$$

Wann allso gesetzt wird $a^X = \alpha a^A + \beta a^B + \gamma a^C + \delta a^D +$ *etc.* so wird:

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 - \frac{(x-1)}{1} + \frac{(x-1)(x-2)}{1\cdot 2} - \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1\cdot 2\cdot 3} + \textit{etc.} \\ &= (1-1)^{x-1} \end{aligned}$$

wie aus der *Evolution* erh[ellt.]

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{(x-1)}{1} - \frac{2(x-1)(x-2)}{1\cdot 2} + \frac{3(x-1)(x-2)(x-3)}{1\cdot 2\cdot 3} - \textit{etc.} \\ &= (x-1)\left(1 - \frac{(x-2)}{1} + \frac{(x-2)(x-3)}{1\cdot 2} - \textit{etc.}\right) = (x-1)(1-1)^{[x-2]} \\ \gamma &= \frac{(x-1)(x-2)}{1\cdot 2}\left(1 - \tfrac{3(x-3)}{3} + \tfrac{6(x-3)(x-4)}{3\cdot 4} - \tfrac{10(x-3)(x-4)(x-5)}{3\cdot 4\cdot 5} + \textit{etc.}\right) \\ &= \frac{(x-1)(x-2)}{1\cdot 2}(1-1)^{x-3} \\ \delta &= \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1\cdot 2\cdot 3}(1-1)^{x-4} \end{aligned}$$

etc.

man darf allso nur jetz setzen $x = \frac{1}{2}$.

Ewr. Hochwohlgeb. *Demonstration*[8] daß

$$\frac{1}{t} + \frac{u}{t(t+a)} + \frac{u(u+a)}{t(t+a)(t+b)} + \textit{etc.} = \frac{1}{t-u}$$

ist meines Erachtens die einige wodurch dieser *Lusus naturae* bewiesen werden kan: Inzwischen wann für a, b, c, *etc.*, t und u *determinir*te Zahlen angenommen werden, so bekommt man öffters *Series*, deren *Summation* man nicht vermuthen sollte.

Meine gantze *Famille* lässt sich Ewr. Hochwohlgeb. gehorsamst empfehlen, und ich habe die Ehre, mit der vollkommensten Hochachtung zu seyn

Ewr. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 20$^{\text{ten}}$ *Sept.* 1746.

P. S.[9] Die letstens verlangten Bücher[10] werden mit der nächsten Gelegenheit abgeschickt werden.

R 824 Reply to n° 109
Berlin, September 20th, 1746
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 183–184v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 397–400; *Euler-Goldbach* (1965), p. 260–262

111
Goldbach to Euler
Petersburg, October (14th) 25th, 1746

HochEdelgebohrner Herr
Insonders Hochgeehrter Herr *Professor*

Die Nachricht so Ew. Hochedelg. aus Petersburg bekommen, daß Ihre Kayserl[iche] M[ajestä]$^{\text{t}}$ mich mit ansehnlichen Gütern in Liefland begnadiget, ist in so weit gegründet daß Höchstdieselbe mir das Gut *Wolmarshoff* welches jährl[ich] 1400 R. *arende* traget *ad dies vitae* allergnädigst geschencket haben;[1] was aber die *Academi*schen Angelegenheiten betrifft so habe ich mich derselben schon seit *A*[*nno*] 1742 gäntzlich entschlagen.

Die bewusten Bücher[2] sind mir noch nicht abgegeben, sie mögen aber wohl schon angekommen seyn, wie denn bereits einige an Hn *D*[*octor*] *Ribeyro adressi*ret worden so weder ihm noch mir gehören.

In der *serie*[3]

$$\frac{1}{t}+\frac{u}{t\,(t+a)}+\frac{u\,(u+a)}{t\,(t+a)\,(t+b)}+\&c.$$

finden sich zwey Eigenschafften (1.) daß man dadurch *data summa et datis quibuscunque terminis ab initio* die *seriem cuius summa data est* finden kan (2.) daß man von unzehlichen *seriebus demonstri*ren kan daß ihre *summae* unendlich groß sind, welches ohne dieses *adminiculum* sehr schwer seyn würde; zum Exempel wann ich *singulos terminos seriei*

$$\frac{1}{t}+\frac{u}{t\,(t+a)}+\frac{u\,(u+a)}{t\,(t+a)\,(t+b)}+\&c.$$

aequales setze *singulis terminis huius*:[4]

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \&c. = \pi$$

und alsdann alle *quantitates* a, b, c, *&c.* durch u *& constantes determini*re, so muß folgen daß die *series*

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \&c.$$

nur in dem einen *casu* unendlich groß werde wann $u = \dfrac{t\pi - 1}{\pi}$.[5]

Ubrigens wird es mir jederzeit eine Freude seyn zu vernehmen daß Ew. Hochedelg. sich nebst Dero werthen Familie vergnügt befinden, und ich verharre mit vieler Hochachtung

Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.^{t} *Petersbourg*
den 25. *Octobr.* 1746.

P. S. Eben jetzo vernehme ich daß die vorerwehnten Bücher[6] dennoch dem Hn *D*[*octor*] *Ribeyro* gehören, von den meinigen aber habe noch keine Nachricht erhalten.

R 825 Reply to nº 110
Petersburg, October (14th) 25th, 1746
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 111rv
Partial copy, 1 p. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 49r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 401–402; *Euler-Goldbach* (1965), p. 263

112
Euler to Goldbach
Berlin, November 29th, 1746

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats*-Rath

Wegen der an Ewr. Hochwohlgeb. von hier abgeschickten Bücher ist der H. *Haude* nicht wenig bekümmert,[1] und H. *Hainchelin* allhier hat auf sich genommen sich deswegen zu erkundigen. Inzwischen ligen hier wiedrum einige Bücher fertig um an Ewr. Hochwohlgeb. mit der ersten Gelegenheit versandt zu werden; darunter befindet sich die *Analyse des infiniment petits*,[2] so der H. *Haude* erst nach Versendung der ersteren *Partie* bekommen; wozu ich auch ein *Exemplar* von meinen hier besonders gedruckten *Pieces*[3] habe legen lassen. Wenn der Knäß *Tscherbattoff* hierdurch reiset,[4] werden wir trachten Demselben diese Bücher mit zu geben. H. *Bousque*t hat mir versprochen, daß diesen Winter meine *Introductio in Analysin infinitorum* auch gewiß fertig werden soll.[5] Sonsten sind dieses Jahr in Frankreich einige herrliche Bücher herausgekommen, als *Traité du Navire par M.^{r} Bouguer*, worinn das meiste was ich über diese *Materi*e zuerst entdecket zu haben geglaubet, befindet.[6] Hernach *Introduction dans l'Astronomie par M.^{r} le Monnier*, worinn die neuesten Merkwürdigen Entdekungen in dieser Wissenschafft ausgeführet sind.[7] Ich hoffe auch nächstens allhier meine neue *Theoriam motus Lunae* unter die Presse geben zu können,[8] und glaube dieselbe so weit gebracht zu haben daß man durch Hülfe meiner daraus verfertigten *Tabularum* den *Locum Lunae* jederzeit so genau bestimmen kan, daß der Fehler niemals über 100 *Secunden* austrägt; da nach den *Cassiniani*schen *Tabell*en der Fehler sich bißweilen auf 15′, nach den besten englischen aber auf 6′ belauffen kan.[9]

Ich werde jetz auch anfangen neue *Tabulas motus Saturni* zu verfertigen, nachdem ich die *perturbationem a Jove oriundam* bestimmet:[10] dieses ist um so viel nöthiger, da *M.^{r} le Monnier* in dem obangeführten Werk beme[rket] daß der *locus ♄ computatus* nach den besten *Tabell*en bißweilen um einen halben *Grad a loco observato differi*re.

Der H. *Baron* von *Mar*denfeld[11] ist hier glücklich angekommen, und Ihro *Majestä*t der König hat Ihm eine jährliche *Pension* von 5000 Rthl. *accordir*t.

Daß man vermittelst der *Seriei*

$$\frac{1}{t-u}=\frac{1}{t}+\frac{u}{t\,(t+a)}+\frac{u\,(u+a)}{t\,(t+a)\,(t+b)}+etc.$$

eine *seriem* angeben kan, deren *summa data*, und *termini quotvis ab initio* gleichfalls *dati* sind,[12] scheinet freylich dem ersten Anblick nach sehr merkwürdig zu seyn: wann man aber bedenket, daß die daher entstehende *series* nicht *regulär* seyn werde, so lässt sich eben dieses auf unendlich viel andere manieren gleichfalls bewerkstelligen. Als ich wollte eine *seriem* geben deren *summ* $= S$, und deren 6 erste *Termini* seyn sollen $a+b+c+d+e+f$; so suche ich eine *seriem quamcunque*, deren *summ* $= S$; solche sey $S = A+B+C+D+E+$ *etc.*: her[nach] wird seyn

$$\begin{aligned} S \;=\; & \overset{1}{a}+\overset{2}{b}+\overset{3}{c}+\overset{4}{d}+\overset{5}{e}+\overset{6}{f}+\overset{7}{(A-a)}+\overset{8}{(B-b)}+\overset{9}{(C-c)}+\overset{10}{(D-d)}\\ & +\overset{11}{(E-e)}+\overset{12}{(F-f)}+\overset{13}{G}+\overset{14}{H}+[etc.]\end{aligned}$$

Was die andere Eigenschafft der angeführten *Seriei* betrifft, daß man aus derselben von unzehlich viel *seriebus* beweisen kan, daß ihre *summ* unendlich groß sey, scheint ebenfalls sehr merkwürdig zu seyn; allein bey der Würklichen *Application* kommt man immer auf solche *Series*, wo die Sach vor sich selbst klar vor Augen ligt. Dann wann die *series*

$$\frac{1}{t-u}=\frac{1}{t}+\frac{u}{t\,(t+a)}+\frac{u\,(u+a)}{t\,(t+a)\,(t+b)}+etc.$$

wahr ist, so muß der *Terminus infinitesimus*

$$\frac{u\,(u+a)\,(u+b)\,(u+c)\,(u+d)\ \textit{etc.}}{t\,(t+a)\,(t+b)\,(t+c)\,(t+d)\ \textit{etc.}}$$

gleich 0 seyn, welches geschieht wann

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\textit{etc.}=\infty.$$

Vergleicht man nun diese *seriem* mit einer vorgelegten *serie*

$$S=A+B+C+D+E+F+\ \textit{etc.}$$

so wird $t=\dfrac{1}{A}$; $u=\dfrac{S-A}{AS}$; und ferner

$$a=\frac{1}{B}-\frac{1}{A}-\frac{A}{BS};\quad b=\frac{1}{C}-\frac{1}{A}-\frac{(A+B)}{CS};\quad c=\frac{1}{D}-\frac{1}{A}-\frac{(A+B+C)}{DS},\quad \textit{etc.};$$

folglich wird $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}+\textit{etc.}$

$$=\frac{ABS}{A\,(S-A)-BS}+\frac{ACS}{A\,(S-A-B)-CS}+\frac{ADS}{A\,(S-A-B-C)-DS}$$
$$+\frac{AES}{A\,(S-A-B-C-D)-ES}+\ \textit{etc.}$$

Wann nun die *summa seriei vera* so ist $S-A-B-C-D-\textit{etc.}=0$ und werden folglich hier alle *termini infinitesimi*[13] $=\dfrac{AZS}{A\cdot 0-ZS}=-A$ folglich alle *finitae magnitudinis*. Dieses erhellet noch deutlicher aus der *form*

$$\frac{u\,(u+a)\,(u+b)\,(u+c)\ \textit{etc.}}{t\,(t+a)\,(t+b)\,(t+c)\ \textit{etc.}}$$

welche bey dieser *Application* wird

$$\frac{S-A}{S}\cdot\frac{S-A-B}{S-A}\cdot\frac{S-A-B-C}{S-A-B}\cdot\frac{S-A-B-C-D}{S-A-B-C}\cdot\ \textit{etc.}$$

und folglich wird der Werth *continuatione in infinitum instituta*

$$=\frac{S-A-B-C-D-E-\ \textit{etc.}}{S}$$

welcher augenscheinlich im Fall die *summa* wahr ist, gleich wird $=0$.

Es ist ein *Mathematicus* in Ost Frießland Nahmens *Jacobus Adami* welcher mich neulich um die *Interpolationem hujus seriei* gefraget[14]

$$x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\frac{62}{2835}x^9+\textit{etc.}=s$$

welche *series* die *tangentem arcui x respondentem exprimit*, und entsteht *ex conversione hujus seriei*

$$x = s - \frac{1}{3}s^3 + \frac{1}{5}s^5 - \frac{1}{7}s^7 + \frac{1}{9}s^9 - etc.$$

Ich habe ihm darauf geantwortet daß der *Terminus medius inter primum x et secundum* $\frac{1}{3}x^3$ sey

$$= \frac{16}{\pi^3}x^2 \left(1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} + etc.\right).$$

Hernach ist der *terminus medius inter secundum* $\frac{1}{3}x^3$ *et tertium* $\frac{2}{15}x^5$

$$= \frac{64}{\pi^5}x^4 \left(1 + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} + \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} + etc.\right).$$

Ferner ist der *terminus medius inter tertium* $\frac{2}{15}x^5$ *et quartum* $\frac{17}{315}x^{[7]}$

$$= \frac{256}{\pi^7}x^6 \left(1 + \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} + \frac{1}{7^7} + \frac{1}{9^7} + etc.\right).$$

Meine gantze *Famille* empfehlet sich nebst mir zu Ewr. Hochwohlgeb. beständiger Gewogenheit, und ich verbleibe mit der schuldigsten Hochachtung

Eur. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 29[ten] *Nov.*
1746.

R 826 Reply to nº 111
Berlin, November 29th, 1746
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 187–188r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 403–406; *Euler-Goldbach* (1965), p. 263–265

113
Euler to Goldbach
Berlin, April 1st, 1747

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats*-Rath

Daß Ewr. Hochwohlgeb. mich schon so geraume Zeit mit Dero Zuschrifft nicht beehret, schreibe ich vielmehr Dero überhäufften Geschäfften als einem von mir unwissend begangenen Versehen zu, wodurch ich mich Dero Gewogenheit unwürdig gemachet hätte. Zum wenigsten wünsche ich von Grund meines Herzens, daß Ew. Hochwohlgeb. durch keine Unpäßlichkeit davon möchten abgehalten worden seyn.

Ich nehme allso die Freyheit Ewr. Hochwohlgb. zu berichten, daß sich endlich bey der Abreise des H. Grafen von Finkenstein[1] die schon längst gesuchte Gelegenheit gefunden, Denselben die bißher noch zurückgebliebenen zwey Bücher, nach beyligender *Specification* zu überschicken,[2] welche Ewr. Hochwohlgeb. entweder schon werden empfangen haben, oder doch nächstens empfangen werden.

Letstens habe ich eine sehr wunderbahre Ordnung in den Zahlen, welche die *summas divisorum* der *numerorum naturalium* darstellen entdecket, welche mir um so viel merkwürdiger vorkam, da hierinn eine grosse Verknüpfung mit der Ordnung der *numerorum primorum* zu steken scheint.[3] Dahero bitte Ewr. Hochwohlgb. diesen Einfall einiger Aufmerksamkeit zu würdigen.

Wann n einen *numerum quemcunque integrum affirmativum* bedeutet, so soll $\mathbf{S}\,n$ die *summam omnium divisorum hujus numeri n* anzeigen. Allso wird seyn

$$
\begin{array}{ll}
\mathbf{S}\,1 = 1 & \mathbf{S}\,9 = 1+3+9 = 13 \\
\mathbf{S}\,2 = 1+2 = 3 & \mathbf{S}\,10 = 1+2+5+10 = 18 \\
\mathbf{S}\,3 = 1+3 = 4 & \mathbf{S}\,11 = 1+11 = 12 \\
\mathbf{S}\,4 = 1+2+4 = 7 & \mathbf{S}\,12 = 1+2+3+4+6+12 = 28 \\
\mathbf{S}\,5 = 1+5 = 6 & \mathbf{S}\,13 = 1+13 = 14 \\
\mathbf{S}\,6 = 1+2+3+6 = 12 & \mathbf{S}\,14 = 1+2+7+14 = 24 \\
\mathbf{S}\,7 = 1+7 = 8 & \mathbf{S}\,15 = 1+3+5+15 = 24 \\
\mathbf{S}\,8 = 1+2+4+8 = 15 & \mathbf{S}\,16 = 1+2+4+8+16 = 31 \\
 & \qquad\qquad \textit{etc.}
\end{array}
$$

Diese Bedeutung des Zeichens $\mathbf{S}$ vorausgesetzt, so habe ich gefunden daß

$$
\begin{aligned}
\mathbf{S}\,n = \mathbf{S}\,(n-1) \quad &+ \quad \mathbf{S}\,(n-2) - \mathbf{S}\,(n-5) - \mathbf{S}\,(n-7) + \mathbf{S}\,(n-12) \\
&+ \quad \mathbf{S}\,(n-15) - \mathbf{S}\,(n-22) - \mathbf{S}\,(n-26) \ \ [+\,\textit{etc.}]
\end{aligned}
$$

wo immer 2 Zeichen + und − auf einander folgen. Die Ordnung der abzuziehenden Zahlen 1, 2, 5, 7, 12, 15 *etc.* fällt aus ihren *Differentz*en wann dieselben *alternatim* betrachtet werden so gleich in die Augen, als

$$\begin{array}{lcccccccccccccccccc} & 1, & & 2, & & 5, & & 7, & & 12, & & 15, & & 22, & & 26, & & 35, \\ \textit{diff}\,[\textit{erentiae}] & & 1, & & 3, & & 2, & & 5, & & 3, & & 7, & & 4, & & 9, \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc} & 40, & & 51, & & 57, & & 70, & & 77, & & 92, & & 100, & & 117, & & 126, & [\textit{etc.}] \\ 5, & & 11, & & 6, & & 13, & & 7, & & 15, & & 8, & & 17, & & 9, & \end{array}$$

Ferner ist zu merken, daß man in einem jeglichen Fall nicht mehr *terminos* nehmen müsse, als biß man *ad numeros negativos* komme; und wann ein solcher *terminus* $\mathbf{S}\,0$ vorkommt, so muß darfür die vorgegebene Zahl n selbst geschrieben werden: allso daß *in quovis casu* $\mathbf{S}\,0 = n$. Folgende *Exempel* werden zu Erläuterung der Wahrheit dieses *Theorematis* dienen:

$$\begin{array}{rllll} & \text{Wann} & \text{so wird} & & \\ 1. & n = 1; & \mathbf{S}\,1 = \mathbf{S}\,0 & & = 1 \\ 2. & n = 2; & \mathbf{S}\,2 = \mathbf{S}\,1 + \mathbf{S}\,0 & = 1 + 2 & = 3 \\ 3. & n = 3; & \mathbf{S}\,3 = \mathbf{S}\,2 + \mathbf{S}\,1 & = 3 + 1 & = 4 \\ 4. & n = 4; & \mathbf{S}\,4 = \mathbf{S}\,3 + \mathbf{S}\,2 & = 4 + 3 & = 7 \\ 5. & n = 5; & \mathbf{S}\,5 = \mathbf{S}\,4 + \mathbf{S}\,3 - \mathbf{S}\,0 & = 7 + 4 - 5 & = 6 \\ 6. & n = 6; & \mathbf{S}\,6 = \mathbf{S}\,5 + \mathbf{S}\,4 - \mathbf{S}\,1 & = 6 + 7 - 1 & = 12 \\ 7. & n = 7; & \mathbf{S}\,7 = \mathbf{S}\,6 + \mathbf{S}\,5 - \mathbf{S}\,2 - \mathbf{S}\,0 & = 12 + 6 - 3 - 7 & = 8 \\ 8. & n = 8; & \mathbf{S}\,8 = \mathbf{S}\,7 + \mathbf{S}\,6 - \mathbf{S}\,3 - \mathbf{S}\,1 & = 8 + 12 - 4 - 1 & = 15 \\ 9. & n = 9; & \mathbf{S}\,9 = \mathbf{S}\,8 + \mathbf{S}\,7 - \mathbf{S}\,4 - \mathbf{S}\,2 & = 15 + 8 - 7 - 3 & = 13 \\ 10. & n = 10; & \mathbf{S}\,10 = \mathbf{S}\,9 + \mathbf{S}\,8 - \mathbf{S}\,5 - \mathbf{S}\,3 & = 13 + 15 - 6 - 4 & = 18 \\ 11. & n = 11; & \mathbf{S}\,11 = \mathbf{S}\,10 + \mathbf{S}\,9 - \mathbf{S}\,6 - \mathbf{S}\,4 & = 18 + 13 - 12 - 7 & = 12 \\ 12. & n = 12; & \mathbf{S}\,12 = \mathbf{S}\,11 + \mathbf{S}\,10 - \mathbf{S}\,7 - \mathbf{S}\,5 + \mathbf{S}\,0 & = 12 + 18 - 8 - 6 + 12 & = 28 \\ & & \quad\textit{etc.} & & \end{array}$$

Der Grund dieser Ordnung fällt um so viel weniger in die Augen, da man nicht sieht, was die Zahlen 1, 2, 5, 7, 12, 15 *etc.* für eine Verwandtschafft mit der *natura divisorum* haben. Ich kan mich auch nicht rühmen, daß ich davon eine *demonstrationem rigorosam* hätte; wann ich aber auch gar keine hätte, so würde man an der Wahrheit doch nicht zweifeln können, weil biß über 300 diese Regel immer eingetroffen. Inzwischen habe ich doch dieses *theorema* aus folgendem Satz richtig hergeleitet: Wann

$$s = (1-x)\left(1-x^2\right)\left(1-x^3\right)\left(1-x^4\right)\left(1-x^5\right)\left(1-x^6\right)\left(1-x^7\right) \textit{ etc. in infinitum}$$

so ist auch

$$s = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} + \textit{etc.}$$

wo die *exponentes* des x eben diejenigen Zahlen sind, welche oben vorgekommen; und wann dieser Satz seine Richtigkeit hat, wie ich nicht zweifle, ungeacht mir hier eine *demonstratio rigorosa* fehlt, so ist auch das angeführte *Theorema* völlig gegründet. Dann aus dem doppelten Werth von s bekomme ich erstlich

$$\frac{ds}{s} = -\frac{dx}{1-x} - \frac{2x\,dx}{1-x^2} - \frac{3x^2dx}{1-x^3} - \frac{4x^3dx}{1-x^4} - \frac{5x^4dx}{1-x^5} - \textit{etc.}$$

und dann

$$\frac{ds}{s} = \frac{-\,dx - 2x\,dx + 5x^4dx + 7x^6dx - 12x^{11}dx - 15x^{14}dx + etc.}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + etc.};$$

folglich ist

$$\begin{aligned} &\frac{1 + 2x - 5x^4 - 7x^6 + 12x^{11} + 15x^{14} - etc.}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + etc.} \\ = \;& \frac{1}{1-x} + \frac{2x}{1-x^2} + \frac{3x^2}{1-x^3} + \frac{4x^3}{1-x^4} + \frac{5x^4}{1-x^5} + \frac{6x^5}{1-x^6} + etc. \end{aligned}$$

Wann aber alle diese letsten Brüche *in progressiones geometricas* verwandelt werden, so bekommt man für dieselben

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
1+ & x+ & x^2+ & x^3+ & x^4+ & x^5+ & x^6+ & x^7+ & x^8+ & x^9+ & x^{10}+ & x^{11}+ & x^{12} & +\ etc. \\
 & +2x & & +2x^3 & & +2x^5 & & +2x^7 & & +\ 2x^9 & & +\ 2x^{11} & & \\
 & & +3x^2 & & & +3x^5 & & & +3x^8 & & & +\ 3x^{11} & & \\
 & & & +4x^3 & & & & +4x^7 & & & & +\ 4x^{11} & & \\
 & & & & +5x^4 & & & & & +\ 5x^9 & & & & \\
 & & & & & +6x^5 & & & & & & +\ 6x^{11} & & \\
 & & & & & & +7x^6 & & & & & & & \\
 & & & & & & & +8x^7 & +9x^8 & +10x^9 & +11x^{10} & +12x^{11} & +13x^{12} & +\ [etc.] \\
\hline
\end{array}$$

das ist:

$$1 + \mathbf{S}\,2 \cdot x + \mathbf{S}\,3 \cdot x^2 + \mathbf{S}\,4 \cdot x^3 + \mathbf{S}\,5 \cdot x^4 + \mathbf{S}\,6 \cdot x^5 + \mathbf{S}\,7 \cdot x^6 + \mathbf{S}\,8 \cdot x^7 + \mathbf{S}\,9 \cdot x^8 + etc.$$

$$= \frac{1 + 2x - 5x^4 - 7x^6 + 12x^{11} + 15x^{14} - 22x^{21} - 26x^{25} + 35x^{34} + etc.}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - etc.},$$

woraus das gegebene *Theorema* leicht fliesst; man sieht aber zugleich daß dasselbe nicht so *obvium* ist, und daß zweifels ohne darinn noch schöne Sachen verborgen liegen müssen.

Hiemit empfehle ich mich nun gehorsamst in Ewr. Hochwohlgeb. beständige hochgeschätzte Gunst und Gewogenheit, der ich mit der vollkommensten Hochachtung bin

Ewr. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
Leonh. Euler

Berlin den 1 *April*
1747.

R 827 Berlin, April 1st, 1747
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 199–200v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 407–410; *Euler-Goldbach* (1965), p. 266–268

114
Goldbach to Euler
Petersburg, April (4th) 15th, 1747

Hochedelgebohrner Herr
Insonders Hochgeehrter Herr *Professor*

Die einige Ursache warum ich in etlichen Monaten an Ew. HochEdelg. nicht geschrieben habe, ist diese, daß mir binnen solcherZeit nichts eingefallen so ich Deroselben zu berichten werth geachtet hätte. Indessen bin ich Eurer Hochedelg. so wohl für Dero an mich abgelassenes damaliges Schreiben als für das letzte vom 1. *April.* höchst verbunden und dancke dienstl[ich] für die übersandten zwey Bücher,[1] das Geld soll an denjenigen welcher mir dieselbe abgeben wird, alsofort ausgezahlet werden; die *observation*, welche Ew. H. mir *communicir*et haben[2] scheinet mir bereits durch die angeführte *induction* dermassen erwiesen, daß man auf deren Wahrheit hundert gegen eins halten könnte. Sonst haben E. H. schon längst angemercket[3] daß

$$\begin{array}{rll} & A & \ldots\ (1-x)\left(1-x^2\right)\left(1-x^3\right)\left(1-x^4\right)\ \&c. \\ = & B & \ldots\ 1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+\&c. \end{array}$$

und ich erinnere mich daß ich daraus die an sich selbst sehr leichte *consequence* gezogen, daß wann die *potestates ipsius* x in B verdoppelt werden, und

$$C = 1-x^2-x^4+x^{10}+x^{14}-x^{24}-x^{30}+\&c.$$

gesetzt wird, alsdann[4]

$$\frac{C}{B} = (1-x)\left(1-x^3\right)\left(1-x^5\right)\left(1-x^7\right)\ \&c.$$

seyn muß.

Von der Wahrheit eines andern *Theorematis* bin ich bey weitem nicht so *persuadir*et, nemlich daß eine jede Zahl aus dreyen *trigonalibus* bestehet oder daß ein jeder *numerus huius formae* $8m+3$ eine *summa trium quadratorum* sey.[5] E. H. haben mir schon vor einigen Jahren, wann ich mich recht erinnere, gesaget, daß *Fermatius* selbiges seinem Berichte nach, *demonstrir*en können; zu dergleichen *demonstration* aber halte ich die *inductiones* für unzulänglich weil man unzehliche Exempel *pro valoribus m* angeben kan die zwar zutreffen, allein zur *generalität* des Satzes nichts *contribuir*en (als *e*[*xempli*] *gr*[*atia*] wann m diese form hat: b^2+bc+c^2);[6] wann man aber nur beweisen könnte daß $(2p-1)^2+42$ allezeit eine *summa trium quadratorum* sey (ich habe es nur biß auf den *casum* $p=17$ *probir*et) so hielte ich davor daß zur völligen *demonstration* des *Theorematis* ein guter Anfang gemacht seyn würde; indessen sehe ich nicht wie man es *demonstrir*en will ohne zugleich eine *methode* zu finden wodurch die *tria quadrata* selbst angegeben werden können. Aber zu beweisen daß ein jeder *numerus* aus dreyen *trigonalibus uno affirmativo et duobus negativis* bestehet, ist bey weitem nicht so schwer.[7]

Beyliegenden Aufsatz von einigen *Tractät*chen habe die freyheit genommen Eurer HochEdelg. zu ubersenden[8] mit Bitte solchen an Hn *Haude* zu schicken wann es demselben nicht zuwider ist dergleichen Kleinigkeiten zu besorgen. Das *paquet* kan, im fall sich sonst keine bequeme Gelegenheit ereignet, künfftigen Sommer mit den Schiffen von Lübeck anhero gesandt werden.

Aus den Zeitungen von Gel[ehrten] S[achen] ist zu ersehen daß ein gewisser H. Mizler über Eurer HochEdelg. Buch von der Musick anmerckungen gemacht,[9] weil mir dieselben gantz unbekannt sind, so bitte mir nur mit ein paar Worten zu melden was Sie davon halten. Die neue *Logic* des Hn *Knutzen*, die ich auch noch nicht gesehen habe, wird in den Gel[ehrten] Z[eitungen] sehr gerühmet.[10] Ich verharre mit vieler Hochachtung

Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.^{t} Petersbourg
den 15. *Apr.* 1747.

R 828 Reply to nº 112 and nº 113
Petersburg, April (4th) 15th, 1747
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 112–113v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 411–412; *Euler-Goldbach* (1965), p. 269

115
Euler to Goldbach
Berlin, May 6th, 1747

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats*-Rath

Die Bücher welche Ewr. Hochwohlgeb. verlangen, wird der H. *Haude* mit nächstem zu übersenden nicht ermangeln.[1] Der Anmerkung welche Ew. Hochwohlgeb. über die Gleichheit

$$A \ldots\ (1-x)\left(1-x^2\right)\left(1-x^3\right)\left(1-x^4\right)\ etc. = B\ \ldots\ 1-x-x^2+x^5+x^7-etc.$$

gemachet,[2] daß wann

$$C = 1-x^2-x^4+x^{10}+x^{14}-x^{24}-x^{30}+etc.$$

alsdann sey:[3]

$$\frac{C}{B} = (1-x)\left(1-x^3\right)\left(1-x^5\right)\ etc.$$

erinnere ich mich noch wohl; ich habe aber weder daraus noch aus andern Betrachtungen die Gleichheit zwischen den *Formul*n A und B richtig darthun können; dann daß $A = B$, und daß in B die *exponent*en von x just nach dieser *serie* 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40 *etc.* fortgehen, habe ich auch nur *per inductionem* geschlossen, welche ich zwar so weit fortgesetzet, daß ich die Sach für völlig wahr halten kan. Allein ich wäre sehr begierig davon eine *demonstrationem directam* zu sehen, welche gewiß zu Entdeckung vieler andern herrlichen Eigenschafften der Zahlen den Weg bahnen würde: bißher ist aber alle meine darauf angewandte Mühe umsonst gewesen.[4] Gleichfalls habe ich bißher auch nicht das gemeldte *Theorema Fermatianum*,[5] daß eine jede Zahl eine *summa trium trigonalium* sey, *demonstri*ren können, welches freylich darauf beruhet, daß eine jede Zahl von dieser *Form* $8m+3$ in drey *quadrata* zertheilet werden könne. Ich habe aber dieses *Theorema* auf folgendes gebracht:

Proposito numero quocunque m, ab eo semper ejusmodi numerum trigonalem subtrahere licet, ut residui quadruplum unitate auctum sit numerus primus.[6]

Wenn dieses bewiesen werden könnte, so wäre auch jenes ausser Zweifel gesetzt. Von diesem aber will ich der Deutlichkeit halben etliche *Exemp*el hersetzen.

$m - trig[onali]$	$resid[uum]$	$4 \cdot Res[iduum] + 1$	
$1-0$	1	5	*pr[imus]*
$1-1$	0	1	*pr[imus]*
$2-0$	2	9	*n[on] pr[imus]*
$2-1$	1	5	*pr[imus]*
$3-0$	3	13	*pr[imus]*
$3-1$	2	9	*n[on] pr[imus]*
$3-3$	0	1	*pr[imus]*
$4-0$	4	17	*pr[imus]*
$4-1$	3	13	*pr[imus]*
$4-3$	1	5	*pr[imus]*
$5-0$	5	21	*n[on] pr[imus]*
$5-1$	4	17	*pr[imus]*
$5-3$	2	9	*n[on] pr[imus]*
$6-0$	6	25	*n[on] pr[imus]*
$6-1$	5	21	*n[on] pr[imus]*
$6-3$	3	13	*pr[imus]*
$6-6$	0	1	*pr[imus]*
$7-0$	7	29	*pr[imus]*
$7-1$	6	25	*n[on] pr[imus]*
$7-3$	4	17	*pr[imus]*
$7-6$	1	5	*pr[imus]*

$m-trig[onali]$	$resid[uum]$	$4\cdot Res[iduum]+1$	
$8-0$	8	33	$\underline{n[on]\ pr[imus]}$
$8-1$	7	29	$pr[imus]$
$8-3$	5	21	$\underline{n[on]\ pr[imus]}$
$8-6$	2	9	$\underline{n[on]\ pr[imus]}$
$9-0$	9	37	$pr[imus]$
$9-1$	8	33	$\underline{n[on]\ pr[imus]}$
$9-3$	6	25	$\underline{n[on]\ pr[imus]}$
$9-6$	3	13	$pr[imus]$

Bißher triffts immer zu, daß zum wenigsten ein *numerus primus* heraus kommt: und da in grössern Zahlen immer mehr *casus* vorkommen, so ist sehr wahrscheinlich, daß sich unter denselben immer zum wenigsten 1 *primus* befinde, oder doch ein solcher *compositus*, der ein *quadrat*, oder in 2 *quadrata resolubel* ist.[7]

Es ist auch eben zur *Demonstration* des ersteren nicht nöthig daß bey dem letsteren sich unter den 4 *resid.* $+1$ ein *numerus primus* befinde; wann darunter nur entweder ein *quadratum* vorkommt, oder eine Zahl *per nullum hujusmodi numerum* $4p-1$ *divisibilis*, so kan daraus die *Demonstration* des erstern hergeleitet werden. Der Grund davon beruhet hierauf: ich kan nun beweisen daß:

I. *omnem numerum primum hujus formae* $4n+1$ *esse summam duorum quadratorum.*

II. *Omnem quoque numerum non primum formae* $4n+1$, *dummodo nullum habeat divisorem formae* $4p-1$, *esse summam duorum quadratorum.*

Es sey allso $4n+1$ *vel primus, vel saltem non habens divisorem formae* $4p-1$, so ist $4n+1$ und folglich auch *ejus duplum* $8n+2$ *summa duorum quadratorum.* Wann allso $8m+3 = 8n+2+aa$, so ist $8m+3$ *in tria quadrata resolubel*; es wird allso $8m+1 = 8n+aa$; man setze $a = 2x+1$ so wird $8m = 8n+4xx+4x$ und $n = m-\frac{1}{2}(xx+x)$. *Denotante ergo m numerum quemcunque*, wann man nur immer von m einen solchen *numerum trigonalem subtrahi*ren kan, daß der *rest* 4 mal genommen $+1$ keinen *divisorem formae* $4p-1$ hat, so kan $8m+3$ in 3 *quadrata resolvir*t werden. Daß aber eine jede *Prim*Zahl von dieser *Form* $4n+1$ allzeit eine *summa duorum quadratorum* sey: darfür habe nach langer Mühe endlich folgende *Demonstration* gefunden, welche sich auf verschiedene *praeliminar* Sätz gründet, so zwar gemeiniglich für wahr angenommen werden, wovon ich doch gleichwohl noch keine gültige *Demonstration* gesehen, und allso diese zu suchen nöthig gehabt habe.[8]

Theor[ema] 1. Productum ex duobus numeris, quorum uterque est summa duorum quadratorum, est quoque summa duorum quadratorum.

Dem[onstratio]: *Sint* $aa+bb$ *et* $cc+dd$ *duo numeri propositi erit productum*

$$\begin{aligned} aacc+aadd+bbcc+bbdd &= (ac+bd)^2+(ad-bc)^2 \\ &= (ac-bd)^2+(ad+bc)^2\,, \end{aligned}$$

ergo duplici modo summa duorum quadratorum.

Diese Demonstration ist zwar gemein, nicht aber die folgenden.

Theor[ema] 2. Si summa duorum quadratorum $aa+bb$ (*existentibus* a *et* b *numeris inter se primis*) *fuerit divisibilis per numerum primum formae* $pp+qq$, *tum etiam quotus ex divisione resultans erit summa duorum quadratorum.*

(Dieses *Theor[ema]* folget nicht aus dem vorigen nothwendig, dann man würde sich betrügen wann man hieraus: *productum ex duobus numeris paribus est numerus par*, schliessen wollte: *Ergo si numerus par fuerit divisibilis per numerum parem, quotus quoque erit numerus par.* Wie kan man nun wissen, daß diese Art zu schliessen hier richtig ist? Daher ist meines Erachtens folgende *Demonstration* nöthig.)

Dem[onstratio]: *Quia* $aa+bb$ *est divis[ibile] per* $pp+qq$, *erit quoque* $(aa+bb)\,pp = aapp+bbpp$ *divisibile, at* $aa\,(pp+qq)$ *quoque est divisib[ile] per* $pp+qq$, *ergo etiam differentia* $bbpp-aaqq$ *hoc est* $(bp+aq)\,(bp-aq)$ *erit per* $pp+qq$ *divisib[ile]. Hinc ob* $pp+qq$ *numerum primum, erit vel* $bp+aq$ *vel* $bp-aq$ *divisibile per* $pp+qq$; *sit ergo* $bp\mp aq = mpp+mqq$, *fietque* $b = mp+\dfrac{mqq\pm aq}{p}$.

Cum igitur $mqq\pm aq$ *per* p *divisibile esse debeat, at* q *et* p *sint necessario numeri inter se primi* (*alioquin* $pp+qq$ *non foret primus*), *necesse est ut* $mq\pm a$ *divis[ibile] sit per* p: *fiat ergo* $mq\pm a = np$ *erit* $\pm a = np-mq$ *et* $b = mp+nq$. *His autem valoribus substitutis prodit* $aa+bb = (mm+nn)\,(pp+qq)$ *et* $\dfrac{aa+bb}{pp+qq}$ $= mm+nn$. *Q. E. D.*

Theor[ema] 3. Si summa duorum quadratorum $aa+bb$ (a *et* b *existentibus perpetuo numeris inter se primis*) *divisibilis esset per numerum* x, *qui non sit summa duorum quadratorum, tum quotus vel non erit summa duorum quadratorum vel certe factorem haberet, qui non erit summa duorum quadratorum.*

Dem[onstratio]: *Sit quotus* z *et ob* $\dfrac{aa+bb}{x} = z$ *erit* $\dfrac{aa+bb}{z} = x$. *Jam si* z *esset primus formae* $pp+qq$, *tum quoque* x *foret ejusdem formae contra hyp[othesin]; si* z *esset productum ex pluribus hujusmodi primis* $(pp+qq)\,(rr+ss)\,(tt+uu)$, *tum ob* $\dfrac{aa+bb}{pp+qq} = cc+dd$; $\dfrac{cc+dd}{rr+ss} = ee+ff$; *et* $\dfrac{ee+ff}{tt+uu} = gg+hh = \dfrac{aa+bb}{z}$ *foret quoque* $x = gg+hh$ *contra hyp[othesin]: Quare quotus* z *neque primus erit formae* $pp+qq$, *neque productum ex aliquot ejusmodi primis; ideoque necessario vel* z *non erit summa duorum quadratorum vel factorem habebit, qui non erit summa duorum quadratorum. Q. E. D.*

Theor[ema] 4. Summa duorum quadratorum inter se primorum $aa+bb$ *dividi nequit per ullum* x *qui non ipse sit summa duorum quadratorum.*

Dem[onstratio]: *Ponamus* x *non esse summam duorum quadratorum, sitque* $a = mx\pm c$; $b = nx\pm d$, *semperque* m *et* n *ita capi poterunt ut fiat* $c < \frac{1}{2}x$ *et* $d < \frac{1}{2}x$. *Cum autem* $aa+bb$ *ponatur divisibile per* x *erit quoque* $cc+dd$ *per* x *divisibile: et quia* $cc+dd < \frac{1}{2}xx$, *quotus erit* $< \frac{1}{2}x$ *ideoque dabitur numerus* z *non summa* $2\,\square$, *per quem* $cc+dd$ *quoque erit divisibilis* (*Theor[ema] 3*). *Sit* *iterum* $c = mz \pm e$ *et* $d = nz \pm f$, *erit* $e < \frac{1}{2}z$ *et* $f < \frac{1}{2}z$: *ideoque* $ee + ff < \frac{1}{2}zz$ *divisib*[*ile*] *per* z: *unde quotus (per quem* $ee + ff$ *itidem divisibile existit)* $< \frac{1}{2}z$, *qui vel ipse erit* <u>*non-summa*</u> *duorum quadratorum vel ejusmodi habebit factorem. Dabitur ergo* <u>*non-summa* $2\,\square$</u> $< \frac{1}{2}z$ *divisor ipsius* $ee + ff < \frac{1}{2}zz$, *sicque tandem deveniretur ad numerum* <u>*non-summam* $2\,\square$</u> *minimum puta* 3, *qui foret divisor summae duorum quadratorum* $gg + hh < \frac{1}{2}g$: *quod cum sit absurdum, sequitur summam duorum quadratorum* $aa + bb$ *nullum admittere divisorem* x, *qui non sit ipse summa duorum quadratorum. Q. E. D.*

Coroll[*arium*] *1. Omnis ergo divisor summae duorum quadratorum inter se primorum ipse est summa duorum quadratorum: loquor autem de ejusmodi summis duorum quadratorum* $aa + bb$, *quorum radices* a *et* b *sunt numeri inter se primi, nam si esset v*[*erbi*] *gr*[*atia*] $a = mx$ *et* $b = nx$, *tum* $aa + bb$ *utique per quemvis numerum* x *divisibilis esse posset.*

Coroll[*arium*] *2. Qui ergo numerus* x *in integris non est summa duorum quadratorum, idem n*[*eque*] *in fractis poterit esse summa duorum quadratorum; sit enim* $x = \dfrac{pp}{qq} + \dfrac{rr}{ss} = \dfrac{ppss + qq[rr]}{qqss}$, *foret* $qqss = \dfrac{ppss + qqrr}{x}$: *ideoque* x *divisor summae duorum quadratorum* $ppss + qqrr$, [*ergo*] x *quoque esse debet summa duorum quadratorum in integris.*

Hievon hatte ich lange Zeit eine *demonstration* umsonst gesucht, aber diese erst neulich gef[unden,] welche wie ich glaube zu vielen andern Sachen führen kan.

Theor[*ema*] *5. Si* $4n+1$ *fuerit numerus primus, tum certo erit summa duorum quadra*[*torum.*]

Demonst[*ratio*]: *Si enim* $4n + 1$ *sit numerus primus, demonstravi hanc formulam* $a^{4n} - b^{4n}$ *quicunque numeri pro* a *et* b *ponantur semper fore divisibilem per* $4n + 1$. *Erit ergo vel* $a^{2n} + b^{2n}$ *vel* $a^{2n} - b^{2n}$ *per* $4n + 1$ *divisib*[*ile*]. *At semper innumeri dantur casus quibus formula* $a^{2n} - b^{2n}$ *non est divisibilis per* $4n + 1$;[9] *iis ergo casibus haec formula* $a^{2n} + [b^{2n}]$ *erit per* $4n + 1$ *divisibilis. At* $a^{2n} + b^{2n}$ *est summa duorum quadratorum, ergo etiam quivis ejus divisor* $4n + 1$. *Q. E. D.*

Theor[*ema*] *6. Qui numerus a duplici modo est summa duorum quadratorum, ille non est prim*[*us.*]

Dem[*onstratio*]: *Sit enim* $a = pp+qq = rr+ss$, *ponatur* $p = r+x$ *et* $q = s-y$, *erit*

$$pp + qq = rr + 2rx + xx + ss - 2sy + yy = rr + ss$$

ergo $2sy = xx + yy + 2rx$ *et* $s = \dfrac{xx + yy + 2rx}{2y}$; *hinc*

$$\begin{aligned} a = rr + ss \quad &= \quad \frac{(xx+yy)^2 + 4rx\,(xx+yy) + 4rrxx}{4yy} + rr \\ &= \quad \frac{(xx+yy)\,(xx+yy+4rx+4rr)}{4yy}. \end{aligned}$$

Consequenter numer[us] a necessario duos ad minimum habet factores, quorum uterque est summa duorum quadratorum. Q. E. D.

Das *Theorema*: *Omnem numerum in* 4 *quadrata esse resolubilem*, *dependi*rt hievon: *Omnem numerum hujus formae* $4m+2$ *semper discerpi posse in duas hujusmodi partes*: $4x+1$ *et* $4y+1$, *quarum neutra divisorem habeat formae* $4p-1$ (welches ich noch nicht *demonstri*ren k[an,] aber doch nicht schwehr scheint):[10] Dann alsdann ist so wohl $4x+1$ als $4y+1$ *summa* 2 $\square$, und folglich $4m+2$ *summa* 4 $\square$: dah[er] auch *ejus duplum* $8m+4$, und *hujus quadrans* $2m+1$, und allso *omnis numerus impar*: woraus die Folge leicht auf alle *numeros extendier*t wird.

Des H. Mitzlers *Critique* über meine *music* habe ich nicht gesehen, ausser was davon in den Gel[ehrten] Zeitungen steht, woraus ich geschlossen, daß dieselbe meistentheils übel gegründet ist, indem der *Auctor* meine Gedanken nicht genugsam eingesehen.[11] An des H. *Prof. Knutz*en *Logic* habe ich eben nicht viel sonderbares finden können;[12] zum wenigsten kommt sie derjenigen bey weitem nicht bey, welche der H. *Prof. Segner* in Göttingen herausgegeben.[13] Dieses Jahr hat mir die *Academi*e zu *Paris* wiedrum die Helfte des Preises zuerkannt, welche 2000 *Li*[*v*]*r*en beträgt.[14] Hiemit empfehle ich mich gehorsamst zu Ewr. Hochwohlgeb. beständigen Wohlgewogenheit und verharre mit aller schuldigsten Hochachtung

Ewr. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 6ten *Maji*
1747.

M.r Buffon in *Paris* hat eine neue Art von Brennspiegel erfunden vermittelst welcher er in einer *Distantz* von 200 Schu Holz in Brand gestecket; und diese *Distantz* kan nach Belieben noch vermehret werden.[15]

R 829 Reply to nº 114
Berlin, May 6th, 1747
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 208–209v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 413–420; *Euler-Goldbach* (1965), p. 270–273

116
Goldbach to Euler
Petersburg, (May 22nd) June 2nd, 1747

Ex litt[eris] ad Cl[arissimum] Eulerum d[atis] 2. Jun.[1]

Für die mir *communicir*ten *theoremata*[2] bin ich Eurer HochEdelg. sehr verbunden; das merckwürdigste darunter halte ich daß Sie meinen es sey nicht schwer $4m+2$ in zwey solche Theile $4x+1$ und $4y+1$ zu *resolvi*ren welche keinen *divisorem huius formae* $4p-1$ haben. Ich kan das *problema*: *numerum* $8m+3$ *in tria quadrata resolvere* auch auf dieses *reduci*ren: *Datis duobus numeris n et p*, *invenire tertium x huius naturae ut* $2+8n+8px-4x^2-4x$ *fiat summa duorum quadratorum*; da dann vor x eine solche *functio ex n et p composita* gefunden werden soll welche unter andern diese seltsame Eigenschafften habe daß sie in allen Fällen da $2+8n$ eine *summa duorum quadratorum* ist $=0$ werde, und in allen Fällen da $2+8n-8p$ eine *summa duorum quadratorum* ist, $=-1$ werde, in welchen beyden *conditionibus* allein ich eine solche Schwierigkeit[3] finde daß ich an der Wahrheit des gantzen *theorematis* zu zweiffeln anfange, ohngeachtet es leicht ist unzehliche *formulas* vor m anzugeben in welchen $8m+3$ *in tria quadrata* zertheilet werden kan als zum Exempel $m=b^2\pm bc+c^2$.[4]

Seit der Zeit da die *relation* von dem *perpetuo mobili* des Hn *Orffyrei*, in welcher der 6 wochen lange umlauf des Rades *attesti*ret war, herausgekommen, hat man, meines wissens keine öffentliche Meldung gethan daß diese *machine* weiter *perfectioni*ret oder zu einigem Gebrauch angewendet worden wäre, welches desto bedencklicher scheinet da der *Autor* derselben noch viele Jahre hernach gelebet und vieleicht biß *dato* am leben ist. Der Oberbaumeister in Wien, H. *Fischer* von *Erlach* (*ni fallor*) welcher dieselbe *machine* nebst dem Hn *Gravesande* in gegenwart des Hn LandGrafen von Hessen besehen, hat davon ehemals gegen mir mit vielem Ruhm gesprochen und dabey erwehnet daß er dem Rade als es still gestanden, mit Fleiß einen ganz schwachen Stoß gegeben, worauf es sich von selbsten immer geschwinder *usque ad certum celeritatis gradum* beweget, in welchem es hernach *aequabiliter* fortgegangen.[5]

Ich verharre mit vieler Hochachtung
Eurer Hochedelgebohrnen
dienstergebenster
Goldbach.

S.t Petersbourg
den 2. *Jun. st. n.* 1747.

R 830 Reply to n° 115
Petersburg, (May 22nd) June 2nd, 1747
Partial original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 114r
Partial copy, 2 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 49v–50r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 421–422; *Euler-Goldbach* (1965), p. 274

117
Euler to Goldbach
Berlin, July 4th, 1747

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Ewr. Hochwohlgebohrnen erkenne mich für die Bemühung, womit Dieselben meine geringe Schrifft von dem Vermögen zu gedenken in Erwägung zu ziehen gewürdiget, gehorsamst verbunden.[1] Es ist an dem, daß mein letster Schluß nur auf diejenigen geht, welche die Seele für eine besondere *Substantz* dabey aber doch für *materiell* halten, wobey ich insonderheit auf einige mir bekannte *Wolfianer* gesehen, welche glaubten daß die *Immaterialität* der Seele von ihrem Meister nicht genugsam erwiesen worden. Nach den Lehrsätzen dieses *Philosophi* haben dieselben auch gantz recht zu zweiflen, dann wann die *Cörp*er und ihre *Elemen*ten mit so vielerley thätigen und auf die Veränderung ihres Zustandes abzielenden Kräfften begabet sind, so ist nicht abzusehen, wie die Krafft zu gedenken davon ausgeschlossen werden soll. Diese Leute geben allso ohne Schwierigkeit zu, daß zum Gedenken eine thätige Krafft seinen Zustand zu verändern erfordert werde, und in Ansehung derselben glaube ich daß mein Beweiß Stich hält; gegen diejenigen aber, welche glauben daß das Vermögen zu Gedenken ohne eine solche Krafft bestehen und bloß allein durch die *vim inertiae* bewerkstelliget werden könne, muß ich gestehen, daß mein Beweiß nicht gilt. Es deucht mich aber, so bald man zugibt, daß in der *Materi*e außer der *Vi inertiae* keine andere Krafft befindlich, das Vermögen zu gedenken nothwendig ausgeschlossen werden müsse. Dann ungeacht in dem menschlichen Körper und insonderheit in dem Gehirn die *subtil*sten Theilchen fast in einer unbegreifflichen Bewegung sind, worauf die *Materiali*sten insonderheit ihre Meynung grün[den,] so geht doch dabey nichts anders vor, als daß ein jegliches Theilchen so la[ng] in seinem Zustand verharret, als solcher mit dem Zustand der benachbar[ten] bestehen kan; wiedrigen Falls aber nach den *regulis mechanicis* eine Verändrung in ihrer Bewegung vorgehen muß. Hieraus kan auch kein anderes *Resulta*t entstehen als eine Änderung des Zustands bloß alle[in] in Absicht auf die Bewegung; und so bald man behaupten will, daß dam[it] vielleicht noch ein anderes *Resulta*t verknüpfet sey, indem uns das Wesen der Körper nicht genugsam bekannt, so ist man genöthiget zu behaupten, daß ausser der *inertia* noch andere Kräffte darinn vorhanden seyn müssen; und alsdann findet mein Beweiß wiedrum Platz.

H. *Haude* lässt sich Ewr. Hochwohlgeb. gehorsamst empfehlen; er gibt sich alle Mühe die letst verlangten Bücher zusammen zu suchen, hat aber noch wenig Hoffnung alle zu finden; weil insonderheit die *Italiäni*schen schwehr aufzutreiben sind.[2]

Bey der *Academi*e in *Paris* werde ich auf künftiges Jahr wenig *Competent*en haben, dann der H. *Bernoulli*, welcher angefangen darauf zu arbeiten, ist wegen der allzu weitläuffigen und verdrüßlichen Rechnungen wiedrum davon abgestanden.[3] Die Bewegung des *Saturni* war bißher noch weit weniger bekannt als des Monds, dann noch biß jetzo haben die *loca observata* von den besten *Tabulis* biß auf 20 *Minut*en *differir*t; um diese *Irregularität*en zu bestimmen werden erstaunliche *Calculi* so wohl *theoretici* als *practici* erfordert, welche ich auch für ein dreyfaches *praemium* nicht noch einmal unternehmen wollte. Dann ich habe über 100 *Loca Saturni* mit dem *Jupiter* berechnet, und vermittelst der *Theori*e endlich solche *tabulas* heraus gebracht, welche von allen so wohl alten als neuen *observation*en nicht über 5 *Minut*en *differi*ren; eine grössere *accuratesse* ist wegen der Unrichtigkeit der älteren *observation*en nicht wohl zu hoffen; weil die neuen dazu nicht allein hinlänglich sind. Anjetzo stellt *M.^{r} le Monnier* zu *Paris* so *accurat*e *observation*en an daß man auf etliche *Secund*en sicher seyn kan; aus dergleichen *observation*en habe ich meine *Tabulas solares rectificir*t, und mit dem grösten Vergnügen befunden, daß dieselben anjetzo niemals über 5″ von den *observation*en *differi*ren.

Die *Piece de monadibus* welche bey uns das *Praemium* erhalten hat meine völlige *Approbation*, als welcher ich auch mein *votum* gegeben:[4] in derselben ist das gantze Lehrgebäude der *Monaden* völlig zerstöret. Wir haben über diese *Materi*e 30 *Piec*en bekommen, von welchen noch 6 der besten, so wohl *pro* als *contra monades*, gedruckt werden.[5] In denselben ist beyderseits zum wenigsten die Sach so deutlich ausgeführt, daß die bißherigen Klagen, als wann man einander nicht recht verstanden, ins künftige gäntzlich aufhören werden. Die gantze Sach beruhet auf der Auswicklung dieses *Raisonnement*s: die *Cörp*er sind *divisib*el; diese *divisibilität* gehet entweder immer ohne Ende weiter fort: oder nur biß zu einem gewissen Ziel, da man auf solche Dinge kommt, welche nicht weiter theilbar sind. Im letstern Fall hat man die *Monad*en, im erstern die *divisibilitatem in infinitum*: welche zwey Sätze einander so *e diametro* entgegengesetzt sind, daß davon nothwendig der eine wahr der andre aber falsch seyn muß. Alle *argumenta pro monadibus* gründen sich hauptsächlich auf scheinbaren *absurditäte*n, womit die *Divisibilitas in infinitum* verknüpfet seyn soll; da man sich aber meistentheils von diesem *infinito* verkehrte *ide*en gemacht, so fallen auch dieselben *Absurditäte*n weg. Die Meynung der *Monad*en zertheilet sich wieder in zwey *Part*eyen, wovon die eine den *Monad*en alle Ausdehnung gäntzlich abspricht, die andre aber dieselben für ausgedehnt hält, jedoch ohne daß sie *partes* hätten und folglich *divisib*el wären; welche letstere Meynung meines erachtens am leichtesten zu *refuti*ren ist. Diejenigen welche *monades magnitudinis expertes statui*ren müssen endlich zugeben, daß auch aus der Zusammensetzung derselben kein *extensum* entstehen könnte, und sind dahero genöthiget so wohl die *extension* als die *Cörp*er selbst für blosse *phaenomena* und *phantasmata* zu halten; ungeacht sie bey dem Anfang ihres *ra*[*tio*]*cinii* die *corpor*[*a*] als *réél* angesehen: dergestalt daß wann der Schluß wahr w[äre,] die *praemissae* nothwendig falsch seyn müssten.

Die Brennspiegel des H. *Buffon*s[6] sind aus lauter kleinen *speculis planis* bey 200 an der Zahl zusammen gesetzt, welche alle leicht dergestalt gestellet werden können, daß von allen der Sch[ein] auf einen Platz geworfen wird: wodurch er diesen Vortheil erhält, daß er den *Focum* so weit und wohin er will, richten kan, die Sonne mag stehen wo sie will; welches bey den ordentlichen Brennspiegeln nicht möglich ist. Er hat dam[it] Holtz in einer Weite von 200 Schuen angezündet, und es ist kein Zweifel, daß, wann ein Vogel durch den *Focum* fliegen sollte, derselbe gesenget werden müsste.

Wann $2+8n+8px-4xx-4x$ eine *summa duorum quadratorum*,[7] als $= aa+bb$, so wird $3+8n+8px$ *seu* $3+8\,(n+px) = aa+bb+(2x+1)^2$ folglich eine *summa trium quadratorum*. Inzwischen kan ich nicht sehen, daß wann $2+8n$ schon für sich eine *summa duorum quadratorum* wäre, deswegen x nothwendig $= 0$ seyn müsste; indem ja zu einer *summa duorum quadratorum* noch solche Zahlen gesetzt werden können daß die *summe* diese Eigenschafft behält. Hernach da $3+8\,(n+[px])$ dieser *Formul* $8m+3$ gleich seyn soll, so wird $n+px = m$, und folglich darf nur x gefunden werden, daß $2+8m-4xx-4x$ eine *summa duorum quadratorum* werde; das ist man müsste sehn, ob man nicht von $8m+3$ ein solches *Quadrat subtrah*[*i*ren] könnte *ut residuum esset summa duorum quadratorum*: welches die Frage selbst ist. Nimmt man nun an $2+8m$ sey schon eine *summa duorum quadratorum* so kan freylich x entweder 0 oder -1 seyn; ausser diesen aber sind öffters noch mehrere Fälle möglich.

Als die vorgelegte Zahl $8m+3$ soll seyn $= 59$; da ist $8m+2 = 58 = 49+9$ eine *summa* 2 *quadratorum*. Soll nun $2+8m-4xx-4x$ das ist $58-4xx-4x$ eine *summa duorum quadratorum* seyn, so geschieht dieses wann x entweder 0 oder -1; ausser diesen Fällen aber kan x noch seyn $= 1$ oder 2 oder 3; dann

$$58-4\cdot 2 = 50 = 49+1 = 25+25;$$

ferner ist

$$58-4\cdot 6 = 34 = 25+9,$$

und wann $x = 3$ ist

$$58-4\cdot 12 = 10 = 9+1.$$

Die Ursach hievon ist, weil dergleichen Zahlen $8m+3$ öffters auf mehr als eine Art können *summae* 3 *quadratorum* seyn als in diesem *Exemp*el ist

$$59 = 1+49+9 = 25+25+9.$$

In welchem Umstand ich nichts finde, welches mir die Gewißheit des Satzes $8m+3 = 3\,\square$ verdächtig machen könnte.

Ich glaube daß *Orfyré* noch am Leben ist,[8] weil er vor einiger Zeit ein Schiff unter dem Wasser zu fahren erfunden haben wollte. Sein *Perpetuum mobile* hatte er in Stücken zerschlagen, und nach der Zeit nicht wieder verfertigen wollen, welches die Erfindung nicht wenig verdächtig macht. Der von Ewr. Hochwohlgeb. angeführte Umstand daß diese *Machin*e, als sie ein wenig in Bewegung gesetzt worden, sich hierauf immer geschwinder biß auf einen gewissen Grad beweget, in welchem sie fortgelauffen, befindet in einer jeden *Pendul*e. Dann wann die *Pendule* aufgezogen und das *Pendulum* still steht, so geht auch die Uhr nicht; gibt man aber dem *Pendulo* nur den geringsten Stoß, so kan das Gewicht würken, und die Bewegung kommt in ihren ordentlichen Gang. Statt des Gewichts möchte wohl in der *Orfyrei*schen *Maschin*e ein *Elastrum* angebracht worden seyn; und dergleichen wären wohl möglich die ein gantzes Jahr lang fortgiengen ohne von neuem aufgezogen zu werden. Auf diese Art sind alle erzehlten Umstände dieser *Machin* zu erklären, außer demjenigen welcher auch pflegt angeführet zu werden, daß *Orfyré* dem sel[igen] Landgrafen das gantze Geheimnüß entdecket, und dieser Herr die *Machine* für ein wahres *perpetuum mobile* gehalten haben soll, welches nicht zu vermuthen wäre, wann die Bewegung einen solchen Grund gehabt hätte: ich weiß aber nicht ob dieser letste Umstand seine völlige Richtigkeit hat.

Hiebey nehme die Freyheit Ewr. Hochwohlgeb. das *Programma* unsrer *Academi*e auf die beyden künftigen Jahre zuzusenden.[9]

In meiner *Famille* hat sich seit dem nichts Veränderliches zugetragen, als daß neulich meine Frau wiedrum mit einem Söhnlein niedergekommen; welches der H. Graf von Kaiserling aus der Tauf gehoben und *Herman Friedrich* genannt.[10] Sonsten habe ich jetz einen geschickten *praeceptorem domesticum* angenommen, und unser ältester Sohn, dessen kränklicher Zustand ihn verlassen zu haben sche[int,] kommt täglich weiter in der *Analysi* und *Astronomi*e. Alle die m[eini]gen insgesammt lassen sich Ewr. Hochwohlgeb. auf das gehorsam[ste] empfehlen und ich habe die Ehre mit der vollkommensten Hochachtung zu verharren

Ewr. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L Euler

Berlin den 4 *Jul.* 1747.

R 831 Reply to n° 116
Berlin, July 4th, 1747
Original, 3 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 201–203v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 423–428; *Euler-Goldbach* (1965), p. 274–277

118
Goldbach to Euler
Petersburg, August (1st) 12th, 1747

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*,

Daß der Höchste Ew. Hochedelgebohrnen mit einem jungen Sohn erfreuet, habe ich aus Dero letzterem Schreiben mit vielem Vergnügen ersehen.[1] Ich *gratuli*re Deroselben so wohl als der Frau *Professo*rin zu dieser abermaligen Vermehrung ihrer *familie* von hertzen und wünsche noch ferner viele angenehme Nachrichten von Dero Wohlstande zu erhalten.

Für die mir *communici*rten unterschiedenen *éclaircissem*[*en*]*ts* dancke ich dienstl[ich]; in meinem vorigen Schreiben[2] aber soll es billig heissen: “daß in allen

Fällen da $2+8n$ eine *summa duorum quadratorum unico modo* ist ... und in allen Fällen da $2+8n-8p$ eine *summa duorum quadratorum unico modo* ist" *&c.*

In nachfolgender *Serie* 1, 3, 7, 17, 41, 99, *&c.* deren *lex progressionis* $A+2B=C$ oder $B = A + \sqrt{2A^2 \pm 2}$ und die *formula gen[eralis]* $\dfrac{\left(1+\sqrt{2}\right)^x + \left(1-\sqrt{2}\right)^x}{2}$ siehet man alsofort daß die *termini locis paribus* nicht *quadrati* seyn können indem sie alle $\square \pm 1$ sind; ob aber alle *termini locis imparibus praeter primum* auch keine *quadrata* sind muß ich dahin gestellet seyn lassen weil ich die unmöglichkeit noch zur zeit nicht einsehe, im gleichen ob es unendlich viel *casus* giebt darin $2A^4-1$ ein *quadratum* werden kan wie in den *casibus* $A=1$ und $A=13$.[3]

Der H. *D[octor] Kaltschmied* welchen ich vor 4 Jahren allhie gesprochen hatte und der Eurer Hochedelg. vieleicht auch bekannt seyn wird, hat mir unlangst seine *Disput[atio] pro loco*[4] nebst einem sehr *obligeant*en Briefe zugesandt welchen ich zu beantworten nicht unterlassen können; ich bitte also Ew. Hochedelg. dienstlich den Einschluß nach *Jena* bey gelegenheit befordern zu lassen, sollte ich hingegen hiesiges Ortes Deroselben einige Gefälligkeiten zu erweisen vermögend seyn, so werde in der That bezeugen daß ich mit der aufrichtigsten Hochachtung bin

Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S. Petersbourg
den 12. *Aug. st. n.* 1747.

R 832 Reply to n° 117
Petersburg, August (1st) 12th, 1747
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 115rv
Partial copy, 1 p. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 50r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 429–430; *Euler-Goldbach* (1965), p. 277–278

119
Euler to Goldbach
Berlin, September 2nd, 1747

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Für Ewr. Hochwohlgeb. Hochgeneigte *Gratulation* zu Vermehrung meiner *Familie*[1] statte allen gehorsamsten Dank ab, und *recommendi*re mich samt den meinigen ferner zu Dero beständigen Wohlgewogenheit.

Daß in den *Seriebus recurrentibus*, wo ein jeder *Terminus* aus den zwey vorhergehenden bestimmt wird, zugleich ein jeder *terminus* aus dem vorhergehenden allein angegeben werden kan vermittelst einer *quadrati*schen *Aequation*, ist eine sehr merkwürdige Eigenschafft. Dann wann in dieser *Serie*

$$\overset{1}{A},\quad \overset{2}{B},\quad \overset{3}{C}\ \ldots\ \overset{x}{P},\quad \overset{x+1}{Q}\ ,\quad \overset{x+2}{R}$$

ist $C = aB - bA$ und $R = aQ - bP$ so wird $QQ - aPQ + bPP$ *ad* b^x *in ratione constante* seyn, welche wann $x = 1$ ist wie $BB - aAB + bAA$ *ad* b, folglich ist:

$$QQ - aPQ + bPP = (BB - aAB + bAA)\, b^{x-1}.$$

Und in der von Ewr. Hochwohlgeb. angeführten *Serie*

$$\overset{1}{1},\quad \overset{2}{3},\quad \overset{3}{7},\quad \overset{4}{17},\quad \overset{5}{41},\quad \overset{6}{99}\ \ldots\ \overset{x}{P},\quad \overset{x+1}{Q}\ ,$$

wo $a = 2$ und $b = -1$; $A = 1$, $B = 3$ wird seyn $QQ - 2PQ - PP = 2 \cdot (-1)^{x-1}$ und allso $Q = P + \sqrt{\left(2PP + 2\,(-1)^{x-1}\right)}$ oder $Q = P + \sqrt{\left(2P^2 \pm 2\right)}$. Bey dieser Betrachtung bin ich auf die Gedanken gefallen, ob etwan in einer *Serie recurrente*, deren jeder *Terminus* aus den 3 vorhergehenden bestimmt wird, nicht auch ein jeder aus den zwey vorhergehenden vermittelst einer *aequat*[*ionis*] *cubicae* angegeben werden könnte. Es sey in

$$\overset{1}{A},\quad \overset{2}{B},\quad \overset{3}{C},\quad \overset{4}{D}\ \ldots\ \overset{x}{P},\quad \overset{x+1}{Q}\ ,\quad \overset{x+2}{R}\ ,\quad \overset{x+3}{S}\quad \textit{etc.}$$

$D = aC - bB + cA$ und $S = aR - bQ + cP$, so habe ich gefunden daß folgende *Ratio* immer *constans* seyn müsse:

$$\left.\begin{array}{llll} R^3 & -\,2aQR^2 & +\,(aa+b)\,Q^2R & -\,(ab-c)\,Q^3 \\ & +\,bPR^2 & -\,(ab+3c)\,PQR & +\,(ac+bb)\,PQ^2 \\ & & +\,acP^2R & -\,2bcP^2Q \\ & & & +\,ccP^3 \end{array}\right\} : c^x$$

welche *ratio constans* aus den *terminis initialibus* A, B, C *posito* $x = 1$ erkannt wird.

Um aber wieder auf die von Ewr. Hochwohlgeb. gemeldte *seriem* 1, 3, 7, 17, 41 *etc.* wo $Q = P + \sqrt{\left(2P^2 \pm 2\right)}$ zu kommen, so ist allerdings gewiß daß kein *terminus* derselben ausser dem ersten 1 ein *quadrat* seyn könne. Dann es sey P als ein *terminus* derselben ein *quadrat* nehmlich $P = zz$ so müsste auch $2z^4 \pm 2$ ein *Quadrat* seyn, welches nicht seyn kan. Dann es sey *pro signo* $-$ erstlich $2z^4 - 2 = 4\,(zz-1)^2\,\dfrac{pp}{qq}$ so wird $zz + 1 = \dfrac{2ppzz}{qq} - \dfrac{2pp}{qq}$ und $zz = \dfrac{2pp+qq}{2pp-qq}$. Da nun p et q *numeri primi inter se* so kan zz kein *numerus integer* seyn, wann nicht $2pp - qq =$ [1 ;][2] daher aber wird $qq = 2pp - 1$ folglich $zz = 4pp - 1 = P$, allso ist

P um 1 immer kleiner als ein *Quadrat* und kan allso *in integris* kein *Quadrat* seyn. Wann aber das Zeichen + gilt, so ist $2z^4+2=(zz+1)^2+(zz-1)^2$; damit nun solches ein *Quadrat* werde, so setze man: $zz+1=aa-bb$ und $zz-1=2ab$, wobey zu merken daß z ein *numerus impar* seyn müsse, dann sonsten würde $2z^4+2$ ein *numerus impariter par* folglich kein *Quadrat*. Es kan aber *generaliter* diese *Formul* $2z^4+2y^4$ kein *Quadratum* seyn ausser $y=z$, welches ich allso beweise: Da $2z^4+2y^4=(zz+yy)^2+(zz-yy)^2$ so sey $zz-yy=ab$, so wird $zz+yy=\dfrac{aa-bb}{2}$ und $2z^4+2y^4=\left(\dfrac{aa+bb}{2}\right)^2$: Nun sey $a=pq$ und $b=rs$, daß $zz-yy=pqrs$ und $zz+yy=\dfrac{ppqq-rrss}{2}$: und man setze $z+y=pr$, $z-y=qs$, so wird $2zz+2yy=pprr+qqss$ folglich $zz+yy=\dfrac{pprr+qqss}{2}=\dfrac{ppqq-rrss}{2}$ oder $ss=\dfrac{pp\,(qq-rr)}{qq+rr}$; dahero müste $\dfrac{qq-rr}{qq+rr}$ das ist q^4-r^4 ein *quadratum* seyn welches unmöglich.

Die *Formul* $2A^4-1$ welche in den Fällen $A=1$, und $A=13$ ein *Quadrat* wird, kan noch in unendlich viel andern ebenfalls ein *Quadrat* werden, allein nicht *in numeris integris*. Dann wann $A=\dfrac{1525}{1343}$, oder $A=\dfrac{2\,165\,017}{2\,372\,159}$, so wird auch $2A^4-1$ ein *Quadrat*; ob aber *in numeris integris* keine andern Fälle als die beyden gemeldten möglich sind, bin ich nicht im Stande zu *decidi*ren.[3]

Mit des H. Grafen *Rasumoffski Carosse* habe ich an den H. Köppen diejenigen von den letst verlangten Büchern geschickt, welche hier zu bekommen gewesen,[4] und wann Ewr. Hochwohlgeb. dieselben nicht schon empfangen haben, so werden sie nächstens ankommen; der H. *Haude* bittet Ewr. Hochwohlgeb. den Preiß für dieselben nach beyligender Rechnung nur an den H. Köppen zu bezahlen.

Der Einschluß an den H. $D[octo]^r$ Kaltschmied[5] ist sogleich richtig bestellt worden.

Hiemit habe die Ehre mit der schuldigsten Hochachtung zu verharren

Ewr. Hochwohlgebohrnen

gehorsamster Diener

L. Euler

Berlin den 2 *Sept.*

1747.

R 833 Reply to n° 118
Berlin, September 2nd, 1747
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 213–214r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 431–433; *Euler-Goldbach* (1965), p. 278–279

120
Goldbach to Euler
Petersburg, September (19th) 30th, 1747

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*,

Eurer Hochedelgeb. Schreiben vom 2. *Sept.* ist mir den 13. nebst der *Specification* von Büchern eingehändiget worden welche ich bald darauf empfangen und bezahlet habe.[1]

Die *aequation*[2] welche Sie bey den *Seriebus recurrentibus observi*ret haben wird vieleicht mit nachfolgender Anmerckung übereinkommen: Wann man in dem *casu* da die *lex progressionis* ist $C = aB - bA$ den *terminum generalem* setzet $m\alpha^{x-1} + n\beta^{x-1}$ so wird der *terminus primus* $m + n$, der *secundus* $m\alpha + n\beta$, der *tertius* $m\alpha^2 + n\beta^2 = am\alpha + an\beta - bm - bn$ oder $\alpha^2 = a\alpha - b$ und $\beta^2 = a\beta - b$, woraus folget daß α und β zwey *radices eiusdem aequationis* sind, und wann $\alpha = \dfrac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$ alsdann $\beta = \dfrac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$. Auf gleiche weise wann $D = aC - bB + cA$, wird *posito termino generali* $m\alpha^{x-1} + n\beta^{x-1} + p\gamma^{x-1}$, $\alpha^3 = a\alpha^2 - b\alpha + c$, und wann von den dreyen *radicibus* dieser *aequation* die eine α, die andere β, die dritte γ genannt wird, so hat man den völligen *terminum generalem*, wobey doch als etwas seltsames anzusehen ist daß obgleich in den *aequationibus quintae, septimae &c. potestatum* diese *radices* sehr *complicatae* seyn müssen, die aus denen selben zusammengesetzten *termini generales* dennoch wann nur a, b, c, *&c.*, *item* m, n, p, *&c. integri* sind, auch allezeit *integri* werden und die in den *radicibus aequationis* enthaltenen *quantitates surdae* sich ein ander *destrui*ren.

Um zu *demonstri*ren daß $2z^4 - 2$ kein *quadrat* seyn kan setzen Ew. Hochedelg. $2z^4 - 2 = 4\left(z^2-1\right)^2 \dfrac{p^2}{q^2}$ und *supponi*ren daß p *&* q *numeri inter se primi* sind; wie ich nun den zureichenden Grund dieser *supposition* nicht einsehe, so finde an dem selben desto mehr ursach zu zweiffeln weil Sie endlich auf diesen Schluß kommen daß p immer um 1 kleiner seyn muß als ein $\square$ da doch die Zahl 17 und unzehliche andere zeigen daß p auch um 1 grösser als ein $\square$ seyn kan,[3] denn es sind

pro $\square - 1$ die *termini*
$$3 = 1^2 \cdot 2^2 - 1$$
$$99 = 5^2 \cdot 2^2 - 1$$
$$3363 = 29^2 \cdot 2^2 - 1$$
&c.

pro $\square + 1$ ...
$$17 = 1^2 \cdot 4^2 + 1$$
$$577 = 6^2 \cdot 4^2 + 1$$
$$19\,601 = 35^2 \cdot 4^2 + 1$$
&c.

und alle die *numeri* 1, 5, 29 *&c.* sind *termini seriei cuius lex progressionis est* $6B - A = C$; 1, 6, 35 *&c.* aber sind die *summae* derselben *seriei.*

Die grossen *numeri in fractis* welche Ew. Hochedelg. für $\sqrt{2A^4 - 1}$ gefunden haben machen sehr wahrscheinlich daß ausser 1 und 13 keine *pro A substitui*ret werden können damit $2A^4 - 1$ ein *quadratum in integris* werde,[4] indessen sind doch solche *propositiones*, eben wegen der Schwierigkeit sie zu *demonstri*ren, merckwürdig.

Nachfolgendes *problema* kan ich *solvi*ren, weil ich aber ohngefehr darauf gefallen, so weiß ich nicht ob die *solution* schwer oder leicht zu finden seyn mag: *Datis duobus quadratis* 1 *et* b^2, *invenire infinitis modis tertium* c^2 *hac lege ut summa* $1 + b^2 + c^2$ *sit aequalis tribus aliis quadratis.*[5]

Von dem Hn *Doppelmayer* habe ich seit der Zeit des *fatal*en *experiment*s so in den Zeitungen erzehlet worden, nichts vernommen,[6] im fall E. H. wissen wie er sich befindet und ob er völlig wieder *restitui*ret worden, bitte ich mich davon zu benachrichtigen. Ich verharre mit vieler Hochachtung

Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.^{t} Petersburg
den 30. *Sept.* 1747.

P. S.[7] Eurer Hochedelgeb. *exactitude* in *expedi*rung der Briefe welche an Sie *adressi*ret werden *admi*rire ich sehr und wünsche Deroselben hinwiederum einige Gefälligkeiten erweisen zu können.

R 834 Reply to n° 119
Petersburg, September (19th) 30th, 1747
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 116–117r
Partial copy, 2 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 50v–51v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 434–436; *Euler-Goldbach* (1965), p. 280–281

121
Euler to Goldbach
Berlin, October 24th, 1747

Hochwohlgebohrner Herr *Etats* Rath
Hochgeehrtester Herr und Gönner

Ewr. Hochwohlgeb. Bezahlung für die übersandten Bücher habe richtig erhalten, und dem H. *Haude* zugestellt,[1] welcher auch die letstverlangten mit der nächsten Gelegenheit zu überschicken nicht ermangeln wird.

Die letstens überschriebene *Aequation pro seriebus recurrentibus* beruhet allerdings auf der von Ewr. Hochwohlgb. gemeldten Eigenschafft dieser *Serierum*. Dann wann in der *Serie*:

$$\overset{1}{A},\ \overset{2}{B},\ \overset{3}{C},\ \overset{4}{D}\ \ldots\ \overset{x}{P},\ \overset{x+1}{Q},\ \overset{x+2}{R},\ \overset{x+3}{S},\ \overset{x+4}{T},\ etc.$$

ist $C = mB - nA$, und *generaliter* $R = mQ - nP$; und man *formir*t diese *aequation* $zz - mz + n = 0$, wovon die *Radices* seyn sollen a, b, so daß $a + b = m$ und $ab = n$, so wird der *Terminus generalis* diese *Form* haben $P = \alpha a^x + \beta b^x$, folglich ist $Q = \alpha a \cdot a^x + \beta b \cdot b^x$. Aus diesen zwey *aequation*en suche ich die *valores* a^x und b^x, und finde $\alpha a^x = \dfrac{bP - Q}{b - a}$; $\beta b^x = \dfrac{aP - Q}{a - b}$. Diese *multiplicir*e ich in einander

$$\alpha\beta a^x b^x = \frac{abPP - aPQ - bPQ + QQ}{-aa + 2ab - bb}.$$

Da nun $ab = n$, $a + b = m$,

$$-aa + 2ab - bb = -\ (a+b)^2 + 4ab = -m^2 + 4n$$

so wird

$$\alpha\beta n^x = \frac{nPP - mPQ + QQ}{4n - mm};$$

folglich

$$\frac{nPP - mPQ + QQ}{n^x} = \alpha\beta\,(4n - mm) = quantitati\ Constanti;$$

welche (*posito* $x = 1$) seyn muß $= \dfrac{nAA - mAB + BB}{n}$.

Wann aber *pro serie recurrente* ist $D = mC - nB + pA$, und $S = mR - nQ + pP$, so *formir*e ich diese *Aequation* $z^3 - mzz + nz - p = 0$, wovon die *Radices* seyn sollen a, b, c, so wird $P = \alpha a^x + \beta b^x + \gamma c^x$; $Q = \alpha a \cdot a^x + \beta b \cdot b^x + \gamma c \cdot c^x$; $R = \alpha a^2 \cdot a^x + \beta b^2 \cdot b^x + \gamma c^2 \cdot c^x$; aus diesen 3 *aequation*en suche ich die *valores* αa^x, βb^x, γc^x, welche in einander *multiplicir*t geben $\alpha\beta\gamma a^x b^x c^x = \alpha\beta\gamma p^x$, weil $a + b + c = m$; $ab + ac + bc = n$ und $abc = p$, und durch Hülfe dieser *Formul*n lassen sich in der *aequatione resultante* die Buchstaben a, b, c durch m, n *et* p bestimmen, und kommt die letst überschriebene *aequation inter* P, Q, R heraus.[2]

Den Zweifel, welchen Ewr. Hochwohlgb. gegen meine *demonstration*, daß $2z^4 - 2$ kein *Quadrat* seyn kan, machen, kan ich nicht recht einsehen und glaube daß ich mich entweder nicht deutlich genug ausgedruckt habe, oder daß Dieselben meine *Demonstration* auf einen anderen *Casum* gezogen. Wann $2z^4 - 2$ ein *Quadrat* wäre (*in integris*), so würde es grad; und folglich *per* 4 *divisibel* seyn. Ferner da $z^4 - 1 = (zz - 1)(zz + 1)$, muß dies *Quadrat* auch *per* $zz - 1$ *divisibel* seyn, und auch *per* $(zz - 1)^2$ wann $zz - 1$ keine *factores quadratos* hat. Dahero wann $2z^4 - 2$ ein *Quadrat* wäre, so müste dasselbe eine solche *Form* haben $2z^4 - 2 = \dfrac{4\,(zz-1)^2\,pp}{qq}$, wo qq die etwan in $zz-1$ enthal[tenen] *factores quadratos* aufheben soll. Nun nehme ich billich an, daß pp [*et*] qq *numeri inter se primi* sind, oder daß die *fractio* $\frac{pp}{qq}$ schon *ad minimos terminos reducir*t seye. Dann wann pp *et* qq einen *divisorem communem* hätten, so würde solcher in der *fraction* $\frac{pp}{qq}$ *per divisionem* weggebracht werden können. Wann demnach $2z^4-2=\frac{4\,(zz-1)^2\,pp}{qq}$, so ist

$$2\,(zz+1)\,(zz-1)\,qq=4(zz-1)^2[pp]$$

und folglich $(zz+1)\,qq=2\,(zz-1)\,pp$, woraus entsteht $zz=\frac{2pp+qq}{2pp-qq}$. Da nun zz ein *numerus integer* ist, so muß $2pp-qq$ ein *Divisor* seyn von $2pp+qq$, folglich auch von $4pp$ oder von $2qq$. Da aber *pp et qq numeri inter se primi* sind, so kan solches nicht geschehen als entweder[3] wann $2pp-qq=1$ oder wann $2pp-qq=2$; dann da

$$\frac{2pp+qq}{2pp-qq}=1+\frac{2qq}{2pp-qq}=\frac{4pp}{2pp-qq}-1,$$

und *p et q numeri primi inter se*, so ist auf keine andere Art möglich, daß $\frac{2pp+qq}{2pp-qq}$ ein *numerus integer* werde.

Es sey allso I. (*si fieri possit*) $2pp-qq=1$, so wird $zz=2pp+qq=4pp-1$, welches *in numeris integris* unmöglich ist.

Wann II. $2pp-qq=2$, so wird $zz=\frac{2pp+qq}{2}=qq+1$, welches gleichfalls nicht möglich ist: allso kan auf keinerley Art $2z^4-2$ *in integris* ein *Quadrat* werden.

Setzt man z für zz um zu suchen in welchen Fällen $2zz-2$ ein *Quadrat* werden könne, so gibt es zweyerley Fälle: I. $z=4pp-1$; und II. $z=qq+1$, welches diejenigen sind so Ewr. Hochwohlgeb. anführen, die aber meine vorige *Demonstration* nicht entkräfften welche so viel ich mich erinnere *generaler* war, dann ich hatte bewiesen daß nicht nur $2z^4-2$ sondern auch $2z^4-2u^4$ kein *Quadrat* seyn könne. Wie ich sehe, so ist diese meine *Demonstration* nun im X$^{\text{ten}}$ *Tomo Comm*[*entariorum*] gedruckt.[4]

Das *Problema*: *Datis duobus quadratis aa et bb invenire tertium xx*, *ut summa* $aa+bb+xx$ *alio quoque modo fiat resolubilis in* 3 *quadrata*[5] habe ich allso *solvir*t: *Sit*

$$aa+bb+xx=(a+2pr)^2+(b+2qr)^2+(x-2r)^2$$

erit

$$0=4apr+4pprr+4bqr+4qqrr-4rx+4rr,$$

unde per $4r$ *dividendo fit*[6]

$$x=ap+prr+bq+qrr+r,$$

wo *pro p, q, et r numeri quicunque integri tam affirmativi quam negativi accipi possunt.* Woraus unendlich viel *solutiones particulares* fliessen. Als es sey $p = 1$, $q = -1$; *erit* $x = a - b + r$ und

$$aa + bb + xx = (a + 2r)^2 + (b - 2r)^2 + (x - 2r)^2 .$$

H. *Doppelmayer* ist bald nach dem *fatal*en *experiment*t würklich gestorben wie mich Leute so von Nürnberg gekommen, versichert.[7]

Meine *Piece* über den *Saturnum* ist in *Paris* nicht nur wohl angekommen, sondern ich höre auch, daß man mit derselben sehr wohl zufrieden ist, und sie allen andern, so eingelauffen, weit vorzieht.[8]

Meine gantze *Famille* lässt sich Ewr. Hochwohlgeb. gehorsamst empfehlen, und ich verharre mit der schuldigsten Hochachtung

Eurer Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 24 *Oct.*
1747.

R 835 Reply to n° 120
Berlin, October 24th, 1747
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 215–216r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 437–440; *Euler-Goldbach* (1965), p. 281–283

122
Goldbach to Euler
Petersburg, (October 31st) November 11th, 1747

HochEdelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*,

Eurer Hochedelgebohrnen werthes Schreiben vom 24. *Oct.* habe ich den 4. *Nov.* erhalten, ich muß aber die Antwort darauf wegen unterschiedener vorgefallener Verhinderungen noch eine Zeitlang aussetzen; indessen würden Ew. Hochedelgeb. mich sehr *obligi*ren wann Sie mir, im fall unter den Büchern so vor mich in Berlin fertig liegen der *M.^{me} Lambert* Ermahnung an ihre Kinder (welches Buch ich *in triplo* so wohl frantzösisch als deutsch verlanget hatte) schon vorhanden wäre, mir ein deutsches und ein frantzösisches *Exemplar*, beydes ungebunden und unbeschnitten auf der *ordinai*ren Post mit der überschrifft: *Gedruckte Sachen* je eher je lieber zusenden könnten.[1] Die *probabilité* zu dem *praemio* in Pariß[2] vor Ew. Hochedelg. halte ich wenigstens wie 10 zu 1. Der frau *Professorin* und Dero sämmtlichen *Famille* bitte ich meine schuldigste Empfehlung zu machen und verharre mit vieler hochachtung

Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S. Petersburg
den 11. *Nov.* 1747.

R 836 Reply to n° 121
Petersburg, (October 31st) November 11th, 1747
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 118r
Published: *Euler-Goldbach* (1965), p. 283

123
Euler to Goldbach
Berlin, December 14th, 1747

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Der H. *Prof. Braun* als ein neuangenommenes Mitglied der Kaiserl[ichen] *Academi*e der Wissenschaften wird die Ehre haben Ewr. Hochwohlgeb. diese Zeylen gehorsamst zu überreichen.[1] Ich habe Gelegenheit gehabt denselben seit vielen Jahren allhier kennen zu lernen, und da mir von des H. Grafen *Rasumoffski Excellenz* aufgetragen worden denselben als *Prof. Logicae et Moralium* bey der neuzuerrichtenden *Univer*sitet zu *engagir*en so glaubte ich demselben keinen wichtigern Dienst erweisen zu können, als wann ich ihn auch Ewr. Hochwohlgeb. gehorsamst *recommendir*te. Ich hoffe seine gute *Condui*te und Gründlichkeit in den *Studiis* werde diese meine Freyheit bey Ewr. Hochwohlgeb. vollkommen rechtfertigen, und Dieselben werden Ihm diejenige Wohlgewogenheit gütigst angedeyen lassen, deren Ewr. Hochwohlgeb. denselben würdig erachten werden.

Die Bücher, welche Ewr. Hochwohlgeb. von hier verlanget werden nunmehr richtig angekommen seyn.[2]

Da dieser Brief ungefehr um das neue Jahr Ewr. Hochwohlgeb. überreichet werden wird, so erinnere ich mich meiner schuldigsten Pflicht, Ewr. Hochwohlgeb. meine gehorsamste *Gratulation* abzustatten, und Denselben nächst vollkommner Gesundheit alles Hohe Wohlseyn und Vergnügen von Herzen anzuwünschen, wobey ich mich samt allen den meinigen zu Ewr. Hochwohlgeb. beständigen Wohlgewogenheit und Gnade gehorsamst empfehle und mit der schuldigsten Hochachtung lebenslang verharre

Ewr. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 14^{ten} *Dec.*
1747.

R 837 Letter of recommendation personally delivered by J.A. Braun
Berlin, December 14th, 1747
Original, 1 fol. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 217rv
Published: *Euler-Goldbach* (1965), p. 284

124
GOLDBACH TO EULER
Petersburg, January (16th) 27th, 1748

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*

Eurer Hochedelgebohrnen werthes Schreiben vom 5. *Dec.* habe ich den 20. *Jan.* nebst dem *paquet* mit Büchern wohl erhalten wodurch Sie mich abermal sehr *obligi*ret haben;[1] ich wünschete hertzlich Deroselben hiesiges ortes hinwiederum einige Gefälligkeiten zu erweisen, als wozu Sie mich jederzeit bereit finden werden. Die erwehnte Rechnung würde ich alsofort bezahlet haben wann sie beygeleget worden wäre, sie muß aber in Berlin vergessen seyn, weil ich sie nach einer genauen *perquisition* in allen Büchern, nicht finden können.

Aus der Inlage, welche mir wieder zurückzusenden bitte, werden Ew. Hochedelg. am besten sehen worauf mein voriges *dubium* gegründet gewesen.[2]

Dero *solution* des *problematis datis duobus quadratis* a^2 *et* b^2 *invenire tertium* x^2*, hac lege ut* $a^2+b^2+x^2$ *plus quam uno modo sit summa trium quadratorum*, ist offenbar und *general*;[3] denn ob zwar die *aequatio*

$$0 = 4apr + 4p^2r^2 + 4bqr + 4q^2r^2 - 4rx + 4r^2$$

per $4r$ *divisa* nicht $x = ap+pr^2+bq+qr^2+r$, sondern $x = ap+p^2r+bq+q^2r+r$ giebet, so hat doch dieser kleine *error calculi* keine *influence* in die *methode* selbst.[4]

Indessen bleibet die *demonstration* daß eine *summa trium quadratorum imparium* vor $8m+3$ *in quocunque casu ipsius* m angegeben werden könne, noch sehr dunckel.[5] Es ist mir eingefallen daß wann man die drey *radices quaesitas* setzen möchte A, B, C und

$$\begin{aligned} A &= 1 + am + bm^2 + cm^3 + dm^4 + \&c. \\ B &= 1 + am - bm^2 - cm^3 - dm^4 - \&c. \end{aligned}$$

folglich

$$\begin{array}{lccccccccc}
A^2 & = & 1 & +2am & +2b\,m^2 & +2c\,m^3 & +2d\,m^4 & +2e\,m^5 & +\ \&c. \\
 & & & & +a^2 & +2ab & +2ac & +2ad & \\
 & & & & & & +b^2 & +2bc & \\
B^2 & = & 1 & +2am & -2b\,m^2 & -2c\,m^3 & -2d\,m^4 & -2e\,m^5 & +\ \&c. \\
 & & & & +a^2 & -2ab & -2ac & -2ad & \\
 & & & & & & +b^2 & +2bc &
\end{array}$$

und

$$\begin{array}{lccccccccc}
C^2 & = & 1 & +8\,m & -2a^2m^2 & * & -2b^2m^4 & -4bcm^5 & [+\ \&c.] \\
 & & & -4a & & & & &
\end{array}$$

alsdann $A^2 + B^2 + C^2 = 8m + 3$ und alle *coefficientes* b, c, d *&c. per solam* a *determini*ret werden könnten so daß a eine *quantitas indeterminata* bliebe, denn es wird *posita*

$$C = 1 + \alpha m + \beta m^2 + \gamma m^3 + \delta m^4 + \&c.$$

$$\alpha = (4 - 2a)\,, \quad \beta = -2a^2 - \alpha^2, \quad \gamma = -2\alpha\beta \quad \&c.;$$

hierauß würde ferner folgen, daß, wann das *theorema* an sich selbst wahr ist, die *series* A, B, C allezeit *numeris integris* gleich seyn würden, man möchte auch vor a annehmen was man wolte.

Gestern hat mir der H. *Prof. Braun*[6] (mit welchem ich noch besser bekannt zu werden hoffe) Dero Schreiben vom 14. *Dec.* eingehändiget. Ich dancke Eurer Hochedelgeb. dienstl[ich] für Dero gütigen Neujahrswunsch, und wie ich vermuthe daß Sie dieses Jahr auch ihres ortes glücklich werden angefangen haben, so wünsche daß der Höchste Sie ferner nebst Dero werthesten *familie* bey allen ersinnlichen *prosperit*äten erhalten wolle, mir aber wünsche ich neue Gelegenheiten Sie so wohl von der vollkommenen hochachtung als auch von der wahren Dienstbegierde und Ergebenheit zu überzeugen mit welcher ich beständig verharre

Eurer Hochedelgebohrnen
verbundenster
Goldbach.

Petersbourg den 27. *Jan.* 1748.

R 838 Reply to nº 123
Petersburg, January (16th) 27th, 1748
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 119–120r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 441–442; *Euler-Goldbach* (1965), p. 284–285

125
Euler to Goldbach
Berlin, February 13th, 1748

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Ewr. Hochwohlgeb. werden die Rechnung von H. *Haude*, welche bey dem Pack vergessen worden, hier beygelegt finden, welche nicht mehr als 3 Rthl. 15 g[roschen] 6 *d*[*eniers*] beträgt;[1] wann ich im Stand seyn sollte Ewr. Hochwohlgeb. noch ferner durch Übersendung dergleichen Bücher zu dienen, so würde solches nicht nur meiner Schuldigkeit gemäß mit dem grösten Vergnügen bewerkstelligen, sondern dasselbe würde auch hinführo auf der fahrenden Post mit der grösten Bequemlichkeit geschehen können, als durch welchen Weg ich von Zeit zu Zeit ziemliche *Paquet* an die *Academi*e übersende.

Das über meinen vorigen Brief gehabte *Dubium* wird so gleich wegfallen, wann Ewr. Hochwohlgeb. Sich zu erinnern belieben werden, daß daselbst von *numeris integris* die Rede sey,[2] dann da $P = 4pp-1$, so kan in gantzen Zahlen P unmöglich ein *Quadrat* seyn; in Brüchen aber wäre solches auf unendliche Arten möglich.

Daß alle in dieser *Formul* $8m+3$ enthaltene Zahlen in drey *Quadrata imparia resolvir*t werden können, bin ich noch keineswegs im Stand zu beweisen,[3] ungeacht ich mir darüber den Kopf schon ziemlich verbrochen habe. So offt $8m+3$ ein *numerus primus* ist, so ist dieselbe allzeit in dieser *Form* $2aa+bb$ enthalten, als $3 = 2\cdot 1+1$; $11 = 2\cdot 1+9$; $19 = 2\cdot 9+1$; $43 = 2\cdot 9+25$ *etc.* und hievon getrauete ich mir noch die *Demonstration* zu finden.[4] Ich glaube auch nicht, daß man für diese *Proposition* daß $8m+3 = aa+bb+cc$ eine solche *demonstration* finden könne, wodurch die 3 *Radices* a, b, c selbst bestimmt werden; sondern man wird nur die *possibilitatem resolutionis* anzuzeigen im Stande seyn: Aus diesem Grunde habe ich zu dem von Ewr. Hochwohlgeb. eingeschlagenen Weg kein grosses Vertrauen, weilen dadurch nicht nur die Möglichkeit gezeigt, sondern auch die *tria quadrata* selbst *in genere* angegeben werden könnten, welches letstere ich gleichwohl für unmöglich halte. Die *Demonstration* müsste ungefehr meines Erachtens derjenigen ähnlich seyn, wodurch ich bewiesen, daß *omnis numerus primus* $4n+1$ eine *summa duorum quadratorum* sey. Ich beweise erstlich, daß eine jede *summa duorum quadratorum* $aa+bb$ (wo *a et b numeri inter se primi* gesetzt werden) keine andern *divisores* haben könne, als welche gleichfalls *summae duorum quadratorum* sind. Hernach so offt $4n+1$ ein *numerus primus* ist kan ich unendlich viel Zahlen *hujus formae* $p^{2n}+q^{2n}$ angeben, welche durch $4n+1$ *divisibel* sind; da nun $p^{2n}+q^{2n}$ eine *summa duorum quadratorum* ist, so muß auch $4n+1$ als ein *Divisor* derselben *formul*, gleichfalls eine *summa duorum quadratorum* seyn. Die *Resolutio autem ipsa in duo quadrata* wird hierdurch nicht offenbar, sondern nur die Möglichkeit derselben bewiesen.

Man kan aber diese *Proposition* daß $8m+3$ allzeit eine *summa trium quadratorum* seye in vielerley andere *Form*en einkleiden, welche vielleicht leichter zu *demonstrir*en seyn dürften.

Als wann man beweisen könnte, daß *proposito numero quocunque integro* m, für p und q allzeit solche Werthe anzugeben möglich wären, so daß nachfolgende *aequatio cubica*

$$x^3 - (2p-1)\ xx + (2pp - 2p - 1 - 4m)\ x - q = 0$$

alle drey *radices rationales* überkäme, so wäre die Sach auch bewiesen. Dann wann a, b, c die *Radices* dieser *aequation* wären, so würde $2p - 1 = a + b + c$; *et* $2pp - 2p - 1 - 4m = ab + ac + bc$; weil nun

$$4pp - 4p + 1 = aa + bb + cc + 2ab + 2ac + 2bc$$

so *subtrahire* man davon

$$\underline{4pp - 4p - 2 - 8m = 2ab + 2ac + 2bc}$$

so bleibt übrig

$$8m + 3 = aa + bb + cc.$$

Ich habe aber hiezu schlechte Hoffnung, weil die *Demonstration* nur auf *valores integros ipsius* m gehen müsste, dann *in fractis* wäre die Sach offt unmöglich.

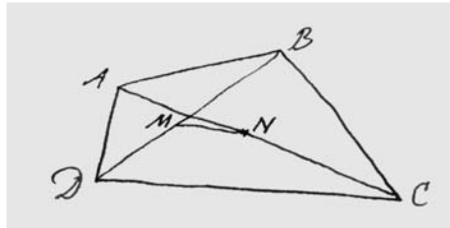
Ich habe diese Sach auch folgender gestalt betrachtet: Es muß allzeit möglich seyn von $8m + 3$ ein solches *Quadrat* $4xx - 4x + 1$ zu *subtrahi*ren daß der *Rest* $8m + 2 - 4xx + 4x$ in zwey *quadrata resolubel* werde; folglich muß auch die Helfte davon $4m + 1 - 2xx + 2x$ eine *summa duorum quadratorum* seyn, nehmlich $4yy - 4y + 1 + 4zz$, allso würde

$$m = \frac{xx - x}{2} + yy - y + zz.$$

Wann man dahero beweisen könnte daß diese *Formul* $\dfrac{xx-x}{2} + yy - y + zz$ alle *numeros integros* in sich begreiffe so wäre das *Theorema* auch bewiesen.

Fermat sagt in seinen *Observationibus ad Diophantum* daß diese *aequatio* $x^n = y^n + z^n$ *in numeris rationalibus* allzeit unmöglich sey, *exceptis casibus* $n = 1$ *et* $n = 2$; nehmlich weder eine *summa duorum cuborum* könne ein *Cubus*, noch eine *summa duorum biquadratorum* ein *biquadratum*, noch *in genere eine summa duarum potestatum altiorum* eine gleiche *Potestas* seyn könne. Er sagt daß er darfür eine sehr *ingenieuse demonstration* habe, welche er aber wegen Mangel des Raums nicht beysetzen könne: es ist allso sehr schad daß auch diese nebst vielen andern verlohren gegangen.[5]

Ich bin neulich auf nachfolgendes *Theorema Geometricum* gefallen, welches mir merkwürdig zu seyn scheinet:[6] Nehmlich gleichwie in einem jeden *Parallelogrammo* die *summa quadratorum laterum* der *summae quadratorum diagonalium* gleich ist, so ist in einem jeden *quadrilatero non parallelogrammo* die *summa quadratorum laterum* grösser als die *summa quadratorum diagonalium*; und der *Excessus* kan allso *concinne* angegeben werden:



Man *bisecire* in dem *Trapezio* $ABCD$ die *Diagonales* AC und BD in N *et* M und *jungi*re die Linie MN so wird seyn:

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4 \cdot MN^2.$$

Ewr. Hochwohlgebohrnen statte allen ergebensten Dank ab für die gute Aufnahm des H. *Prof.* Brauns,[7] und will hoffen es werde jedermann mit seiner Aufführung wohl zu frieden seyn.

Schließlich empfehle ich mich samt den meinigen zu Ewr. Hochwohlgeb. beständigen Gewogenheit und Gnade, und habe die Ehre mit der schuldigsten *Veneration* zu verharren

Ewr. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 13$^{\text{ten}}$ *Febr.*
1748.

R 839 Reply to n° 124
Berlin, February 13th, 1748
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 219–220v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 443–446; *Euler-Goldbach* (1965), p. 285–287

126
Goldbach to Euler
Petersburg, (March 26th) April 6th, 1748

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Professor*

In Eurer Hochedelgebohrnen Schreiben vom 2.$^{\text{ten}}$ *Sept.* hatte ich die Worte: "daß P um 1 immer kleiner als ein quadrat seyn muß", für eine zur vorher gehenden Formul $Q = P + \sqrt{2P^2 \pm 2}$ gehörige *condition* angesehen, welche sich aber, wie ich nunmehro finde bloß auf die *aequation* $z^2 = 4p^2 - 1 = P$ *rapporti*ren, so daß alles seine Richtigkeit hat.[1]

Wann Ew. HochEdelg. wie Sie vermuthen, *demonstrir*en könnten daß alle *numeri* $8m+3$ wann Sie *primi* sind zu dieser Formul $2a^2+b^2$ gebracht werden können,[2] so werden Sie auch leicht finden daß alle *numeri primi* $4m+3$ zu dieser *formul* gehören $2a^2+b^2+c^2$, weil dieselbe meines erachtens alle *numeros impares* in sich begreifft, wann aber solches nur von allen *numeris primis demonstrir*et wäre so würde offenbar seyn daß alle *numeri integri affirmativi* aus 4 *quadratis* bestehen.

Was die *transmutationes* einer *Summae quatuor quadratorum* betrifft, so habe ich derselben unterschiedene gefunden welche ich folgender gestalt *exprimi*ren will daß $\triangle$ einen *numerum trigonalem*, $2\,\triangle$ ein *duplum trigonalis*, $3\,\triangle$ ein *triplum &c.*, $\square+\square$ ein *aggregatum duorum qua*[*dra*]*torum*, $2\,\square$ ein *duplum quadrati &c.* bedeuten, solchem nach wird eine jede zahl sein[3]

$$
\begin{array}{llllll}
\text{(I.)} & 2\,\square+\square+4\,\triangle & \text{(IV.)} & 2\,\square+\square+\triangle & \text{(VII.)} & \triangle+2\,\triangle+4\,\triangle \\
\text{(II.)} & \square+2\,\square+2\,\triangle & \text{(V.)} & \square+\triangle+4\,\triangle & \text{(VIII.)} & \square+\square+2\,\triangle \\
\text{(III.)} & \square+2\,\triangle+4\,\triangle & \text{(VI.)} & 2\,\square+\triangle+2\,\triangle & \text{(VIIII.)} & \dfrac{(\square+\square+\square)}{2}
\end{array}
$$

aus welchen noch viele andere *deduci*ret werden können.

In der nachfolgenden formel

$$a^2-a+b^2-b+c^2-c+d^2-d+1$$

ist offenbar daß selbige eine *Summa quatuor quadratorum* wird wann $d = -a-b-c+1$, wann aber auch d *pro numero quocunque* genommen wird muß die *formula* dennoch eine *summa quatuor quadratorum* seyn.[4]

Sollte mir etwas neues von dieser Materie einfallen, werde ich das Vergnugen haben selbiges Eurer Hochedelg. zu *communici*ren. Indessen verharre mit vieler hochachtung

Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.^{t} Petersburg
den 6. *Apr. st. n.* 1748.

P. S. Wann die *numeri* a, b, c *in casu* $2a^2+b^2+c^2=2n+1$ gegeben sind, so können daraus die 4 *quadrata pro summa* $2n+3$, $4n+3$, $6n+3$, $4n+6$, $8n+6$ *&c.*, imgleichen vor $2n+2p^2+1$, $4f^2n+2f^2+d^2$, allwo p, f, d *numeri integri quicunque* sind, leicht angegeben werden, und diese *formula* $2a^2+4b^2+(2c+1)^2+2$ ist allezeit gleich einer andern $2A^2+4B^2+(2C+1)^2$, von welcher letzteren *proposition* aber die *demonstratio rigorosa* fehlet.[5]

In Ermangelung einer bequemen Gelegenheit, inliegendes Schreiben an Hn *D*[*octor*] *Gmelin* zu befordern, nehme ich die freyheit es an Ew. Hochedelg. zu *adressi*ren, mit Bitte, weil gar kein *periculum in mora* ist, es so lange bey sich zu behalten biß sich ein Weg ereignet wodurch es *franco* an den Hn *Doctor* gelangen kan.[6]

R 840 Reply to n° 125
Petersburg, (March 26th) April 6th, 1748
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 121–122r
Partial copy, 3 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 52r–53r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 447–449; *Euler-Goldbach* (1965), p. 287–288

127
Euler to Goldbach
Berlin, May 4th, 1748

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Die von Ewr. Hochwohlgeb. verlangten Bücher wird H. *Haude* besorgen, die vergessene *Pamela*[1] auf die neue Rechnung bringen. Den Brief an H. *D*[*octo*]^r *Gmelin* habe ich sogleich nach Tübingen abgefertiget.[2]

Wann der Satz wahr ist, daß $8m+3=2aa+bb$, so offt $8m+3$ ein *numerus primus* ist, so sehe ich nicht daß auch immer seyn müsse $4n+3=2aa+bb+cc$, so offt $4n+3$ ein *numerus primus* ist, es wäre dann daß man beweisen könnte, daß in diesem Fall immer wäre $4n+3=8m+3+4\,(2p+1)^2$; vielleicht aber ist dieses sogar wahr, wann auch $4n+3$ kein *numerus primus* ist. Zum wenigsten deucht mich daß

$$8n+7=(8m+3)\,(2q+1)^2+4\,(2p+1)^2\,,$$

existente $8m+3$ *numero primo*. Wäre nun dieses wa[h]r, so würden freylich alle *numeri primi* und folglich gar alle Zahlen *summae quatuor quadratorum* seyn. Allein ich glaube kaum, daß so wohl bey diesem als bey andern *Fermatiani*schen *Theorematibus* mit *general formul*n etwas auszurichten ist.[3] Dann, was das *Theorema* anlangt, daß eine jegliche Zahl eine *summa trium trigonalium* sey, so ist solches nur von *numeris integris* zu verstehen, und würde daher sogar unmöglich seyn diesen *general* Satz

$$n=\frac{aa+a}{2}+\frac{bb+b}{2}+\frac{cc+c}{2}$$

zu beweisen, weil derselbe sogar in viel Fällen nehmlich wann $n=\frac{1}{2}$, oder $\frac{3}{2}$ oder $\frac{5}{2}$ *etc.* falsch wäre. Dann wann dieser Satz auch für gebrochene Werthe von n wahr wäre, so würde eine jegliche Zahl so gar eine *summa* 3 *quadratorum* seyn können indem $8n+3=(2a+1)^2+(2b+1)^2+(2c+1)^2$, und $8n+3$ alle Zahlen in sich begriffe; allso kan Ewr. Hochwohlgeb. VIIII. *Formul*, krafft welcher eine jede Zahl seyn soll $= \dfrac{\square + \square + \square}{2}$, wofern kein Schreibfehler darinn befindlich nicht statt finden,[4] dann wann *quivis numerus* $n = \dfrac{\square + \square + \square}{2}$, so würde *quivis numerus par* $2n = \square + \square + \square$, welches doch bey unendlich vielen als 28, 60 *etc.* nicht angeht. Hingegen kommt mir die VIII. *Formul* $n = \square + \square + 2\,\triangle$ sehr merkwürdig vor, von deren Wahrheit ich durch die *Induction* bin überführt worden, ungeacht ich nicht sehe wie dieselbe aus dieser $n = \square + \square + \square + \square$ oder dieser $n = \triangle + \triangle + \triangle$ folget.

Die *Formul*

$$aa - a + bb - b + cc - c + dd - d + 1$$

ist *generaliter* und allso nicht allein in dem Fall da $a + b + c + d = 1$ eine *summa* 4 *quadr*[*atorum*], dann dieselbe ist

$$= \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(d - \frac{1}{2}\right)^2 :$$

dann ungeacht diese *quadrata fracta* sind, so ist doch gewiß, *omnem numerum, qui sit summa quatuor quadratorum fractorum, eundem in integris esse* 4 *quadr*[*atorum*] *summam.*[5] Folgendes *Theorema* kan auch dienen in vielen fällen die 4 *quadr*[*ata*] selbst zu bestimmen, woraus eine Zahl zusammen gesetzt ist: *si* $m = aa + bb + cc + dd$ *et* $n = pp + qq + rr + ss$ *erit*[6]

$$mn = A^2 + B^2 + C^2 + D^2$$

existente:

$$\begin{aligned} A &= ap + bq + cr + ds \\ B &= aq - bp - cs + dr \\ C &= ar + bs - cp - dq \\ D &= as - br + cq - dp; \end{aligned}$$

weil man nun die Zahlen a, b, c, d, p, q, r, s so wohl *affirmative* als *negative* annehmen, dieselben ferner auch nach Belieben mit ein ander *combinir*en oder ihre ordnung verändern kan, so ist die *resolutio producti mn* auf sehr vielerley verschiedene Arten möglich.

Meines Erachtens ist allso nicht leicht eine *Demonstration* von dergleichen *Fermatiani*schen *Theorematibus* zu erwarten, so lang man die *numeros trigonales*, *tetragonales*, *pentagonales*, *etc.* durch die gewöhnlichen *general formul*n ausdrückt, weil in denselben auch die *numeri fracti* mit begriffen sind, welche doch in den meisten *Theor*[*ematibus*] ausgeschlossen werden. Ich habe mir zu diesem Ende die Sach folgender gestalt vorgestellt:[7]

Es sey

$$s = 1 + x^1 + x^3 + x^6 + x^{10} + x^{15} + x^{21} + x^{28} + etc.$$

wo keine andere *potestates ipsius x* vorkommen, als deren *Exponentes* sind $= \triangle$. Wann man nun das *Quadratum* dieser *Seriei* nimmt, so wird $ss =$ einer *seriei*, in deren[!] keine andere *potestates ipsius* x vorkommen, als deren *exponentes* sind $= \triangle + \triangle$, und s^3 wird gleich einer *seriei* da der *potestates ipsius x exponent*en sind $= \triangle + \triangle + \triangle$. Wann man nun beweisen könnte daß in der *serie* s^3 alle *potestates ipsius* x vorkommen, so wäre dieses ein Beweiß, *omnem numerum integrum esse summam trium trigonalium*. Diese *series* lassen sich aber leicht *generaliter* bestimmen: Dann es sey

$$s^n = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + Gx^7 + Hx^8 + Ix^9 + etc.$$

so sind die *valores* dieser *Coefficient*en für die verschiedenen *Valores* von n wie folgt:
si $n = 1$,

$$\begin{array}{c} 1, A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \\ 1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0 \end{array}$$

dazu *add*[*i*re] eben die *series* wie zu sehen

$$\begin{array}{r} 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0 \\ 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \\ 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0 \\ 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0 \\ 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1 \\ 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0 \\ \hline \end{array}$$

si $n = 2$,

$$1, 2, 1, 2, 2, 0, 3, 2, 0, 2, 2, 2, 1, 2, 0, 2, 4, 0, 2, 0, 1, 4, 2, 0, 2, 2, 0, 2$$

dazu *addi*re [*ea*]*ndem seriem* wie zu sehen

$$\begin{array}{r} 1, 2, 1, 2, 2, 0, 3, 2, 0, 2, 2, 2, 1, 2, 0, 2, 4, 0, 2, 0, 1, 4, 2, 0, 2, 2, 0 \\ 1, 2, 1, 2, 2, 0, 3, 2, 0, 2, 2, 2, 1, 2, 0, 2, 4, 0, 2, 0, 1, 4, 2, 0, 2 \\ 1, 2, 1, 2, 2, 0, 3, 2, 0, 2, 2, 2, 1, 2, 0, 2, 4, 0, 2, 0, 1, 4 \\ 1, 2, 1, 2, 2, 0, 3, 2, 0, 2, 2, 2, 1, 2, 0, 2, 4, 0 \\ 1, 2, 1, 2, 2, 0, 3, 2, 0, 2, 2, 2, 1 \\ 1, 2, 1, 2, 2, 0, 3 \\ \hline \end{array}$$

si $n = 3$

$$1, 3, 3, 4, 6, 3, 6, 9, 3, 7, 9, 6, 9, 9, 6, 6, 15, 9, 7, 12, 3, 15, 15, 6, 12, 12, 9, 12\ etc.$$

Wann man allso zeigen könnte, daß in dieser *serie pro* $n = 3$ kein *terminus* $= 0$, so wäre bewiesen, daß eine jede gantze Zahl eine *summa trium trigonalium* ist. Gleich wie man aus der *serie* $n = 2$ sieht, da viel *termini* $= 0$, daß viel Zahlen auch nicht *summae* 2 *trigon*[*alium*] sind nehmlich 5, 8, 14, 17, 19, 23, 26, *etc.*

Auf gleiche Weise kan auch die *Compositio numerorum ex quadratis* vorgestellt werden; dann ich setze zu diesem Ende

$$s = 1 + x^1 + x^4 + x^9 + x^{16} + x^{25} + x^{36} + x^{49} + etc.$$

und

$$s^n = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + Gx^7 + Hx^8 + Ix^9 + etc.$$

Hier werden nun die *Coefficientes singularum potestatum ipsius* x, *pro valoribus ipsius* n *successive* folgender Gestalt gefunden.

Exponentes ipsius x

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ etc.$$

Coefficientes casu $n = 1$

$$1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ etc.$$

dazu *addire*

$$\begin{array}{r} 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0 \\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0 \\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0 \\ 1 \\ \hline \end{array}$$

Coeff [*icientes*] *casu* $n = 2$

$$1,\ 2,\ 1,\ 0,\ 2,\ 2,\ 0,\ 0,\ 1,\ 2,\ 2,\ 0,\ 0,\ 2,\ 0,\ 0,\ 2$$

dazu *add*[*i*]re

$$\begin{array}{r} 1,\ 2,\ 1,\ 0,\ 2,\ 2,\ 0,\ 0,\ 1,\ 2,\ 2,\ 0,\ 0,\ 2,\ 0,\ 0 \\ 1,\ 2,\ 1,\ 0,\ 2,\ 2,\ 0,\ 0,\ 1,\ 2,\ 2,\ 0,\ 0 \\ 1,\ 2,\ 1,\ 0,\ 2,\ 2,\ 0,\ 0 \\ 1 \\ \hline \end{array}$$

Coeff [*icientes*] *casu* $n = 3$

$$1,\ 3,\ 3,\ 1,\ 3,\ 6,\ 3,\ 0,\ 3,\ 6,\ 6,\ 3,\ 1,\ 6,\ 6,\ 0,\ 3$$

*addi*re

$$\begin{array}{r} 1,\ 3,\ 3,\ 1,\ 3,\ 6,\ 3,\ 0,\ 3,\ 6,\ 6,\ 3,\ 1,\ 6,\ 6,\ 0 \\ 1,\ 3,\ 3,\ 1,\ 3,\ 6,\ 3,\ 0,\ 3,\ 6,\ 6,\ 3,\ 1 \\ 1,\ 3,\ 3,\ 1,\ 3,\ 6,\ 3,\ 0 \\ 1 \\ \hline \end{array}$$

Coeff [*icientes*] *casu* $n = 4$

$$1,\ 4,\ 6,\ 4,\ 5,\ 12,\ 12,\ 4,\ 6,\ 16,\ 18,\ 12,\ 8,\ 16,\ 24,\ 12,\ 5.$$

Hier kommen in der *serie* für $n = 2$ noch häuffig 0 vor als bey 3, 6, 7, 11, 12, 14, 15, welches ein Zeichen ist, daß diese Zahlen nicht sind $\Box + \Box$. In der *serie* $n = 3$ findet sich die 0 bey den Zahlen 7, 15, dahero diese Zahlen nicht *summae trium* $\Box$

sind; in der *serie* $n = 4$ aber kommt keine 0 mehr vor: dahero müsste nur dieses bewiesen werden können.

Auf beyligendem Zettul habe ich die *Verba Fermatii* über seine *Demonstrationes Theorematum copir*t,[8] woraus man ungefehr merken kan, aus was für Gründen dieselben hergeleitet waren, und eben deswegen ist der Verlust derselben meines Erachtens um soviel mehr zu bedauren.

Hier geht das Gerücht, daß von der *Academi*e zu *Paris* für dieses Jahr der gantze Preiß mir zuerkannt worden, worüber vielleicht morgen die Nachricht selbst erhalten werde.[9]

Meine gantze *Famille* lässt sich Ewr. Hochwohlgeb. auf das gehorsamste empfehlen und ich habe die Ehre mit der schuldigsten Hochachtung zu verharren

Ewr. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 4 *May*
1748

Fermat[ius] in Observ[ationibus] ad Diophantum[10]

Imo propositionem generalem et pulcherrimam nos primi deteximus nempe omnem numerum (integrum) vel esse triang[ularem], vel ex 2 *vel* 3 *triang[ularibus] compositum: Item vel esse quadratum, vel ex* 2 *vel* 3 *vel* 4 *quadratis compositum: Item esse vel pentagonum, vel ex* 2 *vel* 3*, vel* 4*, vel* 5 *pentagonis compositum, et sic in infinitum: Hujus autem propositionis demonstrationem quae ex multis, variis et abstrusissimis numerorum mysteriis derivatur, hic apponere non licet. Opus enim et librum integrum huic operi destinare decrevimus, et Arithmeticen hac in parte ultra veteres ac notos terminos mirum in modum promovere.*

R 841 Reply to n° 126
Berlin, May 4th, 1748
Original, 3 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 223–224v, 223ᵃr
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 450–455; *Euler-Goldbach* (1965), p. 288–291

128
Goldbach to Euler
Petersburg, (May 28th) June 8th, 1748

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*

Ich bin noch gäntzlich der Meinung daß nicht nur $4n+3$ sondern auch $4n+1$ und folglich ein jeder *numerus impar* zu dieser formul gebracht werden kan: $2a^2+b^2+c^2$, welches auch in der That eben so viel ist, als die *sub n.º* II von mir angeführte formul $\square + 2\,\square + 2\,\triangle$,[1] so daß, wann Ew. Hoched. an dieser letztern, wie ich sehe, nicht zweiffeln, auch die *aequatio* $2n+1 = 2a^2+4b^2+c^2$ gewiß ist. Hingegen kan die *sub n.º* 8 aus versehen gesetzte $\dfrac{\square+\square+\square}{2}$ nicht statt haben,[2] als an deren Stelle es heissen muß $2\,\square + \triangle + \triangle$ oder auch $\dfrac{\square+\square}{2} + \triangle$. Ausser diesem ist aber in meiner *copie* von der Tabelle der Formeln noch ein lächerlicher Fehler so sich vermuthlich auch im Original finden wird, indem *sub n.º* I *et n.º* IV eben dieselbe Formel $2\,\square + \square + \triangle$ stehet.[3] Was diese: $\square + \square + 2\triangle$, welche Ew. Hochedelgeb. für merckwürdig halten, betrifft so fliesset dieselbe alsofort aus der *consideration* daß ein jeder $4n+1$ eine *summa duorum quadratorum parium et unius imparis* ist, gleichwie im gegentheil $4n+2$ aus *duobus imp*[*aribus*] *et uno pari* bestehet.

Ohngeachtet ich mir zur *demonstration* des *Theorematis Ferm*[*atiani*] wenige hofnung mache,[4] so habe dennoch nach anleitung desselben einige andere gefunden die ich vor eben so wahr halte, als zum Ex[empel]:

Omne quadratum numeri imparis vel numeri impariter paris, modo sit minus quam $8n+7$*, est unum ex quatuor quadratis quorum summa est* $8n+7$. Ingleichen *Omnis numerus* $8n+2$ *est huius formae* $(2\pm 2)^{2e} + \square + \square$.[5]

Die hiebey liegende *Demonstration* von Ew. HochEdelg. *theoremate de quadratis laterum trapezii* will ich eben nicht für die kürtzeste ausgeben, ich glaube aber daß man gar leicht auf noch viel weitläufftigere verfallen kan.[6] Die Gelegenheit dazu hat neulich ein guter freund gegeben, welcher mir sagte daß er einen *casum particularem* davon, nemlich in einem *trapezio* wo *duo anguli recti* und *duo latera parallela* sind, *demonstri*ren könnte.

Ew. HochEdelg. würden mich sehr *obligi*ren wenn Sie den Hn *Haude* wollten ersuchen lassen daß er mir zwey *exemplaria* von der berechnung der bevorstehenden Sonnenfinsterniß nach den *Euler*ischen Tabellen auf der Post mit der *inscript*[*ione*] *Gedruckte Sachen* zusenden möchte, jedoch mit dieser *conditione sine qua non* daß die *exemplaria* noch wenigstens 8 Tage vor der Sonnenfinsterniß allhie ankommen.[7]

Daß Ew. HochEdelg. das gantze *praemium* von der *Acad*[*emie*] *Royale de*[*s*] *Sc*[*iences*] erhalten haben, ist mir eine sehr angenehme Nachricht gewesen.[8] Ich *gratuli*re Deroselben dazu von hertzen und meine hofnung daß Sie bey allen künfftigen Aufgaben nicht weniger *réussi*ren werden wird immer grösser.

Von Dero werthesten *familie* Wohlstande bin ich zum Theil durch den Hn *Prof. Braun* benachrichtiget worden; mir wird es insonderheit lieb seyn etwas von den ferneren *progres*sen des Hn *Joannis Alberti* zu erfahren weil ich grosse hofnung habe daß er zu seiner zeit Eurer HochEdelg. Stelle in *S.*^{t} Petersburg wieder vertreten wird.

Ich verharre mit vieler hochachtung
Eurer HochEdelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.^{t} *Petersbourg*
den 8. *Jun.* 1748 *st. n.*

R 842 Reply to n° 127
Petersburg, (May 28th) June 8th, 1748
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 123–124v
Partial copy, 2 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 53rv
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 456–457; *Euler-Goldbach* (1965), p. 292–293

129
Euler to Goldbach
Berlin, June 25th, 1748

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats*-Rath

Wegen der in Nürnberg herausgekommenen Vorstellung der bevorstehenden Sonnen-Finsternüß, wovon Ewr. Hochwohlgeb. zwey *Exemplaria* verlangen,[1] hat sich ein solcher Zufall ereignet, daß ungeacht davon einige hundert *Exemplaria* hier ligen, es dennoch nicht möglich ist Dero *Ordr*en ein Genügen zu leisten. Ihro Königl[iche] *Majestä*t haben zum Besten der *Academi*e auf alle hier einkommende Land-*Chart*en einen *Impost* geleget, welchen die hier befindlichen Nürnberger Bilder Händler noch nicht entrichten wollen, dahero die ihnen zugehörigen *Chart*en noch auf dem hiesigen Packhof ligen. Es sind mir zwar vor einiger Zeit 12 Stük von diesen Sonnen-Finsternüß-*Chart*en zum *Praesent* geschickt worden; welche ich aber alle hier ausgetheilet biß auf ein *Exemplar*, so in Rahmen eingefasset. Hätte ich Ewr. Hochwohlgeb. Willen ehe gewusst, so würde ich mit den grösten Freuden davon einige Stück auf der Post überschickt haben. Bey diesen Umständen wusste ich nun keinen anderen Rath, als den H. Spener, welcher des verstorbenen H. *Haude* Buch Handel übernommen zu bitten unverzüglich nach Leipzig zu schreiben, welches vorgestern geschehen, und daselbst *Ordres* zu stellen, daß von da unmittelbar an Ewr. Hochwohlgeb. die verlangten *Exemplaria* durch die Post abgeschickt werden, welches auf den morndrigen Tag geschehen kan: da nun solche nicht über drey Wochen unter Wegen bleiben werden, so hoffe daß dieselben noch wohl 8 Tage vor der Finsternüß ankommen. Hier wird dieselbe insonderheit merkwürdig seyn, da sie nicht nur *annularis* seyn, sondern auch auf den Mittag einfallen wird. H. Spener wird auch nächstens die von Ewr. Hochwohlgb. letst verlangten Bücher abschicken, zu welchen ich die Freyheit genommen ein *Exemplar* von meiner neulich in *Lausanne* herausgekommenen *Introductione in Analysin infinitorum* zu legen;[2] welches als ein geringes Merkmal meiner Pflichtschuldigsten Ergebenheit gütigst aufzunehmen bitte.

Nun bin ich endlich auf den Grund der mir neulich von Ewr. Hochwohlgeb. überschriebenen schönen *Formul*n gekommen wobey ich das in der Abschrifft derselben begangene geringe Versehen sogleich eingesehen.[3] Dieselben gründen sich meines Erachtens auf folgende drey Haupt *Formul*n I. $n = \triangle + \triangle + \triangle$; II. $4n + 1 = \square + \square + \square$; und III. $4n + 2 = \square + \square + \square$; von deren Wahrheit ich schon längst völlig versichert bin, ungeacht ich davon keine *Demonstration* angeben kan.

Aus der ersten $n = \triangle + \triangle + \triangle$ folget $n = \frac{2aa+a}{2} + \frac{bb+b}{2} + \frac{cc+c}{2}$: Nun sey $a = d + e$ und $b = d - e$, so wird $n = dd + d + ee + \frac{2cc+c}{2}$; folglich ist auch eine jegliche Zahl $n = \square + 2\triangle + \triangle$: woraus zugleich erhellet daß immer $\triangle + \triangle = \square + 2\triangle$.

Aus der zweyten $4n + 1 = \square + \square + \square$ folget $4n + 1 = 4aa + 4bb + (2c + 1)^2$ allso $n = aa + bb + cc + c$, und dahero $n = \square + \square + 2\triangle$. Ferner da eine jede gantze Zahl $= aa + bb + cc + c$ so ist auch eine jede grade Zahl $2n = aa + bb + cc + c$ und allso

$$n = \frac{aa+bb}{2} + \frac{cc+c}{2} = \frac{\square + \square}{2} + \triangle.$$

Oder man setze $a = d + e$ und $b = d - e$ so wird

$$n = dd + ee + \frac{cc+c}{2} = \square + \square + \triangle.$$

Ebenfalls wird auch eine jede ungrade Zahl seyn $2n + 1 = aa + bb + cc + c$; da nun $cc + c$ immer grad ist, so muß von den Zahlen a und b die eine grad die andere ungrad seyn, dahero $2n + 1 = 4aa + (2b + 1)^2 + cc + c$, und allso

$$n = 2aa + 2bb + 2b + \frac{cc+c}{2},$$

folglich $n = 2\square + 4\triangle + \triangle$.

Die dritte *Formul* $4n+2 = \square+\square+\square$ gibt $4n+2 = 4aa+(2b + 1)^2+(2c + 1)^2$, allso ist $n = aa+bb+b+cc+c$ und dahero $n = \square+2\triangle+2\triangle$. Setzt man $b = d+e$, $c = d - e$ so wird

$$n = aa + 2dd + 2d + 2ee = \square + 2\square + 4\triangle.$$

Ferner ist auch $2n = \Box + 2\triangle + 2\triangle$, und allso $\Box$ grad, dahero wird $2n = 4aa + bb + b + cc + c$, und

$$n = 2aa + \frac{bb+b}{2} + \frac{cc+c}{2} = 2\Box + \triangle + \triangle.$$

Weil weiter $\triangle + \triangle = \Box + 2\triangle$ so ist $n = 2\Box + \Box + 2\triangle$; folglich auch $2n = 2\Box + 4\Box + 2\triangle$, und allso $n = \Box + 2\Box + \triangle$. Oder da auch $2n+1 = 2aa + (2b+1)^2 + cc + c$ so wird

$$n = aa + 2bb + 2b + \frac{cc+c}{2} = \Box + 4\triangle + \triangle.$$

Endlich ist auch $2n+1 = \Box + 2\triangle + 2\triangle = (2a+1)^2 + bb + b + cc + c$, und $n = 2aa + 2a + \dfrac{bb+b}{2} + \dfrac{cc+c}{2}$ oder

$$n = 4\triangle + \triangle + \triangle = \Box + 2\triangle + 4\triangle.$$

Allso ist auch $2n = 4\Box + 2\triangle + 4\triangle$ oder $n = 2\Box + \triangle + 2\triangle$ oder $2n+1 = (2a+1)^2 + 2\triangle + 4\triangle$ und allso

$$n = \triangle + 2\triangle + 4\triangle.$$

Da $4n+2 = 4aa + (2b+1)^2 + (2c+1)^2$ so ist

$$2n+1 = 2aa + 2bb + 2b + 2cc + 2c + 1.$$

Es sey $b = d+e$, $c = d-e$ so wird

$$2n+1 = 2aa + 4dd + 4ee + 4d + 1 = 2\Box + \Box + \Box.$$

Allso ist ein jeglicher *numerus impar* $2n+1 = 2\Box + \Box + \Box$: welches Ewr. Hochwohlgeb. erstes meines Erachtens sehr merkwürdiges *Theorema* war.

Alle diese hier gefundene *Formul*n sind allso folgende:

I.	$n = \triangle + \triangle + \triangle$	IV.	$n = \Box + \Box + \triangle$	VII.	$n = \Box + 2\Box + 4\triangle$
II.	$n = \Box + 2\triangle + \triangle$	V.	$n = 2\Box + \triangle + 4\triangle$	VIII.	$n = 2\Box + \Box + 2\triangle$
III.	$n = \Box + \Box + 2\triangle$	VI.	$n = \Box + 2\triangle + 2\triangle$	IX.	$n = \Box + 2\Box + \triangle$

X.	$2\Box + \triangle + \triangle = n$	XIII.	$n = 2\Box + \triangle + 2\triangle$
XI.	$\Box + 4\triangle + \triangle = n$	XIV.	$n = \triangle + 2\triangle + 4\triangle$
XII.	$4\triangle + \triangle + \triangle = n$	XV.	$2n+1 = \Box + \Box + 2\Box$.

Da so wohl $8n+3$ als $8n+6$ allzeit in 3 *Quadrata* zertheilt werden kan so folgt daß $8n+7-pp$ wann $pp = 8m+4$ oder $= 8m+1$ das ist, wann p entweder ein *numerus impar*, oder *impariter par* ist, allzeit eine *summa trium quadratorum* sey, wie Ewr. Hochwohlgeb. gemeldet haben.

Daß aber *omnis numerus* $8n+2$ in dieser *Form* $(2\pm 2)^{2e}+\Box+\Box$ enthalten sey, kan ich nicht recht begreiffen.[4] Sollte der Sinn davon dieser seyn daß allzeit $8n+2=\Box+\Box+q$, da q ist entweder 0, oder 16 oder 256 oder 4096 *etc.* welches die Werthe sind von $(2+2)^{2e}$, so würde solches in dem Fall $8n+2=154$ nicht statt finden, indem $154-q$ nimmer eine *summa duorum quadratorum* wird; es wäre dann daß der *exponens* e auch 0 seyn könnte und folglich auch $q=1$: ob ich gleich zweifle ob auch in diesem Fall sich keine Ausn[ahme] finden sollte.

Ich bin neulich auf eine sonderbare Betrachtung gefallen, vermittelst welcher viel *Diophante*ische *Problemata* sehr leicht können *solvir*t werden. Wann man zum *Exempel* für x, y, z *numeros rationales* bestimmen kan, daß dieser *Aequation*

$$xx+yy+zz-2x-2y-2z+1=0$$

*satisfacir*t wird, so müssen alle *surd*ische[5] *Formul*n in nachfolgenden *aequation*en, so aus jener entstehen, *rational* werden.

$$\begin{array}{ll}
x=1\pm\sqrt{(2y+2z-yy-zz)}\,; & x-y=1\pm\sqrt{(2z+4y-2xy-zz)}\\
y=1\pm\sqrt{(2x+2z-xx-zz)}\,; & y-x=1\pm\sqrt{(2z+4x-2xy-zz)}\\
z=1\pm\sqrt{(2x+2y-xx-yy)}\,; & x-z=1\pm\sqrt{(2y+4z-2xz-yy)}\\
x+y=1\pm\sqrt{(2z-zz+2xy)}\,; & z-x=1\pm\sqrt{(2y+4x-2xz-yy)}\\
x+z=1\pm\sqrt{(2y-yy+2xz)}\,; & y-z=1\pm\sqrt{(2x+4z-2yz-xx)}\\
y+z=1\pm\sqrt{(2x-xx+2yz)}\,; & z-y=1\pm\sqrt{(2x+[4]y-2yz-xx)}
\end{array}$$

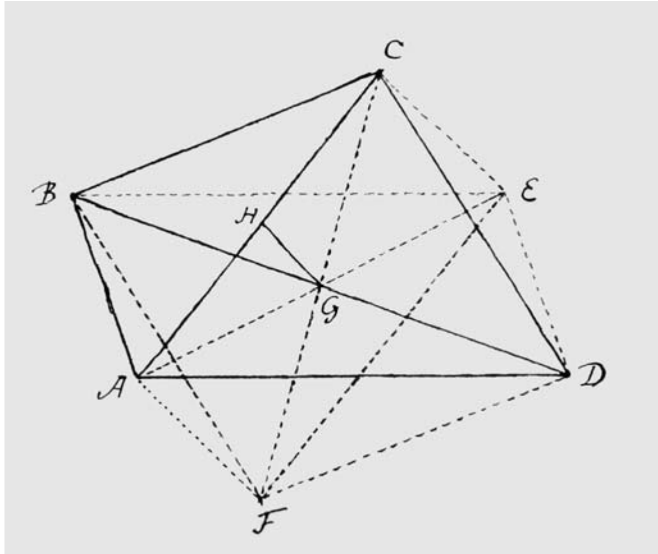
$$x+y+z=1\pm\sqrt{(2xy+2xz+2yz)}\,.$$

Wann allso nur eine von diesen *Formul*n *rational* gemacht wird, welches sehr leicht ist, so werden alle übrige 12 von selbsten *rational*. Solches geschieht allso nach der ersten wann

$$\begin{aligned}
x &= \frac{pp+qq+rr+2pr+2qr}{pp+qq+rr};\\
y &= \frac{2p\,(p+q)}{pp+qq+rr};\\
z &= \frac{2q\,(p+q)}{pp+qq+rr}.
\end{aligned}$$

Wann allso drey solche Zahlen x, y, z gesucht werden sollten, daß alle obigen XIII *surd*ischen *formul*n *rational* werden, welches *problema* nach der gewöhnlichen Art beynahe unmöglich seyn würde, so können doch hierauß leicht unendlich viel *solution*en angegeben werden. Als wann $p=1$, $q=2$, $r=2$ so wird $x=\frac{7}{3}$; $y=\frac{2}{3}$; $z=\frac{4}{3}$.[6]

Eben jetz als den 24ten bekomme ich aus Petersburg mit der fahrenden Post ein Paket vom 28ten *Maj. st. v.* allso vom 8ten *Jun. st. n.*[7] welches dahero nicht mehr als 16 Tag unter wegs gewesen, woraus ich schliesse daß die *Chart*en aus Leipzig noch früh genug ankommen werden.[8]



Meine *Demonstration* des vorhergemeldten *Theorematis*[9] verhält sich allso: *Sit propositum trapezium ABCD cum diagoniis AC, BD; compleatur primo parallelogrammum ABED cujus diagonales AE, BD se in G bisecabunt. Tum ducta CE compleatur parall[elogrammum] ACEF cum Diag[onali] CF, ductisque BF, DF erit quoque BCDF parall[elogrammum]. Jam cum in omni parallelogrammo*

$$\textit{summa quadr[atorum] diag[onalium]} = \textit{summae quadr[atorum] laterum,}$$

ex $\square$ *ACEF erit*

$$AE^2 + CF^2 = 2AC^2 + 2CE^2$$

ex $\square$ *BCDF erit*

$$BD^2 + CF^2 = 2BC^2 + 2CD^2$$

ergo

$$2AC^2 + 2CE^2 - AE^2 = 2BC^2 + 2CD^2 - BD^2 = CF^2.$$

Porro $\square$ *ABED dat*

$$AE^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2AD^2,$$

quae aequatio ad priorem addita dat

$$\begin{array}{lcl}
2AC^2 + 2CE^2 + BD^2 & = & 2AB^2 + 2BC^2 + 2CD^2 + 2AD^2 - BD^2 \\
\textit{add[atur]} \qquad BD^2 & & \qquad (\textit{et divid[atur] per } 2) \qquad BD^2 \\
\hline
AC^2 + CE^2 + BD^2 & = & AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2.
\end{array}$$

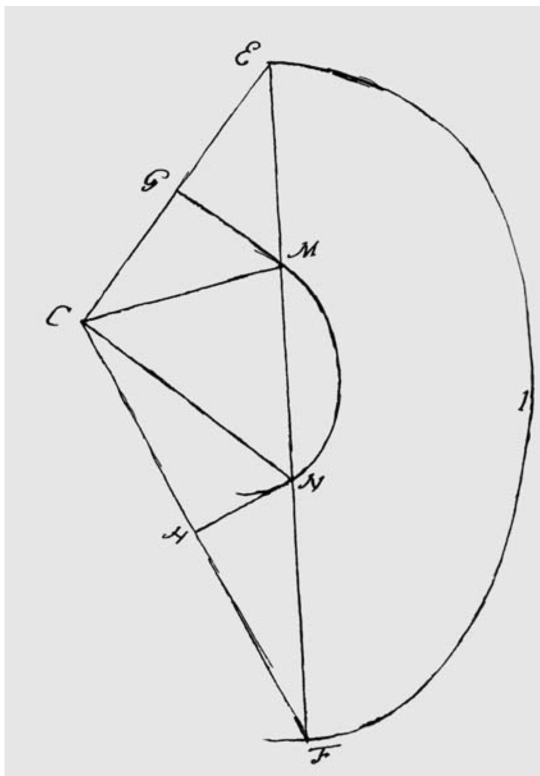
At quia AE uti et BD bisecta est in G, bisecetur quoque AC in H et ducta GH erit parallela ipsi CE ejusque semissi aequalis, ita ut sit $CE^2 = 4GH^2$ *quo substituto erit*

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2 + 4GH^2.$$

Q. E. D.

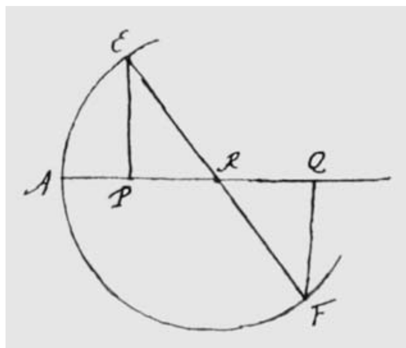
Wann man wie gemeiniglich in der *Geometrie* zu geschehen pflegt, eine *Demonstrationem more Veterum* verlangt, so verdienet diese einen grossen Vorzug vor der[je]nigen, welche Ewr. Hochwohlgeb. mir zu überschreiben die Güte gehabt;[10] will man aber nur von der Wahrheit worauf doch die Haupt Sach ankommt, überzeuget seyn, so würde meine *Demonstration* allen Vorzug verlieren, weil ich darinn die angeführte Eigenschafft der *Parallelogrammorum* voraussetze, deren Ewr. Hochwohlgeb. nicht nur nicht nöthig haben, sondern dieselbe auch zugleich mit beweisen.

H. *Oechliz* aus Leipzig, welcher nach *S.^{t} Petersburg* zur *Mathesi sublimiori* beruffen worden die *Vocation* aber ausgeschlagen,[11] hat eine sehr schöne *Solution* des schon längst erwehnten *Problematis catoptrici* erfunden, welche Ewr. Hochwohlgeb. unfehlbar gefallen wird.[12]



Es sey MN eine von den gesuchten *Curvis* welche alle *radios ex puncto fixo C emissos post geminam reflexionem in M et N factas*[!] *in idem punctum C remittat.* Man verlängere MN beyderseits *in E et F* so daß $ME = CM$ et $NF = CN$: so wird die *longitudo EF constans* seyn, und die *Punct*en *E et F* werden in einer solchen krummen Linie EF seyn, daß die grade Linie EF beyderseits auf dieselbe *perpendicular* fällt. Die gantze Sach kommt allso darauf an, daß man solche krummen Linien EF finde, daß die auf ein jegliches *Punct* derselben gezogenen *Perpendicular* Linien EF dieselbe krumme Linie noch mal *in F ad angulos* *rectos* durchschneiden, dann diese Eigenschafft schliesst jene schon in sich, daß die *quantitas lineae hujus EF constans* seyn müsse. Man sieht nun alsbald daß die Linie EIF ein *Circul* seyn könne, dessen *Diameter* $= EF$; es gibt aber noch unendlich viel andere krumme Linien welche diese Eigenschafft mit dem *Circul* gemein haben; wie ich bald zeigen werde.

Hat man aber eine solche krumme Linie EIF gefunden, so kan daraus sehr leicht die gesuchte krumme Linie MN gefunden werden, und das auf unendlich vielerley Art: dann man kan das *punctum radians* C nach Belieben annehmen; und wann man daraus *ad terminos lineae* EF die graden Linien CE und CF zieht, dieselben in G und H in zwey gleiche Theile schneidet, aus den *punct*en G und H auf dieselben die *perpendicular* Linien GM und HN aufrichtet, biß solche der EF begegnen, so sind nicht nur die *punct*en M und N in der gesuchten Linie MN, sondern GM und HN sind auch *tangentes* derselben. Nimmt man für EIF ein *Circul* an *Diametri* EF, so wird MN eine *Ellipsis*, deren *foci* sind das *punctum radians* C und das *centrum circuli* EIF.



Um aber alle mögliche krumme Linien EAF zu finden, welche von ihren *normalibus* ERF nochmal in F *normaliter* durchschnitten werden, so setze ich die *abscissas* $AP = x$, $AQ = X$, die *applicatas* $PE = y$, $QF = -Y$ (weil diese *ad partes oppositas axis* fällt); so ist die *subnormalis* $PR = \dfrac{y\,dy}{dx}$, und die *subnormalis* $QR = \dfrac{-\,Y\,dY}{dX}$. Da nun $PE : PR = QF : QR$ so wird $y : \dfrac{y\,dy}{dx} = -\,Y : \dfrac{-\,Y\,dY}{dX}$, folglich $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dY}{dX}$. Jetz setze ich $dx = p\,dy$ so wird auch $dX = p\,dY$, und $PR = \dfrac{y}{p}$; $QR = -\dfrac{Y}{p}$; allso $PQ = \dfrac{y-Y}{p} = X - x$; diese *aequation differentir*t gibt

$$\frac{dy-dY}{p} - \frac{(y-Y)\;dp}{pp} = dX - dx = p\,(dY - dy)$$

oder

$$(dy - dY)\,\frac{(1+pp)}{p} = \frac{(y-Y)\;dp}{pp}$$

das ist

$$\frac{dy - dY}{y - Y} = \frac{dp}{p\,(1+pp)} = \frac{dp}{p} - \frac{p\,dp}{1+pp};$$

dahero ist

$$\ell\ (y - Y) = \ell\,2a + \ell\,p - \ell\sqrt{(1+pp)}\,,$$

oder

$$y - Y = \frac{2ap}{\sqrt{(1+pp)}},$$

und folglich

$$X - x = \frac{2a}{\sqrt{(1+pp)}} = PQ;$$

da nun $PE + QF = y - Y = \dfrac{2ap}{\sqrt{(1+pp)}}$ so wird $EF^2 = PQ^2 + (PE+QF)^2 = 4aa$, und allso $EF = 2a$ dahero *constans*. Da $y - Y = \dfrac{2ap}{\sqrt{(1+pp)}}$ so setze ich $y = P + \dfrac{ap}{\sqrt{(1+pp)}}$ und $Y = P - \dfrac{ap}{\sqrt{(1+pp)}}$ wo P eine *functionem rationalem quamcunque ipsius* p bedeuten mag; dann solchergestalt wird die *Conditio continuitatis* erfüllt, weil die *Formul* $P \pm \dfrac{ap}{\sqrt{(1+pp)}}$ wegen des *radical*-Zeichens von *natur ambigua* ist, und allso auf beyde *Puncte* E und F zugleich geht. Weil nun $y = P + \dfrac{ap}{\sqrt{(1+pp)}}$ so ist $dy = dP + \dfrac{a\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$ und allso

$$dx = p\,dy = p\,dP + \frac{ap\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}},$$

wovon das *Integrale* ist

$$x = \int p\,dP - \frac{a}{\sqrt{(1+pp)}}.$$

Wann demnach für P eine *functio quaecunque rationalis* von p angenommen wird, so hat man *pro curva AE* diese *formul*n

$$\begin{aligned} AP &= x = \int p\,dP - \frac{a}{\sqrt{(1+pp)}}; \\ PE &= y = P + \frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}}, \end{aligned}$$

aus welchen zugleich die *Coordinatae pro puncto altero respondente* F gefunden werden, wann man nur das *signum* des *radicalis* $\sqrt{(1+pp)}$ verwandelt. Will man

Curvas algebraicas haben, so darf man für P nur eine solche *functionem ipsius* p annehmen, daß $\int p\,dP$ *integrabel* wird. Zum *Exempel* setze man $P = 2bp$, so wird

$$x = 2b \int p\,dp - \frac{a}{\sqrt{(1+pp)}} = bpp - \frac{a}{\sqrt{(1+pp)}} + a$$

und

$$y = 2bp + \frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}};$$

erstere gibt $px = bp^3 + ap - \dfrac{a}{\sqrt{(1+pp)}}$, welche zu jener *addirt* gibt $y + px = bp^3 + (a+2b)\,p$; wann nun aus diesen zwey *aequation*en der Buchstabe p *eliminirt* wird, so erhält man die *aequation* zwischen x und y. Zur *Construction* sind aber obige *formul*n bequemer, weil in diesem *Exempel* seyn wird

$$\begin{aligned} AR &= bpp + a + 2b; \\ PQ &= \frac{2a}{\sqrt{(1+pp)}}; \\ PR &= 2b + \frac{a}{\sqrt{(1+pp)}}; \\ PE + QF &= \frac{2ap}{\sqrt{(1+pp)}}. \end{aligned}$$

Man kan aber auch *in genere* eine sehr leichte *Construction* geben, welche alle mögliche *Curvas*, so diese Eigenschafft haben, in sich begreifft, sie seyen *algebra*isch oder *transcendentes*.

Meine gantze *Famille* lässt sich für Ewr. Hochwohlgeb. gütiges Andenken gehorsamst bedanken, und zugleich zu Dero ferneren Wohlgewogenheit und Gnade unterthänigst empfehlen. Die Gesundheit unsers *Johan* Albrechts scheinet nun auch dauerhafter zu werden, und da er bißher *in Mathematicis* ziemlich zugenommen, dabey aber *in humanioribus* etwas zurükgeblieben, so gehet er jetz in eine hier neu errichtete Schule, welche wegen der schönen Anordnung und besonderen leichten und bequemen Lehr Art allgemeinen Beyfall findet. Ungeacht dieselbe erst seyt einem Jahr aufgerichtet worden, so habe ich doch letstens bey dem *Examine* mit grosser Verwunderung gesehen, daß die Knaben so wohl in Sprachen als Wissenschafften, die *Mathematic* und *Physic* nicht ausgenommen, solche *Progressus* gemacht, dergleichen in anderen *Gymnasiis* entweder gar nicht, oder erst nach Verfliessung vieler Jahren zu erwarten sind. Weil er daselbst den gantzen Tag auf eine angenehme Art zum Lernen angehalten wird, so muß ich meinen eigenen Unterricht auf einige Zeit aussetzen, in der Hoffnung, daß er nachdem in den *humanioribus* ein guter Grund wird gelegt worden seyn, alsdann um so viel geschwinder zunehmen werde.

Ich habe die Ehre mit der schuldigsten Hochachtung zu seyn
Ewr. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 25^{ten} *Junii*
A. 1748

R 843 Reply to n° 128
Berlin, June 25th, 1748
Original, 4 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 227–230v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 458–466; *Euler-Goldbach* (1965), p. 293–298

130
Goldbach to Euler
Petersburg, July (2nd) 13th, 1748

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*,

Eurer Hochedelgebohrnen dancke ich dienstl[ich] für die viele Mühe welche Sie über sich nehmen wollen damit mir die verlangte Beschreibung der Sonnenfinsterniß zu rechter Zeit übersandt werden möchte, und will hoffen daß selbige noch *intra terminum* allhie eintreffen werde;[1] ich würde aber[2] auf Dero geehrtes letzteres Schreiben so zeitig noch nicht geantwortet haben wann ich nicht die von mir angeführte, aber mit $(2 \pm 2)^{2e}$ übel *exprimi*rte *formul*[3] je eher je lieber zu *corrigi*ren nöthig gefunden hätte, denn es ist $8n + 2 = (2 \pm 2)^{e+1} + \Box + \Box$ allwo e allezeit einen *numerum integr*[*um*] *affirm*[*ativum*] bedeutet, oder auch $8n + 2 = (1 \pm 1)^{2e+2} + \Box + \Box$, gleichwie $8n + 1 = (1 \pm 1)^{2e} + (1 \pm 1)^{2f} + \Box$ allwo e *et* f *integros affirm*[*ativos*] bedeuten;[4] es ist auch sehr wahrscheinlich daß so gar $4n + 1 = (1 \pm 1)^{2e+1} + \Box + \Box$. Insonderheit aber halte ich für merckwürdig daß in dieser *aequatione*

$$4n + 3 = 2a^2 + 4b^2 + c^2 + 2 = 2A^2 + 4B^2 + C^2,$$

allwo a ein *numerus par* und A *impar* ist, a *in quocunque casu numeri* n so angenommen werden kan daß A gleich sey $a + 1$. In dem *casu* wo $a = 0$, ist solches offenbar, in den übrigen *casibus* aber fehlet es *more solito* an der *demonstration*,[5] jedoch ist wohl zu verstehen daß, wie gesaget, der *valor* a also angenommen werden kan und nicht nothwendig also beschaffen ist, als zum Ex[empel]: wann $n = 19$ und $4n + 3 = 79$, so kan a zwey *valores* haben, nemlich 4 und 6; nicht der andere sondern der erste ist allhie *app*[*l*]*icable* damit die *aequationes*

$$4 \cdot 19 + 3 = 2 \cdot 4^2 + 6^2 + 3^2 + 2 = 2\,(4 + 1)^2 + 2^2 + 5^2$$

statt finden und $A = a + 1 = 4 + 1$ werde.[6]

Meine vorige *formulas*[7] habe ich auf folgende art heraus gebracht so in der That mit Eurer Hochedelg. *methode* übereinstimmet: Wann man annimmt

$$(1.)\quad 4a^2+2b^2+4c^2+4c+1=2n+1,$$

so wird

$$(2.)\quad n=2a^2+b^2+2c^2+2c=2\,\Box+\Box+4\,\triangle.$$

Es sey n ein *numerus par* $=2m$ so muß auch b ein *numerus par* $=2d$ seyn, *ergo*

$$(3.)\quad m=a^2+2d^2+c^2+c=2\,\Box+\Box+2\,\triangle.$$

Es sey $m=2p$, so muß auch $a=2e$ seyn, *ergo*

$$(4.)\quad p=2e^2+d^2+\frac{c^2+c}{2}=2\,\Box+\Box+\triangle.$$

Sit in formula (2.) $n=2m+1$, *erit* $b=2d+1$, *ergo*

$$(5.)\quad m=a^2+2d^2+2d+c^2+c=\Box+4\,\triangle+2\,\triangle.$$

Sit $m=2p$, *erit* $a=2e$, *ergo*[8]

$$(6.)\quad p=2e^2+d^2+d+\frac{c^2+c}{2}=2\,\Box+2\,\triangle+\triangle.$$

Sit in formula (4.) $m=2p+1$, *erit* $a=2e+1$, *ergo*

$$(7.)\quad p=2e^2+2e+d^2+d+\frac{c^2+c}{2}=4\,\triangle+2\,\triangle+\triangle.$$

Sit in form[*ula*] (3.) $m=2p+1$, [*erit*] $a=2e+1$, *ergo*

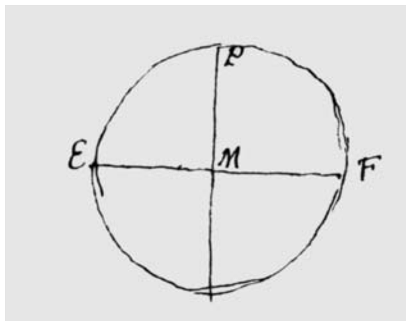
$$(8.)\quad p=2e^2+2e+d^2+\frac{c^2+c}{2}=4\,\triangle+\Box+\triangle,$$

&c.

Das *present* welches mir Ew. Hochedelgeb. von Dero *introductione in analysin infinitorum* machen, wird mir überaus angenehm seyn; ich hatte gar nicht gewust oder wenigstens gäntzlich vergessen daß Sie dergleichen Buch geschrieben welches nunmehro vermuthlich in den Gelehrten Zeitungen bald *recensi*ret werden wird.[9] Bei dieser Gelegenheit möchte ich wissen [ob] Eurer HochEd. *Scientia navalis* schon gedruckt worden? *item* was Sie von einer Abhandlung *eiusdem argumenti* so *M.^{r} Bouguer* herausgegeben, halten?[10] *item* möchte gern benachrichtiget seyn ob der in E. H. Antworten auf die Fragen von den *Comet*en erwehnte neuentdeckte *Planet* sich in seiner *position*[11] *mainteni*ret und durch fernere *observationes* bestätiget worden?[12] *item* ob der *Comet* von *A.* 1742 in dem Lauf des *Mercurii* einige *alteration* verursachet?[13]

Was die *aequation* $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+1=0$ betrifft so wird selbige *positis* $x-1=A$, $y-1=B$, $z-1=C$ in diese $A^2+B^2+C^2=2$ verwandelt woraus alsofort offenbar ist daß *posita* $A=\sqrt{2-B^2-C^2}$ *rationali*, auch $-B^2=A^2+C^2-2$ oder $B=\sqrt{2-A^2-C^2}$ oder $C=\sqrt{2-A^2-B^2}$ *rationales* seyn müssen.[14]

Vor Dero mir *communicir*te *solution* des *Problematis* von den *diagonalibus trapezii*[15] sage ich schuldigsten Danck, und *observi*re hiebey annoch, daß wann von den *quatuor lateribus* AB, BC, CD, DA eines durch einen *numerum impariter parem*, und die drey übrigen durch *numeros impares exprimi*ret werden alsdenn die drey *quadrata* $AC^2+BD^2+4GH^2$ unmöglich aus *numeris integris* bestehen können.



Die *solution* des *Problematis Catoptrici*[16] durch hülffe einer *curvae* deren *normalis curvam secans* allenthalben *constans* sey, ist allerdings sehr schön. Ich habe dabey angemercket daß in der *formul* $y=P+\dfrac{ap}{\sqrt{1+p^2}}$ *in casu* $y=$ *applicatae maximae* allezeit seyn müsse $P=-ap+a\sqrt{1+p^2}$; hingegen kan ich mir nicht recht vorstellen wie die *curva* aussehen müsse wann man das *spatium* EM *a vertice* E *usque ad applicatam maximam* MP *interceptum* gantz klein, als $\dfrac{a}{1000}$ annimmt und schlüsse daraus daß eben dieses *spatium* EM gewisse *limites* haben werde.

Ich verharre mit vieler Hochachtung
Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.t Petersburg
den 13. *Jul.* 1748.

R 844 Reply to n° 129
Petersburg, July (2nd) 13th, 1748
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 125–126v
Partial copy, 2 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 53v–54r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 467–470; *Euler-Goldbach* (1965), p. 299–300

131
Euler to Goldbach
Berlin, August 6th, 1748

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats*-Rath

In der Hoffnung, Ewr. Hochwohlgeb. werden die verlangten Finsternüß *Chart*en wohl und noch zu rechter Zeit erhalten haben,[1] zweifle ich nicht, Dieselben werden auch mit derselben Übereinstimmung zufrieden seyn. Dann ungeacht ich in den *Elementis*, worauf dieselben gegründet sind, einige Verbesserungen entdecket, so sind dieselben doch so gering, daß in der Vorstellung auf der *Chart*e daher keine merkliche Ändrung entstanden seyn würde. Nachdem uns allhier der Himmel ziemlich günstig gewesen um diese Finsternüß sehr genau zu beobachten so habe ich Ursach mit meinen neuen *Tabulis lunaribus* vollkommen zufrieden zu seyn,[2] dann so wohl der Anfang als das Ende hat näher als auf eine *Minute* mit meiner Rechnung übereingetroffen, indem der Anfang nur $15''$, und das Ende $30''$ späther bemerket worden als ich angesetzt hatte. Insonderheit aber war diese Finsternüß würklich *annularis*, wie ich gefunden hatte, ungeacht nicht nur die anderen *Tabulae*, welche doch für die besten gehalten werden, keinen *annulum* anzeigten, sondern auch einige HH. *Pariser Astronomi* meine Rechnung durch einige bey den *Tabulis* angebrachte vermeinte *Correctiones* wiederlegen und behaupten wollen, daß diese Finsternüß allhier nur *partialis* seyn würde:[3] Die nach den übrigen *Tabulis lunaribus* angestellten Rechnungen haben so wohl im Anfang als Ende um 2, 3 ja biß auf 10 *minut*en gefehlet. Übermorgen werde ich sehen, wie genau meine Rechnung bey der Monds Finsternüß eintreffen wird.[4]

Was die *Formul* $8n+2=(2\pm 2)^{e+1}+\Box+\Box$ betrifft, so kan ich zwar kein[en] *casum in contrarium* entdecken, ich sehe aber doch die Wahrheit davon nicht ein: Hingegen kan ich diese *Formul* $8n+1 = (1\pm 1)^{2e} + (1\pm 1)^{2f} + \Box$ nicht zugeben, wofern dieselbe so viel anzeigen soll, daß eine jede Zahl von dieser *Form* $8n+1$ allzeit in 3 dergleichen *quadrata* zertheilet werden könne, wovon 2 zugleich *potestates binarii* seyen, <u>*cyphra non exclusa*</u>. Dann wann $8n+1=217$, so findet diese *Formul* nicht statt.[5] Wann es gewiß daß $8n+2=(1\pm 1)^{2e+2}+\Box+\Box$ so folget von selbsten daß $4n+1=(1\pm 1)^{2e+1}+\Box+\Box$, wann man nur jene durch 2 *dividir*t weil $\dfrac{\Box+\Box}{2}=\Box+\Box$. An der Wahrheit dieser gedoppelten *Formul* $4n+3=2aa+4bb+cc+2=2AA+4BB+CC$, und daß allzeit seyn könne $A=a+1$, finde ich keine Ursach zu zweifeln, ich kan aber eben so wenig den Grund davon einsehen; indessen sind solche Sätze, welche durch kein *Exempel refutir*t werden können, freylich um so viel mehr merkwürdig.[6]

Für die gütige *Communication* der *Demonstration*en der mir letst überschriebenen schönen Eigenschafften der Zahlen[7] sage Ewr. Hochwohlgeb. allen schuldigsten Dank, und es freuet mich nicht wenig, daß dieselben mit denen so ich herausgebracht so schön übereinstimmen.

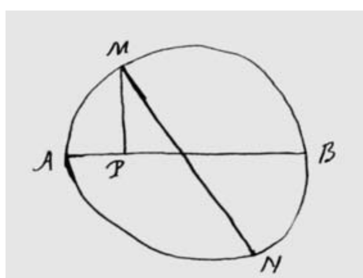
Die *Introductio in Analysin infinitorum*, welche mir die Ehre gegeben Ewr. Hochwohlgeb. zu *praesenti*ren, ist schon seit drey Jahren unter der Preß gewesen, und anjetzo wird von *M.^{r} Bousquet* meine Abhandlung vom *Calculo differentiali* gedrukt.[8]

Weil die Kaiserl[iche] *Academi*e der Wissenschafften Ihren Anspruch auf meine *scientiam navalem* erneuert, so habe ich letstens das gantze Werk an des H. *Praesidente*n *Excell*[*enz*] überschicket, und ersuche Ewr. Hochwohlgeb. bey Gelegenheit etwan den Druk desselben durch Vorstellungen bey dem H. Schumacher gütigst beschleunigen zu helfen; insonderheit da in des H. *Bouguer*s Werk von dieser *Materie* schon ziemlich viel enthalten, was ich darüber herausgebracht habe, und da meine *Principia*, worauf die gantze Sache beruhet, je länger je mehr bekannt werden, so beförchte ich, daß gar alles anderwerts herauskommen möchte, wann der Druck meines Werks nicht bald zu Stande kommt.[9] Von dem erwehnten neuen *Planet*en, welcher alle 4 Jahr seinen Lauf vollenden soll, ist nicht nur nichts neues entdeket worden, sondern ich bin versichert, daß der *Autor* desselben nicht genugsam in der *Theoria Planetarum* und *Cometarum* erfahren gewesen, daß er aus den *Observation*en einen solchen Schluß hätte machen können.[10]

Nachdem ich den *Locum Mercurii* auf die Zeit des *Comet*en *A.* 1744 genauer berechnet, so habe befunden, daß derselbe dem *Comet*en nicht so nahe gewesen als ich anfänglich gemeinet hatte, und daß folglich in seinem Lauf keine *Alteration* hat entstehen können.[11]

Wann die 4 *latera trapezii* allso durch Zahlen ausgedruckt werden daß eines ein *numerus impariter par*, die drey übrigen aber *numeri impares* sind,[12] so wird die *summa quadratorum laterum* eine solche Zahl $8n+7$, und kan folglich *rationaliter* nicht in drey *Quadrata resolvir*t werden.

Ewr. Hochwohlgeb. *Dubium* gegen die *figuram curvae*, deren *normalis curvam secans* allenthalben *constans* ist, kan ich nicht genug einsehen.[13]



Es sey $AMBNA$ eine solche *curva*, wo die *recta utrinque normalis* $MN = 2a$, die *Abscissa* $AP = x$, die *Applicata* $PM = y$, und P eine *functio rationalis* von p, so habe gefunden daß $x = \int p\,dP - \dfrac{a}{\sqrt{(1+pp)}}$, und $y = P + \dfrac{ap}{\sqrt{(1+pp)}}$. Hieraus wird $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{p}$ und folglich die *Applicata* y *maxima* wann $\dfrac{dy}{dx} = 0$, das ist wann $p = \infty$. Nun kan aber für P eine solche *functio* von p angenommen werden, daß in diesem Fall eben nicht wird $P = -ap + a\sqrt{(1+pp)}$ oder $P = 0$ weil $p = \infty$.

Hingegen wird die *applicata maxima* seyn $= P + a$, wann in P gesetzt wird $p = \infty$, und die *abscissa* wird $x = \int p\, dP$.

H. Kratzenstein wird bey Ewr. Hochwohlgeb. seine Aufwart[ung] gemacht haben; wegen Kürze der Zeit konnte ich Ihm keinen Brief an Dieselben mitgeben, er scheint mir aber ein sehr artiger und geschickter Mann zu seyn.[14]

Nächst gehorsamster Empfehlung meiner und aller mei[nigen] habe die Ehre mit der schuldigsten Hochachtung zu verharren

Eurer Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 6$^{\text{ten}}$ *Aug.*
1748.

R 845 Reply to n° 130
Berlin, August 6th, 1748
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 231–232v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 471–474; *Euler-Goldbach* (1965), p. 300–302

132
Goldbach to Euler
Petersburg, (August 27th) September 7th, 1748

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*,

Die in Charten vorgestellete Sonnenfinsterniß und die dazu gehörige gedruckte Beschreibung sind mir Tages zuvor und also noch zu rechter zeit eingehändiget worden,[1] vor deren übersendung ich Eurer Hochedelgeb. schuldigsten Danck sage, wie ich denn Deroselben zugleich zu der genauen übereinstimmung dieser Sonnenfinsterniß mit Dero *Tabulis Astronomicis* von herzen *gratuli*re und ein gleiches von der letzt verwiechenen Mondfinsterniß zu erfahren hoffe.[2] Ich habe auch nicht unterlassen gehörigen ortes die verlangte Erinnerung wegen der *Scientiae navalis* zu thun,[3] und zuverlässig vernommen, daß man, wie mir schon vorhero bekannt war, und Ew. Hochedelg. ohne zweiffel bereits von andern werden erfahren haben, mit dem Druck dieses Werckes eyfferigst fortfähret.

Die für $8n + 1$ angegebene *formul*[4] ist allerdings unrichtig; ich habe aber bey gelegenheit des *theorematis Fermatiani* noch bemercket, daß gleichwie ein jedes *quadratum impar*, oder *radicis impariter paris*, *dummodo minus sit quam* $8m + 7$, diese Eigenschafft hat, daß es eines von den 4 *quadratis* ist deren *aggregatum* $= 8m+7$, also auch ein jedes *quadratum impar*, oder *radicis pariter paris*, *dummodo sit minus quam* $8m+3$, diese Eigenschafft hat, daß es eines von den 4 *quadratis* ist deren *summa* $= 8m+3$;[5] weil nun 0 unter die *quadrata pariter paria* mit gerechnet werden kan, so geschiehet es gleichsam *per accidens* daß alle *numeri* $8m+3$ auch aus 3 *quadratis imparibus* allein bestehen können.[6] Wann man ein *quadratum par* durch $\square$, und ein *quadratum impar* durch $\boxdot$, ein *quadratum ambiguum* aber so *diverso respectu par* oder *impar* seyn kan durch $\boxminus$ oder $\boxminus$ andeutet, so lässet sich dieses alles durch folgende formul *exprimi*ren

$$4\,\boxminus + \boxdot + \boxdot + \boxdot = 8m + 5 \pm 2,$$

allwo vor $\boxminus$ *in casu signi superioris* + ein *quadratum impar*, *in casu signi inferioris* − aber ein *quadratum par* zu verstehen ist.

Ich habe auch *observi*ret daß wann man setzet

$$2\,(2a+1)^2 + 4b^2 + (2c-1)^2 = 4n-1$$

und

$$8n-6 = 2\,(2A+1)^2 + 4B^2 + 4C^2$$

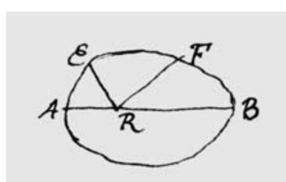
posito pro n numero eodem integro positivo alsdann allezeit genommen werden könne $B = b$; es sey zum Exempel $n = 29$, so kan beyden *aequation*en ein gnügen geschehen wann man setzet $B = b = 4$, dann es wird

$$2 \cdot 1 + 4 \cdot 16 + 49 = 115$$

und

$$2 \cdot 49 + 4 \cdot 16 + 4 \cdot 16 = 226.$$

Was die *curvas* deren *normalis curvam secans* allenthalben *constans* ist, anlanget,[7] so bin ich der Meinung daß wann in denselben ein *axis curvam in duas partes similes et aequales dividens* $= 2a$ angenommen wird, die *applicata maxima* nicht anders als $= a$ seyn könne, und dieses aus folgender Ursache:



Sit axis $AB = 2a$*; sit normalis in axem incidens* $ER = a - u$*, erit normalis ab axe reflexa* RF *sub eodem angulo* $(FRB = ERA) = a + u$*. Cum igitur in casu quo normalis fit perpendicularis ad axem, quantitas variabilis* u *fiat* $= 0$*, adeoque ipsa normalis* $= a$*, applicata vero maxima nihil aliud sit nisi normalis ad axem perpendicularis, sequitur applicatam maximam in omnibus istis curvis esse* $= a$; dahero sehe ich nicht wie die *applicata maxima* $= a + P$ seyn könne ohne daß $P = 0$ sey.[8]

Ich nehme abermal die freyheit mir einige hiebey *specifi*rte Bücher aus Hn Speners Buchladen auszubitten[9] und verharre mit besonderer hochachtung

Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.^{t} Petersburg
den 7. *Sept. st. n.* 1748.

R 846 Reply to n° 131
Petersburg, (August 27th) September 7th, 1748
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 127–128r
Partial copy, 3 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 54v–55v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 475–477; *Euler-Goldbach* (1965), p. 302–303

133
Euler to Goldbach
Berlin, October 12th, 1748

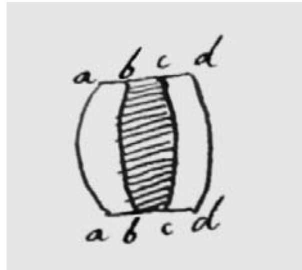
Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Die letste Sonnen-Finsternüß ist zwar mit meinen neuen *Tabulis Lunaribus* genauer übereingekommen, als mit allen anderen[1] und auch denjenigen, welche für die richtigsten gehalten werden, es fand sich aber doch ein geringer Unterscheid von ungefehr einer *Minute* in der Zeit, und der *Annulus* daurete nicht so lang, als ich nach meiner Rechnung gefunden hatte. Der erstere Fehler kommt theils von der noch nicht genugsam genau bestimmten *Differentia Meridianorum* von *Berlin* und *Paris*, theils von der noch in den *Tabell*en selbst befindlichen kleinen Unrichtigkeit her, welche ich mir zu heben nicht getraue; dann ich habe die *Elementa* meiner *Tabell*en ausser der *Theori*e auf *Observationes eclipsium Lunarium* gegründet, über deren *Momenta* man nicht wohl auf eine *Minut*e gewiß seyn kan. Es lässt sich nehmlich wegen der *Penumbrae* weder der Anfang noch das Ende einer Mondsfinsternüß so genau bestimmen, daß man nicht noch um eine *Minut*e oder mehr fehlen sollte. Was die Dauer des *Annuli* anlangt, so hatte ich mit den meisten *Astronomis* die *Parallaxin Lunae* zu groß angenommen, allein eben diese Finsternüß hat mich in den Stand gesetzet diese *Parallaxin* auf das genauste zu bestimmen, welche ich um mehr als $1'$ kleiner befunden, als sie in den *Tabulis Cassinianis* angesetzt wird, und *M.^{r} le Monnier* hat auch würklich gefunden, daß die *Parallaxis Lunae* um ein merkliches kleiner sey, als bißher die *Astronomi* geglaubet, wodurch ich in meiner *Conce[p]tion* um so viel mehr bestärket werde.[2] Hieraus habe ich in meinen *Tabell*en den *Articul* von der *Parallaxi corrigir*t, und hoffe ins künftige was diesen *Punct* betrifft, in Bestimmung der Finsternüssen gar nicht mehr zu fehlen.[3]

Die letste Monds Finsternüß haben wir auch hier mit allem Fleiß beobachtet;[4] nach meiner Rechnung sollte sich dieselbe den 8$^{\text{ten}}$ *Augusti* allso zutragen: I. der

Anfang um $11^{\mathrm{h}}, 3', 53''$; II. das Ende $13^{\mathrm{h}}, 16', 52''$. In der *Observation* selbst war der Unterscheid zwischen *Umbra* und *Penumbra* so gering, daß man bey etlichen *Minut*en weder vom wahren Anfang noch vom wahren Ende gewiß seyn konnte. Es schien uns aber der Anfang um $11^{\mathrm{h}}, 4'$ *à* $5'$, das Ende aber um $13^{\mathrm{h}}, 17'$ *à* $18'$ geschehen zu seyn. Andre haben diese beyden *Momenta* theils früher theils späther *estimir*t. Ich habe in einer verfinsterten Kammer meines Hauses das Bild des Monds durch einen 10schühigen *Tubum* auf ein weisses *Papier* fallen lassen, worauf sich der Mond mit allen Flecken sehr deutlich *praesentir*t; und ich habe den Anfang der Finsternüß angeschrieben, als ich auf dem *Papier* nicht mehr den Rand des Monds gantz erblickte, das Ende aber als der Bord wiedrum rund herum gantz erschien, wobey zu merken daß wann die Vorstellung des Bilds stärker oder schwächer gewesen wäre beyde *Momenta* früher oder späther bemerket seyn würden: dann wann man durch den *Tubum* grad gegen den Mond sahe, so konnte man auch bey der stärksten Verfinsterung den verfinsterten Theil erkennen, als welcher von den durch die *Atmosphaer* der Erde durchgedrungenen Lichtstralen noch erleuchtet wurde. Der verfinsterte Theil des Monds schien auch ein Stück von einem kleinern *Circul* zu seyn als der erleuchtete, wovon aus angeführtem Grund die Ursach gantz klar ist, dann die durch die *Atmosphaer* der Erde gegangenen Stralen waren zu schwach den Rand des Monds, auf welchen sie so schief auffielen, zu erleuchten: dahero wir nicht den gantzen verfinsterten Theil erblicken konnten.

Die *Observation* daß $8m + 5 \pm 2 = 4\ \boxminus + \boxdot + \boxdot + \boxdot$ kommt mir sehr merkwürdig vor,[5] und ich vermuthe daß diese Betrachtungen endlich zur wahren Quelle, worauß diese Eigenschafftten fliessen, leiten werden. Ich habe jetz wegen anderer Geschäften seit einiger Zeit über diese Materie nicht mehr denken können; und anjetzo bin ich bemühet einen Einfall ins Werk zu richten, welchen ich gehabt um solche *Objectiv*-Gläser zu verfertigen, welche eben den Dienst leisten sollen, als die Spiegel in den *Tubis Neutonianis* und *Gregorianis*. Der Fehler der gewöhnlichen *Objectiv*-Gläser rühret nur daher, daß die Lichtstraalen nicht einerley *Refraction* leiden, und allso zum *exemp*el die Rothen Straalen einen anderen *Focum formi*ren als die Blauen: dahingegen von einem Spiegel alle Straalen in eben denselben *focum reflectir*t werden. Dieser Unterscheid zwischen den *Focis* der rothen und blauen Stralen wird auch um so viel grösser, je weiter dieselben vom Glas entfernet sind, und bey einem *Objectivgla*s von 27 Schuen fällt der Rothe *focus* einen gantzen Schuh weiter als der Blaue; woraus die Undeutlichkeit und die Farben der durch lange *Tubos* gesehenen *Objectorum* entspringen. Wann man allso solche *objectiv* Gläser verfertigen könnte, welche alle Straalen in einen gemeinen *Focum* zusammen würfen, so würde man von denselben eben diejenigen Vortheile zu gewarten haben als von den Spiegeln. Dieses ist aber nicht möglich mit blossem Glas zu bewerkstelligen; dahero bin ich auf die Gedanken gefallen, ob es nicht möglich wäre aus Glas und Wasser oder zwey anderen verschiedenen durchsichtigen *Mat*erien solche *Lentes objectivas* zu verfertigen: und zweifelte hieran um soviel weniger, da wir sehen, daß in den Augen, welche aus verschiedenen durchsichtigen Cörpern bestehen, eine solche Undeutlichkeit wegen der verschiedenen Brechung der Lichtstraalen nicht wahrgenommen wird.



Ich habe mir dahero eine solche *Lentem compositam* vorgestellt, so aus zwey Gläsern *abba*, *cddc*, und dem Zwischen Raum *bccb* mit Wasser angefüllt bestehen soll. Nach dem ich die *Radios* der Krümmungen *aa*, *bb*, *cc*, *dd generaliter* durch die Buchstaben *a*, *b*, *c*, *d* bemerket, so habe ich *ex lege refractionis* erstlich die *distantiam foci a radiis rubris formati*, und dann die *Distantiam foci a radiis violaceis formati* gesuchet. Hernach habe ich diese beyden *Expressiones* einander gleich gesetzt, und darauß die Verhältnüß zwischen den *Radiis a*, *b*, *c*, *d* bestimmet. Die *Solution* fiel dahin aus, daß beyde Gläser *Menisci* seyn müssen, von welchen sich der *Radius faciei convexae* zum *radio faciei concavae* verhalte wie 23 zu 10. Solche *Meniscos* habe ich mir schon verschiedene schleiffen lassen; es findet sich aber noch diese Schwierigkeit, daß das Glas nicht eben die *Figur*, welche die Schüssel hat, auf das genauste bekommt. Gleichwohl kan ich schon von solchen *Objectiv*-Gläsern einen merklichen Vortheil spühren. Ich werde aber noch mehrere solche *Meniscos* verfertigen lassen um zu sehen, ob etwan *casu* die erforderte *Proportion* näher getroffen wird.[6]

Ewr. Hochwohlgeb. haben vollkommen recht, daß in den *Curvis* deren *normales secantes* allenthalben *constantes* sind, die *maxima applicata ad diametrum curvae relata* der Hälfte jener *quantitatis constantis* gleich seyn müsse:[7] Die Sache kommt allso nur darauf an, ob in diesen *Curvis* immer ein solcher *Axis curvam in duas partes similes et aequales secans* Platz finde? welche Frage ich nicht mit ja beantworten kan.

Die verlangten Bücher werden Ewr. Hochwohlgeb. bald erhalten;[8] zu Dero beständigen Gewogenheit ich mich sammt den meinigen gehorsamst empfehle und mit der schuldigsten Hochachtung verharre

Eur. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

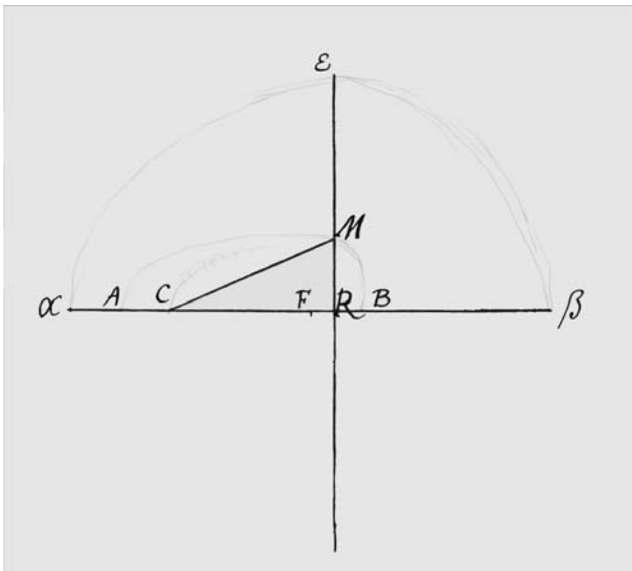
Berlin den 12 *Octobr.*
1748.

R 847 Reply to n° 132
Berlin, October 12th, 1748
Original, 3 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 238–239v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 478–482; *Euler-Goldbach* (1965), p. 303–305

134
Goldbach to Euler
Moscow, (January 30th) February 10th, 1749

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*,

Auf Eurer Hochedelgebohrnen Schreiben vom 12. *Oct.*, 1748 habe ich bißhero wegen einiger dazwischen gekommenen Verhinderungen und zum Theil wegen meiner Reise von Petersburg anhero, nicht geantwortet. Das vornehmste so ich vorjetzo bey der *curva Catoptrica* anzumercken habe bestehet in folgendem:[1]



Wann die *Catoptrica*, deren *axis* $AB = a$ ist, *compendii causa* die *curva* A,[2] und die *curva huic respondens* deren *axis* $\alpha\beta = 2a$ ist und welche diese Eigenschafft hat daß alle *normales curvam secantes* auch $= 2a$ sind die *Curva* α genannt wird, so wird diese *curva* α, weil sie allezeit einen *axem* hat, welcher der *axis AB utrinque continuatus* ist, zur *applicata maxima ad axem* haben $ER = a$; hieraus ziehe ich durch ein sehr *simple*s *raisonnement* nachfolgende zwey *corollaria*:

I. *Si distantia verticis A a puncto radiante C vocetur b et abscissa CR sit* $= x$*, applicata huic abscissae respondens* $MR = y$*, datae per x, semper invenietur Spatium interceptum CR maximum si ponatur* $CR = x = \sqrt{a^2 - 2ay}$.

II. *Si in axe curvae* α *sumatur* $\alpha F = F\beta = a$*, erit in curva A spatium* $CF = a - 2b$ *minimum omnium inter punctum radians C et radium ad axem reflexum interceptorum ita ut locus radiorum ad axem reflexorum sit inter F et R.*[3]

Ubrigens habe ich auch bemercket daß so offt in dieser *aequation*

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 4\delta + 4 = A^2 + B^2 + C^2$$

alle *numeri integri qui his litteris designantur* bekannt sind, in der folgenden *aequation*

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + 8 = P^2 + Q^2 + R^2 + S^2$$

die *numeri* P, Q, R, S angegeben werden können.[4] *Sit exempli gr*[*atia*] $\alpha = 3$, $\beta = 5$, $\gamma = 7$, $\delta = 3$; $A = 3$, $B = 3$, $C = 9$, *erunt* $P = 3$, $Q = 3$, $R = 9$, $S = 1$.[5]

Von den verlangten Büchern[6] so schon längst über Lübeck hätten ankommen können, habe ich annoch nicht die geringste Nachricht.

Inliegendes an Hn *Schuster* bitte nach Dero *commodité* fortsenden zu lassen.[7]

Mir wird es ein besonderes Vergnügen seyn von Eurer Hochedelgebohrnen und Dero werthen *famili*e fernerem Wohlergehen Nachricht zu erhalten und ich verharre mit vieler hochachtung

Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

Moscau den 10. *Febr. st. n.*
1749.

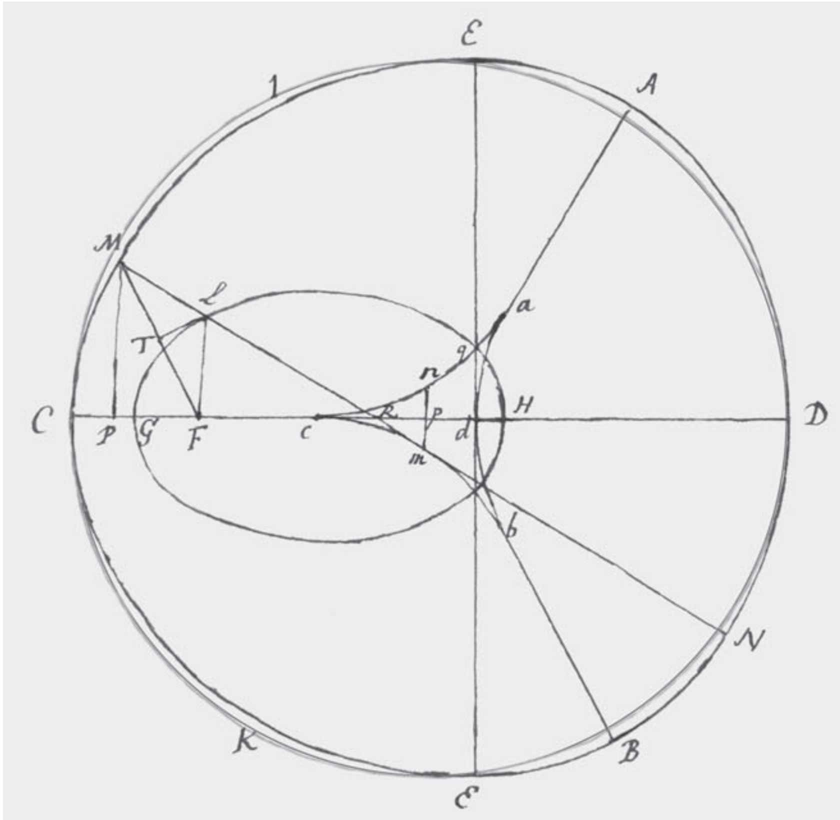
R 848 Reply to n° 133
Moscow, (January 30th) February 10th, 1749
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 129rv
Address (fol. 130): "A Monsieur / Monsieur Euler / de l'Academie des Sciences / à / Berlin"
Partial copy, 2 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 56v–57r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 483–484; *Euler-Goldbach* (1965), p. 305–306

135
Euler to Goldbach
Berlin, March 4th, 1749

HochWohlgebohrner Herr *Etats*-Rath
Hochgeehrtester Herr

Ewr. Hochwohlgebohrnen *gratuli*re zuvorderst zu der nach *Moscau* glücklich zurükgelegten Reise, und wünsche, daß die strenge Kälte deren betrübte Würkungen in allen Zeitungen gemeldet worden,[1] Denselben kein Ungemach möge verursachet haben.

Weil es bey der bekannten *Curva Catoptrica*[2] darauf ankommt daß man eine *curvam* finde, deren *normales utrinque secantes* allenthalben *constantis magnitudinis* seyen, so habe in beygefügter *Figur*[3] eine solche *Curvam* $CMEADNBEC$ mit allem Fleiß aufgerissen, in welcher alle diese *Normales* CD, MN, IB, EE, AK gleich groß sind, und merke dabey zuvörderst an, daß es auch solche *curvas* gebe, welche gar keinen *Diametrum* haben;[4] von der beygefügten aber ist CD ein



Diameter. Hat man eine solche *Curvam* gefunden, so kan man nach Belieben das *Punctum radians F* entweder im *Axe* oder ausser demselben annehmen, und daraus leicht die *curvam catoptricam GLH* beschreiben. Man zieht nehmlich aus dem *puncto radiante F ad quodvis curvae prioris punctum M* die Linie FM, schneidet dieselbe in T in zwey gleiche Theile, richtet darauf in T die *perpendicular* Linie TL auf, biß sie die *normalem MR* in L durchschneidet, so ist L ein *punctum* in der *Catoptrica*, und LT die *Tangens* daselbst. Wann nun das *punctum Radians F* in dem *Axe* oder *Diametro CD curvae generatricis* angenommen worden, so wird auch die Linie GH ein *Diameter* der *curvae catoptricae* selbst seyn; sonsten aber wann F nicht wäre *in axe CD* genommen worden, oder wann die *Curva generatrix CAB* gar keinen *Diametrum* hätte, so würde sich auch in der *curva catoptrica* kein *Diameter* befinden. Allso ist es gewiß, daß so offt die *curva catoptrica GLH* einen *Diametrum* hat, auch die *curva generatrix CAB* eben denselben *diametrum* haben werde, aber nicht *vicissim*; und dahero finden Ewr. Hochwohlgeb. Anmerkungen nur alsdann statt, wann die *Curva Catoptrica* einen *Diametrum* hat.

Das *Punctum radians F* mag angenommen werden, wo man will, wann man durch dasselbe *ad curvam generatricem* die *normalem* zieht CFD, und die *partes CF* und DF in zwey gleiche Theile schneidet, so bekommt man die *puncta G* und H in der *Catoptrica*.

Wann die *curva generatrix* CAB einen *diametrum* hat als CD und Ed die gröste *applicata* ist, weil $Ed = dE$ und *ad curvam normalis* so muß $EE = CD$, und allso $dE = \frac{1}{2}CD$ seyn. Es sey $CD = 2a$ so wird die *applicata maxima* $dE = a$; wann allso in der *curva catoptrica* gesetzt wird $Fd = x$, $dq = y$, so ist $Fq = Eq = \sqrt{(xx+yy)} = a - y$, und folglich $x = \sqrt{(aa-2ay)}$, wie Ewr. Hochwohlgeb. in der erstern Anmerkung gefunden, und in diesem Fall ist das *spatium* Fd *maximum vel minimum inter punctum radians* F *et radium reflexum*: in meiner *Figur* nehmlich ist es *maximum*; es wurde aber *minimum* seyn, wann ich das *punctum radians* F auf der andern Seite gegen D angenommen hätte. Gleich aber in der *Figur* das *spatium* FR in Fd ein *maximum* wird, so ist hingegen Fc der *valor minimus* desselben, wann cC der *Radius osculi curvae generatricis* in C, und folglich cD der *Radius osculi* in D ist: allso fällt dieses *punct* c nicht nothwendig in die Mitte des *Diametri* CD, viel mehr wird aus dem folgenden erhellen daß dieses *punct* c niemal in die Mitte der Linie CD falle, als wann die *curva generatrix* CAB ein *circul* ist, in welchem Fall die *Catoptrica* eine *Ellipsis* wird. Dann wann die *curva generatrix in se rediens et quasi circuli formis* seyn soll, so muß ihre *Evoluta cab* eine *curva tricuspidata* seyn: dergleichen unendlich viel gefunden werden können, so wohl *triang[u]lis aequilateris* als *scalenis inscriptibiles*. Hiebey ist merkwürdig, daß wann man eine solche *curvam tricuspidatam abc* gefunden, aus derselben *Evolution*, nach dem man den Faden länger oder kürzer annimmt, unendlich viel *curvae generatrices* CAB beschrieben werden können; dann wann Cc nach Belieben angenommen wird, so ist immer $mM = Cc + cm$ und $bI = Cc + cmb$; $Aa = Cc + cmb - adb$; und $cD = Cc + cmb + anc - adb$; weil nun $cmb + anc$ nothwendig grösser ist als adb, so kan auch cD nimmer dem Cc gleich werden, folglich das *punct* c nicht in die Mitte von CD fallen.

Um ein *exempel* von einer solchen *Curva tricuspidata* zu geben, welche *rectificabel* ist, damit so wohl die *curvae generatrices* als *catoptricae algebraicae* werden, so sey[5] $cp = t$; $pm = u$, und man nehme: $t = \dfrac{3c(1+3pp)}{(1+pp)^2}$ und $u = \dfrac{6cp}{(1+pp)^2}$, woraus wann man p *eliminir*t eine *aequation* von 6 *dimensionen*

$$4uu(tt+uu)^2 = 12ctuu(uu+9tt) - 243cct^4$$

[entsteht]; darinn ist $\dfrac{dt}{du} = p$; *pro puncto* d ist $p = 0$, und allso $cd = 3c$; diese *curva* ist *triangulo aequilatero inscriptibilis cujus latus* $ac = ab = bc = \dfrac{9\sqrt{3}}{4}c$. Ferner ist diese *curva rectificabilis*, dann es wird der *arcus* $cm = \dfrac{2cp(3-pp)}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} + 2c$; und da *pro cuspidibus* a *et* b *est* $p = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ so ist der Bogen $cmb = cna = adb = 4c$: Wann allso genommen wird $Cc = b$, so wird $cD = b + 4c$; ferner

$$Mm = b + 2c + \frac{2cp(3-pp)}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} = a + \frac{2cp(3-pp)}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$$

weil $2a = 2b + 4c$. Nun aber ist $pR = pu = \dfrac{6cpp}{(1+pp)^2}$ und

$$Rm = u\sqrt{(1+pp)} = \frac{6cp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}\ etc., \qquad MR = a - \frac{2cp^3}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}.$$

Daher findet man *pro curva generatrice* die *absciss*[*am*]

$$CP = a - \frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{c\,(1-pp)}{(1+pp)^2}$$

und die *appl*[*icatam*]

$$PM = \frac{a}{\sqrt{(1+pp)}} - \frac{2cp^3}{(1+pp)^2}$$

wobey ich nur anmerke, daß, wann man in einem *Circul*, dessen *radius* $= a = \frac{1}{2}CD$, den Bogen (*qui est mensura anguli* CRM) setzt $= s$, so wird *in curva generatrice* der *arcus* $CM = s + \dfrac{\frac{2}{3}c\,(1-3pp)}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$, und allso ist der *Perimeter totius curvae* $CABC$ *accurat* gleich der *peripheria* eines *circuli*, *cujus diameter* $= CD$. {Diese Eigenschafft[6] ist allen *curvis*, so *ex evolutione curvarum tricuspidatarum quarumcunque* entstehen, gemein; indem immer der gantze *Perimeter* derselben der *Peripherie* eines *circuli diametro* $= CD$ *descripti* gleich ist; dieser Zirkel ist in der *Figur* mit Bleystifft gezeichnet. Der *Excessus areae circuli supra aream curvae* ist nur im gegenwärtigen Fall gleich der *areae circuli cujus diameter* $= c = \frac{1}{4}cna = \frac{1}{3}cd$.} Aber die *Area curvae* CAB ist kleiner als die *Area circuli cujus diameter* $= CD$ und das um einen *Circul* dessen *Diameter* $= c$; es ist aber $c = Dd - Cc$.

Weil nun aus dieser einigen *evoluta abc*, welche zugleich immer die *caustica* der daher entstehenden *catoptricarum* ist, unendlich viel *curvae generatrices ABC* und aus jeder *generatrice*, *pro loco puncti radiantis F arbitrario*, unendlich viel *catoptricae* entstehen, so kommen aus einer *caustica abc* unendlich mal unendlich viel *catoptricae*, alle *algebraicae*.

Wann

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 4\delta + 4 = A^2 + B^2 + C^2$$

so ist

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + 8 = A^2 + B^2 + C^2 + (\delta - 2)^2$$

(welches seyn soll $P^2 + Q^2 + R^2 + S^2$), ist allso offenbar $P = A$, $Q = B$, $R = C$ und $S = \delta - 2$.[7]

H. Spener lässt mir sagen daß die verlangten Bücher,[8] weil es zu späth worden, nicht von hier abgegangen, sondern mit den ersten Schiffen geschickt werden sollen. Allso werden Ewr. Hochwohlgeb. belieben in *Petersburg* deswegen *Ordres* zu stellen.

Der Brief nach Leipzig[9] ist denselbigen Tag, als ich ihn empfangen, von hier abgegangen. Alle die meinige (so sich Gott sey Dank wohl auf befinden) lassen sich Ewr. Hochwohlgeb. nebst mir gehorsamst empfehlen, und ich habe die Ehre mit der schuldigsten Hochachtung zu verharren

Ewr. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 4ten *Martii*
1749

R 849 Reply to nº 134
Berlin, March 4th, 1749
Original, 3 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 242–243v, 245r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 485–489; *Euler-Goldbach* (1965), p. 306–308

136
Goldbach to Euler
Moscow, March (16th) 27th, 1749

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*,

Eurer Hochedelgebohrnen sage ich schuldigsten Danck für Dero gütige *gratulation* zu meiner Reise nach *Moscau*; ich habe dieselbe vom 8. *Januar. st. n.* biß zum 17. in welchem *intervallo* die grösseste Kälte einfiel, zuruckgeleget, und nichtsdestoweniger alle Nachte auf den Bauerhöfen im Schlitten geschlaffen. Laut der Franckfurter gedruckten Zeitungen ist die Kälte so wohl in Petersburg als in Madrit vom 10. biß 13. *Januar.* gantz ausserordentlich gewesen, und wäre zu untersuchen durch welchen *tractum intermedium* diese so hefftige Kälte gegangen.[1]

Aus der von Eurer Hochedelgeb. mir übersandten *Figur*[2] sowohl als aus dem *casu* der *curvae tricuspidalis* $\triangle^{lo}$ *aequilatero inscriptibilis* kan ich nicht anders urtheilen als daß die *arcus* ac, ab, cb nicht nur *aequales* sondern auch[3] *similes*, und die *puncta* d, m, n *curvas illas in duas partes aequales bisecantia* seyn sollen; wann nun dieses ist so müssen auch die *puncta* I *et* K von dem *medio axis* CD (welches Ew. Hochedelg. in der Figur mit keinem Buchstaben bezeichnet haben und indessen r heissen kan) *aeque distantia* seyn,[4] woraus denn ferner folget, daß die *curva generatrix* auch *hexagono regulari circumscriptibilis* sey und mit dem *circulo cuius radius est* Cr in den 6 *punctis* C, I, A, D, B, K *coincidi*ren müsse, womit aber die übersandte und hiebey zurückkommende *Figur* (die mir wieder zuzuschicken bitte) nicht übereinstimmet, weil sonst alle diese *puncta* in dem mit Bleystifft gezogenen *circul* stehen müsten; wann aber auch die *arcus* ab, bc, ca nur *longitudine aequales* und nicht *similes* wären so müste nichts destoweniger folgen daß die *puncta ABC* ein *triangulum aequilaterum circulo cuius radius est Cr inscriptum formi*ren und in den mit Bleystifft gezogenen *circul* fallen dessen *centrum r* zugleich der Mittelpunct des *trianguli aequilateri* ist, wie denn auch ferner[5] die *distantiae punctorum EA* und *EB aequales* seyn müsten, welche doch in der *Figur* um ein gar merckliches *differi*ren.[6] Dieses alles habe nur deswegen erinnern wollen damit Ew. Hochedelgeb. überzeuget würden daß ich die mir übersandte *Figur* nicht nur obenhin angesehen, sondern mit einiger *attention* (woran es mir offtmals zu fehlen pfleget) betrachtet habe.

Was ich von den *quadratis* $A^2+B^2+C^2$ *&c.* in meinem vorigen gemeldet hatte, ist, wie ich aus Dero *Solution* ersehe, von keiner Erheblichkeit gewesen und einer *distraction* zuzuschreiben.[7]

Ich habe noch einige Bücher auf beyliegendem Zettel *noti*ret;[8] im fall aber Ew. Hochedelg. sehen daß sich der H. Spener mit der übersendung keine mühe machen will so kan ich dergleichen Sachen künfftig gantz füglich von Leipzig kommen lassen.

Ich verharre mit vieler Hochachtung
Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

Moscau den 27. *Mart. st. n.*
1749.

R 850 Reply to nº 135
Moscow, March (16th) 27th, 1749
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 131–132r
Address (fol. 132v): "A Monsieur / Monsieur Euler / de l'Academie des Sciences / à / Berlin"
Partial copy, 1 p. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 58v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 490–491; *Euler-Goldbach* (1965), p. 308–309

137
Goldbach to Euler
[Moscow], (March 21st) April 1st, 1749

P. S. Nachdem ich ohngefehr die *curvam generatricem* abermal betrachtet, so habe befunden daß bey der von E. HochEdelgeb. mir übersandten *Figur* nichts *essentiell*es zu erinnern gewesen,[1] welches bey zeiten, um Deroselben keine vergebliche mühe zu machen, melden wollen, wobey nur noch dieses anmercke, daß von der mit Bleystifft gezeichneten *curva exteriore* (welche man *trigibberam* nennen könnte) *cuius omnes normales curvam secantes aequales sunt*, die *curva normales omnes in duas partes aequales dividens*, wie die innere *Figur* anzeiget, *tricuspidalis* ist.

Die *aequatio* $4n+5 = 4\square + 4\square + 4\boxdot + \boxdot$ (allwo $\square$ ein *quadratum par*, $\boxdot$ ein *quadratum impar* bedeutet) ist zwar allezeit möglich, man kan aber für $\boxdot$ so eines von den 4 *quadratis* ist, nicht ein jedes *pro lubitu* annehmen, wie in der *aequatione* $4\boxdot + \boxdot + \boxdot + \boxdot = 8n+7$ geschiehet, allwo vor eines von diesen 4 *quadratis* ein jedes *quadratum* $< 8n+7$ genommen werden kan.

den 1. *April.* 1749.

R 851 Postscript to n° 136
[Moscow], (March 21st) April 1st, 1749
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 133r
Copy, 1 p. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 59r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 491–492; *Euler-Goldbach* (1965), p. 309

138
Euler to Goldbach
Berlin, April 12th, 1749

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Erst vor etlichen Tagen hat H. Spener die von Ewr. Hochwohlgeb. verlangten Bücher von hier über Lübek abgeschickt,[1] welche allso bald in *S.^{t} Petersbourg* eintreffen werden.

Nunmehro habe ich endlich einen bündigen Beweiß gefunden daß ein jeglicher *numerus primus* von dieser *Form* $4n+1$ eine *summa duorum quadratorum* ist.[2] Es sey $\boxed{2}$ das Zeichen der Zahlen, welche *summae duorum quadratorum* sind;[3] so sind meine Sätze folgende:

I. *Si* $a = \boxed{2}$ *et* $b = \boxed{2}$ *erit etiam* $ab = \boxed{2}$, wovon der Beweiß leicht.

II. *Si* $ab = \boxed{2}$ *et* $a = \boxed{2}$ *erit etiam* $b = \boxed{2}$; hievon ist der Beweiß schon schwehrer, und erfordert einige Sätze.

III. *Summa duorum quadratorum* $aa+bb$, *ubi* a *et* b *communem divisorem non habeant, nullos alios admittit divisores, nisi qui ipsi sint* $\boxed{2}$.

IV. *Proposito numero primo* $4n+1$, *per eum semper* $a^{4n}-1$ *erit divisibilis nisi ipse numerus* a *sit per* $4n+1$ *divisibilis*: den Beweiß hievon habe in den *Comment*[*ariis*] *Petr*[*opolitanis*] gegeben.[4]

V. Da $a^{4n}-1 = \left(a^{2n}+1\right)\left(a^{2n}-1\right)$ so ist allso entweder $a^{2n}+1$ oder $a^{2n}-1$ *per* $4n+1$ theilbar: könnte nun ein einiger Fall angezeigt werden, da nicht $a^{2n}-1$ sondern $a^{2n}+1$ durch $4n+1$ *divisibel* wäre, weil $a^{2n}+1 = \boxed{2}$, so wäre *per n.^{o}* III bewiesen daß $4n+1$ eine *summa* 2 $\square$ seyn muß.

VI. *Theor*[*ema*]: *Omnis numerus primus formae* $4n+1$ *est summa duorum quadratorum.*

Dem[onstratio]: Si $4n+1$ *non esset* $\boxed{2}$, *quia* $a^{4n}-1$ *vel etiam* $a^{4n}-b^{4n}$ *per* $4n+1$ *est divisib[ile] (dummodo neque a neque b sit per* $4n+1$ *divisib[ile)] nunquam* $a^{2n}+b^{2n}$ *sed semper* $a^{2n}-b^{2n}$ *per* $4n+1$ *esset divisibile: forent ergo sequentes numeri omnes* $2^{2n}-1$; $3^{2n}-2^{2n}$; $4^{2n}-3^{2n}$; $5^{2n}-4^{2n}$; *etc. (quamdiu radices sunt minores quam* $4n+1$*) per* $4n+1$ *divisibiles. Hoc est hujus progressionis*

$$1,\ 2^{2n},\ 3^{2n},\ 4^{2n},\ 5^{2n},\ \ldots,\ (4n)^{2n}$$

differentiae forent per $4n+1$ *divisibiles. Forent ergo quoque differentiae secundae, et tertiae, et quartae et tandem differentiae ordinis* $2n$ *quae sunt constantes, per* $4n+1$ *divisibiles. At ex doctrina differentiarum notum est, differentias ordinis* $2n$, *quae sunt constantes, esse* $=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots 2n$, *qui numerus cum non sit divisibilis per numerum primum* $4n+1$, *sequitur non omnes differentias* $2^{2n}-1$, $3^{2n}-2^{2n}$, $4^{2n}-3^{2n}$, *etc. per* $4n+1$ *esse divisibiles; dabitur ergo quaedam differentia* $a^{2n}-b^{2n}$, *quae non erit per* $4n+1$ *divisibilis, quare cum* $a^{4n}-b^{4n}=\left(a^{2n}-b^{2n}\right)\left(a^{2n}+b^{2n}\right)$ *semper sit per* $4n+1$ *divisibilis (in serie enim superiori, cujus differentias sum contemplatus, termini tantum usque ad* $(2n+1)^{2n}$ *continuantur, ita ut sit a et* $b<2n+1$, *ideoque neque a neque b per se sit per* $4n+1$ *divisib[ilis], qui casus sunt excepti), necesse est ut hoc casu factor* $a^{2n}+b^{2n}$ *sit per* $4n+1$*divisibilis; qui cum sit* $\boxed{2}$, *ejus quoque divisorem* $4n+1$ *summam* $2\,\square$ *esse oportet. Q.* [*E. D.*]

Daß eine jede Zahl eine *Summa* 4 vel *pauciorum quadratorum* sey, kan ich bey nahe beweisen, es fehlt mir nehmlich nur noch an einer *Proposition* welche dem ersten Ansehen nach keine Schwierigkeit zu haben scheint.[5]

Dieses Zeichen $\boxed{4}$ bedeute eine jegliche Zahl, welche eine *Summ* von 4 oder weniger *Quadratis* ist; so sind meine Sätze folgende:

I. *Si* $a=\boxed{4}$ *et* $b=\boxed{4}$, *erit quoque* $ab=\boxed{4}$. Hievon ist der Beweiß bündig, dann es sey $a=pp+qq+rr+ss$ und $b=xx+yy+zz+vv$ so wird[6]

$$\begin{aligned} ab = \quad & (px+qy+rz+sv)^2+(py-qx\pm rv\mp sz)^2 \\ & +(pz\mp qv-rx\pm sy)^2+(pv\pm qz\mp ry-sx)^2 \quad = \boxed{4}. \end{aligned}$$

II. *Si* $ab=\boxed{4}$ *et* $a=\boxed{4}$ *erit etiam* $b=\boxed{4}$; dieses ist der Satz, worauf die gantze Sach beruhet, und den ich noch nicht beweisen kan.[7]

III. *Coroll*[*arium*]: (Dieses *Signum* $\neq$ soll nach Ewr. Hochwohlgeb. *negationem aequalitatis* bedeuten). *Si ergo* $ab=\boxed{4}$ *et* $a\neq\boxed{4}$ *tum etiam* $b\neq\boxed{4}$*: si enim esset* $b=\boxed{4}$ *per* II *foret quoque* $a=\boxed{4}$ *contra hypoth*[*esin*].

IV. *Si omnes numeri primi essent formae* $\boxed{4}$, *tunc omnes omnino numeri in hac forma* $\boxed{4}$ *continerentur. Manifestum est ex n.º* I, *unde demonstratio propositi ad numeros tantum primos revocatur.*

V. *Proposito numero primo quocunque p semper datur numerus formae* $aa+bb+cc+dd$ *per p divisibilis, ita ut nullus numerorum a, b, c, d, seorsim per p sit divisibilis.* Ich kan nehmlich beweisen daß es allzeit solche Zahlen $aa+bb+cc+dd$ und das unendlich viel gibt, obschon ich *in genere* keine davon anzuzeigen vermögend bin. Der Beweiß davon ist ins besondere merkwürdig, aber etwas weitläuffig, und kan auf Belieben den Inhalt eines gantzen Briefs inskünftige abgeben.[8]

VI. *Si* $aa+bb+cc+dd$ *per* p *est divisibil*[*is*] *quantumvis numeri* a, b, c, d *sint magni semper exhiberi potest similis forma* $xx+yy+zz+vv$ *per* p *divisibilis ita ut singuli numeri* x, y, z, v *semisse ipsius* p *non sint majores.*

Dem[*onstratio*]: *Erit enim* $a=\alpha p\pm x$, $b=\beta p\pm y$, $c=\gamma p\pm z$, $d=\delta p\pm v$ *atque* x, y, z, v *erunt numeri non majores quam* $\frac{1}{2}p$. *Cum igitur sit*

$$aa+bb+cc+dd=(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\delta\delta)\,pp\pm 2p\,(\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta v)+xx+yy+zz+vv,$$

haecque forma per p *divisibilis existat, ob duo priora membra jam sponte per* p *divisibilia, necesse est ut ultimum membrum* $xx+yy+zz+vv$ *quoque per* p *sit divisibile.*

VII. *Si* p *est numerus primus ideoque impar, erunt singuli numeri* x, y, z, v *minores quam* $\frac{1}{2}p$, *ideoque* $xx+yy+zz+vv<4\cdot\frac{1}{4}\,pp<$[!] pp.

VIII. *Si* p *est numerus primus, certe erit summa* 4 *quadratorum vel pauciorum.*

Dem[*onstratio*]. *Per n.º* VI *datur numerus* $aa+bb+cc+dd$ *per* p *divisibilis, ac per n.º* VII *dabitur etiam numerus* $xx+yy+zz+vv$ *per* p *divisibilis, ita ut sit* $xx+yy+zz+vv<pp$. *Quodsi jam darentur numeri* $\neq\boxed{4}$, *existeret horum numerorum minimus, qui sit* $=p$, *ita ut sit* p *minimus eorum numerorum qui in quatuor quadrata sunt irresolubiles (hic semper de numeris integris est sermo). Sit igitur* $xx+yy+zz+vv=\boxed{4}=pq$, *et quia per hyp*[*othesin*] $p\neq\boxed{4}$ *foret quoque* $q\neq\boxed{4}$; *at* $pq<pp$, *ideoque* $q<p$, *ac propterea haberetur numerus* q *minor quam* p *qui esset* $\neq\boxed{4}$, *contra hypothesin. Nullus ergo datur numerus minimus in quatuor quadrata irresolubilis, ideoque nullus plane datur numerus* $\neq\boxed{4}$; *ac per consequens omnis numerus* $p=\boxed{4}$.

Weil ich nicht zweifle, daß diese *Demonstrationen* Ewr. Hochwohlgeb. nicht gefallen sollten, so bitte, dieselben Dero Aufmerksamkeit zu würdigen.

In meinen Umständen ist seit der Zeit nichts veränderliches vorgefallen, als daß ich dieser Tagen in einer *Lotterie* 600 Rthl. gewonnen, welches allso eben so gut ist, als wann ich dieses Jahr einen Pariser Preiß gewonnen hätte.[9]

Nächst gehorsamster Empfehlung meiner und aller meinigen habe die Ehre mit dem schuldigsten *Respect* zu verharren

Ewr. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 12ten *April*
1749.

R 852 Reply to nº 134
Berlin, April 12th, 1749
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 244rv, 246rv (fol. 245 contains the figure that belongs with Euler's previous letter: cf. nº 135, note 3)
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 493–497; *Euler-Goldbach* (1965), p. 310–311

139
Euler to Goldbach
Berlin, April 15th, 1749

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats*-Rath

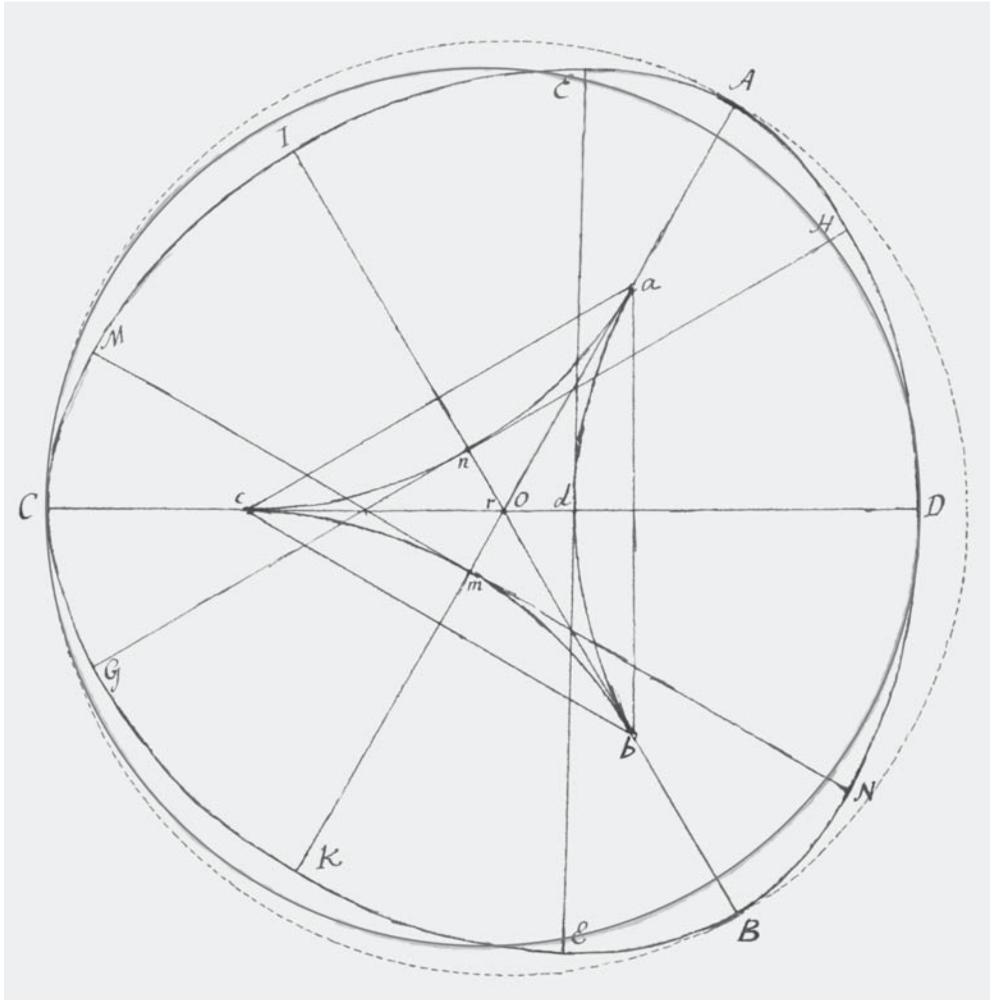
Kaum hatte ich mit der vorigen Post meinen letsten Brief fortgeschicket, als ich Ewr. Hochwohlgeb. geehrteste Zuschrifft vom 27^{ten} *Mart.* erhielt,[1] wovon ich so gleich das Zettelein dem H. Spener abgegeben[2] welcher nicht ermangeln wird, die verlangten Bücher mit ehestem wegzuschicken. Vorgestern ist meine Frau mit 2 Töchtern auf einmal niedergekommen[3] und befindet sich Gott sey Dank sammt den Kindern wohlauf.

Hiebey habe die Ehre meine *Figur* von den *Curvis catacausticis* wiedrum zurükzusenden,[4] und weil dieselbe nicht *accurat* genug gerathen indem freylich die Bögen AE und BE wie Ewr. Hochwohlgeb. angemerkt, gleich seyn sollten so füge noch eine andere *Figur* hiezu, welche ich mit mehrerem Fleiß aufgezeichnet.

In derselben ist wie in der vorigen die *Curva tricuspidata abc aequilatera*, und die drey *Partes adb*, *bmc*, *cna*, unter sich *aequales et similes*. Diese *Curva* hat allso ein *Centrum* in O welches das *Centrum circuli triangulo abc circumscripti* ist. Dieses *Punct* O ist aber nicht das Mittelpunkt der Linie CD welches Ewr. Hochwohlgeb. mit dem Buchstaben r andeuten wollen. Dann aus der Natur der *Evolution* ist cD der Faden, welcher vorher um den Bogen cna gelegen und biß in A ausgedehnt gewesen, folglich ist $cD = arc.\, cna + Aa = arc.\, cna + Cc$ (*ob* $Cc = Aa = Bb$); und allso $cD + Cc = CD = arc.\, cna + 2Cc$. Wann nun das Punkt r in der Mitte der Linie CD genommen wird, so ist $Cr = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}\, arc.\, cna + Cc$, und dahero $cr = Cr - Cc = \frac{1}{2}\, arc.\, cna = cn$. Nun aber ist in der *Figur* cO grösser als der Bogen cn, und allso $cO > cr$ (ich habe nehmlich die *Puncta* d, m, n in der Mitte der Bogen ab, ac, bc angenommen). Hernach sind freylich die Linien OI und OK nicht nur einander gleich, sondern machen auch mit OC gleiche Winkel. Dann es ist $OI = OK = OD$; allein weil das *Punct* O nicht in die Mitte der Linie CD fällt, so sind auch diese drey Linien OI, OK, OD nicht so groß, als CO oder AO und BO. Dieses ist auch aus der Auswicklung offenbar, da der anfänglich gelegte Faden $bmcC$ in bOI nach der graden Linie ausgedehnt wird; allso ist $bI = bmc + Cc$, und $OI = bmc + Cc - bO$; nun aber ist $Cc = OC - cO$ und daher $OI = bmc + OC - cO - bO$, oder weil $bO = cO$, so ist

$$OI = OC - 2cO + bmc = OC - 2\,(cO - cm)\,,$$

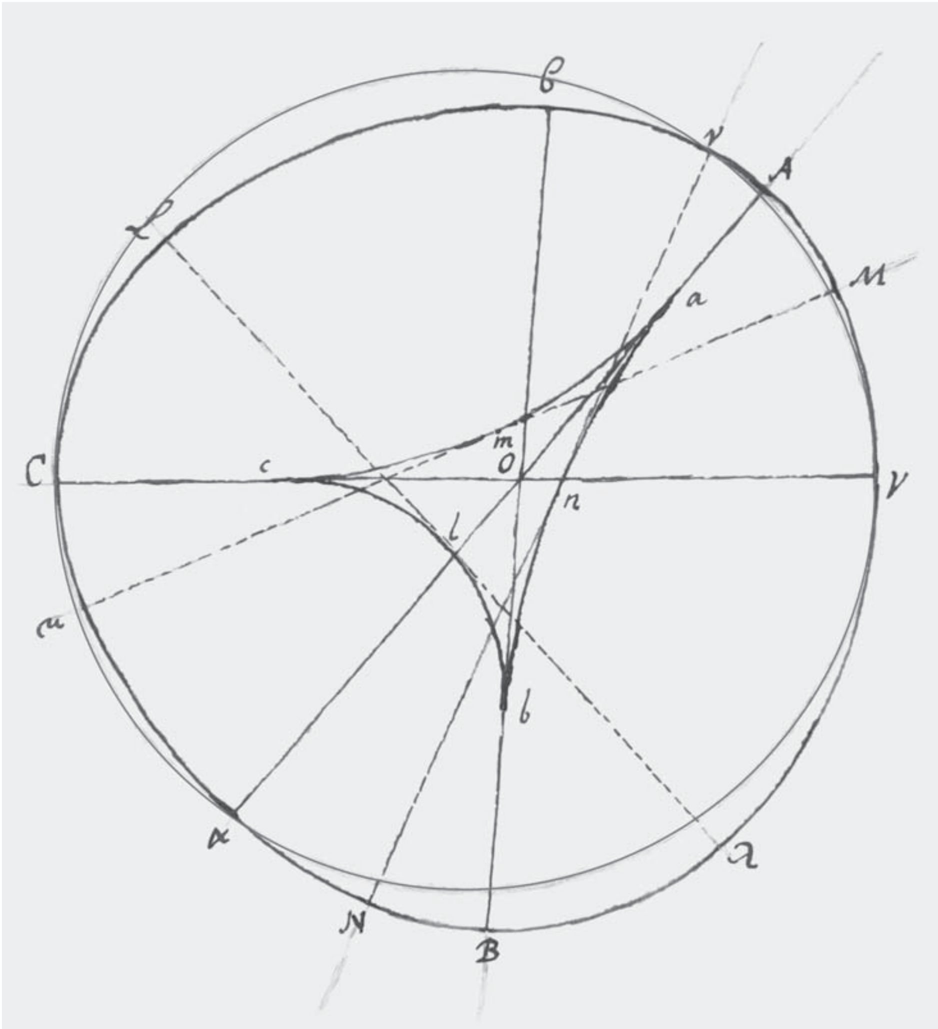
und da $cO > cm$, so ist $OI < OC$. Wann daher aus dem *Centro* O mit dem *Radio* $OC = OA = OB$ ein *Circul* beschrieben wird, so berührt derselbe die *curvam descriptam* in den drey Punkten C, A, B, und diese *Curva* hat allso drey Bückel in A, B, C und drey Tiefen I, D, K, kan allso *trigibba* genannt werden. In der vorigen *Figur* war der *Circul* aus dem *centro* r beschrieben, welchen hier gleichfalls mit Bleystifft vorstelle, woraus gantz klar zu sehen, wie dieser Zirkul die *curvam*



trigibbam in zwey Punkten berührt, und in zweyen durchschneidet; wie dann auch dieser *Circul* und die *curva trigibba ejusdem perimetri*, folglich die *area curvae* kleiner als die *area* des *Circuli* seyn muß.

Ich füge noch eine neue *Figur* hinzu, in welcher die *curva tricuspidata abc* nicht *aequilatera* sondern *scalena* ist, aus welcher auch eine *curva trigibba scalena ABC* entstehet.

Ungeacht es solche *curvas continuas* oder *aequatione exprimibiles* gibt, so kan man doch auch von freyer Hand ohne einige Regel solche *curvas tricuspidatas* aufreissen, und aus denselben *per evolutionem* die *curvas trigibbas* beschreiben, aus welchen hernach weiter auf unendlich vielerley Arten die gesuchten *curvae cataclasticae*[5] *construir*t werden können. Wie ich dann in dieser *Figur* die *curvam tricuspidatam abc* aus drey *Circul* Bögen *ab*, *ac*, *bc*, so einander berühren, *formir*t, und daraus die *trigibbam* allso gezeichnet habe, nachdem ich die *Tangentes ad cuspides a*, *b*, *c*, und *puncta laterum media l*, *m*, *n* gezogen, und *aA pro arbitrio*



angenommen, so wird $mM = ma + aA$; $c\gamma = cm + mM$; $l\lambda = c\gamma - cl$; $bB = l\lambda - lb$; $nN = nb + bB$ *etc.* biß man herumkommt.[6]

Ich bin neulich auf diese Betrachtung gefallen, ob es nicht möglich sey zwey Zahlen x und y zu finden, so daß $xy\,(x+y)$ einer gegebenen Zahl a gleich sey, oder *proposito numero a invenire duos numeros rationales x et y* (*sive integros sive fractos*) *ut sit* $xy\,(x+y) = a$. Solches ist immer möglich, so offt die Zahl a in dieser *Form* $pq\left(pm^3 \pm qn^3\right)$ enthalten ist; ich glaube aber daß in dieser *Form* bey weitem nicht alle Zahlen enthalten sind: und allso das *problema* öffters unmöglich ist, welches zu geschehen scheint, wann $a = 1$, oder $a = 3$, *etc.*[7]

Wann aber dieses *Problema proponir*t wird: *Proposito numero a invenire tres numeros rationales x, y, z, ut sit* $xyz\,(x+y+z) = a$, so ist das *Problema* immer möglich, und kan so gar *in genere* die *solution* angegeben werden, welche ich endlich nach vieler angewandter Mühe herausgebracht.[8] Nehmlich man setze (*sumendo pro s et t numeros quoscunque pro lubitu*):

$$\begin{aligned} x &= \frac{6ast^3\left(at^4-2s^4\right)^2}{\left(4at^4+s^4\right)\left(2aat^8+10as^4t^4-s^8\right)}, \\ y &= \frac{3s^5\left(4at^4+s^4\right)^2}{2t\left(at^4-2s^4\right)\left(2aat^8+10as^4t^4-s^8\right)}, \\ z &= \frac{2\left(2aat^8+10as^4t^4-s^8\right)}{3s^3t\left(4at^4+s^4\right)}, \end{aligned}$$

so wird

$$x+y+z=\frac{2aat^8+10as^4t^4-s^8}{6s^3t\left(at^4-2s^4\right)},$$

und hieraus bekommt man

$$xyz\ (x+y+z)=a.$$

Als es sey $a=1$, und man nehme $t=2$, $s=1$, so wird:

$$x=\frac{48\cdot 14^2}{65\cdot 671},\quad y=\frac{3\cdot 65^2}{56\cdot 671},\quad z=\frac{2\cdot 671}{6\cdot 65};$$

daher

$$x+y=\frac{1\,350\,723}{56\cdot 65\cdot 671}=\frac{3\cdot 671^2}{56\cdot 65\cdot 671}=\frac{3\cdot 671}{56\cdot 65},$$

und

$$x+y+z=\frac{671}{3\cdot 56},$$

folglich

$$xyz\ (x+y+z)=\frac{48\cdot 14^2}{65\cdot 671}\cdot\frac{3\cdot 65^2}{56\cdot 671}\cdot\frac{671}{3\cdot 65}\cdot\frac{671}{3\cdot 56}=1.$$

Nächst gehorsamster Empfehlung meiner und der meinigen, habe die Ehre mit der schuldigsten Hochachtung zu verharren

Ewr. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 15 *April.* 1749.

R 853 Reply to n° 136
Berlin, April 15th, 1749
Original, 4 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 247–250v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 498–501; *Euler-Goldbach* (1965), p. 312–314

140
Goldbach to Euler
Moscow, June (5th) 16th, 1749

Hochedelgebohrner Herr,
Hochgeehrter Herr *Professor*

Aus Eurer Hochedelgebohrnen beyden letzteren Schreiben habe ich mit vielem Vergnügen ersehen daß Dero *Familie* so wohl als Dero *revenu*en bald auf einander vermehret worden,[1] wozu nicht weniger Eurer Hochedelgeb. als der Frau *Professor*in von hertzen *gratuli*re; vor die *communication* von Dero *theorematibus* in dem Briefe vom 12. *Apr.* sage ich schuldigsten Danck,[2] und daß an der mir übersandten *Figur* nichts auszusetzen gewesen, hatte ich schon in meinem vorigen *P. S.* welches ohne Zweiffel angekommen seyn wird, erkannt.[3]

Ich glaube[4] es werde Eurer Hochedelg. auch nicht viele Mühe kosten die *curvam omnes verticales bisecantem* zu beschreiben *in casu* da die *curva tricuspidalis*[5] so zum grunde geleget wird aus lauter *arcubus circuli* bestehet und es scheinet daß diese *curva verticales bisecans* seltsame *proprietates* haben wird.

Was die *resolutionem cuiusvis numeri in quatuor quadratos* betrifft so sehe ich gar wohl ein daß alles, wie Ew. Hochedelg. angemerket auf der *demonstration* des andern Satzes beruhet:[6] *Si* ab *est* $\boxed{4}$ *et* $a = \boxed{4}$ *erit etiam* $b = \boxed{4}$. Eine gleiche bewandniß hat es mit der *demonstratione huius propositionis*: *Si summa quatuor quadratorum in numeris fractis sit = numero integro, erit idem numerus integer = quatuor quadratis integris*; allein die *demonstrationem huius propositionis*: *Si numerus aliquis est summa quatuor quadratorum imparium, idem numerus est summa quatuor quadratorum parium* oder *datis quatuor quadratis imparibus* $= 8m + 4$, *dantur etiam quatuor quadrata numeri* $2m + 1$, meyne ich *in potestate* zu haben.

Wann man aber ein Mittel finden könnte die *summam quatuor quorumcunque quadratorum* $A^2 + B^2 + C^2 + D^2$ in die 4 folgenden *quadrata* zu *resolvi*ren $a^2 + b^2 + \dfrac{\left(k^2 - b^2\right)^2}{4} + d^2$, wo doch auch *quatuor quantitates indeterminatae* sind, so hätte man zugleich erwiesen daß eine jede zahl $= \boxed{4}$, denn die letztern 4 *quadrata* sind so beschaffen daß ihre *summa unitate aucta* wieder eine *summa* 4 *quadratorum* wird, oder: diese *quinque quadrata*[7] $4a^2 + 4b^2 + \left(f^2 + 2bf\right)^2 + 4d^2 + 4$ sind allezeit = *quatuor quadratis.*

Ob[8] E. Hochedelg. das *praemium* bey der Frage von der ursache der *perturbationum in motibus planetarum* erhalten haben,[9] ist mir entweder nicht bekannt worden oder ich habe es vergessen, und da ich schlüsse daß Sie auch um den Preiß über die Frage von der *direction* der *Courans &c.* werden *competi*ret haben,[10] so wünsche ich daß Dero *Piece* durch einen kleinen Zusatz von vûes, künfftiges Jahr *victorieuse* werden möge, Eurer Hochedelgebohrnen

ergebenster Diener *Goldbach.*

Moscau den 16. *Jun. st. n.* 1749.

P. S. Wann das signum $\boxed{4}$ eine *summam* entweder von 4 oder von wenigern *quadratis*, und $\underset{|}{\boxed{4}}$ eine *summam* nicht von wenigern als 4 *quadratis* bedeutet, so kan gar leicht *demonstri*ret werden *omnem numerum huius formae*: $8m+7$ *esse* $\underset{|}{\boxed{4}}$; wann aber zugleich nachgegeben wird[11] daß alle *numeri* $\underset{|}{\boxed{4}}$ in dieser *formula* begriffen sind: $4^{e-1}\,(8m+7)$ *ubi e sit numerus integer affirmativus quicunque*, so kan *demonstri*ret werden *numerum quemcunque esse* $\boxed{4}$.

R 854 Reply to n° 138 and n° 139
Moscow, June (5th) 16th, 1749
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 135–136r
Partial copy, 2 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 59v–60r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 502–504; *Euler-Goldbach* (1965), p. 314–315

141
Euler to Goldbach
Berlin, July 26th, 1749

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats*-Rath

Für Ewr. Hochwohlgeb. gütige *Gratulation* zu Vermehrung meiner *Famille*[1] statte allen gehorsamsten Dank ab, und nehme die Freyheit, dieselbe ferner zu Dero Wohlgewogenheit zu *recommendi*ren. Über die *Pariser* Frage von den *Courans* habe ich nicht gearbeitet,[2] und vernommen, daß nur eine einige Schrifft darüber soll eingelauffen seyn; ich zweifle auch sehr, ob ich künftiges Jahr etwas tüchtiges darinn hervorzubringen im Stande seyn werde. Auf die wiederhohlte Frage aber vom *Saturno* habe ich schon eine neue Abhandlung übersandt: worüber auf künftige Ostern das Urtheil gefället werden soll.[3]

Ewr. Hochwohlgeb. *Theorema*, daß wann $8m+4$ eine *summa quatuor quadratorum imparium* ist, eben diese Zahl $8m+4$ auch eine *summa quatuor quadratorum parium* seyn müsse, kan ich auch auf folgende Art *demonstri*ren:

Es sey

$$8m+4=(2a+1)^2+(2b+1)^2+(2c+1)^2+(2d+1)^2\,;$$

so wird (wann man durch 2 *dividir*t, da $\dfrac{(2p+1)^2+(2q+1)^2}{2}=(p+q+1)^2+(p-q)^2$):

$$4m+2=(a+b+1)^2+(a-b)^2+(c+d+1)^2+(c-d)^2$$

allso $4m+2=4\,\square$. Da aber $4m+2$ ein *numerus impariter par* ist, so müssen von diesen 4 *quadratis* zwey *paria* und 2 *imparia* seyn; allso wird seyn

$$4m+2=(2p+1)^2+(2q+1)^2+4rr+4ss,$$

dahero

$$2m+1=(p+q+1)^2+(p-q)^2+(r+s)^2+(r-s)^2$$

folglich

$$8m+4=4\,(p+q+1)^2+4\,(p-q)^2+4\,(r+s)^2+4\,(r-s)^2\,.$$

Q. E. D.

Hieraus folget, daß wann $2A$ eine *summa* 4 *quadratorum* ist, auch A eine *summa* $4\,\square$ *in integris* sey, und *generalius*: *Si* $2^nA=4\,\square$, *tum etiam* A *erit* $=4\,\square$ *in integris*; oder *si in fractis habetur* $A=\dfrac{aa+bb+cc+dd}{2^n}$ *tum etiam numerus* A *in integris in quatuor quadrata resolvi poterit.*

Dieses ist nun schon ein Stück von dem allgemeinen *Theoremate*: *Si summa* $4\,\square$ *fractorum aequatur numero integro* A, *tum etiam hic numerus erit in integris summa quatuor quadratorum*; oder von diesem, worauf ich meine gantze vorige *Demonstration* gegründet: Wann $mA=4\,\square$ und $m=4\,\square$ *tum etiam erit* $A=4\,\square$. Von diesem *Theoremate* ist allso schon dieser *Casus* bewiesen: *Si* $2A=4\,\square$ *tum etiam* $A=4\,\square$, oder *si* $2^nA=4\,\square$, *tum quoque* $A=4\,\square$. Ich kan aber auch noch einige andere Fälle beweisen, als:

Th[*eorema*]: *Si* $3A=\boxed{4}$ (ich habe im vorigen vergessen dieses Zeichen $\boxed{4}$ um *summam quatuor quadratorum integrorum* anzuzeigen)[4] *erit etiam* $A=\boxed{4}$.

Dem[*onstratio*]: *Quia omne quadratum est vel formae* $3n$ *vel* $3n+1$, so sind entweder alle 4 *quadrata per* 3 *divisibilia*, oder nur eines; im ersteren Fall wird

$$3A=9aa+9bb+9cc+9dd,$$

und allso

$$A=3aa+3bb+3cc+3dd,$$

das ist

$$A=(a+b+c)^2+(a-b+d)^2+(a-c-d)^2+(b-c+d)^2\,.$$

Im andern Fall ist

$$3A=(3a+1)^2+(3b+1)^2+(3c+1)^2+9dd,$$

und folglich

$$A=1+2a+2b+2c+3aa+3bb+3cc+3dd;$$

dieses aber ist:

$$A=(1+a+b+c)^2+(a-b+d)^2+(a-c-d)^2+(b-c+d)^2\,,$$

allso wiedrum $A=\boxed{4}$.

Th[*eorema*]: *Si* $5A=\boxed{4}$ *erit quoque* $A=\boxed{4}$.

Dem[onstratio]: Erit enim vel

$$\text{I.} \quad 5A = 25aa + 25bb + 25cc + 25dd;$$

vel

$$\text{II.} \quad 5A = (5a+1)^2 + (5b+2)^2 + 25cc\ [+25dd;]$$

vel

$$\text{III.} \quad 5A = (5a+1)^2 + (5b+2)^2 + (5c+1)^2 + (5d+2)^2\,.$$

Casu I. *est*

$$\begin{aligned} A &= 5aa + 5bb + 5cc + 5dd \\ &= (2a+b)^2 + (a-2b)^2 + (2c+d)^2 + (c-2d)^2 = \boxed{4}. \end{aligned}$$

Casu II. *est*

$$\begin{aligned} A &= 1 + 2a + 4b + 5aa + 5bb + 5cc + 5dd \\ &= (1+a+2b)^2 + (2a-b)^2 + (2c+d)^2 + (c-2d)^2 = \boxed{4}. \end{aligned}$$

Casu III. *est*

$$\begin{aligned} A &= 1 + 2a + 4b + 5aa + 5bb + 1 + 2c + 4d + 5cc + 5dd \\ &= (1+a+2b)^2 + (2a-b)^2 + (1+c+2d)^2 + (2c-d)^2 = \boxed{4}. \end{aligned}$$

Hier ist zu merken daß a, b, c, d, so wohl *numeros affirmativos als negativos* bedeuten, dahero nicht nöthig habe um der Allgemeinheit willen $5a \pm 1$ für $5a+1$ zu schre[iben.]

Wann man nun diese *Theoremata* zusammen nimmt, so folget daraus dieses:[5] *Si* $2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma A = \boxed{4}$ *tum erit quoque* $A = \boxed{4}$.

Man kan auch noch weiter gehen, als:

Theor[ema]: Si $7A = \boxed{4}$ *erit quoque* $A = \boxed{4}$.

Dem[onstratio]: Cum omnis $\square$ *sit vel formae* $7m$, *vel* $7m+1$, *vel* $7m+2$, *vel* $7m+4$, *erit vel*

$$\text{I.} \quad 7A = 49aa + 49bb + 49cc + 49dd,$$

ergo

$$A = 7\,(aa + bb + cc + dd) = \boxed{4};$$

nam $\boxed{4} \cdot \boxed{4} = \boxed{4}$; *vel*

$$\text{II.} \quad 7A = (1+7a)^2 + (1+7b)^2 + (1+7c)^2 + (2+7d)^2$$

vel

$$\text{III.} \quad 7A = (1+7a)^2 + (2+7b)^2 + (3+7c)^2 + 49dd$$

vel

$$\text{IV.} \quad 7A = (2+7a)^2 + (2+7b)^2 + (2+7c)^2 + (3+7d)^2$$

vel

$$\text{V.}\quad 7A = (1+7a)^2 + (3+7b)^2 + (3+7c)^2 + (3+7d)^2\,.$$

Casu II. *erit*:

$$\begin{aligned} A &= 1+2a+2b+2c+4d+7aa+7bb+7cc+7dd \\ &= (1+a+b+c+2d)^2 + (a-b-2c+d)^2 + (a+2b-c-d)^2 \\ &\quad + (2a-b+c-d)^2\,. \end{aligned}$$

Casu III.

$$A = 2+2a+4b+6c+7aa+7bb+7cc+7dd =$$

(wovon die *Resolution* noch zu suchen)[6]

etc.

Wann der *numerus* A allso in 4 *quadrata* könnte *resolvir*t werden, $A = aa + bb + \frac{1}{4}(kk-bb)^2 + dd$, so würde freylich, wie Ewr. Hochwohlgeb. bemerket, $A+1 = \boxed{4}$, dann

$$A+1 = \left(\tfrac{1}{2}(kk-bb) - 1\right)^2 + kk + aa + dd.$$

Das im *Postscripto* gemeldte *Theorema* ist sehr artig; dann wann alle *numeri* $\boxed{\underset{\dagger}{4}}$ (welche nicht aus weniger als 4 *quadratis* bestehen) in dieser *Form* $4^{e-1}(8m+7)$ enthalten wären, so finde ich auch, daß daraus folgte *omnem numerum esse* $= \boxed{4}$. Mein Beweiß davon ist dieser:

Si omnes numeri $\boxed{\underset{\dagger}{4}}$ *in hac forma* $4^{e-1}(8m+7)$ *continentur, tum omnes numeri in hac forma* $4^{e-1}(8m+7)$ *non contenti essent* $= \boxed{4}$: *foret ergo* $8m+1 = \boxed{4}$, *item* $8m+3 = \boxed{4}$, *item* $8m+5 = \boxed{4}$. *At si* $8m+5 = \boxed{4}$, *erit quoque* $3(8m+5) = 8n+7 = \boxed{4}$. Oder allso: *Quia* $3(8n+7) = 8m+5$, *erit* $3(8n+7) = \boxed{4}$ *ideoque etiam* $8n+7 = \boxed{4}$.

Hieraus folget ferner, daß wann man nur beweisen könnte, *omnes numeros formae* $8m+1$ *esse* $= \boxed{4}$, *tum omnes plane numeros futuros esse* $= \boxed{4}$. *Cum enim sit* $3(8n+3) = 8m+1$, *erit* $3(8n+3) = \boxed{4}$ *ergo et* $8n+3 = \boxed{4}$. *Porro ob* $5(8n+5) = 8m+1$ *erit* $5(8n+5) = \boxed{4}$ *ergo et* $8n+5 = \boxed{4}$; *hinc denique erit* $8n+7 = \boxed{4}$: *ergo omnes numeri impares, ac proinde etiam omnes pares essent* $= \boxed{4}$.

Beyligenden Brief habe ich dieser Tagen von dem H. *D*[*octo*]^r *Gmelin* erhalten,[7] und verbleibe mit der schuldigsten Hochachtung

Ewr. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 26$^{\text{ten}}$ *Julii*
1749

P. S. Das *Theorema* für $7A = \boxed{4}$ so ich nicht ausgeführt, wird durch folgendes *general Theorema* vollendet:

Theorema. Posito $m = aa + bb + cc + dd$, *si sit* $mA = \boxed{4}$ *erit quoque* $A = \boxed{4}$.

Dem[onstratio]: Sit

$$mA = (f + mp)^2 + (g + mq)^2 + (h + mr)^2 + (k + ms)^2$$

atque

$$ff + gg + hh + kk = (aa + bb + cc + dd)\,(xx + yy + zz + vv)$$

erit

$$\begin{aligned} f &= ax + by + cz + dv \\ g &= bx - ay - dz + cv \\ h &= cx + dy - az - bv \\ k &= dx - cy + bz - av \end{aligned}$$

fietque

$$A = xx + yy + zz + vv + 2\,(fp + gq + hr + ks) + m\,(pp + qq + rr + ss)\,,$$

at reperitur hinc

$$\begin{aligned} A = {} & (ap + bq + cr + ds + x)^2 \\ & + (aq - bp + cs - dr - y)^2 \\ & + (ar - bs - cp + dq - z)^2 \\ & + (as + br - cq - dp - v)^2 \end{aligned}$$

ergo $A = \boxed{4}$ *in integris q. e. d.*

Ita si $7A = (2 + 7p)^2 + (2 + 7q)^2 + (2 + 7r)^2 + (3 + 7s)^2$, *erit* $a = 2$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 1$; $xx + yy + zz + vv = 3$, $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$ *et* $v = 0$, *unde* $f = 4$, $g = -2$, $h = 0$, $k = 1$. *Ergo si*

$$7A = (4 + 7p)^2 + (7q - 2)^2 + (7r + 0)^2 + (7s + 1)^2$$

erit

$$\begin{aligned} A = {} & (2p + q + r + s + 1)^2 \\ & + (2q - p + s - r - 1)^2 \\ & + (2r - s - p + q - 1)^2 \\ & + (2s + r - q - p)^2\,. \end{aligned}$$

Neulich ward in den Braunschweiger Anzeigen diese Frage aufgegeben: Wie viel ein *Capital* von 1000 Rthl. in 640 Jahren zu 5 *pro cento*, Zins auf Zins gerechnet, betragen werde?

Weil die herauskommende Zahl sehr groß, und die Rechnung nach der ordentlichen Art auszuführen fast unmöglich ist, so ist die Auflösung gewiß nicht leicht; ich habe folgende *summ* gefunden:

36 404 192 715 744 080 Rthl. 22 g[ute] g[roschen] $11\frac{9}{10}$ *d[eniers]*

welche nicht um $\frac{1}{10}$ *d[enier]* von der Wahrheit fehlen soll.

Der Aufgeber verlangt daß man die Antwort in einer halben Stund finden soll, mich hat aber dieselbe wohl eine gantze Stund gekostet; und ich sehe nicht, wie die Arbeit verkürzet werden könnte.[8]

R 855 Reply to n° 140
Berlin, July 26th, 1749
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 257–258v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 505–510; *Euler-Goldbach* (1965), p. 315–317

142
Goldbach to Euler
Petersburg, March (13th) 24th, 1750

HochEdelgebohrner Herr,
Hochgeehrter Herr *Professor*

Es sind schon mehr als 7 Monate verflossen seit dem ich Eurer HochEdelgeb. letztes Schreiben erhalten habe, und dieses würde nicht geschehen seyn wann nicht eines Theils unterschiedene abhaltungen dazwischen gekommen wären, andern Theils aber dasjenige so ich hätte schreiben können, auch nach meinem eigenen urtheil von gar zu geringem werth gewesen wäre. Die *methode* so Ew. HochEdelg. gefunden um zu zeigen daß wann $mA = \boxed{4}$ auch $A = \boxed{4}$ sey, halte ich vor ein *inventum inventorum*,[1] und ob ich zwar geglaubet daß die *propositio*: *omnem numerum esse summam quatuor quadratorum* auf eine leichtere art würde können *demonstri*ret werden, so habe doch dergleichen *demonstration* nicht gefunden; ich lasse aber dahin gestellet seyn ob nicht einige kleine *theoremata* so mir *en passant* vorgekommen nicht hiezu dienlich seyn möchten von welchen ich Eurer Hochedelgb. einige anzeigen will:

I.

$$\beta^2 + \gamma^2 + (3\delta - \beta - \gamma)^2 = (2\delta - \beta)^2 + (2\delta - \gamma)^2 + (\delta - \beta - \gamma)^2 .$$

Diese *transmutatio trium quadratorum in tria alia* scheinet mir von ziemlichem Nutzen zu seyn, *nam inter quatuor quadrata* $a^2 + b^2 + c^2 + 4k^2$, *ubi omnes litterae denotant numeros impares semper erunt tria quadrata quorum summa radicum est divisibilis per* 3, folglich können diese 4 *quadrata* nach solcher *methode* auf viele, und vieleicht gar auf alle mögliche Arten *transformi*ret werden, wie denn zum Exempel die Zahl 335 durch diese *methode* in alle *modos possibiles* verwandelt wird nemlich

$$\begin{aligned} &3^2+7^2+9^2+14^2 &&= 3^2+13^2+11^2+6^2 &&= 9^2+13^2+9^2+2^2 = \\ &15^2+7^2+5^2+6^2 &&= 15^2+1^2+3^2+10^2 &&= 15^2+9^2+5^2+2^2 = \\ &3^2+1^2+1^2+18^2 &&= 3^2+1^2+17^2+6^2 &&= 7^2+13^2+9^2+6^2, \end{aligned}$$

so daß in diesen *transmutationibus* alle *quadrata paria et imparia in quae resolvi potest numerus* 335, begriffen sind.[2] Es wäre aber schon gnug wann man ein Mittel hätte diese 4 *quadrata* $3^2+\beta^2+\gamma^2+4\varepsilon^2$ in nachfolgende 4 zu verwandeln $1^2+\eta^2+\theta^2+4\kappa^2$, denn so hätte man *demonstri*ret daß alle *numeri* $8n+7$ *summae quatuor quadratorum* sind; mir ist aber gleichwohl noch kein *exemple* vorgekommen da nicht die *quadrata* $3^2+\beta^2+\gamma^2+4\varepsilon^2$ *post primam aut secundam transmutationem in quatuor quadrata quorum unum sit unitas*, hätten verwandelt werden können, denn also findet man

$$\begin{aligned}
3^2+13^2+15^2+2^2 &= 407 &&= 1^2+9^2+15^2+10^2,\\
3^2+9^2+15^2+10^2 &= 415 &&= 1^2+5^2+17^2+10^2,\\
3^2+5^2+17^2+10^2 &= 423 &&= 1^2+5^2+19^2+6^2,\\
3^2+5^2+19^2+6^2 &= 431 &&= 1^2+3^2+15^2+14^2;
\end{aligned}$$

die folgenden 4 *quadrata* werden alsofort durch eine einige *operation*, eben wie die vorhergehende, *in quatuor quadrata quorum unum est unitas transmuti*ret biß auf $3^2+3^2+21^2+2^2=463$, allwo man *per primam transmutationem* bekommt $15^2+15^2+3^2+2^2$, und aus diesen *per secundam transmutationem* $1^2+13^2+17^2+2^2$.

II.

Wie schwer es auch ist zu sagen was *datis quatuor quadratis in quae resolvi potest numerus* $2m-1$, die *quatuor quadrata* = *numero* $2m+1$ seyn werden, so haben doch die ersteren 4 *quadrata* mit den letzteren einen gantz genauen *nexum* welcher in den *tribus quadratis* $= 8m+3$ gegründet ist, *datis enim his dantur simul quatuor quadrata pro* $2m-1$ *et pro* $2m+1$.

III.

Wann α, β, γ, δ *quatuor numeri impares quicunque* sind und man selbige gleich setzen kan folgenden *numeris*:

$$\alpha = 2er+1, \quad \beta = b+fr, \quad \gamma = c+gr, \quad \delta = r-e^2r-e-bf-cg,$$

so daß b, c, r *numeri integri* seyn, so kan man auch *demonstri*ren *omnem numerum* $8m+4$ oder *generatim omnem numerum esse summam quatuor quadratorum.* Denn es ist

$$\begin{aligned}
&(2er+1)^2+(b+fr)^2+(c+gr)^2+\left(r-e^2r-e-bf-cg\right)^2\\
&\qquad = 1^2+(b-fr)^2+(c-gr)^2+\left(r+e^2r+e+bf+cg\right)^2.
\end{aligned}$$

Daß derjenige welcher das *Problema* in den *Braunschweigischen Anzeigen* aufgegeben bessere *compendia* als Ew. Hochedelg. zu dessen *Solution* haben sollte kan ich mir nicht vorstellen, und bitte mir zu melden ob der *Autor* ferner etwas davon bekannt gemacht?[3] In den *Amsterdamer frantzösischen Zeitungen* vom 5. *Aug.* 1749 war folgendes *avertissement*: *M.r Quin Mackenzie Quin … a inventé à l'âge* *de* 8 *ans & il a eu l'honneur de presenter au Roi une methode par la quelle il multiplie & divise quelque nombre de figures que ce soit & en verifie le produit & le quotient en une seule ligne. Il fait cette operation en moins de trois minutes quand même il s'agiroit de multiplier* 20 *figures par* 20 *figures ou* 40 *par* 20*. Ceux qui voudront souscrire pour avoir cette methode seront tenus de donner d'abord une Guinée & une autre après que cette methode leur aura été communiquée ou à leurs Correspondans.* Nach der Zeit habe ich nichts mehr hievon gehöret.[4]

Ew. Hochedelg. haben die Güte gehabt zu denen mir schon längst übersandten Büchern Dero *Analysin Infinitorum* beyzulegen wovor ich dienstl[ich] dancke und die an den Hn Spener bezahlte 7 th., falls sie noch nicht abgegeben wären, zu empfangen bitte.[5] Ich nehme zugleich die Freyheit einen neuen Aufsatz von Büchern beyzufügen,[6] welche ich den Hn Spener ersuche bey offenem Wasser über Lübeck auf gleiche Art an Hn Köppen zu übersenden, wornechst ich mit besonderer hochachtung verharre

Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.^{t} Petersbourg den 24. *Mart. st. n.* 1750.

R 856 Reply to n° 141
Petersburg, March (13th) 24th, 1750
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 137–138v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 511–514; *Euler-Goldbach* (1965), p. 318–319

143
Euler to Goldbach
Berlin, April 14th, 1750

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats*-Rath

Wann ich nicht glaubte daß Ewr. Hochwohlgeb. in Übersendung meiner *Introduction* von Seiten des H. Speners einen groben Irrthum so gleich vermuthet, so würde ich über diesen Umstand gantz untröstlich seyn,[1] und nicht wissen wie ich mich wegen eines so unverschämten Verfahrens, ein Werk von meiner Arbeit zu *praesenti*ren, und zugleich die Bezahlung darfür auf den höchsten Preiß abfordern zu lassen, rechtfertigen sollte. Allein eben Ew. Hochwohlgeb. Anfrage ob ich von H. Spener die für dieses Werk angeschriebene Bezahlung erhalten, tröstet mich, und gibt mir die Versicherung daß Ewr. Hochwohlgeb. noch weit entfernet sind, mir wegen dieses groben Fehlers einige Schuld beyzumessen; und ich erkenne mich für diese gütige Anfrage Ewr. Hochwohlgeb. um so viel mehr verpflichtet, da ich sonsten nimmermehr zur Erkänntnüß dieses Irrthums gelanget seyn würde. Dann als ich vor einiger Zeit mit dem H. Spener meine Rechnung schloß, und er mir wegen einer *Parti*e ihm aus Basel verschriebener Bücher etwas Geld zurück schuldig war, so fand es sich zwar, daß er mir $7\frac{1}{2}$ Rthl. mehr auszahlen wollte, als meine Rechnung betrug; weil ich aber in meiner Rechnung sicher war, so glaubte ich ohne weiter nachzufragen, daß er zu seinem eigenen Schaden einen Fehler begangen, und ließ folglich blosser Dinge diesen Überschuß von $7\frac{1}{2}$ Rthl. ausstreichen. Allso kan ich auch dem H. Spener nicht aufbürden daß er *mala fide* gehandelt, und der gantze Fehler rühret daher daß ich ihm damals mein Buch zugeschickt um solches zu den von Ewr. Hochwohlgeb. verschriebenen Büchern beyzulegen, ohne ihm zu melden, daß ich die Freyheit nähme solches Ewr. Hochwohlgeb. gehorsamst zu *praesenti*ren. Weil nun derselbe durch die dritte oder 4te Hand auch einige *Exemplaria* von meinem Werk bekommen hatte und solche für den angesetzten Preiß verkaufte, so wurde eben dieser Preiß auch in Ewr. Hochwohlgeb. Rechnung angeschrieben; zugleich aber derselbe mir zu gut bemerket. Nachdem nun durch Ewr. Hochwohlgeb. Schreiben dieser Fehler entdecket worden, so hat der H. *Spener* solchen auch sogleich erkannt, und das überflüssig ausgezahlte Geld Ewr. Hochwohlgeb. zu gut geschrieben, welches auch bey der künftigen Rechnung sorgfältig abgezogen werden wird.[2] Diese meine Weitläuffigkeit, welche mir die gröste Unruhe über diese verdrüßliche Sache abgedrungen, werden Ewr. Hochwohlgeb. mir nicht übeldeuten, ungeacht ich glaube daß meine bißherige Aufführung mich von einem so häßlichen Verdacht bey Ewr. Hochwohlgeb. gäntzlich loßgesprochen haben muß: dahero ich auch nicht vermuthe daß diese Sach den geringsten Antheil an Ewr. Hochwohlgeb. so langem Stillschweigen gehabt haben mag; ich habe mir vielmehr solche Ursachen davon vorgestellt, welche mich auch abgehalten haben, Ewr. Hochwohlgeb. zuzuschreiben, ungeacht ich dazu öffters die Feder angesetzt hatte. Nunmehr aber habe ich die feste Hoffnung, daß ich hinführo das unschätzbare Vergnügen Dero Briefwechsels ununterbrochen werde geniessen können.

Vergangenen *Char*Freytag ist meine Frau gantz unvermuthet nach einer nicht gar 7 Monathlichen Schwangerschaft mit einem Söhnlein niedergekommen,[3] und hat seit der Zeit eine sehr schwehre Krankheit auszustehen gehabt, zu deren Besserung sich nun aber durch die Gnade Gottes alles anlässt, wie dann auch das Kind recht wohl zunimmt. Gleichwohl aber haben mir diese Umstände noch nicht erlaubet, Ewr. Hochwohlgeb. schöne *Theoremata* genauer in Erwägung zu ziehen; dahero ich nicht mehr davon melden kan, als daß mir dieselben von grosser Wichtigkeit zu Erfindung einer leichteren *Demonstration* des *Th*[*eorematis*] *Fermatiani* zu seyn scheinen.

In den Braunschweigischen Anzeigen ist über die gemeldte Frage, insonderheit was die Zeit der *Solution* betrifft, nichts weiter zum Vorschein gekommen.[4] Das in den *Amsterdammer* Zeitungen eingerükte *Avertissement*[5] ist mir wohl bekannt, und ich war auch sehr begierig mehr davon zu erfahren, allein seit der Zeit ist gar nichts mehr davon gehöret worden; dahero ich glaube daß solches nichts andres als eine Erfindung des Zeitungs Schreibers gewesen, wie dergleichen schon öffters zum Vorschein gekommen.

Meine gantze *Familie* lässt sich Ewr. Hochwohlgeb. gehorsamst empfehlen, wie ich mir dann nichts so sehr ausbitte als die Fortsetzung Dero gantz besonderen Neigung und Wohlgewogenheit,[6] der ich mit der allervollkommensten Hochachtung verharre

Eurer Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 14^{ten} *April*
1750

R 857 Reply to n° 142
Berlin, April 14th, 1750
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 260–261v
Published: *Euler-Goldbach* (1965), p. 319-320

144
Euler to Goldbach
Berlin, June 9th, 1750

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Nachdem H. *Spener* von Leipzig wieder zurückgekommen, so sagt er mir, daß er alle von Ewr. Hochwohlgeb. verlangte Bücher mit sich gebracht, ausser einigen *Defect*en zu alten Büchern, weswegen er doch *ordre* gestellt habe: So bald diese Bücher Dero *Ordre* gemäß gebunden seyn werden, so wird er dieselben abschicken, welches vielleicht auch schon geschehen, weil ich ihn seit mehr als 8 Tagen nicht gesehen habe; insonderheit aber habe ich ihm eingeschärfet, die in der vorigen Rechnung zu viel angesetzten 7 Rthl. bey dieser ja nicht zu vergessen.[1]

Ewr. Hochwohlgeb. *Theorema*

$$\beta^2 + \gamma^2 + (3\delta - \beta - \gamma)^2 = (2\delta - \beta)^2 + (2\delta - \gamma)^2 + (\delta - \beta - \gamma)^2$$

hat mir Anlaß gegeben folgende *Theoremata* zu finden, unter welchen dieses das erste ist:[2]

I. *Si* $a + b + c = 3m$ *erit*

$$a^2 + b^2 + c^2 = (2m - a)^2 + (2m - b)^2 + (2m - c)^2 .$$

II. *Si* $a + b + 2c = 3m$ *erit*

$$a^2 + b^2 + c^2 = (m - a)^2 + (m - b)^2 + (2m - c)^2 .$$

III. *Si* $a+2b+2c=9m$ *erit*

$$a^2+b^2+c^2=(2m-a)^2+(4m-b)^2+(4m-c)^2\,.$$

IV. *Si* $a+b+3c=11m$ *erit*

$$a^2+b^2+c^2=(2m-a)^2+(2m-b)^2+(6m-c)^2\,.$$

V. *Si* $a+2b+3c=7m$ *erit*

$$a^2+b^2+c^2=(m-a)^2+(2m-b)^2+(3m-c)^2\,.$$

VI. *Si* $2a+2b+3c=17m$ *erit*

$$a^2+b^2+c^2=(4m-a)^2+(4m-b)^2+(6m-c)^2\,.$$

VII. *Si* $a+3b+3c=19m$ *erit*

$$a^2+b^2+c^2=(2m-a)^2+(6m-b)^2+(6m-c)^2\,.$$

VIII. *Si* $2a+3b+3c=11m$ *erit*

$$a^2+b^2+c^2=(2m-a)^2+(3m-b)^2+(3m-c)^2$$

wo zu merken daß die *radices* a, b, c so wohl *negative* als *affirmative* genommen werden können.

Solche *Theoremata* können auch für 4 *quadrata* gefunden werden als

I. *Si* $a+b+c+d=2m$ *erit*

$$a^2+b^2+c^2+d^2=(m-a)^2+(m-b)^2+(m-c)^2+(m-d)^2\,.$$

II. *Si* $a+b+c+2d=7m$ *erit*

$$a^2+b^2+c^2+d^2=(2m-a)^2+(2m-b)^2+(2m-c)^2+(4m-d)^2\,.$$

III. *Si* $a+b+2c+2d=5m$ *erit*

$$a^2+b^2+c^2+d^2=(m-a)^2+(m-b)^2+(2m-c)^2+(2m-d)^2\,.$$

IV. *Si* $a+2b+2c+2d=13m$ *erit*

$$a^2+b^2+c^2+d^2=(2m-a)^2+(4m-b)^2+(4m-c)^2+(4m-d)^2\,.$$

Wann dahero $3^2+\beta^2+\gamma^2+4\varepsilon^2$ zu $1^2+\eta^2+\theta^2+4\kappa^2$ *reducirt* werden soll wo alle Buchstaben *numeros impares* bedeuten so wohl *affirm*[*ativos*] als *negat*[*ivos*], so würde nach dem II$^{\text{ten}}$ *Theoremate* kommen:

1. *Si* $3+\beta+\gamma+4\varepsilon=7m$ *erit*

$$3^2+\beta^2+\gamma^2+4\varepsilon^2=(2m-3)^2+(2m-\beta)^2+(2m-\gamma)^2+4\,(2m-\varepsilon)^2\,,$$

wo auch m ein *numerus impar*; also müste entweder $2m-3=1$ oder $2m-\beta=1$ oder $2m-\gamma=1$. Solches geschieht nun in folgenden fällen

1. wann $m=1$ und also $\beta+\gamma+4\varepsilon=4$;
2. wann $m=2$ und also $\beta+\gamma+4\varepsilon=11$ welches unmöglich;
3. wann $\beta=2m\pm1$; und $\gamma+4\varepsilon=5m-3\mp1$.

2. *Si* $3+\beta+2\gamma+2\varepsilon=7m$ *erit*

$$3^2+\beta^2+\gamma^2+4\varepsilon^2=(2m-3)^2+(2m-\beta)^2+(4m-\gamma)^2+4\,(m-\varepsilon)^2\,;$$

allso müste seyn entweder $2m-3=\pm1$ oder $2m-\beta=\pm1$ oder $4m-\gamma=\pm1$ wo m eine grade Zahl ist; allso geschieht dieses in folgenden Fällen

1. Wann $m=2$ und allso $\beta+2\gamma+2\varepsilon=11$
2. Wann $\beta=2m\pm1$ und $2\gamma+2\varepsilon=5m-3\mp1$
3. Wann $\gamma=4m\pm1$ und $\beta+2\varepsilon=-m-3\mp2$.

3. *Si* $6+\beta+\gamma+2\varepsilon=7m$ *erit*

$$3^2+\beta^2+\gamma^2+4\varepsilon^2=(4m-3)^2+(2m-\beta)^2+(2m-\gamma)^2+4\,(m-\varepsilon)^2$$

wo m wieder ein *numerus par* ist.

Jedoch zweifle ich, ob durch dieses 2^{te} *Theorema* allein immer ein *quadrat* $=1$ gefunden werden könne.

Man kan auch solche *Theoremata* für 5 *quadrata* geben, als

I. *Si* $a+b+c+d+e=5m$ *erit*

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=(2m-a)^2+(2m-b)^2+(2m-c)^2+(2m-d)^2+(2m-e)^2\,.$$

II. *Si* $a+b+c+d+2e=4m$ *erit*

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=(m-a)^2+(m-b)^2+(m-c)^2+(m-d)^2+(2m-e)^2$$

etc.

Wann man nun beweisen könnte, daß eines von diesen letsteren *quadratis* könnte *ad nihilum* gebracht werden, so hätte man auch, was man verlanget. Solches geht allso an wann entweder $a+b+c+d=0$ oder $3a=b+c+d+2e$.

Ewr. Hochwohlgeb. II^{tes} *Theorema* von dem *nexu inter* $2m-1=4\square$ *et* $2m+1=4\square$, *concessa resolutione numeri* $8n+3$ *in tria quadrata*, verstehe ich allso: *sit* $n=m-1$, *atque* $8n+3=8m-5=aa+bb+cc$, wo a, b, c, *numeri impares* sind; *erit* $8m-4=1+a^2+b^2+c^2$; *unde*

$$4m-2=\left(\frac{1+a}{2}\right)^2+\left(\frac{a-1}{2}\right)^2+\left(\frac{b-c}{2}\right)^2+\left(\frac{b+c}{2}\right)^2$$

wo zwey *radices pares* sind und 2 *impares*; folglich diese *Form* $4m-2=4pp+4qq+rr+ss$, also

$$2m-1=(p+q)^2+(p-q)^2+\left(\frac{r+s}{2}\right)^2+\left(\frac{r-s}{2}\right)^2.$$

Weil a, b, c so wohl *negative* als *affirmative* genommen werden können *sit* $2p = \dfrac{a+1}{2}$; $2q = \dfrac{b+c}{2}$ *erit*

$$2m-1 = \left(\frac{a+b+c+1}{4}\right)^2 + \left(\frac{a-b-c+1}{4}\right)^2 + \left(\frac{a+b-c-1}{4}\right)^2 + \left(\frac{a-b+c-1}{4}\right)^2.$$

Hernach ist $8m+4 = 9+aa+bb+cc$; also

$$4m+2 = \left(\frac{a+3}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-c}{2}\right)^2$$

wo $\dfrac{a-3}{2}$ *et* $\dfrac{b+c}{2}$ grade, $\dfrac{a+3}{2}$, $\dfrac{b-c}{2}$ ungrade Zahlen seyn werden; allso wird

$$2m+1 = \left(\frac{a+b+c-3}{4}\right)^2 + \left(\frac{a-b-c-3}{4}\right)^2 + \left(\frac{a+b-c+3}{4}\right)^2 + \left(\frac{a-b+c+3}{4}\right)^2.$$

Hieraus folgert daß wann $2m-1 = pp+qq+rr+ss$, alsdann immer seyn werde

$$2m+1 = (p+1)^2 + (q+1)^2 + (r-1)^2 + (s-1)^2,$$

nehmlich zwey von den *radicibus quadratorum ipsius* $2m+1$ werden um 1 grösser seyn als zwey von den *radicibus quadratorum ipsius* $2m-1$ und zwey um 1 kleiner: woraus dieses schöne *Theorema* entspringet.

Th[*eorema*]: Wann $2m-1 = \alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\delta\delta$ *et* $2m+1 = a^2+b^2+c^2+d^2$ so werden von den Wurzeln a, b, c, d, zwey um 1 grösser, die anderen 2 aber um 1 kleiner seyn als die Wurzeln α, β, γ, δ. Also ist:

$$\begin{array}{rccccc}
1 & = & 0^2+ & 0^2+ & 0^2+ & 1^2 \\
3 & = & (0+1)^2+ & (0+1)^2+ & (0-1)^2+ & (1-1)^2 \\
3 & = & 0^2+ & 1^2+ & 1^2+ & 1^2 \\
5 & = & (0+1)^2+ & (1+1)^2+ & (1-1)^2+ & (1-1)^2 \\
5 & = & 0^2+ & 0^2+ & 1^2+ & 2^2 \\
7 & = & (0+1)^2+ & (1+1)^2+ & (2-1)^2+ & (0-1)^2 \\
7 & = & 1^2+ & 1^2+ & 1^2+ & 2^2 \\
 & & + & + & - & - \\
9 & = & 2^2+ & 2^2+ & 0^2+ & 1^2 \\
9 & = & 0^2+ & (-1)^2+ & 2^2+ & 2^2 \\
 & & - & + & + & - \\
11 & = & 0^2+ & 1^2+ & 1^2+ & 3^2
\end{array}$$

Zu merken ist daß α, β, γ, δ so wohl *affirmative* als *negative* genommen werden können. Allso kan das *Theorema* allso ausgesprochen werden: *Singulae radicum* a, b, c, d, *semper unitate discrepabunt a singulis litterarum* α, β, γ, δ.

Folgendes *Theorema* scheint allso merkwürdig zu seyn:

Si $2m-1 = pp+qq+rr+ss$ *erit semper*

$$2m+1 = (p\pm 1)^2 + (q\pm 1)^2 + (r\pm 1)^2 + (s\pm 1)^2$$

dummodo signorum ambiguitas rite observetur.

{NB. Nicht eine jegliche Resolution von $2m-1$ hat diese Eigenschafft, sondern es gibt allzeit eine, so diese Eigenschafft hat.}[3]

Coroll[*arium*]: Allso ist allzeit $\pm 2p \pm 2q \pm 2r \pm 2s + 4 = 2$, oder $\pm p \pm q \pm r \pm s + 1 = 0$, das ist: Eine jegliche ungrade Zahl $2m-1$ kan allzeit in vier solche *quadrata* $pp+qq+rr+ss$ *resolvir*t werden, *ut sit* $\pm p \pm q \pm r \pm s = 1$. Dann es ist zu merken daß man auch offt solche 4 *quadrata* findet, da diese Eigenschafft nicht statt findet: als $27 = 0^2+1^2+1^2+5^2$ oder $39 = 1^2+1^2+1^2+6^2$; doch aber ist auch

$$\begin{array}{lllllll} 27 = & 1^2+ & 1^2+ & 3^2+ & 4^2 & \textit{ubi} & +1-1-3+4=1; \end{array}$$

allso ist wann diese *signa* $+\ -\ -\ +$ verkehrt unter jene *quadrata* geschrieben werden

$$\begin{array}{lllllll}
 & - & + & + & - & & \\
29 = & 0^2+ & 2^2+ & 4^2+ & 3^2 & \textit{ubi} & +0+2-4+3=1 \\
 & - & - & + & - & & \\
31 = & 1^2+ & 1^2+ & 5^2+ & 2^2 & \textit{ubi} & -1-1+5-2=1 \\
 & + & + & - & + & & \\
33 = & 2^2+ & 2^2+ & 4^2+ & 3^2 & \textit{ubi} & +2-2+4-3=1 \\
 & - & + & - & + & & \\
35 = & 1^2+ & 3^2+ & 3^2+ & 4^2 & \textit{ubi} & -1+3+3-4=1 \\
 & + & - & - & + & & \\
37 = & 2^2+ & 2^2+ & 2^2+ & 5^2 & \textit{ubi} & +2+2+2-5=1 \\
 & - & - & - & + & & \\
39 = & 1^2+ & 1^2+ & 1^2+ & 6^2; & &
\end{array}$$

von hier aus lässt sich nicht weiter gehen; dahero muß man eine andere *resolution* von 39 nehmen, welches durch die III der obigen *formul*n geschehen kan, da dann wird $a=1$; $b=-1$; $c=-1$; $d=6$; $a+b+2c+2d=10=5m$, allso $m=2$ und allso

$$\begin{array}{llllllll}
39 = & 1^2+ & 3^2+ & 5^2+ & 2^2 & \textit{ubi} & 1+3-5+2=1 & \\
 & - & - & + & - & & & \\
41 = & 0^2+ & 2^2+ & 6^2+ & 1^2 & & & \\
 & & & & & \text{oder} & 1-3+5-2, & \text{da wird} \\
41 = & 0^2+ & 4^2+ & 4^2+ & 3^2; & & &
\end{array}$$

hieraus muß wieder eine neue *resolution* gesucht werden; nach dem andern *Th*[*eoremate*] wird $a=-1$; $b=2$; $c=6$; $d=0$; $a+b+c+2d=7=7m$, allso $m=1$; und dahero

$$41 = 3^2 + 0^2 + 4^2 + 4^2$$

welche wieder nichts hilft; hieraus aber wird durch das andere *Th[eorema]* $a = 0$; $b = 4$; $c = 4$; $d = 3$; $m = 2$

{Hiezu ist es aber leichter die *Theoremata* von 3 *quadr[atis]* sonderlich das 1ste zu gebrauchen.}[4]

und allso

$$\begin{array}{llllllll}
41 = & 4^2 + & 0^2 + & 0^2 + & 5^2 & ubi & -4+0+0+5=1 & \\
 & + & - & - & - & & & \\
43 = & 5^2 + & 1^2 + & 1^2 + & 4^2 & ubi & +5+1-1-4=1 & \\
 & - & - & + & + & & & \\
45 = & 4^2 + & 0^2 + & 2^2 + & 5^2 & etc. & & \\
 & & & & & \text{oder} & -5+1+1+4 & \text{oder} \\
45 = & 6^2 + & 0^2 + & 0^2 + & 3^2. & & &
\end{array}$$

Ungeacht ich aber in dieser *Materi*e so weit gekommen, daß ich dieses *Theorema demonstri*ren kan: *omnem numerum esse summam quatuor quadratorum vel pauciorum*, so fehlet mir doch noch zu zeigen, daß diese 4 oder wenigere *quadrata* allzeit *in integris* angegeben werden können. Und dahero bin ich noch weit von des *Fermat*s Erfindung entfernet: zu dieser glaube ich auch nicht, daß man gelangen könne, ohne bey den *numeris trigonalibus* anzufangen, man müste allso trachten zu beweisen, daß *Omnis numerus integer summae trium vel pauciorum numerorum trigonalium* gleich seye:[5] Hiezu aber kan eine *algebra*ische *evolution* keineswegs behülflich seyn, weil es nicht einmal wahr ist, daß

$$n = \frac{xx+x}{2} + \frac{yy+y}{2} + \frac{zz+z}{2}$$

generaliter, sondern nur in den Fällen da n ein *numerus integer affirmativus*: dahingegen diese *Formul*

$$n = xx + yy + zz + vv$$

wahr ist, wann n auch ein *numerus fractus* ist, nur nicht *negativus*. Ich habe aber hierauf seit langer Zeit nicht weiter gedacht und allso auch nichts weiter gefunden.

Vor einiger Zeit habe ich Ewr. Hochwohlgeb. eine Entdeckung über die *summas divisorum numerorum naturalium* zu überschreiben die Ehre gehabt:[6]

numeri:	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,
	11,	12,	13,	14,	15	*etc.*				
summae divis[orum]:	1,	3,	4,	7,	6,	12,	8,	15,	13,	18,
	12,	28,	14,	24,	24	*etc.*				

und bemerket daß diese *Series Summae divisorum recurrens* sey allso daß wann $\mathbf{S}\,n$ die *summam divisorum numeri* n andeutet allzeit ist:

$$\begin{aligned}\mathbf{S}\,n = \mathbf{S}\,(n-1) \quad &+ \quad \mathbf{S}\,(n-2) - \mathbf{S}\,(n-5) - \mathbf{S}\,(n-7)\\ &+ \quad \mathbf{S}\,(n-12) + \mathbf{S}\,(n-15) - \mathbf{S}\,(n-22) - etc.\end{aligned}$$

Diese Entdeckung schien mir um so viel merkwürdiger, da der Beweiß davon nicht vollständig war, sondern sich auf dieses *Theorema* gründete, daß

$$\begin{aligned}&(1-x)\left(1-x^2\right)\left(1-x^3\right)\left(1-x^4\right)\left(1-x^5\right) \textit{ etc.}\\ =\ & 1-x^1-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-\textit{etc.}\end{aligned}$$

welches ich nur *per inductionem* gefunden hatte, und auf keinerley Weise beweisen konnte.[7] Es schien mir auch merkwürdig, daß die *exponentes alternatim sumti* 1, 5, 12, 22, 35 *etc.* die *numeri pentagonales* sind, und die übrigen 2, 7, 15, 26, 40 *etc.* die *seriem pentagonalium retro continuatam* vorstellen, allso daß die obige *series* auch solchergestalt dargestellt werden kan:

$$\textit{etc.}-x^{40}+x^{26}-x^{15}+x^7-x^2+x^0-x^1+x^5-x^{12}+x^{22}-x^{35}+\textit{etc.}$$

wo die *Differentiae exponentium* eine *progr*[*essionem*] *arithmeticam* ausmachen.

Seit der Zeit aber habe ich auch die *Demonstration* dieses *Theorematis* gefunden, welche sich auf dieses *Lemma* gründet:

$$\begin{aligned}&(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)(1-\delta) \textit{ etc.}\\ =\ & 1-\alpha-\beta(1-\alpha)-\gamma(1-\alpha)(1-\beta)-\delta(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)-\textit{etc.}\end{aligned}$$

dessen *Demonstration* sogleich in die Augen fällt.

Allso ist nach diesem *Lemmate*:

$$\begin{aligned}&(1-x)\left(1-x^2\right)\left(1-x^3\right)\left(1-x^4\right)\left(1-x^5\right) \textit{ etc.}=s\\ =\ & 1-x-x^2(1-x)-x^3(1-x)\left(1-x^2\right)-x^4(1-x)\left(1-x^2\right)\left[\left(1-x^3\right)-\textit{etc.}\right]\end{aligned}$$

Ponatur $s=1-x-Axx$ *erit*

$$A=1-x+x(1-x)\left(1-x^2\right)+x^2(1-x)\left(1-x^2\right)\left(1-x^3\right)+\textit{etc.};$$

evolvatur ubique factor $1-x$ [*erit*]

$$\begin{array}{lllll} A=1-x & -x^2(1-xx) & -x^3(1-xx)\left(1-x^3\right) & & \textit{etc.}\\ \quad +x(1-xx) & +xx(1-xx)\left(1-x^3\right) & +x^3(1-xx)\left(1-x^3\right)\left(1-x^4\right) & & \textit{etc.}\end{array}$$

hincque fiet

$$A=1-x^3-x^5(1-xx)-x^7(1-xx)\left(1-x^3\right) \textit{ etc.};$$

sit $A=1-x^3-Bx^5$ *e*[*rit*]

$$B=1-xx+x^2(1-xx)\left(1-x^3\right)+x^4(1-xx)\left(1-x^3\right)\left(1-x^4\right)+\textit{etc.};$$

evolv[*atur*] *fact*[*or*] $1-xx$

$$\begin{array}{llll} B=1-xx & -x^4\left(1-x^3\right) & -x^6\left(1-x^3\right)\left(1-x^4\right) & \\ \quad +xx\left(1-x^3\right) & +x^4\left(1-x^3\right)\left(1-x^4\right) & +x^6\left(1-x^3\right)\left(1-x^4\right)\left(1-x^5\right) & \textit{etc.}\end{array}$$

hincque fiet

$$B = 1 - x^5 - x^8\left(1 - x^3\right) - x^{11}\left(1 - x^3\right)\left(1 - x^4\right) - \textit{ etc.};$$

sit $B = 1 - x^5 - Cx^8$ *er[it]*

$$C = 1 - x^3 + x^3\left(1 - x^3\right)\left(1 - x^4\right) + x^6\left(1 - x^3\right)\left(1 - x^4\right)\left(1 - x^5\right) + etc.;$$

evolv[atur] fact[or] $1 - x^3$

$$\begin{array}{llll} C = 1 - x^3 & - x^6\left(1 - x^4\right) & - x^9\left(1 - x^4\right)\left(1 - x^5\right) & etc. \\ \quad + x^3\left(1 - x^4\right) & + x^6\left(1 - x^4\right)\left(1 - x^5\right) & + x^9\left(1 - x^4\right)\left(1 - x^5\right)\left(1 - x^6\right) & \end{array}$$

ergo

$$C = 1 - x^7 - x^{11}\left(1 - x^4\right) - x^{15}\left(1 - x^4\right)\left(1 - x^5\right) - \textit{ etc.};$$

sit $C = 1 - x^7 - Dx^{11}$.

Wann man nun auf gleiche Art fortgehet, so wird $D = 1 - x^9 - Ex^{14}$, $E = 1 - x^{11} - Fx^{17}$ *etc.* Allso wird seyn

$$\begin{array}{rcl c rcl} s & = & 1 - x - Ax^2 & & s & = & 1 - x - Ax^2 \\ A & = & 1 - x^3 - Bx^5 & \text{oder} & Ax^2 & = & x^2\left(1 - x^3\right) - Bx^7 \\ B & = & 1 - x^5 - Cx^8 & & Bx^7 & = & x^7\left(1 - x^5\right) - Cx^{15} \\ C & = & 1 - x^7 - Dx^{11} & & Cx^{15} & = & x^{15}\left(1 - x^7\right) - Dx^{26} \\ D & = & 1 - x^9 - Ex^{14} & & Dx^{26} & = & x^{26}\left(1 - x^9\right) - Ex^{40} \\ & & etc. & & & & etc., \end{array}$$

woraus dann gantz ungezweifelt folget

$$s = 1 - x - x^2\left(1 - x^3\right) + x^7\left(1 - x^5\right) - x^{15}\left(1 - x^7\right) + x^{26}\left(1 - x^9\right) - etc.$$

oder

$$s = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - etc.$$

Nächst gehorsamster Empfehlung aller der meinigen habe die Ehre mit der schuldigsten Hochachtung zu verharren

Ewr. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 9 *Junii*
1750.

R 858 Berlin, June 9th, 1750
Original, 3 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 262–264v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 515–524; *Euler-Goldbach* (1965), p. 321–325

145
Goldbach to Euler
Petersburg, July (7th) 18th, 1750

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*,

Aus Eurer Hochedelgebohrnen Schreiben vom 14. *Apr.* habe ich mit vielem vergnügen ersehen daß Dero *Familie* mit einem Söhnlein vermehret worden und daß sich selbiges nebst seiner Frau Mutter wohlaufbefindet;[1] ich bitte Derselben meine schuldigste *Gratulation* abzustatten und werde jederzeit an allem was Ew. Hochedelg. und Dero werthe Angehörige betrifft vielen Theil nehmen. Ich will auch hoffen daß der H. *Johannes Albertus* über wenige Jahre sich als *Professor Matheseos sublimioris* allhie einfinden und diese Stelle mit vielem Ruhm bekleiden wird.[2]

Hingegen thut es mir leyd daß Eurer Hochedelg. durch den in der Rechnung des Hn Speners vorgegangenen fehler einige *inquietude* verursachet worden;[3] ich dancke dienstl[ich] vor das übersandte mir sehr angenehme *présent* von der *introductione in Arithmeticam infinitorum*,[4] ich habe dieselbe alsofort in *Moscau* einbinden lassen und im durchblättern befunden daß mir einige *propositiones* davon schon aus dem was Ew. Hochedelg. mir in voriger Zeit mündlich gemeldet hatten, bekannt waren, ich zweifele aber nunmehro sehr ob ich fernere *progress*en darin zu machen gnugsame gelegenheit und *Capaci*tät haben werde.

Die *demonstration* von den *Theorematibus*, die *summas trium & quatuor quadratorum* betreffend, welche Ew. Hochedelg. in Dero Schreiben anführen, habe ich leicht eingesehen,[5] weil *generaliter* wahr ist daß *posita*

$$z = \frac{2\,(\alpha e + \beta f + \gamma g + \delta h)}{e^2 + f^2 + g^2 + h^2}$$

die 4 gegebenen *quadrata*

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$$

gleich sind

$$(ez - \alpha)^2 + (fz - \beta)^2 + (gz - \gamma)^2 + (hz - \delta)^2$$

allwo die *quantitates* e, f, g, h *pro lubitu* genommen werden können; wann auch über dieses die letzteren 4 *quantitates* so beschaffen sind daß die *summa quatuor radicum* $(e + f + g + h)\ z - (\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 0$, so können die 4 *quadrata* allezeit in drey *quadrata* verwandelt werden.

Ich will noch einige andere *propositiones* beyfügen die mir schon längst bekannt gewesen, und sich selbst *demonstri*ren.[6]

(1.)

$$\begin{aligned}
&\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + (2\delta + \alpha + \beta + \gamma)^2\\
&= (\alpha + \beta + \delta)^2 + (\alpha + \gamma + \delta)^2 + (\beta + \gamma + \delta)^2 + \delta^2\\
&= (\alpha + \delta)^2 + (\beta + \delta)^2 + (\gamma + \delta)^2 + (\alpha + \beta + \gamma + \delta)^2
\end{aligned}$$

woraus zugleich die *methode* erhellet wie *data quatuor quadrata imparia (non aequalia inter se) in quatuor alia, sive paria sive imparia* verwandelt werden können, denn wann δ in den gegebenen 4 *quadratis* ein *numerus par* ist, so gilt die erste *aequation pro quadratis paribus*, und die andere *pro imparibus*.

(2.) *Si dantur in uno casu* $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 8m+3$, *dantur etiam quatuor quadrata pro casu quocunque* $2m+p^2 \pm p+1$, *nam, si* $8m+3$ *est* = *tribus quadratis, erit*[7] $8m+3+(1+2p)^2 = 4$ *quadratis, et divisis omnibus per* 4, $2m+p^2 \pm p+1 =$ 4 *quadratis*.

(3.) Nachfolgende drey *quadrata in fractis*

$$\frac{\left(\pm p^2\alpha \mp 2q^2\beta - 2pq\gamma\right)^2 + \left(\mp 2q^2\alpha \pm p^2\beta - 2pq\gamma\right)^2 + \left(\mp 2pq\alpha \mp 2pq\beta + \left(2q^2-p^2\right)\gamma\right)^2}{\left(p^2+2q^2\right)^2}$$

allwo α, β, γ *pro integris* genommen werden, sind gleich diesen 3 *quadratis integris* $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$.

(4.) *Si* $A^2+B^2+C^2 = 8m+3$ *erit*

$$\frac{(A+B-C\pm 1)^2}{4\cdot 4} + \frac{(A-B+C\pm 1)^2}{4\cdot 4} + \frac{(-A+B+C\pm 1)^2}{4\cdot 4} + \frac{(-A-B-C\pm 1)^2}{4\cdot 4} = 2m+1$$

und wann man 3 an statt 1 setzet so kommen 4 *quadrata* $= 2m+3$ heraus.

Das vorhergehende ist bereits vor mehr als 8 Tagen geschrieben gewesen und ich will es für dieses mal dabey bewenden lassen damit der Brief nicht etwa durch neue *distractiones* noch länger aufgehalten werde. Ich verharre mit vieler Hochachtung

Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.^{t} Petersburg den 18. *Jul.* 1750.

R 859 Reply to n° 143 and n° 144
Petersburg, July (7th) 18th, 1750
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 139rv, 141r (fol. 140 contains two postscripts that actually belong with a much earlier letter: see n° 55, note 22)
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 525–526; *Euler-Goldbach* (1965), p. 326–327

146
Euler to Goldbach
Berlin, August 15th, 1750

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Ewr. Hochwohlgeb. statte zuvorderst für Dero gütige *Gratulation* zu meiner Frauen glücklichen Entbindung allen gehorsamsten Dank ab, muß aber nunmehr berichten, daß dieses Söhnlein gestern acht Tag wieder gestorben, nachdem dasselbe in seinem sehr schwächlichen Zustand $19\frac{1}{2}$ Wochen das Leben erhalten.[1]

In meinem vorigen Schreiben habe Ewr. Hochwohlgeb. zu berichten die Ehre gehabt, daß ich gedächte eine Reise nach Frankfurth am Main vorzunehmen, um von dannen meine Muter hieher zu hohlen.[2] Diese Reise ist nun inzwischen würklich für sich gegangen, welche ich mit meiner Frau und unsrem ältesten Sohn vorgenommen. Wir sind über Magdenburg, *Duderstat* und *Cassel* dahin gereiset, haben aber den Rückweg über Hanau, *Fulda*, *Erfurt*, *Merseburg* und *Wittenberg* genommen, und meine Muter glücklich hieher gebracht, nachdem wir nicht mehr als 20 Tag weggewesen.[3]

Ewr. Hochwohlgeb. hegen schon einen allzu vortheilhaften Begriff von unserem *Johan Albrecht*;[4] seit einigen Jahren habe ich denselben eine hiesige wohleingerichtete Schul *frequentir*en lassen, um darinn das Latein und andere nöthige *studia* zu treiben, in welcher Zeit er dann *in Mathematicis* nicht sonderlich weiter gekommen; auf *Micheli* gedenke ich ihn aber wieder zu Hause zu behalten, und hoffe alsdann in kurzer Zeit das in diesem Stük verseumte wieder einzuhohlen.

H. Spener sagt mir daß er die verlangten Bücher schon vor einiger Zeit an Ewr. Hochwohlgeb. abgeschickt, und in der beygelegten Rechnung die bewussten 7 Rthl. abgezogen.[5]

Die überschriebenen *Theoremata circa resolutionem numerorum in tria et* 4 *quadrata* sind alle merkwürdig, und haben ihre völlige Richtigkeit; ich habe mich aber bißher umsonst bemühet aus solchen *Theorematibus* den geringsten Nutzen für die bewussten *Fermatiana* zu ziehen. Ich habe zwar bewiesen: *omnem numerum sive integrum sive fractum esse summam quatuor pauciorumve quadratorum*; allein es fehlet mir noch an diesem Beweise:

Si numerus integer n fuerit summa quatuor fractorum quadratorum $\frac{aa}{pp}+\frac{bb}{qq}+\frac{cc}{rr}+\frac{dd}{ss}$*, tum eundem quoque semper esse summam quatuor quadratorum in integris.*[6]

Und ich sehe wohl daß ich ohne diese *Demonstration* nichts *pro resolutione numerorum in tres trigonales*, 5 *pentagonales*, 6 *hexagonales*, *etc.* auszurichten vermögend bin; und weil hier alles auf *numeros integros* ankommt, so können die *formulae universales*, als welche auch *fractos* in sich schliessen nicht viel helfen.[7] Die *Demonstrationem pro quadratis* habe ich aus der Betrachtung der *residuorum*, welche *post divisionem cujusque numeri per quadratum* überbleiben, hergeleitet, allein diese Betrachtung kan bey den übrigen *numeris polygonalibus* nicht angewandt werden; dahero ich den sicheren Schluß mache, daß *Fermat* durch gantz andere *speculation*en auf seine *Theoremata* geleitet worden, welche vielleicht aus fleissiger Erwägung seiner Werke zu errathen wären.[8]

Ich habe neulich einen Einfall gehabt eine *seriem* $a + b + c + d + e + f$ *etc.* daraus zu bestimmen, wann die *producta ex binis terminis contiguis* gegeben sind: als:

Quaeratur series numerorum $a+b+c+d+e+f+$ *etc. certa et uniformi lege procedens, ut sit:* $ab = 1$; $bc = 2$; $cd = 3$; $de = 4$; $ef = 5$ *etc.*

Hieraus ist sogleich klar, daß wann nur ein *terminus* bekannt wäre, die übrigen alle daraus bestimmt werden; allso aus dem ersten a sind die folgenden $b = \dfrac{1}{a}$; $c = \dfrac{2a}{1}$; $d = \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot a}$; $e = \dfrac{2\cdot 4a}{1\cdot 3}$; $f = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot a}$; nun folgt *ex natura seriei* daß die *Termini infinitesimi* einander gleich seyn müssen;[9] allso wann je zwey *contigui* einander gleich gesetzt werden, so müssen folgende *valores* der Wahrheit immer näher kommen:

$$aa = \frac{1\cdot 1}{2} = \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 2} = \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 3}{2\cdot 2\cdot 4} = \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4}\ etc.$$

allso wird seyn

$$aa = \frac{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdot 9\cdot 11\cdot 11\cdot etc.}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\cdot 10\cdot 10\cdot 12\cdot etc.}\ in\ infinitum.$$

Diese *expression* aber ist $= \dfrac{2}{\pi}$ (*existente* $1 : \pi =$ *diam*[*eter*] : *periph*[*eriam*]);[10] folglich wird $a = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$; dahero ist dieses eine *series uniformi lege procedens*:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}};\ \ \sqrt{\frac{\pi}{2}};\ \ 2\sqrt{\frac{2}{\pi}};\ \ \frac{1\cdot 3}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}};\ \ \frac{2\cdot 4}{1\cdot 3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, etc.$$

Von dieser *Serie*

$$1 - x^1 + x^4 - x^9 + x^{16} - x^{25} + x^{36} - x^{49} + etc.$$

halte ich für merkwürdig, daß wann man setzt $x = 1-y$, diese *series* herauskommt

$$\frac{1}{2} + 0y + 0y^2 + 0y^3 + 0y^4 + etc.$$

nehmlich daß alle *Potestates finitae ipsius* y *evanesci*ren, welches aber bey den *infinitis* nicht geschehen kan, indem die *summa* derselben *seriei* unmöglich allzeit seyn kan $= \frac{1}{2}$. Solches mag wohl eintreffen *casu* $x = 1$; aber wann $x < 1$, so ist die *summa* gewiß $> \frac{1}{2}$. Allein setze ich nur $x = \frac{9}{10}$ oder $y = \frac{1}{10}$ so wird die *summ* $= 0,499\,949\,2$ wofern ich im Rechnen nicht gefehlt.[11]

Weil ich Verhindrung bekomme, so muß ich hier abbrechen. Dahero mich samt den meinigen zu Ewr. Hochwohlgeb. beständigen Gewogenheit und Zuneigung gehorsamst empfehle und mit aller schuldigsten Hochachtung verharre

Ewr. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 15^{ten} *Augusti*
1750

R 860 Reply to n° 145
Berlin, August 15th, 1750
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 265–266v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 527–529; *Euler-Goldbach* (1965), p. 327–328

147
Euler to Goldbach
Berlin, August 17th, 1750

P. S.

Ich kan nicht unterlassen den in meinem letsten Schreiben begangenen Rechnungs Fehler anzuzeigen,[1] daß ich die *summ* der dort angeführten *seriei* kleiner als $\frac{1}{2}$ befunden welche doch würklich nach wiederhohlter Rechnung grösser ist als $\frac{1}{2}$. Ich habe seit der Zeit verschiedene *casus* mit allem Fleiße berechnet, von dieser *serie*:

$$s = 1 - x^1 + x^4 - x^9 + x^{16} - x^{25} + x^{36} - x^{49} + etc.$$

und befunden daß

wann	$x = 0,$	so ist	$s = 1,$	welches für sich klar;
	$x = \frac{1}{2}$	...	$s = 0,560\,562\,104\,0$	
	$x = \frac{2}{3}$	...	$s = 0,506\,335\,1$	
	$x = \frac{7}{10}$	...	$s = 0,502\,937\,986\,1$	
	$x = \frac{8}{10}$	...	$s = 0,500\,059\,168\,3$	
	$x = \frac{9}{10}$	...	$s = 0,500\,000\,000\,5$	
	$x = 1$	...	$s = 0,5.$	

Wann allso x nur um sehr wenig kleiner ist als 1, nehmlich $x = 1 - \omega$, so wird die *Summa* s um etwas fast unmerkliches grösser als $\frac{1}{2}$. Dann wann $\omega = \frac{1}{10}$ so ist $s = \frac{1}{2} + \frac{5}{10^{10}}$; und wann man setzen sollte $\omega = \frac{1}{20}$ oder $x = \frac{19}{20}$, so kan man sicher schliessen, daß der *excess* der *summae* s über $\frac{1}{2}$ nur ungefehr $\frac{5}{10^{20}}$ betragen würde. Ich habe aber bißher umsonst einen sicheren Weg gesucht um die *summe* dieser *Seriei proxime in numeris* zu bestimmen, wann ω ein sehr kleiner Bruch ist. Dann wann ich setzen wollte $\omega = \frac{1}{100}$ oder $x = \frac{99}{100}$, so müsste ich alle *Terminos seriei* auf mehr als 100 *Figur*en in *Decimal Fractionen* berechnen weil $s = 0,5000000$ *etc.* und die Anzahl der nach der 5 folgenden Nullen sich biß auf 100 belauffen würde: dann ungefehr wird seyn $s = \frac{1}{2} + \frac{5}{10^{100}}$. Es wäre allso eine *Methode* hoch zu schätzen, vermittelst welcher man im Stande wäre den Werth von s *proxime* zu bestimmen, wann ω ein sehr kleiner Bruch ist.

Die *Theoremata Fermatiana* haben mich auf die Betrachtung dieser *seriei*

$$s = 1 + x^1 + x^4 + x^9 + x^{16} + x^{25} + x^{36} + etc.$$

gebracht, als in welcher keine andere *potestates ipsius* x vorkommen, als deren *exponentes numeri quadrati* sind. Nimmt man nun das *quadrat* von dieser *serie*:

$$ss = 1 + 2x + x^2 + 2x^4 + 2x^5 + x^8 + etc.$$

so enthält diese *series* keine andere *potestates ipsius* x, als deren *exponentes summae duorum quadratorum* sind. In der *serie* s^3 werden noch nicht alle *potestates ipsius* x vorkommen, sondern darinn noch diese x^7, x^{15}, x^{23}, x^{28} *etc.* fehlen. Könnte man nun beweisen, daß in der *serie* s^4 gar alle *potestates ipsius* x nothwendig vorkommen, so wäre zu gleich bewiesen, daß eine jegliche Zahl *summa* 4 *quadratorum pauciorumve* wäre.

Ebenfalls *pro resolutione numerorum in tres triangulares* müste man beweisen daß *posito*

$$s = 1 + x^1 + x^3 + x^6 + x^{10} + x^{15} + x^{21} + etc.$$

die daraus entstehende *series* s^3 gar alle *potestates ipsius* x in sich fasse. Und *pro numeris pentagonalibus* müsste bewiesen werden, daß *posito*

$$s = 1 + x^1 + x^5 + x^{12} + x^{22} + etc.$$

die daher entstehende *series* s^5 gar alle *potestates ipsius* x in sich fasse, *etc.*

In diesen *seriebus pro s assumtis* habe ich alle *coefficientes* gleich 1 gesetzt: Der Beweiß aber wird einerley seyn, wann man *quosvis coefficientes affirmativos* annimmt, und es käme darauf an solche *Coefficientes* zu erwählen, daß der Beweiß erleichtert würde. Dieser Weg deucht mir noch der *natür*lichste zu seyn, um zum Beweiß der *Theor*[*ematum*] *Fermat*[*ianorum*] zu gelangen.[2]

Ewr. Hochwohlgeb. werde noch ein *curieuses paradoxon in Analysi infinitorum* vorlegen, welches darinn bestehet, daß man öffters das *integrale* von einer *differential aequation* finden kan, ohne dieselbe zu *integri*ren: indem man dieselbe so gar noch weiter *differentir*t: ungeacht eine solche *operation* dem Endzweck schnurstracks entgegen zu seyn scheinet: dann wann man eine *aequationem differentialem* nochmals *differentir*t, so bekommt man ihr *differentiale*, oder das *differentio-differentiale aequationis integralis quaesitae*; so wunderbar muß es allso scheinen, daß man durch eine solche *operation* die *aequationem integralem* selbst bekommen sollte. Folgendes *Exempel* wird dieses *paradoxon* deutlich an den Tag legen:

Proposita sit haec aequatio differentialis $y\,dx - x\,dy = a\sqrt{\left(dx^2 + dy^2\right)}$ *cujus integrale quaeratur.*

Ponatur $dy = p\,dx$ *haecque aequatio abibit in* $y - px = a\sqrt{(1+pp)}$ *quae denuo differentiata dat*

$$dy - p\,dx - x\,dp = \frac{ap\,dp}{\sqrt{(1+pp)}}.$$

Atqui est $dy = p\,dx$ *(per hyp[othesin]) ergo*

$$-x\,dp = \frac{ap\,dp}{\sqrt{(1+pp)}},$$

ideoque hinc habebitur

$$x = \frac{-\,ap}{\sqrt{(1+pp)}}.$$

Porro ex aequatione $y - px = a\sqrt{(1+pp)}$ *fit* $y = px + a\sqrt{(1+pp)}$, *unde valore invento pro* x *substituto, obtinetur*

$$y = \frac{a}{\sqrt{(1+pp)}}.$$

Cum jam sit $x = \dfrac{-\,ap}{\sqrt{(1+pp)}}$ *erit* $xx + yy = aa$, *quae est aequatio integralis quaesita, atque per differentiationem eruta.*[3]

Übrigens beziehe ich mich auf mein voriges und verharre mit der schuldigsten Hochachtung

Ewr. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 17^{ten} *Aug.* 1750

R 861 Postscript to n° 146
Berlin, August 17th, 1750
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 267–268r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 530–533; *Euler-Goldbach* (1965), p. 329–330

148

Goldbach to Euler

[Petersburg], (September 22nd) October 3rd, 1750

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*

Ew. Hochedelgebohrne hatten mir zwar keine Nachricht von Dero bevorstehenden Reise nach Franckfurt gegeben, ich bin aber doch davon ehe ich Dero letztes Schreiben erhielte *informi*ret gewesen,[1] und schätze Ew. HochEdelg. glücklich daß Sie den Entschluß gefasset auch zum theil bewerckstelliget Dero Frau Mutter bey sich aufzunehmen und zu versorgen.

Der Rechnungs-Fehler welchen E. HochEdelg. selbst in Dero Schreiben vermuthet hatten ist mir alsofort sehr wahrscheinlich vorgekommen, es hätte mir aber viele Mühe gekostet selbigen eigentlich anzuzeigen, wann solches nicht E. H. selbst in Dero *P[ost] S[cri]pto* gethan hätten;[2] mir werden auch diese Sachen seit dem E. H. von hie abgereiset sind und ich hierüber mit keinem Menschen mehr spreche noch in Büchern etwas dergleichen lese, je länger je fremder, wie ich denn den *nexum inter aequationes* $y\,dx - x\,dy = a\sqrt{dx^2 + dy^2}$ und $x^2 + y^2 = a^2$ schwerlich würde entdecket haben wann Ew. HochEdelg. selbigen nicht so deutlich angezeiget hätten.[3]

Aus dem *Theoremate Fermatiano* folget auch dieses: daß die *summa radicum quatuor quadratorum imparium* allezeit = seyn kan ± 2, oder daß *data summa quatuor quadratorum imparium* die *quatuor quadrata* so angegeben werden können daß die *summa radicum* = sey ± 2; wann man aber auf eine leichte Art beweisen kan daß die *summa quatuor quadratorum imparium* auf nachfolgende 4 zu *reduci*ren ist: $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + (2 - \alpha - \beta - \gamma)^2$ so ist auch leicht zu beweisen daß $8m + 4$ allezeit eine *summa quatuor quadratorum imparium* ist.

Die bewusten 7 Rub. sind zwar nicht in die Rechnung gebracht welche ich neulich mit 31 R. 40 *Cop.* bezahlet habe, ich möchte aber auch nicht gern den H. *Spener* mit dergleichen Erinnerungen weiter *incommodi*ren[4] sondern bin zufrieden wann mir anstatt derselben der *Nouveau Secretaire de la Cour à Paris* 1744, *in* 12.° welches Buch auf der *Specification* gestanden hat, aber mit den andern nicht mitgekommen ist, bey gelegenheit übersandt wird; es kan kein rares Buch seyn, weil es zu Fr[ank]f[urt] am Mayn in dem Knoch- und Eslingerischen Buchladen für 1 *fl.* 15 Kreutzer verkaufft wird.[5]

Ich bitte meine Empfehlung an Dero sämmtliche *Famili*e zu machen und verharre mit vieler hochachtung

Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

den 3. *Oct. st. n.* 1750.

R 862 Reply to n° 146 and n° 147
[Petersburg], (September 22nd) October 3rd, 1750
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 142–143r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 534–535; *Euler-Goldbach* (1965), p. 331

149
Euler to Goldbach
Berlin, November 14th, 1750

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Ich war nicht wenig bestürzt, als ich aus Ewr. Hochwohlgeb. Schreiben vernommen, daß H. Spener in seiner letsten Rechnung die bewussten 7 Rthl. nicht abgezogen, da mich derselbe doch so fest versichert hatte, daß solches geschehen:[1] Als ich ihm deswegen Vorstellung gethan, war er nicht weniger bestürzt, und versicherte mich daß der Abzug würklich in seinen Büchern geschehen, und durch ein blosses Versehen nicht in die Rechnung gebracht worden. Damit nun eben dieses Versehen nicht ferner begangen werde, so habe ich darauf gedrungen, daß dieser überschuß Ewr. Hochwohlgeb. unverzüglich durch H. Köppen vergütet würde, wozu H. *Spener* sich gantz willig erzeiget, und mir in beyligendem Zettulein die Versicherung gegeben, daß solches schon allbereits geschehen.[2] Dann ungeacht Ewr. Hochwohlgeb. die Sach nicht weiter wollten getrieben wissen, so war mir doch allzuviel daran gelegen, als daß ich damit zufrieden seyn könnte: und bitte dahero Ewr. Hochwohlgeb. gehorsamst um Vergebung, wann ich in diesem Stück mich nicht so genau an Dero Verordnung gehalten habe. Inzwischen wird H. Spener doch nicht unterlassen das verlangte Buch zu verschaffen.[3]

Neulich kam mir in Sinn die allgemeinen Eigenschafften der Cörper, welche *hedris planis* eingeschlossen sind, zu bestimmen; weil kein Zweifel ist, daß sich in denselben nicht eben dergleichen allgemeine Eigenschafften finden sollten, als in den *figuris planis rectilineis*, deren Eigenschafften darinn bestehen, daß 1. in einer jeglichen *figura plana* der *numerus laterum* dem *numero angulorum* gleich ist, hernach 2. daß die *summa angulorum omnium* gleich ist *bis tot rectis quot sunt latera demtis quatuor*. Wie aber in den *figuris planis* nur *latera* und *anguli* zu betrachten vorkommen, so müssen bey den Cörpern mehr Stücke in Betrachtung gezogen werden. Als[4]

I. die *Hedrae*, deren Anzahl sey $= H$

II. die *anguli solidi*, deren Anzahl sey $= S$

III. die Fügungen, wo zwey *hedrae secundum latera* zusammen kommen, so ich aus Mangel eines *recipir*ten Worts *acies* nenne, deren Anzahl sey $= A$

IV. die *Latera singularum hedrarum, quorum omnium simul sumtorum numerus sit* $= L$

V. die *anguli plani singularum hedrarum, quorum omnium numerus sit* $= P$.

1. Bey diesen 5 Stücken ist nun erstlich klar daß $P = L$ weil in allen *hedris* der *numerus angulorum* $=$ *numero laterum.*

2. Ist auch immer $A = \frac{1}{2}L$ oder $A = \frac{1}{2}P$, weil immer zwey *Latera diversarum* [*hedrarum*] zusammen kommen, um eine *aciem* zu *formi*ren.

3. Dahero ist der *numerus laterum seu angulorum planorum omnium hedrarum corpus includentium* allzeit *par.*

$$\left.\begin{array}{l} 4.\ \textit{Semper est vel } L = 3H \textit{ vel } L > 3H \\ 5.\ \textit{Semper est vel } P = 3S \textit{ vel } P > 3S \end{array}\right\} \textit{at est } P = L.$$

Dieses ist klar weil keine *Hedra* aus weniger als 3 Seiten, und kein *angulus solidus* aus weniger als 3 *angulis planis* bestehen kan. Folgende *proposition* aber kan ich noch nicht recht *rigorose demonstri*ren:

6. *In omni solido hedris planis incluso aggregatum ex numero hedrarum et numero angulorum solidorum binario superat numerum acierum,*[5] *seu est* $H + S = A + 2$ *seu* $H + S = \frac{1}{2}L + 2 = \frac{1}{2}P + 2.$

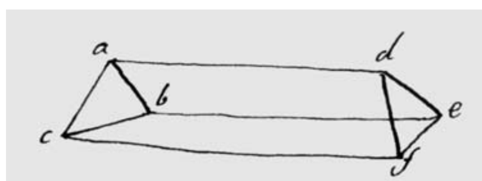
7. *Impossibile est ut sit* $A + 6 > 3H$ *vel* $A + 6 > 3S.$

8. *Impossibile est ut sit* $H + 4 > 2S$ *vel* $S + 4 > 2H.$

9. *Nullum formari potest solidum cujus omnes hedrae sint* 6 *pluriumve laterum, nec cujus omnes anguli solidi ex sex pluribusve angulis planis sint conflati.*

10. *Summa omnium angulorum planorum, qui in ambitu solidi cujusque occurrunt, tot angulis rectis aequatur quot sunt unitates in* $4A - 4H.$

11. *Summa omnium angulorum planorum aequatur quater tot angulis rectis, quot sunt anguli solidi, demtis octo, seu est* $= 4S - 8$ *rectis.*[6]



Exemplo sit prisma triangulare ubi est

1. *numerus hedrarum* $H = 5$

2. *numerus ang*[*ulorum*] *sol*[*idorum*] $S = 6$

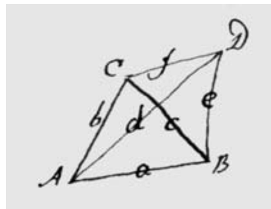
3. *numerus acierum* $(ab,\ ac,\ bc,\ ad,\ be,\ cf,\ de,\ df,\ ef)\ \ldots\ A = 9$

4. *numerus laterum et angulorum planorum* $L = P = 18.$ *Includitur enim corpus duobus triangulis et tribus quadrilateris, unde* $L = P = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 18.$

Nun ist nach dem *Theor*[*emate*] 6: $H + S\ (11) = A + 2\ (11)$. Ferner *summa omnium angulorum planorum* (aus den beyden $\triangle\ = 4$ *rectis*, und den drey $\square\ =$ 12 *rectis*) *erit* $= 16$ *rectis* $= 4\,(A - H) = 4S - 8$ *rectis.*

Es nimmt mich wunder daß diese allgemeinen *Proprietates* in der *Stereometrie* noch von Niemand so viel mir bekannt sind angemerket worden;[7] noch vielmehr aber, daß die fürnehmsten davon, als *Th*[*eorema*] 6 *et Th*[*eorema*] 11 so schwehr zu beweisen sind; dann ich kan dieselben noch nicht so beweisen, daß ich damit zu frieden bin.

Um die *soliditatem* eines Körpers zu bestimmen, so wollte ich nach Belieben innert desselben ein *punct* annehmen, und daraus nach allen *angulis solidis* grade Linien ziehen:[8] hierdurch wird der Cörper in lauter *pyramiden* zertheilt deren *vertices* im angenomm[en]en *punct* sind, und die *hedras* zu *basibus* haben: welche *pyramid*en nicht *triangulares* sind, können ferner leicht in *triangulares* zerschnitten [werden]. Alles kommt allso darauf an, daß man die *soliditatem pyramidis triangularis* bestimmen könne: welches allso *ex cognitis lateribus* geschehen kan:



Sit ABCD pyramis proposita, in qua habeantur $AB = a$, $AC = b$, $BC = c$, $AD = d$, $BD = e$, $CD = f$: *erit hujus pyramidis soliditas*[9]

$$= \frac{1}{12}\sqrt{\begin{pmatrix} +aaff\,(bb+cc+dd+ee-aa-ff) & -aabbcc \\ +bbee\,(aa+cc+dd+ff-bb-ee) & -aaddee \\ +ccdd\,(aa+bb+ee+ff-cc-dd) & -bbddff \\ & -cceeff \end{pmatrix}}$$

Hiemit empfehle ich mich gehorsamst zu Ewr. Hochwohlgeb. beständigen Zuneigung und Gewogenheit, und habe die Ehre, mit der schuldigsten Hochachtung zu verharren

Ewr. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 14ten *Nov.* 1750.

R 863 Reply to nº 148
Berlin, November 14th, 1750
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 269–270v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 536–539; *Euler-Goldbach* (1965), p. 332–333

150

Goldbach to Euler

[Petersburg], June 4th / 15th, 1751

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*,

Eurer Hochedelgebohrnen bin ich für die mir *communici*rten schönen *theoremata* von den Eigenschafften der Cörper welche *hedris planis* eingeschlossen sind, sehr verbunden, ich beklage aber daß bey mir die gehörige *attention* zu dergleichen Betrachtungen je länger je mehr und zwar *per seriem valde ad nihilum convergentem* wider meinen willen abnimmt, ausser daß ich noch bißweilen an das *Theorema Fermatianum* [denke], wovon ich über vermuthen nachfolgende *casus* darin *quatuor quadrata* $+8$ *aequalia fiunt quatuor quadratis* bemercket. *Sint* α, β, γ, δ *numeri integri permutabiles sive affirmativi sive negativi, erunt* $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+8$ *aequalia quatuor quadratis si fuerit* $\delta=7+\alpha+\beta+\gamma$ *vel* $=2+\alpha+\beta+\gamma$ *vel* $=2\beta+2\gamma+3$ *vel* $=\dfrac{2\alpha+2\beta+\gamma}{3}$ *(casu quo hic numerus fit integer) vel* $=3\alpha+2\beta+2\gamma$ *vel* $=\alpha$ *vel* $3\gamma+8$, in welchen allen fällen die *quatuor quadrata* gar leicht angegeben werden können, imgleichen wann

$$\delta=\frac{\left(3q^2+1\right)\gamma-2q\,(q+1)\,(\alpha+\beta+\gamma)}{3q^2-2q-1}$$

numero integro, ubi et $2q$ *sit numerus integer quicunque.*[1]

Der kleine Irrthum in des Hn Speners Rechnung ist schon längst völlig *redressi*ret worden ohngeachtet ich es nicht verlanget hatte;[2] wann ich aber aufs neue durch Eurer HochEdelgebohrnen Vermittelung die auf beyliegendem Zettel *noti*rten Bücher auf die vorige Art erhalten könnte, würde es mir sehr lieb seyn.[3]

Ich habe schon längst in den Zeitungen gelesen daß der H. *Philidor* sich in Berlin bey den grössesten Schachspielern fürchterlich gemachet woraus ich vermuthe daß er Eurer Hochedelg. auch nicht unbekannt seyn wird.[4]

An die Fr[au] *Professo*rin, wie auch an meinen H. Pathen bitte ich meine *complimens* zu machen und verharre mit vieler Hochachtung

Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

den $\dfrac{4}{15}$ *Jun.* 1751.

R 864 Reply to n° 149
[Petersburg], June 4th / 15th, 1751
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 144rv
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 540–541; *Euler-Goldbach* (1965), p. 334

151
Euler to Goldbach
Berlin, July 3rd, 1751

HochWohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Die Freude, welche Ewr. Hochwohlgeb. geehrteste Zuschrifft bey mir erwecket, war um so viel grösser, je heftiger das Verlangen gewesen, mit welchem ich schon eine geraume Zeit darauf gewartet. Inzwischen hat sich doch zu meinem grösten Vergnügen von Zeit zu Zeit Gelegenheit gefunden von Ewr. Hochwohlgeb. Wohlseyn Nachricht einzuziehen, wie ich dann auch zu dem vor einiger Zeit erkauften prächtigen Hauß meine gehorsamste *Gratulation* abstatte, und von Herzen wünsche, daß Dieselben in dieser Wohnung jederzeit eine mit allem Vergnügen begleitete vollkommene Gesundheit geniessen mögen.[1]

Vor einigen Tagen habe ich hier von ungefehr einen alten guten Freund von Ewr. Hochwohlgeb. angetroffen: dies war der H. Geheime *Finanz* Rath Deutsch, welcher sich bey mir genau um alle Dero Umstände erkundiget, und über Dero Wohlstand ein gantz besonderes Vergnügen an den Tag gelegt: mir auch aufgetragen bey der ersten Gelegenheit Ewr. Hochwohlgeb. sein ergebenstes *Compliment* abzustatten.[2]

Die verlangten Bücher sind schon in der Spenerischen Buchhandlung bestellt, und werden, so bald sie alle beysammen und gebunden sind, an Ewr. Hochwohlgeb. überschicket werden.[3]

Ich beklage von Herzen, daß bey Ewr. Hochwohlgeb. die Lust zu *mathematischen Speculation*en abzunehmen beginnt, woran ohne Zweifel der Mangel eines vertrauten Umgangs über dergleichen Untersuchungen grossen Antheil haben wird. Dann die mir gütigst überschriebenen Anmerkungen über das *Theorema Fermatianum* zeigen nichts weniger als eine Verminderung in der Kraft dergleichen Sachen nachzudenken an. Dieselben haben mir Anlaß gegeben diese Bestimmung allgemeiner zu machen, und den Werth von δ zu bestimmen, daß $\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\delta\delta+e$ eine *summa quatuor quadratorum* werde.[4] Setze ich nun

$$\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\delta\delta+e=(\alpha-kx)^2+(\beta-mx)^2+(\gamma-nx)^2+(\delta+x)^2$$

so wird

$$\delta=k\alpha+m\beta+n\gamma-\frac{1}{2}x\,(kk+mm+nn+1)+\frac{e}{2x}.$$

Damit nun diese *Formul* in gantzen Zahlen bestehe setze ich

$$e\,(kk+mm+nn+1)=ab,$$

oder ich *resolvi*re $e\,(kk+mm+nn+1)$ in zwey *Factores*, die entweder beyde grad oder beyde ungrad sind, so wird $\delta=k\alpha+m\beta+n\gamma+\dfrac{a-b}{2}$; und $x=\dfrac{e}{a}$.

Ist nun wie Ewr. Hochwohlgeb. [annehmen] $e = 8$, so können *in genere* die 4 *Quadrata* deren *Summ* $= \alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma + \delta\delta + 8$ angegeben werden, wann $\delta = k\alpha + m\beta + n\gamma + f$, und f so angenommen wird, daß $f = c - d$, *existente* $2\,(kk + mm + nn + 1) = cd$, und da wird $x = \dfrac{4}{c}$, oder $x = -\dfrac{4}{d}$.

Für k, m, und n können nun Zahlen nach Belieben angenommen werden da immer für f ein, zwey oder mehr taugliche Werthe herauskommen; als setzt man

$k = 1$; $m = 0$; $n = 0$; so wird $cd = 4$, und $f = 0$, oder $f = 3$; $\delta = \alpha + \begin{cases} 0^* \\ 3 \end{cases}$

$k = 2$; $m = 0$; $n = 0$; so wird $cd = 10$ und $f = 3$, oder $f = 9$; $\delta = 2\alpha + \begin{cases} 3 \\ 9 \end{cases}$

$k = 3$; $m = 0$; $n = 0$; so wird $cd = 20$ und $f = 1$; $f = 8$; $f = 19$;

$$\delta = 3\alpha + \begin{cases} 1 \\ 8^* \\ 19 \end{cases}$$

$k = 1$; $m = 1$; $n = 0$; $cd = 6$; $f = 1$; $f = 5$; das ist $\delta = \alpha + \beta + \begin{cases} 1 \\ 5 \end{cases}$

$k = 2$; $m = 1$; $n = 0$; $cd = 12$; $f = 1$; $f = 4$; $f = 11 \ldots$ $\delta = 2\alpha + \beta + \begin{cases} 1 \\ 4 \\ 11 \end{cases}$

$k = 2$; $m = 2$; $n = 0$; $cd = 18$; $f = 3, 7, 17 \ldots$ $\delta = 2\alpha + 2\beta + \begin{cases} 3^* \\ 7 \\ 17 \end{cases}$

$k = 3$; $m = 1$; $n = 0$; $cd = 22$; $f = 9, 21 \ldots$ $\delta = 3\alpha + \beta + \begin{cases} 9 \\ 21 \end{cases}$

$k = 3$; $m = 2$; $n = 0$; $cd = 28$; $f = 3, 12, 27 \ldots$ $\delta = 3\alpha + 2\beta + \begin{cases} 3 \\ 12 \\ 27 \end{cases}$

$k = 3$; $m = 3$; $n = 0$; $cd = 38$; $f = 17, 37 \ldots$ $\delta = 3\alpha + 3\beta + \begin{cases} 17 \\ 37 \end{cases}$

$k = 1$; $m = 1$; $n = 1$; $cd = 8$; $f = 2, 7 \ldots$ $\delta = \alpha + \beta + \gamma + \begin{cases} 2^* \\ 7^* \end{cases}$

$k = 2$; $m = 1$; $n = 1$; $cd = 14$; $f = 5, 13 \ldots$ $\delta = 2\alpha + \beta + \gamma + \begin{cases} 5 \\ 13 \end{cases}$

$k = 2$; $m = 2$; $n = 1$; $cd = 20$; $f = 1, 8, 19 \ldots$ $\delta = 2\alpha + 2\beta + \gamma + \begin{cases} 1 \\ 8 \\ 19 \end{cases}$

$k = 2$; $m = 2$; $n = 2$; $cd = 26$; $f = 11, 25 \ldots$ $\delta = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma + \begin{cases} 11 \\ 25 \end{cases}$

$k = 3$; $m = 1$; $n = 1$; $cd = 24$; $f = 2, 5, 10, 23 \ldots$ $\delta = 3\alpha + \beta + \gamma + \begin{cases} 2 \\ 5 \\ 10 \\ 23 \end{cases}$

$$k = 3;\ m = 2;\ n = 1;\ cd = 30;\ f = 1,\ 7,\ 13,\ 29\ \ldots\ \ \delta = 3\alpha + 2\beta + \gamma + \begin{cases} 1 \\ 7 \\ 13 \\ 29 \end{cases}$$

$$k = 3;\ m = 2;\ n = 2;\ cd = 36;\quad f = 0,\ 5,\ 9,\ 16,\ 35\ldots$$

$$\delta = 3\alpha + 2\beta + 2\gamma + \begin{cases} 0^* \\ 5 \\ 9 \\ 16 \\ 35 \end{cases}$$

wo ich die von Ewr. Hochwohlgeb. überschriebenen *Formul*n mit einem * bemerkt. Man kan auch f nach Belieben annehmen, um daraus k, m, und n zu bestimmen, als wann seyn soll $f = 0$, oder $\delta = k\alpha + m\beta + n\gamma$, so wird $c = d$, folglich cd ein *quadrat*: dasselbe sey $= 4pp$, so wird $kk + mm + nn = 2pp - 1$. Hier ist klar, daß, wann p ein *numerus par*, $2pp - 1$ unmöglich die *Summ* von 3 *quadrat*en seyn kan, allso müssen für p nur ungrade Zahlen genommen werden, da dann für k, m, n folgende Werthe herauskommen:

$2pp - 1 = 1$	17	49	97	161	241	337
$k = 1$	4; 3	7; 6	9; 6	12; 11; 10; 9	15; 14; 13; 12	18; 16; 12
$m = 0$	1; 2	0; 3	4; 6	4; 6; 6; 8	4; 6; 6; 9	3; 9; 12
$n = 0$	0; 2	0; 2	0; 5	1; 2; 5; 4	0; 3; 6; 4	2; 0; 7

Da nun solcher Gestalt wann α, β, γ gegeben sind, unendlich vielerley *valores* für δ gefunden werden können, nachdem entweder f oder k, m, n nach Belieben angenommen wird, und auch die Zahlen, k, m, n und f *negative* genommen werden können so wäre nun zu beweisen, daß auf solche Art alle mögliche Zahlen für δ herauskommen: und hieraus würde man einen sehr schönen Beweiß für das *Theorema Fermatianum* erhalten, welcher gewiß noch zu andern wichtigen Entdeckungen leiten würde.

Den grossen Schachspieler *Philidor* habe ich nicht gesehen, weil er sich mehrentheils in *Pottsdamm* aufhielte; er soll noch ein sehr junger Mensch seyn, führte aber eine *Maitresse* mit sich, wegen welcher er mit einigen *Officiers* in *Pottsdam* Verdrüßlichkeiten bekommen, welche ihn genöthiget, unvermuthet wegzureisen; sonsten würde ich wohl Gelegenheit gefunden haben mit ihm zu spielen. Er hat aber ein Buch vom Schachspiel in Engelland druken lassen, welches ich habe, und darinn gewiß sehr schöne Arten zu spielen enthalten sind. Seine gröste Stärke bestehet in Vertheidigung und guter Führung seiner Bauren, um dieselben zu Königinnen zu machen, da er dann, wann die Anstalten dazu gemacht, *piece* für *piece* wegnimmt; um seine Absicht zu erreichen und dadurch das Spiel zu gewinnen.[5]

Meine gantze *Familie* lässt sich Ewr. Hochwohlgeb. gehorsamst empfehlen; ins besondere aber ist unser Albrecht über Dero Geneigtes Andenken innigst gerühret, und lässt hierdurch seine unterthänigste Danksagung abstatten. Er ist seit einiger Zeit mit dem Fieber geplaget, wovon fast kein Haus hier frey ist; wir hoffen aber daß solches ohne Folgen seyn werde. Seit dem Winter habe ich ihn zu Haus gehalten, da er sich nun mit allem Fleiß in *mathematicis* übet; und nachdem ich die Haupt Sachen aus der *Analysi finitorum* und *infinitorum* mit ihm durchgenommen, so bin ich jetz mit ihm in der *Application* derselben auf die *Mechanic* beschäfftigt; dabey *continuir*t er aber hauptsächlich das *Latein*ische, und auch das Griechische, nebst anderen *Studi*en, zu welchen in der Schul der Grund gelegt worden.

Seit einiger Zeit habe ich mich wiedrum mit dem *Jupiter* und *Saturnus* gequälet, und darüber verschiedene Sachen entdecket, welche mir zu einer nähern Erkänntnüß ihrer Bewegung den Weg gebahnet. Weil dieses wieder die Preißfrage bey der *Pariser Academie* auf künftiges Jahr ist so habe ich darüber eine neue Abhandlung dahin geschickt.[6]

Hiemit empfehle ich mich gehorsamst zu Ewr. Hochwohlgebohrnen beständigen Zuneigung und Gewogenheit, und habe die Ehre mit der schuldigsten Hochachtung zu verharren

Ewr. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 3ten *Julii*
1751.

R 865 Reply to n° 150
Berlin, July 3rd, 1751
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. V, fol. 52–53v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 542–545; *Euler-Goldbach* (1965), p. 334–337

152
Goldbach to Euler
Petersburg, July (6th) 17th, 1751

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*

Eurer HochEdelgebohrnen beyde Schreiben vom 3. und 6. *Jul.* habe ich wohl erhalten; auf das erstere, so mir sehr gefällt, *reservi*re ich mir künfftig zu antworten, auf das letztere aber wird beyliegender Zettel zur antwort dienen.[1] Ich will nur noch mit wenigem von der *aequatione*

$$3^2+5^2+u^2+8=u^2+42=\textit{tribus quadratis}$$

bemercken daß *u infinities infinitis modis determini*ret werden kan, davon ein *casus* ist

$$3^2+5^2+\left(4p^2-10p+7\right)^2+8=\left(4p^2-10p+3\right)^2+(4p-9)^2+(4p-1)^2\,;$$

was ich aber in meinem vorigen Schreiben von dem *valore* δ *per* α, β, γ, *et* q *expresso* erwehnet habe, verstehe ich jetzo selbst nicht mehr, und zweiffele an dessen Richtigkeit, doch ist dieses gewiß daß

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\varepsilon^2+8=3^2+(1-\alpha+\beta)^2+(1-\alpha+\gamma)^2+\frac{(2\varepsilon q+\alpha-1)^2}{q^2}$$

si q determinetur per hanc aequationem

$$\frac{\left(3q^2+1\right)}{2q}(1-\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)\,q=2\varepsilon.$$

Der H. Geheime Rath Deutsch ist in der That einer von meinen ältesten Freunden. Ich werde mich jederzeit mit vielem vergnügen der Höflichkeiten erinnern womit er mich so wohl *A*[*nno*] 1718 als 1724 in Berlin aufgenommen hat,[2] und bitte denselben bey gelegenheit von meiner vollkommenen Hochachtung und Ergebenheit zu versichern, wornechst ich in steter *Consideration* verharre

Eurer Hochedelgebohrnen
schuldigster Diener
Goldbach.

S.^{t} Petersburg den 17. *Julii* 1751.

R 866 Reply to nº 151
Petersburg, July (6th) 17th, 1751
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 145r
Address (fol. 146v): "A Monsieur / Monsieur Euler / de l'Academie des Sciences / à / Berlin"
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 546; *Euler-Goldbach* (1965), p. 337–338

153
Goldbach to Euler
Petersburg, (July 23rd) August 3rd, 1751

Hochedelgebohrner Herr
Insonders Hochgeehrter Herr *Professor*,

Eurer Hochedelgebohrnen sage ich schuldigsten Danck (1.) vor Dero gütige *gratulation* zu meiner neuen Wohnung (2.) vor die abermalige Besorgung einiger von mir verlangter Bücher (3.) vor die Nachricht von den glücklichen *progres*sen des Hn *Johannis Alberti* dem ich eine beständige völlige Gesundheit von hertzen wünsche, und (4.) vor die *communication* der vielen *casuum pro* $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+8=a^2+b^2+c^2+d^2$.[1] Es ist allerdings wahr, wie Ew. Hochedelg. vermuthet, daß ich ausser Deroselben niemand habe mit dem ich von dergleichen *decouvertes* schrifftlich oder mündlich *conferi*ren könnte. Ich glaube man kan die Sache etwas kürtzer fassen, wann man nur drey *quantitates indeterminatas* annimmt und $\beta^2+\gamma^2+\delta^2+8=b^2+c^2+d^2$ setzet, denn es ist gewiß daß wann b in einem *casu* bekannt ist selbiges auch *in infinitis aliis* angegeben werden kan wie ich in meinem letzteren Schreiben angezeiget habe (woselbst aber unnöthig $2p$ anstatt p gesetzet worden) indem es leicht zu *demonstri*ren ist daß alsdenn auch seyn wird

$$\beta^2+\gamma^2+(\delta+pu)^2+8=(b+pu)^2+(c+2u)^2+(d+2u)^2$$

si ponatur $u=(\delta-b)\,p-(c+d)$.[2] Ich weiß gar wohl daß u noch auf unzehliche andere Arten *determini*ret werden kan, ich bin aber ein grosser Liebhaber von solchen *formulis* welche an sich selbst kurtz, und auf eine leichte art immer *general*er zu machen sind, denn wann zum Exempel allhie $(\delta+pu)=\Delta$, $b+pu=B$, $c+2u=C$, $d+2u=D$, so entstehet daraus diese *aequatio infinities generalior*

$$\beta^2+\gamma^2+(\Delta+PU)^2+8=(B+PU)^2+(C+2U)^2+(D+2U)^2\,,$$

wann P *numerum integrum quemcunque* bedeutet und

$$U=(\Delta-B)\,P-(C+D)$$

gesetzet wird.

Es folget auch *ex theoremate Fermatiano* daß $8n+4$ allezeit *in quatuor quadrata imparia quorum summa radicum est* $=2$, aber nicht allezeit *in quatuor quadrata imparia quorum summa radicum est* $=0$ *resolvi*ret werden kan.

Ferner hat auch dieses seine Richtigkeit daß eine *summa quatuor quadratorum quorum summa radicum est* $=0$ *in tria quadrata resolvi*ret werden kan, ob aber *quinque quadrata quorum summa radicum* $=0$ allezeit *in quatuor quadrata* die man angeben kan *resolvi*ret werden könne[n], weiß ich noch nicht, jedoch giebt es unendlich viele *casus* da solches angehet, ohngeachtet die *summa radicum* nicht $=0$ ist; also ist zum Exempel

$$\left(\left(2+p^2\right)b-c-d-e\right)^2+(c-2b)^2+(d-2b)^2+(e-2b)^2+4p^2b^2$$

$=$ *his quatuor*

$$\left(\left(4+p^2\right)b-c-d-e\right)^2+c^2+d^2+e^2.$$

Hiernechst ersuche ich Ew. HochEdelgb. abermal dienstlich beykommenden Zettel an Hn *Spener* zu übersenden damit die darauf *noti*rten Bücher entweder den vorigen beygefüget, oder, wann diese schon abgegangen wären mit einer andern Gelegenheit an mich überschicket werden mögen,[3] und verharre mit vieler Hochachtung

Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.[t] Petersburg
den 3. *Aug.* 1751.

R 867 Continuation of the reply to n° 151
Petersburg, (July 23rd) August 3rd, 1751
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 147–148r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 547–548; *Euler-Goldbach* (1965), p. 338

154
Euler to Goldbach
Berlin, September 4th, 1751

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Von H. Spener vernehme ich daß die von Ewr. Hochwohlgb. verlangten Bücher nächstens abgeschickt werden sollen;[1] welche Nachricht ich vorher abwarten wollte, ehe ich auf Ewr. Hochwohlgeb. beyde geehrteste Schreiben antwortete. Inzwischen so groß das Vergnügen auch ist, welches ich in Betrachtung der Eigenschafften der Zahlen finde, so wird mir doch diese Materie, wann ich einige Zeit mit gantz andren Untersuchungen umgegangen, so fremd, daß ich mich so bald nicht mehr darein finden kan. Allso konnte ich den Grund des schönen *Theorematis*, dessen Ewr. Hochwohlgb. Meldung thun, daß eine *summa* 4 *quadratorum* $aa+bb+cc+dd$, *quorum summa radicum* $a+b+c+d=0$, allzeit in drey *Quadrata resolvir*t werden könne, so gleich nicht einsehen, da doch derselbe ziemlich offenbar, indem

$$aa+bb+cc+dd = aa+bb+cc+(a+b+c)^2 = (a+b)^2+(a+c)^2+(b+c)^2\,.$$

Doch läst sich auf gleiche Weise nicht darthun daß eine *Summa* 5 *quadratorum* $aa+bb+cc+dd+ee$ *in* 4 *Quadrata resolvir*t werden könne, soofft die *summa radicum* $a+b+c+d+e=0$. Allein aus dem vorigen erhellet, daß diese *Resolution* statt findet, so offt die 5 *radices* a, b, c, d, e so beschaffen sind, daß vier derselben zusammen genommen nichts werden, welches auf so vielerley Art geschehen kan, da es erlaubt ist eine jede *radicem* sowohl *affirmative* als *negative* zu nehmen, daß es schwehr seyn würde, 5 solche Zahlen anzuzeigen, davon nicht 4 zusammen genommen auf 0 gebracht werden könnten.

Oder die *summa* 5 *quadratorum* $aa+bb+cc+dd+ee$ läst sich in 4 *Quadrata resolvi*ren in folgenden Fällen

$a\,..\,b\,..\,c\,..\,d=0$
$a\,..\,b\,..\,c\,..\,e=0$
$a\,..\,b\,..\,d\,..\,e=0$
$a\,..\,c\,..\,d\,..\,e=0$
$b\,..\,c\,..\,d\,..\,e=0$

wo das Zeichen .. statt $\pm$ gesetzt ist: dahero jede von diesen 5 *aequation*en 8 in sich schliesst, und folglich 40 darinn enthalten sind. Wann allso die *radices* a, b, c, d, e alle *affirmative* genommen werden, und unter diesen 40 *formul*n nur eine enthalten ist die $= 0$, so kan man sicher schliessen, daß die *summa quinque quadratorum* $aa + bb + cc + dd + ee$ sich *in summam* 4 *quadratorum* verwandeln lasse.

Dieses folget nun aus dem einigen Satz, daß $aa+bb+cc+dd = \square+\square+\square$ wann $a + b + c + d = 0$; weil nun eine *summa* 4 *quadratorum* in unendlich viel andern Fällen auch *in* 3 *quadrata resolvir*t werden kan, so können daher noch unendlich mal mehr *Condition*en angezei[g]t werden unter welchen *summa* 5 *Quadratorum in quatuor quadrata resolvir*t werden kan.

So offt die *quatuor quadrata* $aa+bb+cc+dd$ so beschaffen daß $a+b+c+d = 2$, so ist

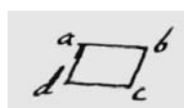
$$aa + bb + cc + dd = (a + b - 1)^2 + (a + c - 1)^2 + (b + c - 1)^2 + 1,$$

folglich ist $aa+bb+cc+dd-1$ *in* 3 *quadrata resolubel*. Da nun $8n+3$ *in* 3 *quadrata resolubel*, wann man setzt

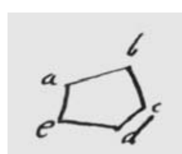
$$8n + 3 = (a + b - 1)^2 + (a + c - 1)^2 + (b + c - 1)^2$$

so wird $8n + 4 = aa + bb + cc + dd$ dergestalt daß $a + b + c + d = 2$. Und dieses ist das schöne *Theorema* welches Ewr. Hochwohlgb. aus dem *Theoremate Fermatiano* hergeleitet haben.

Ich bin neulich auf eine Betrachtung gefallen, welche mir nicht wenig merkwürdig vorkam: dieselbe betrifft, auf wie vielerley Arten ein gegebenes *Polygonum* durch *Diagonal* Linien in *Triangula* zerschnitten werden könne.



Allso ein *quadrilaterum* kan entweder durch die *Diagonalem ac* oder durch *bd*, und allso auf 2[erley] Art in zwey *Triangula resolvir*t werden.



Ein Fünfeck wird durch 2 *Diagonales* in 3 *Triangula* getheilet, und solches kan auf 5[erley] verschiedene Arten geschehen nehmlich durch die *Diagonales*

$$\text{I. } \begin{matrix} ac \\ ad \end{matrix}\ ;\ \text{II. } \begin{matrix} bd \\ be \end{matrix}\ ;\ \text{III. } \begin{matrix} ca \\ ce \end{matrix}\ ;\ \text{IV. } \begin{matrix} db \\ da \end{matrix}\ ;\ \text{V. } \begin{matrix} ec \\ eb \end{matrix}\ .$$

Ferner wird ein Sechseck durch 3 *Diagonales in* 4 *Triangula* zertheilet, und dieses kan auf 14 verschiedene Arten geschehen.

Nun ist die Frage *Generaliter*, da ein *Polygonum* von n Seiten durch $n-3$ *Diagonales in* $n-2$ *Triangula* zerschnitten wird, auf wie vielerley verschiedene Arten solches geschehen könne. Setze ich nun die Anzahl dieser verschiedenen Arten $= x$ so habe ich *per Inductionem* gefunden[2]

wann	$n =$	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10
so ist	$x =$	1,	2,	5,	14,	42,	132,	429,	1430.

Hieraus habe ich nun den Schluß gemacht, das[!] *generaliter* sey

$$x = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 \cdot 18 \cdot 22 \cdots (4n-10)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdots (n-1)}$$

oder es ist

$$1 = \frac{2}{2}; \quad 2 = 1 \cdot \frac{6}{3}; \quad 5 = 2 \cdot \frac{10}{4}; \quad 14 = 5 \cdot \frac{14}{5}; \quad 42 = 14 \cdot \frac{18}{6}; \quad 132 = 42 \cdot \frac{22}{7};$$

daß allso aus einer jeden Zahl die folgende leicht gefunden wird. Die *Induction* aber, so ich gebraucht, war ziemlich mühsam, doch zweifle ich nicht, daß diese Sach nicht solte weit leichter entwickelt werden können. Über die *Progression* der Zahlen 1, 2, 5, 14, 42, 132, *etc.* habe ich auch diese Eigenschaft angemerket, daß

$$1 + 2a + 5a^2 + 14a^3 + 42a^4 + 132a^5 + etc. = \frac{1 - 2a - \sqrt{(1-4a)}}{2aa};$$

allso wann $a = \dfrac{1}{4}$, so ist

$$1 + \frac{2}{4} + \frac{5}{4^2} + \frac{14}{4^3} + \frac{42}{4^4} + etc. = 4.$$

Alle die meinige lassen sich zu Ewr. Hochwohlgeb. beständiger Gewogenheit gehorsamst empfehlen, und ich habe die Ehre mit der schuldigsten Hochachtung Lebenslang zu verharren

Ewr. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 4ten *Sept.*
1751.

R 868 Reply to nº 152 and nº 153
Berlin, September 4th, 1751
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. V, fol. 95–96r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 549–552; *Euler-Goldbach* (1965), p. 339–340

155

GOLDBACH TO EULER

Petersburg, October (5th) 16th, 1751

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*,

Aus Eurer Hochedelgebohrnen werthem Schreiben vom 4. *Sept.* habe ich mit vergnügen die leichte *legem progressionis* von $1 + 2a + 5a^2 + 14a^3 + \&c.$ ersehen.[1] Wann mir wäre aufgegeben worden die *coefficientes incognitos* b, c, d, *&c. in serie*

$$A \ldots\ 1 + ba + ca^2 + da^3 + ea^4 + \&c. = \frac{1 - 2a - \sqrt{1-4a}}{2a^2}$$

zu *determini*ren, würde ich die *solution* kaum unternommen haben; da ich aber diese *coëfficientes* bereits *exprimi*ret gesehen, so habe ich zwey *method*en zur *Solution* gefunden:

(1.) weil aus der *summa* $\dfrac{1 - 2a - \sqrt{1-4a}}{2a^2} = A$ folget, daß $1 + aA = A^{\frac{1}{2}}$ oder, daß

$$B \ldots\ 1 + a + ba^2 + ca^3 + da^4 + \&c.$$

in se multiplicata $= A$ seyn muß, so wird

$$\begin{aligned} B^2 \quad = & \left\{ \begin{array}{llllll} 1 & +a & +ba^2 & +ca^3 & +da^4 & \ldots \\ . & a & +a^2 & +ba^3 & +ca^4 & \ldots \\ . & . & ba^2 & +ba^3 & +b^2a^4 & \ldots \\ . & . & . & +ca^3 & +ca^4 & \ldots \\ . & . & . & . & +da^4 & \ldots \\ . & . & . & . & . & \ldots \end{array} \right. \\ = & \quad A \ldots 1 + 2a + 5a^2 + 14a^3 + 42a^4\ \ldots \end{aligned}$$

nemlich $b = 2$, $c = 5$, $d = 14$, *&c.*

(2.) Wann in der *serie* A gesetzt wird $a = \alpha - \alpha^2$, so wird die *summa seriei*

$$= \frac{1}{(1-\alpha)^2} = E \ldots\ 1 + 2\alpha + 3\alpha^2 + 4\alpha^3 + \&c.$$

und die *series* A verwandelt sich in[2]

$$\begin{array}{lllllll} & 1 & & & & & \\ & . & +b\alpha & -b\alpha^2 & & & \\ & . & . & +c\alpha^2 & \dotplus\ 2c\alpha^3 & +c\alpha^4 & \\ & . & . & . & +d\alpha^3 & \dotplus\ 3d\alpha^4 & \\ & . & . & . & . & +e\alpha^4 & \ldots \\ & . & . & . & . & . & \ldots \\ = & E & \ldots\ 1 + 2\alpha + 3\alpha^2 + 4\alpha^3 + 5\alpha^4\ \ldots & & & & \end{array}$$

Comparatis singulis terminis seriei A transmutatae cum singulis seriei E fit $b = 2$, $c = 5$, $d = 14$ *&c.*

Ich hatte in meinem Briefe vom 15. *Jun.* unter anderm auch des *casus* erwehnung gethan, wann in der *aequatione*

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + 8 = \textit{quatuor quadratis}$$

$$\delta = \frac{2\alpha + 2\beta - \gamma}{3} \quad \textit{numero integro};$$[3]

selbigen *casum* haben Ew. Hochedelg. in Dero Antwort mit Stillschweigen übergangen, es sind aber die *quatuor quadrata invenienda* in solchem falle[4]

$$\frac{(2\alpha + 2\beta - \gamma + 6)^2}{3^2} + \frac{(2\alpha + 2\beta - \gamma - 6)^2}{3^2} + \frac{(-\alpha + 2\beta + 2\gamma)^2}{3^2} + \frac{(2\alpha - \beta + 2\gamma)^2}{3^2}$$

und der *valor* δ kan noch *general*er angenommen werden wann man setzet

$$\delta = \frac{\alpha - 2q^2\beta - 2q\gamma}{1 + 2q^2} = \textit{numero integro}$$

und zugleich

$$\varepsilon = \frac{-2q\alpha - 2q\beta + \left(2q^2 - 1\right)\gamma}{1 + 2q^2} = \textit{numero integro},$$

quibus positis erunt

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 4\delta^2 + 8 = (\delta + 2)^2 + (\delta - 2)^2 + (\delta - \alpha + \beta)^2 + \varepsilon^2.$$

Hinc sequitur pro quocunque casu $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 4\delta^2 + 8$ *assignari posse quatuor quadrata integra si* $\gamma^2 + 2(\beta + \delta)(\alpha - \delta)$ *sit numerus quadratus, ubi* α, β, *&c. sunt numeri permutabiles sive affirmativi sive negativi.*

Im gleichen *positis tribus quadratis imparibus* $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 8n + 3$ *et* $\delta = \left(u^2 - u - 4n - 1\right)$ *ubi u sit numerus quicunque integer, erunt*

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 4\delta^2 + 8 = (\delta + 2)^2 + (\delta - 2)^2 + (\delta - u)^2 + (\delta + u - 1)^2.$$

Unter die *problemata* zu deren *solution* es an einer sicheren *methode* fehlet, rechne ich auch dieses: *Determinare numerum e per f et constantes hac lege ut* $2e^2 - f^2 + 2$ *fiat quadratum.* <u>*Solutio*</u>: *Ponatur* $e = 13^2 f \pm 239$.[5]

Von Hn *Spener* habe ich nachricht erhalten daß die Bücher von Berlin schon abgesandt worden, welches mir sehr lieb ist,[6] und ich verharre im übrigen mit vieler Hochachtung

Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

$S.^t$ Petersburg
den 16. *Oct. st. n.* 1751.

R 869 Reply to n° 154
Petersburg, October (5th) 16th, 1751
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 149–150r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 553–555; *Euler-Goldbach* (1965), p. 340–342

156
Euler to Goldbach
Berlin, December 4th, 1751

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Ewr. Hochwohlgeb. Schwierigkeit betreffend die Auswicklung der *Formul* $\dfrac{1-2a-\sqrt{(1-4a)}}{2aa}$ wird sogleich gehoben, wann man die *Formul* $\sqrt{(1-4a)}$ $=(1-4a)^{\frac{1}{2}}$ nach gewöhnlicher Art in eine *Seriem* verwandelt; dann da

$$\begin{aligned}\sqrt{(1-4a)}=1 \quad &- \quad \frac{1}{2}\cdot 4a-\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\cdot 4^2a^2-\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot 4^3a^3-\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot 4^4a^4\\ &- \quad \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}\cdot 4^5a^5\ [-\ etc.]\end{aligned}$$

oder wann ein jeder *coefficiens numericus* des *Termini antecedentis*, die *potestatem* von 4 mit eingeschlossen, durch P angedeutet wird, so wird

$$\sqrt{(1-4a)}=1-2a-\frac{4}{4}Pa^2-\frac{12}{6}Pa^3-\frac{20}{8}Pa^4-\frac{28}{10}Pa^5-etc.$$

oder

$$\sqrt{(1-4a)}=1-2a-\frac{2}{2}Pa^2-\frac{6}{3}Pa^3-\frac{10}{4}Pa^4-\frac{14}{5}Pa^5-etc.,$$

folglich

$$\begin{aligned}\sqrt{(1-4a)}=1 \quad &- \quad 2a-2\cdot\frac{2}{2}\,a^2-2\cdot\frac{2\cdot 6}{2\cdot 3}\,a^3-2\cdot\frac{2\cdot 6\cdot 10}{2\cdot 3\cdot 4}\,a^4\\ &- \quad 2\cdot\frac{2\cdot 6\cdot 10\cdot 14}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\,a^5-etc.\end{aligned}$$

Dahero bekommt man

$$\frac{1-2a-\sqrt{(1-4a)}}{2aa}=\frac{2}{2}+\frac{2\cdot 6}{2\cdot 3}\,a+\frac{2\cdot 6\cdot 10}{2\cdot 3\cdot 4}\,a^2+\frac{2\cdot 6\cdot 10\cdot 14}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\,a^3+etc.,$$

wobey merkwürdig ist daß alle diese *Coefficient*en gantze Zahlen werden, welches zu besondern Betrachtungen Anlaß geben kan.

Allso gibt auch $\sqrt[3]{}(1-9a)$ eine *Seriem*, deren alle *coefficient*en gantze Zahlen werden, nehmlich

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{}(1-9a)=1 \quad &- \quad 3a-3\cdot\frac{6}{2}\,a^2-3\cdot\frac{6\cdot 15}{2\cdot 3}\,a^3-3\cdot\frac{6\cdot 15\cdot 24}{2\cdot 3\cdot 4}\,a^4\\ &- \quad 3\cdot\frac{6\cdot 15\cdot 24\cdot [33]}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\,a^5-\mathit{etc.},\end{aligned}$$

und *generaliter* geschieht dieses

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{}(1-nna)=1 \quad &- \quad na-n\,\frac{(nn-n)}{2}\,a^2-n\,\frac{(nn-n)\,(2nn-n)}{2\cdot 3}\,a^3\\ &- \quad n\,\frac{(nn-n)\,(2nn-n)\,(3nn-n)}{2\cdot 3\cdot 4}\,a^4-\mathit{etc.}\end{aligned}$$

Ewr. Hochwohlgeb. *casus quo*

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+8=\mathit{quatuor}\ \square$$

nehmlich[1]

$$\delta=\frac{2\alpha+2\beta-\gamma}{3}$$

hat allerdings etwas besonders an sich, welches ich so gleich nicht bemerket, und noch jetz nicht sehe wie derselbe in den von mir angeführten Fällen enthalten ist. Nun sehe ich zwar daß derselbe herauskommt, wann von den gesuchten 4 *Quadratis* zwey dergestalt angenommen werden, $(\delta+2)^2+(\delta-2)^2$, da dann noch übrig ist $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\delta^2$ in 2 *quadrata* zu *resolvi*ren. Setzt man nun dieselben $(\delta+p)^2+(\delta+q)^2$ so wird

$$\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma=3\delta\delta+2\,(p+q)\,\delta+pp+qq$$

und

$$3\delta+p+q=\sqrt{}\,(3\alpha\alpha+3\beta\beta+3\gamma\gamma-2pp-2qq+2pq)\,.$$

Es sey nun ferner $p=\gamma+m$; $q=\gamma+n$, so wird

$$3\delta+2\gamma+m+n=\sqrt{}\,(\gamma\gamma-2\,(m+n)\,\gamma+3\alpha\alpha+3\beta\beta-2mm-2nn+2mn)\,;$$

damit nun dieses *Radicale* gleich werde

$$\sqrt{}\left(\gamma\gamma-2\,(m+n)\,\gamma+(m+n)^2\right)$$

oder $3\alpha\alpha+3\beta\beta=3mm+3nn$ so darf man nur setzen $m=\alpha$ und $n=\beta$ und bekommt

$$3\delta+2\gamma+\alpha+\beta=\pm\,(\gamma-\alpha-\beta)$$

oder[2]

$$\delta = -\left(\frac{2\alpha + 2\beta - \gamma}{3}\right).$$

Wann um die Sach *generaler* zu machen zwey von den gesuchten 4 *Quadrat*en angenommen werden

$$(q\delta + 2)^2 + (q\delta - 2)^2 = 2qq\delta\delta + 8,$$

so muß

$$\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma - (2qq - 1)\,\delta\delta = 2 \text{ } quadratis \text{ } = (\delta + f)^2 + (\delta + g)^2$$

das ist

$$\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma = (2qq + 1)\,\delta\delta + 2\,(f + g)\,\delta + ff + gg$$

oder

$$(2qq + 1)\,\delta + f + g = \sqrt{(2fg - 2qq\,(ff + gg) + (2qq + 1)\,(\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma))}\,.$$

Nun sey ferner $f = \dfrac{q\gamma + m}{2q - 1}$ und $g = \dfrac{q\gamma + n}{2q - 1}$, so kommt eine weitläuffige *Formul* heraus, welche ich nicht der Müh werth achte zu entwickeln, weil ich nun sehe daß daraus Ewr. Hochwohlgeb. zweyte *Formul*n nicht entspringen. Es scheint aber daß unendlich viel dergleichen *Operation*en angestellt werden können, welche immer andere *Forml*en hervorbringen; und deswegen können unendlich viel *relation*en zwischen den Buchstaben α, β, γ, δ angegeben werden, damit $\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\delta\delta+8$ in 4 *quadrata resolvir*t werden könne: da nun dieses ohne einige *Restriction* wahr ist, so sehe ich nicht, was dergleichen *Determination*en zur gesuchten *Demonstration* beytragen könnten.

Ich habe *rigorosissime* bewiesen, daß wann N ein *numerus integer* ist, allzeit seyn müsse $N = A^2 + B^2 + C^2 + D^2$, wo aber A, B, C, D so wohl *numeros fractos* als *integros* andeuten: es wäre allso nur noch übrig zu zeigen, daß wann *Quatuor quadrata fracta* eine *summam integram* haben, dieselbe *summ* sich auch nothwendig *in quatuor (vel pauciora) quadrata integra* müsse zerlegen lassen. Ich kan nun wohl beweisen daß wann $\dfrac{pp}{qq} + \dfrac{rr}{ss} = N$ *numero integro*, auch seyn müsse $N = aa + bb$ *in integris*; allein jenen Beweiß kan ich nicht auf gleiche Art bewerkstelligen.[3]

Wann $2ee - ff + 2$ ein *Quadrat* seyn soll, und dazu e gesucht wird, ohne darauf zu sehen, ob e ein *numerus fractus* oder *integer* wird, so habe ich diese *Solutionem generalem* gefunden[4]

$$e = \frac{(mm - 2mn + 2nn)\,f + mm - 4mn + 2nn}{2nn - mm},$$

wo man für m und n *numeros quoscunque* annehmen kan.

Will man aber nur die *valores integros* für e haben damit $2e^2 - f^2 + 2$ ein *Quadrat* werde, so dienen dazu folgende *Formulae in infinitum*:

$$\begin{array}{lrr} e = & f\pm & 1 \\ e = & 5f\pm & 7 \\ e = & 29f\pm & 41 \\ e = & 169f\pm & 239 \\ e = & 985f\pm & 1393 \\ e = & 5741f\pm & 8119 \\ & etc.; & \end{array}$$

die *Lex progressionis* ist diese daß wann zwey dergleichen *formulae se immediate insequentes* sind

$$\begin{aligned} e &= Mf \pm m \\ e &= Nf \pm n, \end{aligned}$$

die folgende seyn muß

$$e = (6N - M)\ f \pm (6n - m)\,.$$

Inzwischen kan man doch alle diese *Formul*n durch eine einige *general formul* ausdrücken: *Sit q numerus impar quicunque, dico fore*

$$e = \frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^q + \left(\sqrt{2}-1\right)^q}{2\sqrt{2}}\, f \pm \frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^q - \left(\sqrt{2}-1\right)^q}{2},$$

und es ist auch gewiß, daß alle Fälle, in welchen e durch gantze Zahlen ausgedruckt werden kan, in diesen *formul*n enthalten sind.[5]

Gleicher gestalt wann $(bb \pm 1)\ ee \mp 4aaff \pm 4cc\ (bb \pm 1)$ ein *Quadrat* seyn soll, so ist

$$\begin{aligned} e = \quad & \frac{\left(\sqrt{(bb\pm 1)}+b\right)^q + \left(\sqrt{(bb\pm 1)}-b\right)^q}{\sqrt{(bb\pm 1)}}\, af \\ & \pm \left(\left(\sqrt{(bb\pm 1)}+b\right)^q - \left(\sqrt{(bb\pm 1)}-b\right)^q\right) c, \end{aligned}$$

allso in diesem Fall $3ee + ff - 3 = Quadrato$ wird

$$e = \frac{\left(\sqrt{3}+2\right)^q + \left(\sqrt{3}-2\right)^q}{2\sqrt{3}}\, f \pm \frac{\left(\sqrt{3}+2\right)^q - \left[\left(\sqrt{3}-2\right)^q\right]}{2}.$$

Nächst gehorsamster Empfehlung meines Hauses habe die Ehre mit der schuldigsten Hochachtung zu verharren

Ewr. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 4 *Dec.*
1751.

R 870 Reply to n° 155
Berlin, December 4th, 1751
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. V, fol. 97–98v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 556–560; *Euler-Goldbach* (1965), p. 342–344

157
Goldbach to Euler
Petersburg, (April 28th) May 9th, 1752

Hochedelgebohrner Herr,
Hochgeehrter Herr *Professor*,

Eurer Hochedelgebohrnen *Dissertation de summis divisorum*, welche Sie an die hiesige *Acad*[*emie*] der Wiss[enschaften] übersandt haben ist mir von dem Hn *Prof. Grischow communici*ret worden.[1] Ich befinde mich jetzo nicht im Stande davon *pro dignitate* zu urtheilen; allein Dero bekannte Einsicht in dergleichen Sachen lässet mich an der Richtigkeit alles dessen was in bemeldter *dissertation* enthalten ist nicht zweiffeln; insonderheit habe ich mit vergnügen gesehen daß in den *numeris* 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22 *&c.* eine so schöne Ordnung von Eurer Hochedelg. bemercket worden, und glaube gäntzlich daß es *Series* giebt aus deren mehr als 100 *terminis consequentibus* die *lex progressionis*, ob sie gleich an sich selbst kurtz und leicht ist, dennoch nicht zu ersehen seyn wird, als zum Exempel:[2]

Sit series $\alpha \ldots \overset{(1.)}{1}, \overset{(2.)}{1}, \overset{(3.)}{5}, \overset{(4.)}{7}, \overset{(5.)}{1}, \overset{(6.)}{23}, \overset{(7.)}{43}$, *&c. cuius progressio haec est ut dato termino quocunque* A *et exponente termini* n, *fiat* $A \pm \sqrt{(2\cdot 3^n - 2A^2)}$ = *termino proxime sequenti* B, *sumendo signum* $+$ *vel* $-$ *ita ut* B *non fiat divisibilis per* 3, *ex quo sequitur seriem* α *habere sororem*[3] $\beta \ldots \overset{(1.)}{1}, \overset{(2.)}{2}, \overset{(3.)}{1}, \overset{(4.)}{4}, \overset{(5.)}{11}, \overset{(6.)}{10}, \overset{(7.)}{13}$, *&c. ita comparatam ut duplum quadrati termini cuius exponens est* n *in serie* β *additum ad quadratum termini cuius exponens est idem* n *in serie* α *det* 3^n, *unde simul apparet legem progressionis seriei* β *esse* $A \pm \sqrt{3^n - 2A^2} = B$, *sumendo* $+$, *vel* $-$, *ita ut* B *non fiat divisibilis per* 3.

Sit exempli gratia $n = 4$, *erit terminus huic exponenti respondens in serie* α, 7, *quadratum eius* 49 *& duplum quadrati termini huic exponenti respondentis in serie* β *erit* $2\cdot 4^2$, *ergo* $7^2 + 2\cdot 4^2 = 3^4 = 81$.

Similiter quadratum termini cuius exponens est 5 *in serie* α, *est* 1^2, *duplum quadrati termini respondentis exponenti* 5 *in serie* β *est* $= 2\cdot 11^2$, *ergo* $1 + 2\cdot 11^2 = 3^5 = 243$, *et ita porro. Hinc patet solutio problematis: Dividere numerum* 3^{n+1} *in tria quadrata quorum non nisi duo sint aequalia.*[4]

Ich habe auch *observi*ret daß

$$\square + \square + \square = \frac{\square + 2\,\square + 3\,\square}{6}$$

oder daß in der *aequation*

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{p^2 + 2q^2 + 3r^2}{6},$$

datis a, b, c *integris* die *numeri* p, q, r allezeit *per integros exprimi*ret werden können.[5]

Hiernechst ersuche ich Ew. Hochedelgeb. dienstl[ich] inliegenden aufsatz von Büchern an Hn *Spener* abgeben zu lassen,[6] damit die Bücher zu wasser anhero gesandt und an Hn Köppen *adressi*ret werden möchten.

Ich verharre mit besonderer Hochachtung
Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.^{t} *Petersbourg*
den 9. *Maii* 1752.

vert[e]

Daß ein jeder *numerus* $\left(2m^2+1\right)^n$ in drey *quadrata quorum duo sunt aequalia resolvi*ret werden kan, ist gar leicht auf folgende art zu *demonstri*ren: *Sit*

$$\left(2m^2+1\right)^n = p^2 + 2m^2q^2,$$

erit

$$\left(2m^2+1\right)^{n+1} = \left(p \pm 2m^2q\right)^2 + 2m^2\left(p \mp q\right)^2;$$

nun aber ist die *propositio antecedens* wahr in *casu* $n = 1$ (denn es wird $p = q = 1$), also ist auch die *propositio consequens* wahr, weil auf gleiche Art aus jedem *casu* der *proxime sequens determini*ret werden kan.

Der *P. Bouhours* saget an einem Orte: *Comme ces Messieurs m'ont reproché plusieurs fois que je lisois ce que je ne devrois point lire, je me suis attaché plus que jamais à la lecture du Nouveau Testament.*[7]

Hierüber hat ein gewisser *Autor* nachfolgende *Critique* gemacht: *Je ne devrois est là une faute de temps; il falloit avoir mis: que je lisois ce que je ne devois point lire, autrement il faudra supposer que cet Auteur lit encore les livres qu'on lui a reproché de lire.*

Ich möchte gern wissen ob diese *Critique*, welche sehr *subtile* ist, von *M.*^{r} *Achard* oder von *M.*^{r} *Formey* vor richtig erkannt wird, im fall Ew. Hochedelg. gelegenheit hätten sich darüber zu *informi*ren.[8]

R 871 Petersburg, (April 28th) May 9th, 1752
Original, 3 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 153–155v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p.561–563; *Euler-Goldbach* (1965), p. 344–345

158
Euler to Goldbach
Berlin, May 30th, 1752

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Die *Series* $\overset{1}{1}, \overset{2}{1}, \overset{3}{5}, \overset{4}{7}, \overset{5}{1}, \overset{6}{23}, \overset{7}{43}$, *etc.* von welcher Ewr. Hochwohlgb. diese schöne Eigenschafft angemerket, daß $B = A \pm \sqrt{\left(2 \cdot 3^n - 2A^2\right)}$, ist dem ersten Anblick nach so *irregulair*, daß sie nach keinem gewissen Gesätz fortzugehen scheinet. Weil aber die bemerkte Eigenschafft statt findet, die *termini* mögen *affirmative* angenommen werden oder *negative*, so kan man denselben solche *signa* vor setzen, daß eine sehr *regul*mässige *Series* herauskommt, nehmlich:[1]

$$\overset{1}{-1} \quad \overset{2}{+1} \quad \overset{3}{+5} \quad \overset{4}{+7} \quad \overset{5}{-1} \quad \overset{6}{-23} \quad \overset{7}{-43} \quad \overset{8}{-17} \quad \overset{9}{+215} \quad etc. \quad \overset{n}{+P} \quad \overset{n+1}{+Q} \quad \overset{n+2}{+R}$$

als welche *recurrens* ist von der Eigenschaft daß $R = 2Q - 3P$; folglich ist Kraft der *Natur* dieser *Serierum*

$$P = \frac{-\left(1 + \sqrt{-2}\right)^n - \left(1 - \sqrt{-2}\right)^n}{2}$$

und

$$Q = \frac{-\left(1 + \sqrt{-2}\right)^{n+1} - \left(1 - \sqrt{-2}\right)^{n+1}}{2},$$

folglich $2 \cdot 3^n = QQ - 2PQ + 3PP$; und allso

$$Q = P + \sqrt{(2 \cdot 3^n - 2PP)}\,.$$

Eine gleiche Beschaffenheit hat es mit der anderen *serie sorore*, welche mit den gehörigen *signis* diese *Form* bekommt:[2]

$$\overset{1}{+1} \quad \overset{2}{+2} \quad \overset{3}{+1} \quad \overset{4}{-4} \quad \overset{5}{-11} \quad \overset{6}{-10} \quad \overset{7}{+13} \quad \ldots \quad \overset{n}{p} \quad \overset{n+1}{+q} \quad \overset{n+2}{+r}\ ,$$

da auch $r = 2q - 3p$ und allso

$$p = \frac{\left(1 + \sqrt{-2}\right)^n - \left(1 - \sqrt{-2}\right)^n}{2\sqrt{-2}};$$

und

$$q = p + \sqrt{(3^n - 2pp)}\,.$$

Was aber die schöne Verwandtschafft dieser beyden *serierum* anlangt, so habe ich überhaupt gefunden, wann man zwey solche *series* hat

$$\begin{array}{lccccc} & (0) & (1) & (2) & (3) & (4) \\ \alpha \ldots & 1, & a, & aa-b, & a^3-3ab, & a^4-6aab+bb \\ & & & & & (n) \\ & & & & \ldots & \dfrac{\left(a+\sqrt{-b}\right)^n+\left(a-\sqrt{-b}\right)^n}{2}=X \\ \beta \ldots & 0, & 1, & 2a, & 3aa-b, & 4a^3-4ab \\ & & & & \ldots & \dfrac{\left(a+\sqrt{-b}\right)^n-\left(a-\sqrt{-b}\right)^n}{2\sqrt{-b}}=Y \end{array}$$

welche beyde *recurrentes* sind von der *natur* das[!] $C=2aB-(aa+b)A$, wann nehmlich A, B, C *tres termini successivi* sind, so ist immer $XX+bYY=(aa+b)^n$. Setzt man nun $a=1$; $b=2$; so kommen Ewr. Hochwohlgeb. beyde *series* heraus.[3]

Dero Anmerkung daß allezeit $aa+bb+cc=\dfrac{pp+2qq+3rr}{6}$, beruhet auf diesem Grund daß $p=2a+b-c$; $q=a-b+c$; und $r=b+c$. Dieselbe hat mir aber Anlaß gegeben zu suchen, in welchen Fällen es möglich sey daß $aa+bb+cc=fpp+gqq+hrr$: zu diesem Ende setze ich: $p=\alpha a+\beta b+\gamma c$; $q=\delta a+\varepsilon b+\zeta c$; $r=\eta a+\theta b+\iota c$; und da muß folgenden 6 *aequation*en ein Genügen geleistet werden:

$$f\alpha\alpha+g\delta\delta+h\eta\eta=1;\quad f\beta\beta+g\varepsilon\varepsilon+h\theta\theta=1;\quad f\gamma\gamma+g\zeta\zeta+h\iota\iota=1$$
$$f\alpha\beta+g\delta\varepsilon+h\eta\theta=0;\quad f\alpha\gamma+g\delta\zeta+h\eta\iota=0;\quad f\beta\gamma+g\varepsilon\zeta+h\theta\iota=0$$

deren *Resolution* nicht wenig Mühe kostet. Ich habe dieselbe folgender Gestalt herausgebracht: für $\beta, \gamma, \varepsilon, \zeta$ kan man annehmen, was man will, und ausser denselben noch nach Belieben die Zahlen m und n, so wird:

$$\alpha=\frac{n}{m}(\beta\varepsilon+\gamma\zeta);\quad \delta=-\frac{m}{n};\quad \eta=mn(\gamma\varepsilon-\beta\zeta)$$

$$\theta=mm\gamma+nn\zeta(\beta\varepsilon+\gamma\zeta);\quad \iota=-mm\beta-nn\varepsilon(\beta\varepsilon+\gamma\zeta)$$

und ferner

$$f = \frac{mm}{mm(\beta\beta+\gamma\gamma)+nn(\beta\varepsilon+\gamma\zeta)^2}$$
$$g = \frac{nn}{mm+nn(\varepsilon\varepsilon+\zeta\zeta)}$$

und

$$h=\frac{fg}{mmnn}.$$

Allso ist

$$aa+bb+cc=\frac{3pp+14qq+rr}{42}$$

wann $p = 3a + 2b - c$, $q = a - b + c$, $r = -a + 4b + 5c$. Dergleichen *Theoremata* können allso unendlich viel aus diesen *general formul*n herausgebracht werden.[4]

Wegen der überschriebenen *Pas*[*s*]*age* des *P. Bouhours*[5] habe ich erstlich den H. *De Maupertuis* als *un des quarante de l'Académie françoise*[6] befraget, welcher nachdem er dieselbe nebst der *Critique* etlichemal überlesen gesagt, das[!] er ohne einiges Bedenken sich so wohl des *devrois* als des *devois* bedienen würde, und fügte hinzu: *il est plaisant, qu'on a critiqué le Pere Bouhours sur ce mot.*

M.^{r} *Achard* lässt Ewr. Hochwohlgeb. wegen des in ihn gesetzten guten Zutrauens sein gehorsamstes *Compliment* vermelden, und nachdem er die Sache wohl erwogen, so vermeint er das[!] *devrois* besser sey: doch will er das *devois* nicht verwerfen.

Ich habe darüber auch den H. *Beguelin* Hofmeister bey dem Prinz *Friderich* von Preussen, welcher für ungemein stark in der *Französi*schen Sprache gehalten wird, befraget; und dieser *approbir*t die *Critique* vollkommen.

M.^{r} *De Maupertuis* hatte noch diesen Einfall, daß man untersuchen müsste, ob man auf *Latein* sagen soll, *quos legere non debebam* oder *non deberem*; und die *Decision* im *Lateini*schen, welche weder Er noch ich zu geben uns getraueten, würde auch im Frantzösischen gelten. Hieraus werden allso Ewr. Hochwohlgeb. Selbst die Sache am besten *decidi*ren.

Mir kommt des H. *Beguelin*s Entscheidung deswegen am gründlichsten vor, weil er die *Regul*n der Französischen Sprache mit allem Fleiß studirt hat, welche *M.*^{rs} *de Maupertuis* und *Achard* nur *ex usu* wissen, und beyde sagen mir, daß Sie oft der Sache einen andren *Tour* geben müssen, weil sie in Zweifel stehen, ob gewisse *Expression*en, die sie brauchen wollten, recht sind oder nicht.

Die Bücher, so Ewr. Hochwohlgb. verlangen, wird H. Spener auch unverzüglich besorgen;[7] ich habe die Freyheit genommen auf die Liste noch ein sehr wichtiges Buch: *La Monogamie par M.*^{r} *de Premontval* zu setzen, welches wegen seiner Gründlichkeit und gantz besondern Ausführung einen allgemeinen Beyfall findet:[8] dahero ich gewiß versichert bin, daß Ewr. Hochwohlgeb. meine genommene Freyheit gut heissen werden.

Neulich bin ich auch auf *curieuse integration*en verfallen:[9] dann gleich wie von dieser *aequation*

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-yy)}}$$

das *integrale* ist

$$yy + xx = cc + 2xy\sqrt{(1-cc)}$$

allso ist von dieser *Aequation*

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^4)}}$$

das *integrale*:

$$yy + xx = cc + 2xy\sqrt{\left(1-c^4\right)} - ccxxyy;$$

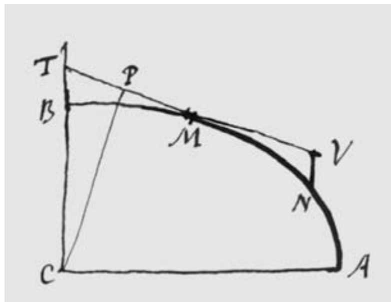
ferner ist von dieser *Aequation*

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^3)}}$$

das *Integrale*:

$$xx + yy + ccxxyy = 4c - 4cc\,(x+y) + 2xy - 2cxy\,(x+y)\,.$$

Aus solchen *Formul*n habe ich folgendes *Theorema* hergeleitet:



In quadrante elliptico ACB, si ad punctum quodvis M ducatur tangens VMT alteri axi CB occurrens in T, eaque capiatur $TV = CA$ et ex V ipsi CB agatur parallela VN; itemque ex centro C in tangentem perpendiculum CP, dico fore differentiam arcuum BM et AN rectificabilem, scilicet $BM - AN = MP$.[10]

Dieses Jahr habe ich wieder den auf den *Saturnum* gesetzten Preiß, welcher doppelt war nehmlich von 5000 *lb*, allein erhalten.[11]

Nächst gehorsamster Empfehlung aller der meinigen habe ich die Ehre mit der schuldigsten Hochachtung lebenslang zu verharren

Ewr. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 30ten *May*
1752.

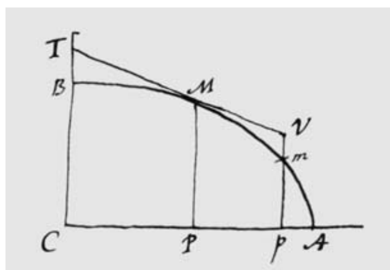
R 872 Reply to n° 157
Berlin, May 30th, 1752
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. V, fol. 108–109v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 564–568; *Euler-Goldbach* (1965), p. 346–348

159
Euler to Goldbach
Berlin, June 3rd, 1752

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Seit dem vorigen Post Tag hat mir auch *M.ʳ Formey* seine Meynung über die gemeldte Stelle des *P. Bouhours* zugeschickt, welche allso Ewr. Hochwohlgeb. nicht habe ermangeln wollen zuzustellen.[1]

Die Eigenschafft der *Ellipsis*, daß darinn zwey *arcus*, deren *differentia rectificabilis* ist, können angegeben werden,[2] scheinet um so viel mehr merkwürdig zu seyn, da bißher die *arcus elliptici* auf keinerley Art haben unter sich verglichen werden können: Seit dem habe ich aber angemerkt, daß wann man das *Problema* umgekehrt vorträgt, und diejenige krumme Linie sucht, welcher die gedachte Eigenschaft zukommt, die *Solution* durch die gewöhnlichen *Methoden* gefunden werden kan.



Quaeratur scilicet curva AMB hujus indolis ut ducta in quovis puncto M tangente TMV axi CB in T occurrente, indeque sumta $TV = CA$, si ex V ad axem CA perpendicularis agatur Vmp curvam in m secans; differentia arcuum BM et Am fiat rectificabilis scilicet $= \dfrac{CP\cdot Cp}{b}$.

Solutio: Pro puncto M sit abscissa $CP = x$, arcus $BM = s$; pro puncto autem m sit abscissa $Cp = X$ et arcus $Bm = S$; et ob curvae continuitatem relatio inter X et S similis esse debet relationi inter x et s. Ponatur totus arcus $AMB = A$, erit arcus $Am = A - S$, ideoque oportet sit

$$BM - Am = s - A + S = \frac{xX}{b};$$

hincque differentiando

$$ds + dS = \frac{X\,dx + x\,dX}{b}.$$

Deinde quia $TV = CA = a$ est tangens curvae in M erit $ds : dx = TV : Cp = a : X$; ergo $ds = \dfrac{a\,dx}{X}$. Cum autem puncta M et m sint inter se permutabilia ob *curvae continuitatem, erit pari modo* $dS = \dfrac{a\,dX}{x}$, *sicque habebitur*

$$ds + dS = \frac{a\,dx}{X} + \frac{a\,dX}{x}.$$

At invenimus $ds + dS = \dfrac{X\,dx + x\,dX}{b}$, *unde fit*

$$\frac{a\,dx}{X} + \frac{a\,dX}{x} = \frac{X\,dx + x\,dX}{b}$$

seu

$$ab\,(x\,dx + X\,dX) = Xx\,(X\,dx + x\,dX)$$

quae aequatio integrata dat:

$$ab\,(xx + XX) = XXxx \pm c^4;$$

ideoque

$$XX = \frac{abxx \mp c^4}{xx - ab} = \frac{\pm\, c^4 - abxx}{ab - xx}$$

et

$$X = \sqrt{\frac{c^4 - abxx}{ab - xx}}.$$

Consequenter

$$ds = \frac{a\,dx}{X} = \frac{a\,dx\sqrt{(ab - xx)}}{\sqrt{(c^4 - abxx)}}.$$

Sit applicata $PM = y$; *ob* $dy = \sqrt{\left(ds^2 - dx^2\right)}$ *erit*

$$dy = \frac{dx\sqrt{\left(a^3b - aaxx - c^4 + abxx\right)}}{\sqrt{(c^4 - abxx)}}.$$

Cum nunc constans c pro lubitu accipi queat, dantur infinitae curvae problemati satisfacientes, inter quas erit curva algebraica, si $c^4 = a^3b$; *quo casu fit*

$$dy = \frac{x\,dx\sqrt{(ab - aa)}}{\sqrt{ab}\,(aa - xx)},$$

et integrando

$$y = \sqrt{\left(\frac{b-a}{b}\right)(aa - xx)}$$

quae est aequatio pro ellipsi, existente $CA = a$ *et* $CB = a\sqrt{\dfrac{b-a}{b}}$; *hincque*

$$b = \frac{a^3}{aa - CB^2}.$$

Ita vicissim ellipsis proprietas ante memorata hinc colligitur. Scilicet sumta tangente $TMV = CA$, unde punctum m definitur, erit

$$BM - Am = \frac{CP \cdot Cp \left(CA^2 - CB^2\right)}{CA^3},$$

cujus expressionis valor reducitur ad portionem tangentis inter punctum M et perpendiculum ex C in eam dimissum interceptam.

Ich habe die Ehre, mit der schuldigsten Hochachtung zu verharren
Ewr. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 3ten *Junii*
1752.

R 873 Continuation of nº 158
Berlin, June 3rd, 1752
Original, 1 fol. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. V, fol. 99rv
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 569–571; *Euler-Goldbach* (1965), p. 348–349

160
Goldbach to Euler
[Petersburg, June/July 1752][1]

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*

Eurer Hochedelgebohrnen beyde mir sehr angenehme Schreiben vom 30. *Maii* und 3. *Jun.* habe ich allhie den 10. und 14. *eiusd*[*em*] wohl erhalten. Was die von Eurer Hochedelg. angeführten *Series* betrifft[2] deren *progressiones* ich durch gewisse *formulas determini*ret hatte, sehe ich mit vergnügen daß Sie selbigen auch die *terminos generales* bestimmet haben; ich erinnere mich hiebey daß ich schon ehemals mündlich gegen Ew. Hochedelg. erwehnet daß alle *quantitates finitae tam rationales quam quovis modo irrationales* durch die einige *seriem* $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ *&c. exprimi*ret werden könnten und die gantze Kunst nur darauf ankommen würde, wie die abwechselungen der *signorum* $+$ *et* $-$ zu *determini*ren sind.[3] Solchergestalt ist zum Exempel

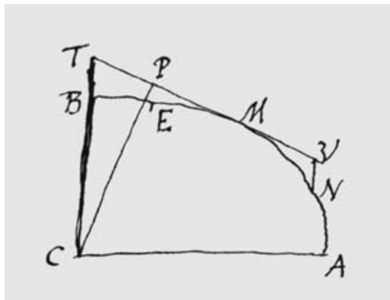
$$1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{11} + \&c. = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{12} - \tfrac{1}{14} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{18} + \&c.;$$

die *Signa* $+$ *et* $-$ werden allhie so abgewechselt daß *in terminis qui locis imparibus exstant* die *signa alterni*ren, nemlich $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{10} - \frac{1}{14} + \frac{1}{18} -$ *&c.*, *in terminis vero qui locis paribus exstant*[4] *eadem signa occurrunt quibus dupla eorum affecta sunt*;

also hat der *terminus* $\frac{1}{8}$ das *signum* + weil $\frac{1}{4}$ das *signum* + hat; $\frac{1}{12}$ hat das *signum* −, weil $\frac{1}{6}$ das *signum* − hat *&c.*

Was übrigens Ew. Hochedelg. von den zwey *seriebus* allwo $XX + bYY = \left(a^2+b\right)^n$ imgleichen von $\square + \square + \square = f\,\square + g\,\square + h\,\square$ melden, zeiget alles von der grossen Fertigkeit welche Sie für unzehlichen andern erlanget haben dergleichen *calculos* einzusehen und unendlich *general*er zu machen.[5]

Ich habe vorher nicht gewust auch vieleicht niemals daran gedacht ob es möglich sey den *quadrantem ellipsis in aliquot partes aequales* zu theilen;



aus dem jenigen aber was Ew. H. in Dero Schreiben anführen[6] lässet sich leicht schlüssen (1.) daß es zwar möglich diesen *quadrantem* in zwey gleiche Theile zu theilen wenn $PM = 0$ genommen wird, aber (2.) schlechterdings unmöglich sey den *quadrantem* in mehrere *partes aliquotas* zu theilen ohne zugleich eine *partem assignabilem huius quadrantis* zu *rectifici*ren. Denn es sey nach Eurer Hochedelg. *figur* $AN = BE$ eine *pars aliquota quaecunque totius quadrantis*, so wird der *arcus* $EM = BM - BE =$ *rectae* PM.

Eurer Hochedelg. dancke ich sehr daß Sie denen von mir aufgesetzten Büchern so ich aus Berlin verlanget hatte, noch eines von dem Hn *Premontval* beyfügen wollen.[7]

Von den *integralibus aequationis* $\dfrac{dx}{\sqrt{(1-x^n)}} = \dfrac{dy}{\sqrt{(1-y^n)}}$ möchte ich wissen ob Ew. H. nur allein die *casus* $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ entdecket, oder ob Sie deren noch mehr *in potestate* haben.[8] Sonst ist mir zwar die *integralis* von $\dfrac{x^{-1}dx}{\sqrt{(1-x^n)}} = \dfrac{my^{-1}dy}{\sqrt{(1-y^p)}}$ bekannt, ich mag aber dieselbe nicht hersetzen weil ich besorge sie möchte Eurer HochE. gar zu einfältig vorkommen, hingegen gestehe ich gern daß ich auch selbige jetzo nicht hätte finden können wann ich sie nicht schon längst in einem Buche *annoti*ret hätte.

Zu dem abermal erhaltenen Preise aus Pariß *gratuli*re ich von hertzen. Die erste Nachricht davon bekam ich aus der frantzösischen Zeitung, allein das eigentliche *quantum* des *praemii* war mir entfallen. Dafern Ew. H. ein *exemplar* von der *Piece* an H.n *Prof. Grischow* schicken möchten, werde mir selbiges auf einige Tage ausbitten.[9]

Was endlich die über eine gewisse *expression* des *P. Bouhours* entstandene *difficulté* betrifft, habe ich grosse Ursach Eurer H. zu dancken daß Sie darüber die *éclaircissemens* von 4 so berühmten Männern mir *communici*ren wollen,[10] bedaure aber auch zugleich daß Ihnen dadurch mehrere Mühe als ich gedacht hätte verursachet worden. Indessen halte ich gäntzlich dafür daß wann die *difficulté* von denen *Quarante* selbst hätte *decidi*ret werden sollen, die *Sentimens* nicht weniger *partagi*ret gewesen seyn würden so daß man bey dieser Gelegenheit eben das sagen könnte was der *P. Bouhours* in der *Suite des Remarques nouvelles* gesaget hat:[11] *J'ai consulté sur cette question de fort habiles gens, & j'ai été surpris de voir que leurs sentimens ne s'accordent point*, worin er aber wiederum nach der Meinung des selben *Critici*[12] einen Fehler begangen, indem er hätte sagen sollen *ne s'accordoient point*, und auf diese Weise sollte es fast das ansehen gewinnen daß die *Quarante* welche in ihrer *Observation* über die *Remarque* 201 *de Vaugelas* gesagt haben: *On a decidé d'une voix qu'il faut dire …* vielmehr hätten sagen sollen: *qu'il faloit dire &c.*[13]

Von *M.r Achard*, welchen unter den 4 Gelehrten deren Ew. Hochedelg. Erwehnung gethan haben, nur allein persönlich kenne, bin ich ein alter *admirateur*; ich habe denselben schon vor 27 Jahren mit ungemeinem Vergnügen gehöret und erinnere mich noch eigentlich zweyer Predigten, deren eine von der *Médisance*, die andere von der dritten Bitte im Vater unser handelte.[14]

Wann Ew. H. mir die zwey oder drey kurtze *formulas* wodurch die *leges motus* von dem Hn *de Maupertuis exprimi*ret werden und wie selbige von den *formulis Leibnitianis* unterschieden sind, *communici*ren, oder auch nur melden wollten ob Sie den ersteren gäntzlich beypflichten, würden Sie mich *obligi*ren; ich weiß wohl daß diese *formulae* in einem gewissen *tomo* der *Miscellaneorum* befindlich sind, woselbst ich sie auch im durchblättern gesehen, ich erinnere mich aber nicht mehr von wem ich damals den selben *tomum* bekommen hatte.[15] Ich verharre nechst hertzlicher Anwünschung alles Vergnügens und schuldigster Empfehlung an Dero sämmtliche *Familie*, Eurer Hochedelg. treuer Diener *G.*

R 874 Reply to nº 158 and nº 159
[Petersburg, June/July 1752]
Original, 3 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 40–42r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 572–575; *Euler-Goldbach* (1965), p. 350–351

161
Euler to Goldbach
Berlin, August 5th, 1752

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Ich erinnere mich noch gantz wohl von Ewr. Hochwohlgeb. gehöret zu haben daß alle mögliche Zahlen durch die *Seriem* $1 \,.\, \frac{1}{2} \,.\, \frac{1}{3} \,.\, \frac{1}{4} \,.\, \frac{1}{5} \,.\, \frac{1}{6} \,.\,$ *etc.* ausgedruckt werden können, wofern nur statt der Punkten die gehörigen Zeichen $+$ oder $-$ gesetzt werden.[1] Ewr. Hochwohlgeb. hatten mir auch einige solche *series* eröffnet, und wo ich nicht irre, so befand sich darunter auch die letst überschriebene

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\textit{etc.}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}-\frac{1}{14}\ \textit{etc.};$$

da nun jene *series* $=\frac{\pi}{4}$, wann π die *peripheriam circuli* dessen *diameter* $=1$ andeutet; so ist

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}-\frac{1}{14}\ \textit{etc.}$$

und folglich

$$\frac{\pi}{2}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\textit{etc.}$$

welche *seriem* ich auch in meiner *Introductione in Analysin pag.* 244 angebracht.[2] Daselbst befinden sich noch viel andere *series* von dieser Art, als:

$$\frac{\pi}{6}=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\textit{etc.}$$

ubi binarius habet signum $-\,1$, *numeri primi formae* $4n-1$ *signum* $-$ *et numeri primi formae* $4n+1$ *signum* $+$, *numeris autem compositis id signum convenit, quod iis ratione multiplicationis ex primis competit*, also $\frac{1}{60}$ *ob* $60=2\cdot2\cdot3\cdot5$ hat das Zeichen $-\cdot-\cdot-\cdot+=-$. Ferner ist

$$\pi=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\ \textit{etc.}$$

ubi binarius habet signum $+$, *numeri primi formae* $4n-1$ *signum* $+$ *et numeri primi formae* $4n+1$ *signum* $-$. Ferner ist

$$\frac{3\pi}{2}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}-\frac{1}{13}+\frac{1}{14}\ \textit{etc.}$$

ubi binarius habet signum $+$, *numeri primi* $4n-1$ *signum* $+$, *numeri primi* $4n+1$ *excepto quinario signum* $-$. Alle dergleichen *series* folgen aus diesen beyden *formul*n:

$$\text{I. }\frac{\pi}{2}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{1}{11}\right)\left(1-\frac{1}{13}\right)\ \textit{etc.}}$$

wo die *Factores* nach den *numeris primis* fortgehen.

$$\text{II. }\frac{\pi}{3}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right)\left(1+\frac{1}{13}\right)\ \textit{etc.}}$$

als aus welchen unendlich viel andere hergeleitet werden können. Als *multiplicetur prima per* $\dfrac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=2$; *erit*

$$\pi=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{1}{11}\right)\left(1-\frac{1}{13}\right)\ \textit{etc.}}$$

et resolutione in seriem facta

$$\pi = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11}\ \textit{etc.}$$

ubi 2 *habet signum* $+$, *numeri primi formae* $4n-1$ *excepto ternario signum* $-$, *numeri primi* $4n+1$ *signum* $+1$. Hernach da

$$0 = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{1}{11}\right)\left(1+\frac{1}{13}\right)\ \textit{etc.}}$$

können auch unendlich viel *series* $= 0$ gemacht werden, als

$$0 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7}\ \textit{etc.}$$

ubi omnes numeri primi habent sign[*um*] $-$. Noch mehr als in meinem Buch befindlich können auch noch aus den daselbst gegebenen *formul*n gefunden werden; als da

$$\frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{1}{11}\right)\left(1-\frac{1}{13}\right)\ \textit{etc.}}$$

ubi numeri primi $6n-1$ *habent* $+$, *numeri primi* $6n+1 \ldots -$, *multiplicetur per* $\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$, *erit*

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{1}{11}\right)\left(1-\frac{1}{13}\right)\ \textit{etc.}}$$

und allso

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14}\ \textit{etc.}$$

ubi 2 *habet* $-$; 3, $+$; $6n-1$, $-$; *et* $6n+1$, $+$.[3]

Vermittelst dieser *Methode* aber kan ich keine andere *series* von dieser Art heraus bringen, als deren *summae* entweder $= 0$ oder *a quadratura circuli pendent.*

Von den *integralibus aequationis* $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^n)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^n)}}$ kan ich keine andere angeben, als die Fälle $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ und $n = 6$.[4] Wann ich diesen letsten Fall Ewr. Hochwohlgeb. zu berichten vergessen habe, so ist von dieser *aequatione differentiali* $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^6)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^6)}}$ die *aequatio integralis*

$$x^4 + y^4 - 4cx^4y^4 + 4ccxxyy\,(xx+yy) - 2xxyy + 2c\,(xx+yy) + cc = 0$$

wo c die *constantem* andeutet, so durch die *integration* dazu gekommen, und nach Belieben angenommen werden kan, so daß dieses *Integrale completum* ist.

Die *Integration* dieser *Aequation* $\dfrac{x^{-1}dx}{\sqrt{(1-x^n)}} = \dfrac{my^{-1}dy}{\sqrt{(1-y^p)}}$ fällt auch nicht sogleich in die Augen, wie Ewr. Hochwohlgeb. scheinen zu sagen; allein da ein jedes Glied für sich *integrabel* ist *per logarithmos*, so kan davon eine *integralis algebraica* gegeben werden: welcher Umstand sich bey obigen *Formul*n nicht befindet, da weder $\dfrac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}}$ noch $\dfrac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$ noch $\dfrac{dx}{\sqrt{(1-x^6)}}$ *ullo modo sive per circulum sive logarithmos integrir*t werden kan; dahero um so viel merkwürdiger ist, daß doch für jene *aequationes differentiales aequationes integrales algebraicae* angegeben werden können. Für Ewr. Hochwohlgeb. *Formul*n aber, wann ich setze $\sqrt{(1-x^n)} = v$ so wird $x^n = 1 - vv$, und

$$\frac{n\,dx}{x} = -\frac{2v\,dv}{1-vv},$$

allso

$$\frac{dx}{x\sqrt{(1-x^n)}} = -\frac{2}{n}\cdot\frac{dv}{1-vv},$$

und *integrando*

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{(1-x^n)}} = -\frac{1}{n}\,\ell\,\frac{1+v}{1-v} = -\frac{1}{n}\,\ell\,\frac{1+\sqrt{(1-x^n)}}{1-\sqrt{(1-x^n)}}.$$

Ebenfalls ist

$$\int\frac{dy}{y\sqrt{(1-y^p)}} = \frac{-1}{p}\,\ell\,\frac{1+\sqrt{(1-y^p)}}{1-\sqrt{(1-y^p)}} + Const.$$

folglich

$$\frac{1+\sqrt{(1-x^n)}}{1-\sqrt{(1-x^n)}} = C\left(\frac{1+\sqrt{(1-y^p)}}{1-\sqrt{(1-y^p)}}\right)^{\frac{mn}{p}},$$

welches die *Integratio completa* ist von dieser *aequatione differentiali*

$$\frac{x^{-1}dx}{\sqrt{(1-x^n)}} = \frac{my^{-1}dy}{\sqrt{(1-y^p)}}.$$

Es ist noch sehr zweifelhaft ob ich von meiner *Piece* über den *Saturnum* aus *Paris Exemplaria* bekommen werde?[5] dann bißher habe ich keine erhalten, und es ist so schwehr dergleichen Sachen von *Paris* zu bekommen, daß auch ein Buch, so *M.^{r} Bouguer* mir zu *Praesent* geschickt, unter Wegs verlohren gegangen.[6] Sollte ich aber bekommen können, so werde nicht ermangeln damit Ewr. Hochwohlgeb. aufzuwarten; und würde mir nicht in Sinn gekommen seyn eines an den H. *P. Grischau* zu schicken.

Als ich letstens bey *M.^{r} de Maupertuis* speisete, so habe ich die von Ewr. Hochwohlgeb. angeführten Französischen *Passagen* auf die Bahn gebracht. Die Meynung fiel dahinn daß *grammaticaliter* so wohl das *Praesens* als *Imperfectum* recht sey, allein der Sinn sey unterschieden. Allso sey es Recht: *On a decidé d'une voix qu'il faut dire ...*, weil man nicht nur so hätte sagen soll[en], sondern auch immer so sagen soll. Stünde aber *qu'il faloit dire*, so würde solches nicht mehr anzeigen, als daß man bey dem vorgelegten Fall allein so hätte reden sollen, und würde allso nicht als ein beständiges Gesätz angesehen werden können.[7]

Was Ewr. Hochwohlgeb. wegen der von *M.r De Maupertuis* gegebenen *Formul*n über die *Leges motus* zu fragen belieben, wird ohne Zweifel diejenigen antreffen, wodurch Er die *Regulas communicationis Motus in conflictu corporum tam elasticorum quam non elasticorum* bestimmt; weil dieselben mit den schon längst bekannten vollkommen einerley sind, so kommen sie auch mit den *Leibnizianis* überein. Was aber das *Principium* selbst anlanget, woraus der H. von *Maupertuis* diese *regulas* hergeleitet, solches ist allerdings vollkommen neu: dann ungeacht man schon vorlängst behauptet daß die *natur via facillima* würke, so hat doch weder *Leibniz* noch jemand anders gezeigt, welches eigentlich diejenige *Quantität* sey, welche in den *operationibus naturae* ein *minimum* ist. *M.r De Maupertuis* nennet diese *Quantität* die *quantitatem actionis*, und bestimmt dieselbe durch das *Product* aus der *Massa*, der Geschwindigkeit, und dem *Spatio*; und leitet daraus nicht nur die *Regulas motus* sondern andere Sachen gar schön her. Ich hatte auch schon längst gewiesen, daß *in motibus corporum coelestium* immer die *formul* $\int Mv\,ds$ ein *minimum* sey; wo M die *Massam*, v die *celeritatem*, und ds das *spatiolum percursum* andeutet. Allso ist $Mv\,ds$ die *quantitas actionis elementaris*, und $\int Mv\,ds$ die *totalis*, welche folglich nach *M.r De Maupertuis* ein *Minimum* seyn muß.[8]

Ich habe die Ehre nächst gehorsamster Empfehlung aller der meinigen mit der schuldigsten Hochachtung lebenslang zu verharren

Ewr. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 5$^{\text{ten}}$ *Aug.* 1752.

Die von Ewr. Hochwohlgeb. verlangten Bücher sind schon vor 14 Tagen von hier abgegangen.

R 875 Reply to n° 160
Berlin, August 5th, 1752
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. V, fol. 104–105v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 576–581; *Euler-Goldbach* (1965), p. 351–354

162
Goldbach to Euler
Petersburg, (September 26th) October 7th, 1752

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*,

Meine *demonstration* daß

$$\frac{2}{1}-\frac{2}{3}+\frac{2}{5}-\frac{2}{7}+\&c.=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\&c.,$$

ist ein *casus particularis* von dieser *propositione generali*

$$\begin{aligned} &A \ldots \ \frac{1}{a}+\frac{1}{2a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{4a}+\frac{1}{c}-\frac{1}{2b}-\frac{1}{d}+\frac{1}{8a}+\frac{1}{e}+\&c. \\ = \ &B \ldots \ \frac{2}{a}-\frac{2}{b}+\frac{2}{c}-\frac{2}{d}+\frac{2}{e}-\&c.; \end{aligned}$$

sunt enim seriei A termini impares $=\dfrac{B}{2}$ *et eiusdem seriei A termini pares et termini impares simul sumti nempe* $\dfrac{B+A}{2}=A$, *ergo* $A=B$. Es sind zwar allhie in der *serie B* die *signa* $+$ *et* $-$ *alternantia* angenommen worden, es können aber auch wann nur die *summa ipsius B finita* ist alle *termini affirmativi* oder *quacunque lege variantes* angenommen werden; wann man also die *condition* daß in der *serie A* die *termini continuo decresci*ren sollen (*non attenta variatione signorum* $+$ *et* $-$) bey seite setzet so kan eine jede *series B* in *A* verwandelt werden, hingegen sehe ich nicht wie eine eintzige von denen welche Ew. Hochedelg. gefunden haben hieraus *deduci*ret werden könne. Daß aber alle solche *series* entweder $=0$ sind oder von der *quadratura circuli dependi*ren halte ich vor eine merckwürdige *observation*.[1]

Was Ew. Hochedelg. von den *casibus integrabilibus aequationis* $\dfrac{dx}{\sqrt{(1-x^n)}}=\dfrac{dy}{\sqrt{(1-y^n)}}$ melden, wird ohne zweiffel nur von denen zu verstehen seyn wo n ein *numerus integer* ist;[2] denn daß jede *aequatio*

$$\frac{dx}{\sqrt{\left(1-x^{\frac{1}{m+1}}\right)}}=\frac{a\,dy}{\sqrt{\left(1-y^{\frac{1}{m+1}}\right)}}$$

posito m numero integro affirmativo integrabilis sey, scheinet mir gantz gewiß zu seyn. In denen von E. H. angegebenen *casibus* aber wo $n=2$, *vel* 3, *vel* 4, *vel* 6, finde ich daß zwar die *valores* von y etwas verworren aussehen wann man die *constantem generatim* durch C *exprimi*ret[3] weil sich alsdenn allezeit *quantitates irrationales* mit einmischen, setzet man aber $C=-1$, so wird

$$\begin{aligned}
&\textit{pro casu} \quad n = 2; \quad y^2 = 1 - x^2; \\
&n = 3; \quad y^2 = \frac{\left(x^2 + x - 2\right)^2}{(1 - x)^4} \\
&n = 4; \quad y^2 = \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \\
&n = 6; \quad y^2 = \frac{-2x^4 + x^2 + 1}{(1 + 2x^2)^2}
\end{aligned}$$

woraus man siehet daß alle diese *casus* in der *formula*

$$\frac{ax^4 + bx^3 + cx^2 + ex + f}{1 + px + qx^2 + rx^3 + sx^4}$$

begriffen sind, so daß wann jemand noch mehrere *casus* suchen wolte, der selbe sehr wohl thun würde wann er gleich anfangs die *constantem* $C = -1$ setzete.

Hiebey lieget ein Zettel von Dero eigenen hand[4] worauf Sie schon vor vielen Jahren aus der *aequatione* $x^2 + y^2 - 1 = 0$ diese: $x^2 - 1 = 2cy + c^2$ *deduci*ret; ich zweifele aber ob $x\,dx + y\,dy = dy\sqrt{\left(x^2 + y^2 - 1\right)}$ gesetzt werden könne wann gleich beydes *ex hypothesi* $= 0$ ist, denn sonst würde auch folgen daß *positis X et Y pro functionibus quibuscunque ipsarum x et y*, $x\,dx + y\,dy = XY\,dy\sqrt{\left(x^2 + y^2 - 1\right)}$ seyn könnte.

Als ich vor wenigen Tagen einige *tomos commentariorum tam antiquorum quam novorum* von der *Acad*[*emie*] der Wiss[enschaften] zum *present* bekam, hat sich mir, so bald ich den *Tom.* II. der letzteren eröfnet, des Hn Winsheims *Dissertatio de numeris perfectis praesenti*ret[5] woselbst er *p.* 77 die von Eurer HochEdelg. angegebenen *numeros perfectos*, absonderlich aber den neunten, *cum salutari clausula*: *donec contrarium fuerit probatum*, annimmt; ich zweiffele aber ob E. H. das schöne *excerptum* so er aus dem *Mersenno* anführet, schon gelesen haben, welches meines erachtens sehr lesenswürdig ist. Ob die *Cogitata Mersenni* oder des *Leuneschlos paradoxa* eher bekannt gemacht worden ist mir zwar unbekannt, ich sehe aber daß sie beyde sich in betrachtung der noch rückständigen 10 oder 11 *numerorum perfectorum* einer gleichlautenden *expression* gebrauchet. *Qui undecim alios invenerit*, sagt *Mersennus*, *noverit se analysim omnem quae fuerit hactenus superasse*, er hält aber doch die erfindung derselben nicht unmöglich; und *Leuneschlos* sagt *paradoxo* 46 *et* 47: *Vastissima et infinita numerorum multitudo capit duntaxat decem numeros perfectos; qui decem alios invenerit noverit se analysin omnem quae fuerit hactenus, superasse*, welcher zusatz aber überflüssig ist wann nach des *Autoris* vorgeben nur 10 *numeri perfecti in rerum natura* sind.[6]

An Eurer HochE. wertheste *familie* bitte ich mich bestens zu empfehlen und verharre mit besonderer Hochachtung

Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.^{t} Petersburg
den 7. *Oct.* 1752.

R 876 Reply to n° 161
Petersburg, (September 26th) October 7th, 1752
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 156–157v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 582–585; *Euler-Goldbach* (1965), p. 355–356

163
Euler to Goldbach
Berlin, October 28th, 1752

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Ewr. Hochwohlgeb. *Methode* eine jede *seriem*

$$\frac{2}{a} - \frac{2}{b} + \frac{2}{c} - \frac{2}{d} + etc.$$

in eine andere als

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{2a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{4a} + \frac{1}{c} - \frac{1}{2b}\ etc.$$

zu verwandeln erinnere ich mich noch sehr wohl, und es können allerdings durch Hülfe derselben solche Verwandlungen gefunden werden, die sich aus der von mir gebrauchten *Methode*, als welche nur auf eine gewisse Art von Zahlen eingeschränkt ist nicht herleiten. Hingegen gibt auch meine *Methode* solche *series* welche mit jener keine Gemeinschaft haben. Da meine *Methode* nur eine gewisse Art von *Variation* in den *signis* in sich schliesst, so folgt daher, daß die *summ* aller daraus entspringenden *serierum* entweder 0 ist, oder *a circuli quadratura dependir*t; wann ich aber im Stande wäre andere *Variationes signorum* anzubringen, so zweifle ich nicht daß nicht *quaelibet quantitas pro summa* herausgebracht werden könnte.[1]

Da die *numeri primi* in Ansehung ihrer gedoppelten *Form* von $4n+1$ und $4n-1$ so sehr von einander unterschieden sind, und die Menge von beyden Gattungen *infinita* ist,[2] so habe ich die *summam* folgender *seriei proxime* untersucht:

$$A = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{23} - \frac{1}{29} + \frac{1}{31} - \frac{1}{37} - \frac{1}{41} + \frac{1}{43} + \frac{1}{47}\ etc.$$

wo die *numeri primi formae* $4n-1$ das *signum* $+$, die *formae* $4n+1$ aber das *signum* $-$ haben, in der Hoffnung ob etwan die *summa* nicht *rational* seyn möchte. Ich fund aber diese *summam* $= 0{,}334\,980$ und allso etwas grösser als $\frac{1}{3}$; wäre *accurat* $\frac{1}{3}$ herausgekommen, so hätte die Sach allerdings Nachdenken verdienet.[3]

Da die Anzahl aller *numerorum primorum* unendlich ist, aber doch ein *infinitum infimi ordinis*, weil ich gezeigt, daß wann die Anzahl *omnium numerorum*

$= n$, die Anzahl der *numerorum primorum* seyn werde $= \ell\, n$; es ist aber $\ell\, n$ kleiner als $n^{\frac{1}{m}}$ so groß auch immer die Zahl m seyn mag:[4] so wäre die Frage, ob auch die Anzahl der *numerorum primorum*, so zum *Exempel* in dieser *formul* $aa+1$ enthalten sind, auch unendlich sey, weil dieselbe gewiß unendlich mal kleiner ist als die Anzahl aller *numerorum primorum*.[5] Hernach wann auch diese unendlich wäre, könnte man eben dieses fragen *de numeris primis hujus formae* a^4+1 oder a^8+1 *etc.* Ich habe die *numeros primos in hac forma* $aa+1$ *contentos* untersucht, und gefunden daß $aa+1$ ein *numerus primus* wird in folgenden Fällen:[6]

$a =$ 1, 2, 4, 6, 10, 14, 16, 20, 24, 26, 36, 40, 54, 56, 66, 74, 84, 90, 94,
110, 116, 120, 124, 126, 130, 134, 146, 150, 156, 160, 170, 176, 180, 184,
204, 206, 210, 224, 230, 236, 240, 250, 256, 260, 264, 270, 280, 284, 300,
306, 314, 326, 340, 350, 384, 386, 396, 400,
406, 420, 430, 436, 440, 444, 464, 466, 470, 474, 490, 496,
536, 544, 556, 570, 576, 584, 594,
634, 636, 644, 646, 654, 674, 680, 686, 690, 696, 700,
704, 714, 716, 740, 750, 760, 764, 780, 784,
816, 826, 844, 860, 864, 890,
906, 910, 920, 930, 936, 946, 950, 960, 966, 986,
1004, 1010, 1036, 1054, 1060, 1066, 1070, 1094, 1096,
1106, 1124, 1140, 1144, 1146, 1150, 1156, 1174, 1176, 1184,
1210, 1234, 1244, 1246, 1274, 1276, 1290, 1294,
1306, 1314, 1316, 1320, 1324, 1340, 1350, 1354, 1366, 1374, 1376, 1394,
1406, 1410, 1416, 1420, 1430, 1434, 1440, 1456, 1460, 1494;

biß 1500 habe ich dieses *examen* getrieben, und hierdurch bin ich im Stande viel *numeros primos* anzuzeigen, welche nicht nur grösser sind als 100 000, als so weit die *Tabulae numerorum primorum* gehen,[7] sondern auch als 1 000 000; sonsten würde es gewiß sehr schwehr seyn einen *numerum primum* $> 1\,000\,000$ anzugeben.

Soll aber a^4+1 ein *numerus primus* seyn, so werden die *valores* von a seyn folgende wenige:[8]

$a = 1, 2, 4, 6, 16, 20, 24, 34.$

Doch bin ich noch weit entfernt des *Fermatii problema* zu *solvi*ren, *invenire numerum primum, dato quovis numero majorem.* Sollte man eine *seriem regularem* finden können, deren alle *termini* in jenen *valoribus* von a enthalten wären, so wäre das *Problema solvir*t. Jedoch gibt es gewiß keine *series algebraica*, deren *omnes termini numeri primi* seyn können. Denn es sey X der *terminus indici x respondens*, und daher A der *terminus indici dato a respondens*, so wird, wann man nimmt $x = nA + a$, der *terminus X divisibilis per A* und allso nicht *primus*.[9]

Meine *integratio aequationis* $\dfrac{dx}{\sqrt{(a+bx^n)}} = \dfrac{dy}{\sqrt{(a+by^n)}}$ setzet nicht nur zum voraus, daß n ein *numerus integer* ist; sondern ich kan auch nur die *integralia* angeben in diesen Fällen, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ und $n = 6$;[10] wann $n = 5$ so habe ich bißher das *integrale* nicht finden können. Wann aber $n = \dfrac{1}{m+1}$

so wären die *Formulae* allerdings *absolute integrabiles*, dahero dieselben nichts sonderbares geben würden. Dann dieses kam mir fürnehmlich merkwürdig vor daß da die *Formul*n in den Fällen $n = 3$, oder $n = 4$, oder $n = 6$ auf keinerley Art weder *ad circuli* noch *hyperbolae quadraturam* gebracht werden können, doch die *aequation* selbst *algebraice* und das *generaliter integrir*t werden kan.

Beygelegten Zettul[11] erinnere ich mich noch bey Ewr. Hochwohlgebohrnen geschrieben zu haben um zu zeigen, daß man nicht allezeit *per integrationem* alle *Casus* findet, *quibus aequationi differentiali satisfit*: wovon ich in meiner *Mechanic* einige wichtige *Casus* angemerket hatte. Ich kan den Fall noch *simpler* machen und diese *aequationem differentialem* $a\,dx = (a - x)\,dy$ vorlegen welcher augenscheinlich ein Genügen geschieht wann $x = a$, welcher Fall doch durch die *Integration* nicht herausgebracht wird. Allso wann ich habe: $\dfrac{P\,dz}{Z} = dy$ oder $P\,dz = Z\,dy$, *existente* Z *functione ipsius* z *et* P *quantitate ex* y *et* z *utcunque composita*, so *satisfacir*t $Z = 0$, dann daher wird $z =$ *certae constanti*, und allso $dz = 0$. Setzt man nun für z eine *formulam magis compositam* als $xx + yy - aa$, so bekommt man aus $Z = 0$ solche *casus integralis* welche durch die *Integration* nimmer herausgebracht werden. Allso wann $\dfrac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{(xx + yy - aa)}} = V\,dy$ *existente* V *functione quacunque ipsarum* x *et* y so *satisfacir*t gewiß $xx + yy - aa = 0$.[12]

Den *Tom*[*um*] II *Nov*[*orum*] *Comm*[*entariorum*] habe ich noch nicht bekommen; ob $2^{30}\left(2^{31} - 1\right)$ würklich ein *numerus perfectus* sey oder nicht? kan ich freylich nicht behaupten, weil ich nicht weiß, ob $2^{31} - 1$ ein *numerus primus* ist oder nicht?[13] daß es aber nicht unendlich viel *numeros perfectos* geben sollte, kan ich nicht einsehen: weil aber um dieselben zu finden erfordert wird daß man alle *casus, quibus formula* $2^n - 1$ *fit numerus primus*, anzeigen könne, so sehe ich nicht ab, wie man mehr als 7, nehmlich $2^1\left(2^2 - 1\right)$; $2^2\left(2^3 - 1\right)$; $2^4\left(2^5 - 1\right)$; $2^6\left(2^7 - 1\right)$; $2^{12}\left(2^{13} - 1\right)$; $2^{16}\left(2^{17} - 1\right)$; $2^{18}\left(2^{19} - 1\right)$, und allso nicht einmal 8 oder gar 10 angeben kan.[14] So viel ist gewiß, daß wann $2^n - 1$ ein *numerus primus* seyn soll, auch n ein *numerus primus* seyn muß. Allein es gibt viel *numeri primi*, die für n gesetzt, $2^n - 1$ nicht *primum* machen, als $n = 11$, $n = 23$, $n = 29$, $n = 37$, *etc.* Was allso *Mersennus* oder *Leunenschloß* sagt, als wann die Anzahl der *numerorum perfectorum* endlich wäre, halte ich für ungegründet, ungeacht ich nicht glaube, daß mehr als 7 *praeter unitatem* mit Gewißheit angezeigt werden können.[15] Des *Leunenschloß Tractat* erinnere ich mich bey Ewr. Hochwohlgeb. gesehen zu haben, ich kan aber von diesem *Autore* in keinem *Lexico* die geringste Nachricht finden; dahero ich Ewr. Hochwohlgeb. um einige Umstände seines *Tractats* und wo möglich seiner Selbst gehorsamst ersuchet haben wollte: der ich nächst gehorsamster Empfehlung aller der meinigen mit der schuldigsten Hochachtung zu verharren die Ehre habe

Ewr. Hochwohlgebohrnen

gehorsamster Diener

L. Euler

Berlin den 28ten *Octobr.* 1752.

R 877 Reply to nº 162
Berlin, October 28th, 1752
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. V, fol. 102–103v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 586–591; *Euler-Goldbach* (1965), p. 357–359

164
Goldbach to Euler
Petersburg, November (7th) 18th, 1752

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*,

Ew. Hochedelg. haben die Güte gehabt mir schon längst zu schreiben daß die Bücher so mir H. *Spener destini*ret hat bereits im *Julio* von Berlin abgegangen,[1] ich weiß aber biß diese Stunde noch nicht an was für einen Kaufmann in Petersburg selbige *adressi*ret worden, oder ob sie gar in Lübeck zurück geblieben sind.

Durch was für *compendia* Ew. Hochedelg. die *differentiam serierum* $\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{19}+$ *&c. et* $\frac{1}{5}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\frac{1}{29}+$ *&c.* erhalten haben ist mir zwar nicht bekannt; sollten Sie aber die *methode* schon herausgegeben haben, so bitte mir den ort wo selbige zu finden ist anzuzeigen.[2]

Daß der *numerus numerorum primorum omnium huius formae* a^2+1 *infinite magnus* sey halte ich für gewiß[3] ohngeachtet ich es nicht alsofort *demonstri*ren kan, und finde ich die *rationem dubitandi*: daß die anzahl *numerorum primorum huius formae* a^2+1 unendliche mal kleiner ist als die anzahl *numerorum primorum omnium*, gar nicht erheblich, indem kein *numerus infinitus* so klein genommen werden kan daß er nicht *infinities maior alio infinito* sey.[4]

Mersennus hat um so viel weniger gesaget daß nur 10 *numeri perfecti* möglich sind, weil er deren eilf selbst angiebet darunter aber der *octavus* von E. HochE. nicht begriffen ist;[5] er saget auch nicht daß die Anzahl der *numerorum perfectorum* endlich sey, wohl aber daß kein so grosses *intervallum numerorum* anzugeben möglich sey, welches nicht *absque numeris perfectis* seyn könne, wie solches Ew. HochE. aus der von dem Hn *Winsheim allegi*rten *praefatione gener*[*ali*] *ad Mersenni cogitata physico-mathem*[*atica*] §. 19, wann der *Tomus* II. *Comm*[*entariorum*] noch nicht ankommen ist, allenfals selbst werden ersehen können.

Was des *Leuneschlos paradoxa mathematica* betrifft, so sind selbige zu Heidelberg *A*[*nno*] 1658, 8. gedruckt, ich habe aber dieses Buch selbst niemals gehabt, sondern ich hatte das *exemplar* welches ich *A*[*nno*] 1716 gelesen von der altstädtischen *Bibliothec* in Königsberg genommen welches derselben auch noch vor meiner letzten Abreise *A*[*nno*] 1718 *restitui*ret worden, dahero es unmöglich ist daß Ew. HochE. selbiges Buch in Petersb[urg] bey mir gesehen haben sollten, hingegen erinnere ich mich, jedoch nicht mit völliger Gewißheit, daß Sie mir vor einigen Jahren aus Berlin geschrieben, Sie hätten sich selbiges nebst des *Bungi* Buch aus der Königlichen *Bibliothec* geben lassen.[6] Von diesem *Leuneschlos* ist mir weiter nichts bewust als daß ich irgendwo gelesen er habe in Heidelberg als *Professor* gestanden; er wird auch von einigen, *ni fallor*, *Luneschlos* genannt, und wäre also dessen Name auf beyde art in den *Lexicis* zu suchen. Es scheinet daß er sein *paradoxum de numeris perfectis* in dem *Mersenno* gefunden und nachgehends, da er es *memoriter* hingeschrieben, von dem wahren Sinn des *Mersenni* abgegangen ist.

Daß keine *formula Algebraica* lauter *numeros primos* geben könne hatte ich schon in einem meiner vorigen Briefe angemercket,[7] denn es sey zum Exempel die *formula* $x^3 + bx^2 + cx + e$, so ist offenbar, daß so offt x ein *multiplus* des *termini absoluti* e ist, so offt auch (und folglich *infinitis modis*) die *formula* einen *numerum non primum* geben wird; sollte aber $e = 1$ seyn, so setze ich nur $x + p$ anstatt x, alsdann wird die *formula transmuti*ret in

$$\begin{array}{cccc} x^3 & +3px^2 & +3p^2x & +p^3 \\ & +bx^2 & +2bpx & +bp^2 \\ & & +cx & +cp \\ & & & +1 \end{array}$$

und so offt x ein *multiplus numeri* $p^3 + bp^2 + cp + 1$ wird, so offt giebt die *formula* einen *numerum non-primum*;[8] da nun dieser *casus* wo die *potestas maxima ipsius* $x = 3$ ist, auf alle andere *lusus naturae*, *quaecunque fuerit potestas ipsius* x, *applici*ret werden kan, so ist es unmöglich eine *seriem Algebraicam* anzugeben in welcher nicht *infiniti termini* aus *numeris non primis* bestehen sollten.

Noch habe ein kleines gantz neues *theorema* beyzufügen, welches so lange vor wahr halte *donec probetur contrarium*: *Omnis numerus impar est = duplo quadrati + numero primo, sive* $2n-1 = 2a^2 + p$, *ubi a denotet numerum integrum vel* 0; p *numerum primum, exempli gr*[*atia*] $17 = 2\cdot 0^2 + 17$; $21 = 2\cdot 1^2 + 19$; $27 = 2\cdot 2^2 + 19$, *&c.*[9] Ich verharre nechst schuldigster Empfehlung an Dero wertheste *Familie*,

Eurer Hochedelgebohrnen

ergebenster Diener *Goldbach.*

S. Petersburg den 18. *Nov.* 1752.

R 878 Reply to n° 163
Petersburg, November (7th) 18th, 1752
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 158–159v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 592–594; *Euler-Goldbach* (1965), p. 360–361

165
Euler to Goldbach
Berlin, December 16th, 1752

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Es war mir höchst verdrüßlich zu vernehmen, daß die von Ewr. Hochwohlgb. verschriebenen Bücher unter Wegs ligen geblieben;[1] ich habe solches sogleich dem H. Spener vorgehalten und aus der Antwort ersehen, daß keine geringe Nachlässigkeit mit unterlaufen; insonderheit aber beklage ich daß diese Bücher noch biß künftigen Sommer werden ligen bleiben müssen. Inskünftige aber werde ich solche *Commission*en einem andern Buchhändler auftragen, von welchem ich versichert bin, daß er dabey alle mögliche Sorgfalt anwenden wird.

Ich bin weit davon entfernt, daß ich die wahre *summ* dieser *Seriei*

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\frac{1}{23}-\frac{1}{29}\ \textit{etc.}^{[2]}$$

sollte anzeigen können; ich habe diese *summ* nur *per approximationem* gesucht, von deren Beschaffenheit ich mich nicht mehr erinnern kan. Meine Absicht war dabey nur zu erforschen ob etwan diese Summ *simpel* seyn möchte: weil ich schon vorher gemerket hatte, daß dieselbe bey nahe $\frac{1}{3}$ ist.

Ewr. Hochwohlgeb. *Theorema*, *quod omnis numerus impar* $2n-1$ *sit aggregatum ex quadrato duplicato* $2aa$ *et numero primo* p, hat bey mir alle Aufmerksamkeit verdienet, und nach angestellter Probe habe ich dasselbe für alle *numeros* $2n-1$ unter 1000 würklich wahr befunden. Kraft desselben kan man allso behaupten, *quod dato numero* $2n-1$ *semper detur duplum quadratum* $2aa$, *ut* $2n-1-2aa$ *evadat numerus primus.*[3]

Um die *Demonstration* davon zu finden, fiel mir ein, ob man etwan nicht beweisen könnte, daß je grösser die Zahl $2n-1$, je mehr *numeri primi* aus der *Form* $2n-1-2aa$ erwachsen müssten. Dann da das *Theorema* wahr ist für die kleinen Zahlen, so würde man um so viel sicherer auf die grossen Zahlen schliessen können. Ich habe demnach *pro quovis numero non primo* $2n-1$ bemerket, wie viel *numeri primi* daraus entstehen, allein ich habe befunden, daß wann auch $2n-1$ eine sehr grosse Zahl, doch bißweilen nur ein einziger *numerus primus* entspringt. Allso wann $2n-1=785$, so wird $785-2aa$ *unico casu numerus primus* nehmlich *quo* $a=18$. Eben dieses geschieht auch wann $2n-1=1703=13\cdot 131$; und der *casus* ist $1703-2\cdot 21^2=821$; wann allso 821 kein *numerus primus* wäre, so fände hier das *Theorema* nicht statt. Ich habe auch noch viel andere und grössere Zahlen untersucht, von welchen ich vorhersahe, daß die daher entstehenden *numeri primi* sparsam seyn müssen; doch habe ich aber keine Ausnahme finden können. Ich glaube allso dieses *Theorema*, ungeacht ich nicht darauf schwören wollte.

Es fiel mir dabey ein ziemlich ähnliches *Theorema* ein: nehmlich daß *a numero impari non primo* $2n-1$ allzeit eine *potestas binarii* abgezogen werden könne, daß der *Rest* ein *numerus primus* sey. Nach angestellter Probe hat sich dieses auch biß auf sehr grosse Zahlen wahr befunden; als ich aber auf $959 = 7 \cdot 137$ kam, so fand sich eine ausnahm, indem $959 - 2^\alpha$ *nullo modo primus* werden kan.[4]

Ich bin letstens auf folgende *Theoremata negativa* gefallen:

I. *Si* n *non est numerus formae* $\square + 2\triangle$ *tum* $4n+1$ *certe non est primus.*

II. *Si* n *non est numerus formae* $\square + \triangle$ *tum* $8n+1$ *certe non est primus.*

III. *Si* n *non est numerus formae* $2\triangle + \triangle$ *tum* $8n+3$ *certe non est primus.*

Der Grund der zwey letsteren beruht darauf, daß wann $8n+1$ oder $8n+3$ *primus* ist, so sey derselbe auch *in hac forma* $2\square + \square$ enthalten: als $3 = 2 \cdot 1 + 1$; $11 = 2 \cdot 1 + 9$; $17 = 2 \cdot 4 + 9$; $19 = 2 \cdot 9 + 1$; dieses aber kan ich nicht beweisen[5] ungeacht ich es für eben so gewiß halte, als daß $4n+1 = \square + \square$, *siquidem* $4n+1$ *sit primus*, welches ich bewiesen habe.[6]

Ewr. Hochwohlgeb. bin für die mir gütigst ertheilten Nachrichten über den *Leunenschloss* gehorsamst verbunden; ich habe mich geirrt, wann ich geglaubt das Buch selbst bey Ewr. Hochwohlgeb. gesehen zu haben; es werden nur einige *Excerpta* gewesen seyn, so Dieselben mir zu *communici*ren die Güte gehabt; hier habe ich dieses Buch nicht finden können. Des *Bungi* Buch erinnere ich mich auch nicht gelesen zu haben; ich werde es aber auf der hiesigen *Bibliothec* aufsuchen.[7] Den II$^{\text{ten}}$ *Tomum Nov*[*orum*] *Comment*[*ariorum*] habe ich noch nicht bekommen, um darinn nachsehen zu können, was der sel[ige] H. *Winsheim* von den *Numeris perfectis* geschrieben.[8] Ich glaube daß man keine andere *numeros perfectos* für gewiß angeben könne als folgende:

I. $2^0\,(2-1) = 1$; II. $2^1\left(2^2-1\right) = 6$; III. $2^2\left(2^3-1\right) = 28$; IV. $2^4\left(2^5-1\right)$; V. $2^6\left(2^7-1\right)$; VI. $2^{12}\left(2^{13}-1\right)$; VII. $2^{16}\left(2^{17}-1\right)$; und VIII. $2^{18}\left(2^{19}-1\right)$;

weil man von den folgenden *formuln* 2^p-1 (*existente* p *primo*) nicht gewiß seyn kan, ob dieselben *primi* sind oder nicht? Der folgende wäre $2^{30}\left(2^{31}-1\right)$ wann nur $2^{31}-1$ ein *numerus primus* wäre; welches aber weder behauptet noch untersuchet werden kan. So viel ist gewiß daß diese Zahl $2^{31}-1$ keine andere *Divisores* haben kan, als welche in dieser *Formul* $62n+1$ enthalten sind, woraus ich soviel gefunden, daß kein *Divisor* unter 2000 statt findet.[9]

Aus Anlaß der *Aequationum Moivreanarum* habe ich noch viel ähnliche *formulas* gefunden, deren *radix* angegeben werden kan, ungeacht die *aequation* keine *divisores rationales* hat:[10]

Als von dieser *aequation*

$$x^5 = 5\alpha xx + 5\beta x + \frac{\beta\beta}{\alpha} + \frac{\alpha^3}{\beta}$$

ist *radix*

$$x = \sqrt[5]{\frac{\beta\beta}{\alpha}} + \sqrt[5]{\frac{\alpha^3}{\beta}}.$$

Allso von dieser

$$x^5 = 10xx + 10x + 6$$

ist *radix*

$$x = \sqrt[5]{2} + \sqrt[5]{4};$$

ferner von dieser *aequatione* 6^{ti} *gradus*

$$x^6 = 6x^4 + 28x^3 + 18xx - 12x + 2$$

ist

$$x = \sqrt[6]{2} + \sqrt[3]{2} + \sqrt{2}.$$

Diese *Casus* scheinen um so viel mehr merkwürdig zu seyn, weil diese *aequation*en nicht *in factores* (*rationales*) zergliedert werden können.

Hernach habe ich auch wahrgenommen, wann eine solche *Formul* vorgegeben wird

$$x = A\sqrt[5]{s} + B\sqrt[5]{s^2} + C\sqrt[5]{s^3} + D\sqrt[5]{s^4},$$

welche von den *signis radicalibus* befreyt werden soll, solches geschehen könne, ohne daß man nöthig hat, über die 5^{te} *potestät* des x herauf zu steigen. Dieses scheinet deswegen *paradox* zu seyn, da 4 *signa radicalia* und das *surdesolida* vorhanden, welche durch eine einige *Elevation ad* 5^{tam} *dignitatem* nicht gehoben werden können. Doch kommt nun diese *aequatio rationalis* 5^{ti} *gradus* heraus

$$x^5 \quad = \quad 5s\,(AD + BC)\,x^3 \quad \begin{matrix} +5As\,(AC + BB) \\ +5Dss\,(CC + BD) \end{matrix}\; xx \quad \begin{matrix} +5A^3Bs \\ +5ss\left(AC^3 + B^3D\right) \\ -5ss\left(A^2D^2 + B^2C^2\right) \\ +5ABCDss \\ +5CD^3s^3 \end{matrix}\; x$$

$$\begin{matrix} +A^5s + B^5s^2 + C^5s^3 + D^5s^4 \\ -5ACss\left(A^2D + B^3\right) \\ +5ABss\left(ABD + AC^2\right) \\ -5BDs^3\left(C^3 + AD^2\right) \\ +5CD^2s^3\left(B^2 + AC\right) \end{matrix} \qquad .$$

Allso ist auch hinwiederum die *Radix* aus dieser *aequation*

$$x = A\sqrt[5]{s} + B\sqrt[5]{s^2} + C\sqrt[5]{s^3} + D\sqrt[5]{s^4};$$

und da die obige *aequation general* ist, so glaube ich daß in dieser *Form* alle *radices aequationum* 5^{ti} *gradus* enthalten sind: und in einem jeglich vorgelegten Fall kommt es nur auf die Bestimmung der Buchstaben A, B, C, D und s an, und zu letst wird s nur *per aequationem* 4^{ti} *ordinis* bestimmt werden; wie ich vermuthe. Daraus schliesse ich ferner daß *proposita aequatione quacunque*:

$$x^n - \alpha x^{n-1} + \beta x^{n-2} - \gamma x^{n-3} + \delta x^{n-4} - \varepsilon x^{n-5}\ etc. = 0$$

die *radix* allzeit diese *form* haben werde:

$$x = \frac{1}{n}\alpha + A\sqrt[n]{s} + B\sqrt[n]{s^2} + C\sqrt[n]{s^3} + D\sqrt[n]{s^4} + etc.,$$

und es ist so viel gewiß, daß wann $n = 2$, oder 3 oder 4, die Bestimmung des Buchstabens s von einer *aequatione* 1 oder 2 oder 3 *ordinis dependi*re, woraus zu schliessen, daß *in genere* s durch eine *aequationem* $n-1$ *ordinis* bestimmt werde.

In meinen *Papier*en habe ich noch ein ander *Theorema* so Ewr. Hochwohlgb. mir vormals *communicir*t gefunden. Nehmlich daß ein jeder *numerus impariter par* $4a+2$ allzeit gleich sey einer *summ* von 2 *numeris primis formae* $4n+1$, als $6 = 1+5$; $10 = 5+5$; $14 = 1+13$; $18 = 1+17 = 5+13$; $22 = 5+17$; $26 = 13+13$; $30 = 1+29 = 13+17$; $34 = 5+29 = 17+17$; wobey ich bemerke daß nicht nur bey kleinen Zahlen keine Ausnahm vorkommt, sondern bey grössern um so viel weniger eine zu vermuthen;[11] dann die Zahlen bey welchen eine solche Zergliedrung nur einmal angeht sind: 2, 6, 10, 14, 22, 26, 38, 50, 62, 86 und von hier biß 150 gibt es keine mehr, auch nicht biß 230, daher auch unter den folgenden um so viel weniger zu vermuthen indem die Anzahl der *Resolution*en immer zunimmt, als 210 lässt sich auf 9 Arten *resolvi*ren.

Hiemit habe die Ehre mit der schuldigsten Hochachtung zu verharren

Ewr. Hochwohlgeb.

gehorsamster Diener

L. Euler

Berlin den 16 *Dec.* 1752.

R 879 Reply to nº 164
Berlin, December 16th, 1752
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. V, fol. 106–107v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 595–600; *Euler-Goldbach* (1965), p. 362–364

166
Goldbach to Euler
Moscow, March (1st) 12th, [1753][1]

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*,

Daß sich das *theorema omnem numerum imparem resolvi posse in duplum quadrati et numerum primum* biß auf die Zahl 1000 wahr befunden auch in grösseren Zahlen sich annoch keine ausnahme geäussert ist mir sehr lieb, jedoch muß es bißhero für eine blosse *conjecture passi*ren, und hat man ursach zu zweiffeln ob die *demonstration* davon, wann sie ja *possibilis* wäre, jemals gefunden werden wird.[2]

Weil Ew. Hochedelg. melden daß Sie ob *a numero impari <u>non primo</u>* allezeit eine *potestas binarii* abgezogen werden könne so daß ein *numerus primus* überbleibe, hatten versuchen wollen so schlüsse ich aus der *restriction <u>non primo</u>* daß Sie es von den *numeris primis* falsch befunden und möchte wohl wissen bey welchem *numero primo* solches zu ersehen, denn ich habe schon vor einigen Jahren dergleichen Einfall von den *numeris primis* gehabt, selbigen aber nicht weiter als biß 89 *continui*ret.[3]

Daß alle *numeri primi huius formae* $8n+1$ gleich seyn sollen $2\square+\square$ hatte ich vorher nicht beobachtet,[4] bey näherer Betrachtung aber habe gefunden *si* $4n+1$ *est numerus primus, esse eum* $= d\square+\square$ *denotante d quemcunque divisorem numeri n*, wodurch hoffentlich die *pomoeria* der *theorematum de numeris primis in numeros quadratos resolvendis* in etwas werden erweitert werden.[5]

Daß Eure Hochedelg. so wohl des *Bungi Tractat* als des *Leuneschlos paradoxa* sich schon *A*[*nno*] 1741 in *Berlin* aus der *Bibliotheque* geben lassen und gelesen haben ist gantz gewiß indem Sie mir solches selbst den 9. *Sept. eius anni* umständlich gemeldet.[6]

Dero *meditationes* um die *radicem quintae potestatis* zu finden scheinen mir so gründlich und zulänglich, daß wann selbige auf diese weise nicht zu erhalten ist, ich sehr zweiffele ob jemand in dieser *decouverte réussi*ren wird. Es kommt alles, wie Ew. HochEdelg. bemercken, darauf an ob sich die *quantitas s per aequationem quartae potestatis determini*ren lässet, zu welcher untersuchung aber meines erachtens eine *ferrea patientia* erfordert wird.[7]

Ich erinnere mich zwar wohl daß man noch keinen *numerum parem* angegeben welcher nicht eine *Summa duorum primorum* wäre, daß aber ein jeder *numerus pariter impar* ein *aggregatum duorum primorum huius formae* $4n+1$ ist, war mir entfallen,[8] und daß zwischen 86 und 230 keine *casus unici* vorkommen halte ich allerdings für merckwürdig, da biß 86 sich deren schon 10 befinden. Hingegen kommen in dem *theoremate* $2n-1 = 2a^2+p$ viele *casus unici* vor wovon einige *numeri primi* selbst nicht ausgeschlossen sind, also ist 17 *unico modo* $= 2a^2+p$ wann $a=0$, imgleichen 127 wann $a=0$, und es scheinet fast als wann der *numerus* p so zu einem *casu unico* gehöret in keinem andern *casu unico* wieder vorkommt, *ex*[*empli*] *gratia* $57 = 2\cdot 5^2+7$ ist ein *casus unicus* weil in der *formula* $2a^2+p$ vor p keine andere Zahl als 7 angenommen werden kan, ob es aber ausser diesem noch andere *casus unicos* giebt wo $2n-1 = 2a^2+7$, lasse ich dahin gestellet seyn und möchte auch wohl keine weitere untersuchung verdienen.[9]

Ich habe in meinen *annotatis* gefunden daß ich schon vor etwa 30 Jahren *observi*ret wie

$$An^2 - Bn^4 + Cn^6 - Dn^8 + \&c. = n^{\sqrt{2}}$$

seyn könne allwo A, B, C, *&c. per series numerorum rationalium, quarum singularum summa plus quam finita est, exprimi*ret werden; ich bin aber ungewiß ob ich solches nicht etwa schon zu anderer Zeit Eurer Hochedelg. gemeldet, oder ob es nicht gar in den *Commentar*[*iis*] gedruckt worden.[10]

Weil ich vermuthe daß nunmehro der H. *Spener* die in Lübeck zurückgebliebenen Bücher mit den ersteren Schiffen anhero zu befordern suchen wird, so habe auf dem inliegenden Zettel denen vorigen noch einige andere beyzufügen verlangt.[11]

Ich habe zwar zum öfftern das vergnügen gehabt aus den frantzösischen Zeitungen zu ersehen daß Ew. Hochedelg. den Preiß von der Parisischen *Ac*[*ademie*] *des Sc*[*iences*] erhalten, da ich aber nicht eigentlich weiß wie viel mal solches geschehen, so möchte gern davon benachrichtiget seyn,[12] und verbleibe mit besonderer Hochachtung

Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

Moscau den 12. *Mart.* 1752.[13]

R 880 Reply to n° 165
Moscow, March (1st) 12th, [1753]
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 151–152v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 601–603; *Euler-Goldbach* (1965), p. 365–366

167
Euler to Goldbach
Berlin, April 3rd, 1753

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Nächst gehorsamster *Gratulation* zu Ewr. Hochwohlgeb. glücklichen Ankunft in Moskau, habe die Ehre zu berichten, daß H. Spener fest versprochen die zurükgebliebenen Bücher mit den ersten Schiffen fortzuschaffen, und die letst verlangten noch beyzufügen.[1] Nur wird nöthig seyn, dieselben an jemand in *Petersburg* zu *addressi*ren, und da Ewr. Hochwohlgeb. deswegen keine *Ordres* gestellt, so werde ich dem H. Spener sagen, daß er sie an den H. Köppen *addressi*ren soll.

Bey dem Einfall, ob etwan *ab omni numero impari* eine *potestas binarii* abgezogen werden könne, so daß ein *numerus primus* überbleibe, habe ich die *condition a numero impari non primo* beygefügt, weil ich gleich befunden, daß solches bey dem *numero primo* 127 nicht angeht. Da nun solches auch bey dem *numero non primo* 959 nicht eintrifft, so fällt das gantze vermuthete *Theorema* weg.[2]

Wann Ewr. Hochwohlgeb. bey näherer Betrachtung befunden, daß wann $4n+1$ ein *numerus primus*, und $\underline{d}$ ein *divisor quicunque ipsius* $\underline{n}$, auch allzeit sey $4n+1 = daa + bb$, so bin ich sehr begierig zu vernehmen, ob Ewr. Hochwohlgeb. diesen Satz *demonstrir*en können, indem dadurch die *pomoeria* der *Theorematum de numeris primis in quadratos resolvendis* allerdings ungemein würden erweitert werden.[3] Ich habe auch eben diesen Satz schon längst bemerket, und bin von der Wahrheit desselben so überzeuget, als wann ich davon eine *Demonstration* hätte. Allso gleichwie $4 \cdot 1m + 1$ allzeit ist $= aa + bb$, welches ich *demonstri*ren kan, so ist eben so gewiß $4 \cdot 2m + 1 = 2aa + bb$; $4 \cdot 3m + 1 = 3aa + bb$; $4 \cdot 5m + 1 = 5aa + bb$, *etc.*, wovon mir aber die *Demonstration* noch fehlet. Doch ist hiebey ein besonderer Umstand wohl zu bemerken, daß biß weilen diese *Resolution* nicht *in integris* geschehen kan. Als wann gleich $4dm+1$ ein *numerus primus* ist, so gibt es Fälle, wo diese Zahl $4dm+1$ unmöglich *in integris* in die Form $daa+bb$ verwandelt werden kan; dem ungeacht aber bleibt das *Theorema* nicht weniger wahr, weil die *Resolution* allzeit *in fractis* statt findet; welches um so viel mehr merkwürdig ist, da keine Zahl *in fractis* auf diese *Form*en $aa+bb$, $2aa+bb$, $3aa+bb$ und einige andere gebracht werden kan, wann dieselbe nicht *in integris* darinn enthalten. Dergleichen Fälle sind:

I. $4\cdot 22+1=89$ *primus*, folglich sollte 89 in dieser *Form* $11aa+bb$ enthalten seyn, welches aber *in integris* nicht angeht; doch ist *in fractis*: $89=11\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{9}{2}\right)^2$ oder auch $89=11\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{25}{3}\right)^2$.

II. $4\cdot 28+1=113$ *primus*: folglich sollte 113 in dieser *Form* $14aa+bb$ enthalten seyn, so *in integris* nicht möglich ist: *in fractis* aber ist $113=14\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{31}{3}\right)^2$.

III. $4\cdot 34+1=137$ *primus*: und doch nicht *in integris* $137=17aa+bb$; *in fractis* aber ist $137=17\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{31}{3}\right)^2$.

IV. $4\cdot 57+1=229$ *primus*: und doch nicht *in integris* $229=19aa+bb$; *in fractis* aber ist $229=19\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{21}{2}\right)^2$.

Bißher waren die Nenner nur 2 oder 3; es gibt aber auch Fälle, wo auch solche Brüche nicht statt finden, sondern noch grössere Nenner zu Hülfe genommen werden müssen: Als $4\cdot 3\cdot 61+1=733$ *primus*: und ist doch nicht $733=61aa+bb$ *in integris*; doch ist *in fractionibus minimis* $733=61\left(\frac{6}{5}\right)^2+\left(\frac{127}{5}\right)^2$.

Demnach muß dieses *Theorema* allso ausgedrukt werden:

Si $4n+1$ *sit numerus primus, et d divisor ipsius* n, *tum iste numerus* $4n+1$ *certo in hac forma* $daa+bb$ *continetur, si non in integris, saltem in fractis*; und dieser Umstand wird auch ins besondere bey der *Demonstration* müssen in Betrachtung gezogen werden.

Da die Fälle wo $2n-1=2a^2+p$ *unico modo* so sparsam vorkommen, so würde es freylich eine mühsehlige Arbeit seyn zu untersuchen, ob noch in einem andern *unico modo* $p=7$ seyn könnte, ausser $57=2\cdot 5^2+7$: zum wenigsten habe ich biß 2500 keinen solchen gefunden.[4] Wann dieses behauptet werden könnte so folgte daraus dieses *Theorema*:

Si $2aa+p$ *unico modo est aggregatum ex duplo quadrato et numero primo, tum* $2bb+p$ *certo plus uno modo erit ejusmodi aggregatum, dum non sit* $b=a$.

Ich konnte mich gar wohl erinnern daß Ewr. Hochwohlgeb. mir schon längst die *Resolution* von $n^{\sqrt{2}}$ *communicir*t; und weiß auch daß sich solches unter meinen Papieren finden muß,[5] allein es fället mir sehr schwehr etwas daraus hervorzufinden, und ich konnte fast nicht mehr auf den Grund dieser *Resolution* kommen, biß mir ungefehr die *Materi*e von der *Interpolation* wieder einfiel. Da nun *proposita serie*: $\overset{0}{a}$, $\overset{1}{b}$, $\overset{2}{c}$, $\overset{3}{d}$, $\overset{4}{e}$, *etc.* der *terminus indici x respondens* ist

$$\begin{aligned}(1-1)^x a \quad &+ \quad (1-1)^{x-1}xb+(1-1)^{x-2}\,\frac{x\,(x-1)}{1\cdot 2}\,c \\ &+ \quad (1-1)^{x-3}\,\frac{x\,(x-1)\,(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\,d+etc.\end{aligned}$$

so ist der *terminus indici* $\frac{1}{2}$ *respondens*

$$= a\sqrt{(1-1)} + \frac{b}{2\sqrt{(1-1)}} - \frac{1\cdot 1\cdot c}{2\cdot 4\,(1-1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1\cdot 1\cdot 3d}{2\cdot 4\cdot 6\,(1-1)^{\frac{5}{2}}} - etc.;$$

setzt man nun n^1, n^2, n^4, n^8, n^{16} *etc.* für a, b, c, d, e *etc.* so ist $n^{\sqrt{2}}$ der *terminus indici* $\frac{1}{2}$ *respondens*, folglich

$$n^{\sqrt{2}} = n\,(1-1)^{\frac{1}{2}} + \frac{1\,n^2}{2\,(1-1)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1\cdot 1\,n^4}{2\cdot 4\,(1-1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1\cdot 1\cdot 3n^8}{2\cdot 4\cdot 6\,(1-1)^{\frac{5}{2}}} - etc.;$$

setzt man nun *ob primum terminum* $n\,(1-1)^{\frac{1}{2}} = 0$:

$$n^{\sqrt{2}} = An^2 - Bn^4 + Cn^8 - Dn^{16} + etc.$$

so wird

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\,(1-1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} + etc.\right)\\
B &= \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\,(1-1)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\left(1 + \frac{3}{2} + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4} + \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6} + \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} + etc.\right)\\
C &= \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\,(1-1)^{-\frac{5}{2}} = \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\left(1 + \frac{5}{2} + \frac{5\cdot 7}{2\cdot 4} + \frac{5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6} + \frac{5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} + etc.\right)\\
&\ etc.
\end{aligned}$$

welches ohne Zweifel Ew. Hochwohlgeb. *series numerorum rationalium* sind, *quarum singularum summa plus quam finita est.*

Von dieser *serie* $An^2 - Bn^4 + Cn^8 - Dn^{16} +$ *etc.* $= n^{\sqrt{2}}$ verdienet angemerkt zu werden daß:

$$\begin{aligned}
An^2\left(2-\sqrt{2}\right) &- Bn^4\left(4-\sqrt{2}\right) + Cn^8\left(8-\sqrt{2}\right)\\
&- Dn^{16}\left(16-\sqrt{2}\right) + En^{32}\left(32-\sqrt{2}\right) - etc. = 0,
\end{aligned}$$

was auch immer n für eine Zahl seyn mag.

Bei den obigen Betrachtungen ist mir auch folgendes *problema* beygefallen:

Invenire summam duorum quadratorum $xx + yy$, *quae simul in hac forma contineatur* $2aa + bb$.

Solutio: *Sumantur* $x = pp - qq$ *et* $y = rr \pm 2pq$ *eritque*

$$\begin{aligned}
xx + yy &= (pp-qq)^2 + (rr \pm 2pq)^2 = (pp+qq)^2 \pm 4pqrr + r^4\\
&= (pp+qq-rr)^2 + 2\,(p \pm q)^2\,rr.
\end{aligned}$$

Q. E. I.[6]

Ewr. Hochwohlgeb. haben die Güte Sich zu erkundigen, wie viel mal ich schon bey der *Academie* zu *Paris* den Preiß erhalten?[7] Weil ich solches nicht aufgeschrieben, und auch von meinen *Piec*en keine *Copi*en behalten so kan ich weder die Jahre noch den Theil des Preises so ich jedes mal bekommen, genau melden. Ich habe aber bey folgenden Fragen den Preiß davon getragen: I. *Sur la nature du feu*. II. *Sur le Cabestan*. III. *Sur le flux et reflux de la mer*. IV. *Sur la Theorie de l'aimant*. V. *Sur l'observation de l'heure du jour sur mer*. VI. *Sur les inegalités de Saturne*. VII. *Sur la meme question*.[8]

Ich fand letstens, weiß aber nicht mehr wo, dieses *Problema*: *Invenire numerum, qui sit vel duplici, vel triplici, vel quadruplici modo numerus polygonalis*?[9] Wollte man das *Problema* so nehmen: *invenire numerum, qui simul sit trigonalis et tetragonalis*, oder *qui simul sit trigonalis et pentagonalis etc.*, so ließ sich dasselbe wohl *solvi*ren; kämen aber drey Bedingungen, als *invenire numerum qui simul sit trigonalis, tetragonalis, et pentagonalis*? so wäre das *problema* vielleicht unmöglich. Bestimmt man aber den *numerum laterum* nicht, so ist es möglich, so viel mal die Zahl auch ein *numerus polygonalis* seyn soll, und die *solution* ist artig. Es sey z die gesuchte Zahl; x die *Radix* und n die Anzahl der Seiten der *Polygonal*-Zahl: so wird

$$z = \frac{(n-2)\ xx - (n-4)\ x}{2};$$

hieraus wird

$$n = \frac{2z + 2xx - 4x}{xx - x} = 2 + \frac{2z - 2x}{xx - x} = 2 - \frac{2z}{x} + \frac{2\,(z-1)}{x-1}.$$

Allso muß sich $2z$ durch x und $2z-2$ durch $x-1$ theilen lassen; das ist: *quaeruntur duo numeri binario differentes, qui habeant divisores unitate differentes* (*major majorem, minor minorem*), und wann dieses auf vielerley art geschehen kan, so ist z auf eben sovielerley Art ein *numerus polygonalis*. Zum *exempel*:

$$\textit{Numeri binario diff[erentes]}:\quad \left.\begin{matrix}450\\448\end{matrix}\right\}\quad \begin{matrix} & \textit{divisores unitate differentes} & & \\ 3, & 5, & 9, & 15\\ 2, & 4, & 8, & 14\end{matrix}$$

(die *divis*[*ores*] $\begin{matrix}225\\224\end{matrix}$ lasse ich weg weil daraus *numeri digonales* entstünden.)

Allso sey $2z = 450$ oder $z = 225$, so ist folgender Gestalt

$$\text{I.}\quad n = 2 - \frac{450}{3} + \frac{448}{2} = 76; \qquad \text{II.}\quad n = 2 - \frac{450}{5} + \frac{448}{4} = 24;$$
$$\text{III.}\quad n = 2 - \frac{450}{9} + \frac{448}{8} = 8; \qquad \text{IV.}\quad n = 2 - \frac{450}{15} + \frac{448}{14} = 4;$$

dahero ist 225 I. *tetragonalis*; II. *octogonalis*; III. 24*gonalis*; *et* IV. 76*gonalis*.

Dergleichen Zahlen nun zu suchen, ist gewiß ein *Problema*, wo es insonderheit auf die *Natur* der Zahlen ankomt, und welches zu schönen *Speculation*en Anlaß geben kan.[10]

Alle die meinigen lassen sich Ewr. Hochwohlgeb. gehorsamst empfehlen; und ich habe die Ehre mit der schuldigsten Hochachtung zu verharren

Ewr. Hochwohlgebohrnen

gehorsamster Diener

L. Euler

Berlin den 3^{ten} *April.* 1753.

Heut speisete ich bey des H. Staats *Ministri* von *Arnim Excell*[*enz*] wo ich den H. Geh[eimen] Rath von *Froben* antraff, welcher sich sehr genau nach Ewr. Hochwohlgeb. erkundigte, und sagte daß er vormals mit Denselben eine sehr genaue Freundschaft unterhalten: Er hat mir nun gar nachdrüklich aufgetragen Ewr. Hochwohlgeb. sein gantz ergebenstes *Compliment* abzustatten.[11]

R 881 Reply to n° 166
Berlin, April 3rd, 1753
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. V, fol. 110–111v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 604–609; *Euler-Goldbach* (1965), p. 367–370

168
Goldbach to Euler
Moscow, June (17th) 28th, 1753

Hochedelgebohrner Herr

Hochgeehrter Herr *Professor*

Den Hn Geheimen Rath von *Froben* habe ich das Glück schon seit 35 Jahren her zu kennen und freue mich sehr daß sich derselbe meiner annoch erinnert, ich habe dessen fürtreffliche *qualit*äten jederzeit *admiri*ret, wie denn auch die viele höflichkeiten so er mir theils in Königsberg, theils in Berlin erwiesen, bey mir annoch in frischem andencken sind.[1]

Eine *rigorosam demonstrationem* daß $1 + 4ef = P^2 + 4Q^2$ habe ich zwar nicht gefunden, jedoch bin ich auf einige *observationes affines* gerathen worinnen Ew. Hochedelg. vieleicht finden werden *qu'il y a des vûes*.[2] Ich verstehe also in folgendem durch p allezeit den *numerum primum* $1 + 4ef$ und $e > f$, imgleichen setze ich $a^2 + b^2 = p$. In einem gegebenen *casu particulari* wollte ich mich dieser *methode* bedienen: Zuvorderst suche ich *numerum Q huius naturae ut* $1 + 4ef + 4fQ^2 = \square$ welches *per substitutiones successivas* $Q = 1$, $Q = 2$, *&c.* leicht zu seyn scheinet, indem viele *numeri ad hunc scopum non idonei* gleichsam bey dem ersten Anblick *removi*ret werden können, *ex*[*empli*] *grat*[*ia*] es wäre der gegebene *numerus primus* 89 und $f = 2$, so siehet man alsofort, daß vor Q kein *numerus desinens in* 1 angenommen werden kan weil sich das gesuchte *quadratum* auf 7 endigen würde *quod est absurdum*; so bald nun ein solcher *numerus congruus pro* Q gefunden ist setze ich die *radicem quadrati inventi* oder $\sqrt{1+4ef+4fQ^2} = 4fv+1$, wo v entweder *affirmativa* oder *negativa* zu nehmen ist *ut solutioni satisfiat*, und alsdann findet sich $1+4ef = \dfrac{(e-v)^2+eQ^2}{v^2}$;[3] solchergestalt wird in denen von Eurer HochEdelgeb. angeführten Zahlen *in casu numeri* 89, $Q=2$; *numeri* 113, $Q=1$; *num.* 137, $Q=2$; *num.* 229, $Q=5$; *num.* 733, $Q=3$. Hieraus[4] folget auch die doppelte *aequation*

$$p = \frac{P^2+eQ^2}{v^2} = \frac{(4fv+(P+v):e)^2-4fQ^2}{(P+v)^2:e^2}.$$

Ich bemercke ferner (1.) daß weil die *numeri* a, b, e, f *cogniti* sind, es schon gnug ist wann nur $p = \dfrac{R^2 \pm 2abe}{h^2}$ statt finden kan, so daß R und h *rationales* seyen es mag $2ab$ ein *numerus quadratus* seyn oder nicht, denn es wird

$$Q = \frac{-\,(a+b)\pm R}{e+h^2} = \frac{P-\,(a+b)}{h}$$

und

$$p = \left(a^2+b^2\right) = P^2+eQ^2.$$

(2.) habe ich beobachtet daß wann $1+4ef+4fQ^2=\square$, der *numerus* Q entweder eines von beyden *quadratis* a^2 oder b^2 oder doch einer von derer selben *factoribus* ist; als in 89, wo $a=8$, $b=5$,[5] wird $Q=5$; *in casu numeri* $137 = 4^2+11^2$ wird $Q=2$, wiewohl ich von der allgemeinen gewißheit dieser *observation* noch nicht *convinci*ret bin. Dahingegen kan ich (3.) *in summo rigore demonstri*ren, daß wenn α ein *numerus huius formae* ist $\beta^2+e\gamma^2$, alsdenn auch

$$\alpha\,\left(e+x^2\right)\left(e+y^2\right)\left(e+z^2\right)\ \&c. = P^2+eQ^2.\text{[6]}$$

(4.) *dependi*ret die *natura numerorum* P *et* v in dieser *aequatione* $1+4ef = \dfrac{P^2+eQ^2}{v^2}$ allerdings von dem *numero* e, denn es müssen P^2 *et* v^2 beyde so beschaffen seyn daß sie *divisa per e idem residuum* hinterlassen,[7] als zum Ex[empel] in dem *casu* $89 = \dfrac{9^2+11\cdot 5^2}{2^2}$, allwo $e=11$, $P^2=81$, $v^2=4$, folglich das *residuum commune post divisionem per* 11 *est* $=4$; hingegen müssen die *residua quadratorum* P^2 *et* Q^2 *post divisionem per* v^2 so beschaffen seyn, daß wann das *residuum respectu* P^2 *aequale* α wird, das *residuum respectu* Q^2 *aequale* $\dfrac{uv^2-\alpha}{e}$ werde so daß u ein *numerus integer* sey; also wird *in eodem exemplo* $\alpha=1$, $\dfrac{uv^2-\alpha}{e} = \dfrac{4u-1}{11} = 1$ (weil 25 *per* 4 *divisum* 1 zum *residuo* lässet) *et* $u =$ *numero integro* 3.

(5.) will ich Eurer HochEdelg. für die mir *communicir*te *solution* des *problematis*: *invenire duo quadrata quorum summa sit* $P^2 + 2Q^2$; *qualiscunque hostimenti loco* die *solution* des nachfolgenden *problematis offer*iren:[8] *invenire duo quadrata quorum Summa sit* $P^2 + eQ^2$, *dato pro e numero quocunque. Sint n et e numeri quicunque, erunt*

$$\left(\frac{4n^2+e}{4n}\right)^2 + \frac{4e^2}{(e-1)^2} = \left(\frac{4n^2-e}{4n}\right)^2 + \frac{e\,(e+1)^2}{(e-1)^2}$$

vel

$$\left(\frac{4n^2+e}{4n}\right)^2 + \frac{4e^2m^2}{(e-m^2)^2} = \left(\frac{4n^2-e}{4n}\right)^2 + e\left(\frac{e+m^2}{e-m^2}\right)^2,$$

positis pro e, m, n numeris quibusvis.[9]

Meine *expression* für $n^{\sqrt{2}}$ bestehet in folgendem:[10] *sit* $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}$, $d = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}$, $e = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}$ *&c., dico*

$$\begin{aligned} n^{\sqrt{2}} = \;& (a+b+c+d+\&c.)\, n^2 \\ & -(b+2c+3d+4e+\&c.)\, n^4 \\ & +(c+3d+6e+10f+\&c.)\, n^8 \\ & -(d+4e+10f+20g+\&c.)\, n^{16} \\ & +(e+5f+15g+35h+\&c.)\, n^{32} \\ & -\&c.^{[11]} \end{aligned}$$

und *differi*ret nicht von dieser

$$n^{\sqrt{2}} = n^2 - \frac{1}{2}\left(n^4 - n^2\right) + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(n^8 - 2n^4 + n^2\right) - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\left(n^{16} - 3n^8 + 3n^4 - n^2\right) + \&c.,$$

welche den *terminum respondentem exponenti* $\frac{1}{2}$ *in serie*

$$n^{2^1} + n^{2^2} + n^{2^3} + n^{2^4} + \&c.$$

*exprimi*ret.

Ich verharre nechst hertzlichem anwunsch alles vergnügens und schuldigster Empfehlung an Dero sämmtliche *Familie*

Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

Moscau den 28. *Jun. st. n.* 1753.

vid[*e*] *P. S.*[12]

R 882 Reply to n° 167
Moscow, June (17th) 28th, 1753
Original, 2 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 160–161v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 610–613; *Euler-Goldbach* (1965), p. 370–372

169
Euler to Goldbach
Berlin, August 4th, 1753

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats*-Rath

Die verlangten *Exemplaria* von der *Lettre d'un Officier de la Flotte Russienne* sind schon vor einigen Posttagen von hier weggeschickt worden, und werden allso verhoffentlich schon bey Ewr. Hochwohlgeb. eingelaufen seyn. Gedachte Schrifft ist mir auf *Ordre* des H. *Hettmann*s Hochgräfl[ichen] *Excellenz* zugeschickt worden um solche hier drucken zu lassen, wovon ich auch die teutsche Übersetzung besorget.[1] Inzwischen können Ewr. Hochwohlgeb. versichert seyn, daß ich hievon mit keinem Wort nach *S.^{t} Petersburg* Meldung thun werde, als wohin ich mit Niemand mehr *correspondi*re als an den H. Rath Schumacher, an welchen auch niemals einige Neuigkeit überschreibe. Seit der Abwesenheit unsers H. *Praesident*en sind auch meine Geschäffte so angewachsen, daß ich wenig Briefe mehr beantworte, weil ich nicht nur die gantze *Administration* der *Academi*e auf dem Halse habe, sondern noch alle Posttage an den *Praesident*en *rapporti*ren und über alles noch unmittelbar an S[ein]^e Königl[iche] *Majestät* Bericht abstatten muß.[2]

Weil ich weiß, daß Ewr. Hochwohlgeb. auf grosser Herrn Briefe aufmerksam sind, so nehme die Freyheit ein Königl[iches] Hand Schreiben zu *communiciren*, welches ich erhalten, als ich im Früh Jahr einige Pfirsich aus dem *Academi*schen Garten an S[ein]^e Königl[iche] *Majestät* überschickt hatte:[3]

> *J'ai bien reçu Votre lettre du* 24 *de ce Mois avec les Présens, qui l'accompagnoient; quelque plaisir que la Beauté et la Bonté des fruits, que Vous M'avez envoyés, m'ait causé, J'en ai encore ressenti davantage de l'attention, que Vous avez bien voulu Me temoigner par là: Je vous en remercie et Je verrai avec satisfaction les occasions pour vous en marquer Ma reconnoissance, à Pottsdam le* 26 *may* 1753.

Ewr. Hochwohlgeb. Manier die *Formul* $1+4ef = P^2+4Q^2$ zu entwickeln, scheinet allerdings weit mehrers in ihrem Umfang einzuschliessen, woraus vielleicht gar eine bündige *Demonstration* herzuleiten wäre; ich getraue mir aber kaum bey meinen gegenwärtigen Zerstreuungen mich an diese Untersuchung zu wagen. Die Art um die Zahl $1+4ef$ auf diese *Form* $\dfrac{SS+eQQ}{vv}$ zu bringen, in welchen Fällen nehmlich diese Auflösung in gantzen Zahlen nicht geschehen kan, scheint mir auch alle Aufmerksamkeit zu verdienen. Ich habe gesuchet dieses etwas *general*er zu bewerkstelligen auf folgende Art:[4]

Es sey $1+4ef = \dfrac{SS+eQQ}{vv}$; weil nun daher

$$vv - SS = eQQ - 4efvv = e\,(QQ - 4fvv)$$

so sehe ich daß $vv - SS$ durch e theilbar seyn muß. Es sey daher $S = ne - v$, so wird

$$2nev - nnee = e\,(QQ - 4fvv)\,,$$

oder

$$QQ - 4fvv + enn - 2nv = 0$$

und mit $4f$ *multipl*[*icirt*]

$$16ffvv + 8nfv + nn = 4efnn + 4fQQ + nn$$

woraus man erhält:

$$n + 4fv = \surd\,((1 + 4ef)\,nn + 4fQQ)\,.$$

Die gantze Sach kommt allso darauf an, daß man in einem jeglichen Fall, da die Zahlen e und f gegeben sind, solche Zahlen für n und Q suche, daß $(1 + 4ef)\,nn + 4fQQ$ ein *Quadrat* werde.[5]

Will man sich mit *probi*ren behelfen, so wird es nicht schwehr fallen in jeglichem Fall, wofern nur die Zahlen e und f nicht gar zu groß sind, n und Q zu finden; allein wann e und f grosse Zahlen sind, so wird man mit dem *probi*ren schwehrlich zu Recht kommen; eine sichere Methode aber scheint mir kaum möglich zu seyn, weil es Fälle gibt da die Auflösung gar nicht einmal statt findet, nehmlich wann $1 + 4ef$ kein *numerus primus* ist: und ich sehe nicht ab wie diese Bedingung in die *Methode* gebracht werden könnte.

Daß dergleichen *Problemata* sehr schwehr werden können, ist aus diesem zu ermessen, wann eine gantze Zahl x gesucht wird, daß $nxx + 1$ ein *Quadrat* werde, wann nehmlich n ein *numerus integer positivus non quadratus* ist. Wann zum *Exemp*el $61xx + 1$ ein *Quadrat* werden soll, so ist die kleinste gantze Zahl für x, wodurch dieses erhalten wird, $x = 226\,153\,980$; wie sollte nun diese erstaunliche Zahl durch *probi*ren gefunden werden können.

Soll aber $109xx + 1$ ein *quadrat* werden, so ist die kleinste Zahl $x = 15\,140\,424\,455\,100$, und die Wurzel des daher entstehenden *Quadrat*s $\surd\,(109xx + 1) = 158\,070\,671\,986\,249$. Diese grossen Zahlen habe ich vermittelst einer gewissen *methode* neulich in etlichen *minut*en gefunden.[6]

Wie unendlich viel *summae duorum quadratorum* $aa + bb$ gefunden werden können, welche zugleich in dieser *Form* $vv + ezz$ enthalten sind, habe ich aus Anlaß der mir von Ewr. Hochwohlgeb. gütigst *communicir*ten gebrochenen *Formuln* noch diese in gantzen Zahlen gefunden: es ist nehmlich[7]

$$(eqq - yy + rr)^2 + 4rryy = (eqq - yy - rr)^2 + e \cdot 4qqrr.$$

Noch *general*er kan ich auch solche Zahlen geben, welche zugleich in dieser *Form* $aa + mbb$ und dieser $vv + nzz$ enthalten sind; nehmlich es ist:

$$(nyy - mxx + uu)^2 + m \cdot 4uuxx = (nyy - mxx - uu)^2 + n \cdot 4uuyy.$$

Bey der schönen *Serie* welche Ewr. Hochwohlgeb. für $n^{\surd 2}$ gefunden ist nur schad daß dieselbe immer *divergens* wird, so offt n ein *numerus* > 1 ist;[8] diesem kan aber leicht geholfen werden, wann man für n setzt $\dfrac{1}{m}$, da dann m eine *fractio unitate minor* wird, und $n^{\surd 2} = \dfrac{1}{m^{\surd 2}}$; doch aber sind die *summae serierum* $a + b + c + d +$ *etc. item* $b + 2c + 3d + 4e +$ *etc.* immer *infinitae*, daß allso auch mit dieser Beyhülf die *practi*sche Berechnung nicht erleichteret wird. Zu diesem Ende habe ich dieses Mittel gefunden: Man suche erst diese *seriem*

$$\frac{(n-1)}{1\,(n+1)} + \frac{(n-1)^3}{3\,(n+1)^3} + \frac{(n-1)^5}{5\,(n+1)^5} + \frac{(n-1)^7}{7\,(n+1)^7} + etc. = s$$

welche allzeit *convergens* ist; hernach setze man $2s\sqrt{2} = h$ so wird:[9]

$$n^{\surd 2} = 1 + \frac{h}{1} + \frac{hh}{1\cdot 2} + \frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{h^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{h^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + etc.$$

Bey *Fermat* findet sich noch ein sehr schönes *Theorema*, dessen *Demonstration* er sagt gefunden zu haben:[10] Nehmlich bey Anlaß der *Diophantaei*schen Aufgabe zwey *Quadrata* zu finden deren *summ* ein *Quadrat* ist, sagt er daß es unmöglich sey zwey *cubos* zu finden deren *summ* ein *cubus* sey, und zwey *Biquadrata*, deren *summ* ein *Biquadratum*, und *generaliter* daß diese *Formul* $a^n + b^n = c^n$ allzeit unmöglich sey, wann $n > 2$. Ich habe nun wohl *Demonstration*en gefunden daß $a^3 + b^3 \neq c^3$ und $a^4 + b^4 \neq c^4$, wo $\neq$ unmöglich gleich bedeutet; aber die *Demonstration*en für diese zwey *casus* sind so von einander unterschieden, daß ich keine Möglichkeit sehe daraus eine allgemeine *Demonstration* für $a^n + b^n \neq c^n$ *si* $n > 2$ herzuleiten.[11] Doch sieht man *quasi per transennam* ziemlich deutlich daß je grösser n ist, je unmöglicher die *Formul* seyn müsse; inzwischen habe ich noch nicht einmal beweisen können, daß *summa duarum potestatum quintarum* keine *potestas quinta* seyn könne.[12] Dieser Beweiß beruhet allem Ansehen nach nur auf einem glücklichen Einfall, und so lang man nicht darauf verfällt, möchte wohl alles Nachsinnen vergebens seyn.[13] Da aber diese *aequation* $aa + bb = cc$ möglich ist, so ist auch diese möglich $a^3 + b^3 + c^3 = d^3$,[14] woraus zu folgen scheint, daß auch diese $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = e^4$ möglich ist; doch habe ich bißher noch keinen Fall davon ausfündig machen können; es können aber 5 *biquadrata* angegeben werden, deren *summ* ein *biquadrat* ist.[15]

Nächst gehorsamster Empfehlung meiner und der meinigen habe ich die Ehre mit der schuldigsten Hochachtung zu verharren

Ewr. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 4$^{\text{ten}}$ *Augusti*
1753.

R 883 Reply to n° 168
Berlin, August 4th, 1753
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. V, fol. 112–113v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 614–618; *Euler-Goldbach* (1965), p. 372–374

170
Goldbach to Euler
Petersburg, April (15th) 26th, 1755

HochEdelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*,

Wann ich mich nicht irre ist mein letztes Schreiben an Ew. HochEdelgebohrne vom 28. *Jun. st. n.* 1753 gewesen und folglich eine geraume Zeit verflossen darin mir nichts bey[ge]fallen daß ich Deroselben zu *communici*ren werth gehalten hätte; ohngeachtet ich die *proprietät* daß ein *numerus primus huius formae* $1 + 4ef$ zu dieser $P^2 + eQ^2$, allwo P *et* Q *rationales* sind gebracht werden kan öffters *consideri*ret und auf unterschiedene Formen *reduci*ret habe,[1] als zum Ex[empel] wann $1 + 4ef = R^2 + 2abeS^2$, so kan solcher *numerus primus* allezeit in $P^2 + eQ^2$ verwandelt werden, oder auch wann zwey *numeri irrationales* h *et* m gefunden werden können, so daß $h - m$ und hm *rationales* seyen und $h = \dfrac{\sqrt{4f - m^2}}{\sqrt{em^2 + 1}}$, können gleichfalls die *numeri quaesiti* P *et* Q *in rationalibus* angegeben werden; imgleichen wann $Q^2 = 4fv^2 + 2mv - em^2$ gefunden werden kan, so wird

$$1 + 4ef = \frac{(4fv + m)^2 - 4fQ^2}{m^2} = \frac{\left(em^2 - v\right)^2 + eQ^2}{v^2},$$

und endlich weil der *numerus primus* $1 + 4ef$ = ist *duobus quadratis* $a^2 + b^2$, *quae in quocunque casu determinari possunt*, so ist genug wann man nur einen *numerum rationalem* k finden kan *hac lege ut* $a^2\left(e + k^2\right) + b^2\left(e - k^2\right)$ *fiat quadratus*, da es alsdann nicht schwer ist die *numeros quaesitos* P *et* Q zu finden, denn es wird

$$a^2 + b^2 = \frac{\left(h^2 + 1\right)^2 a^2}{4h^2} + e\frac{k^2\left(h^2 - 1\right)^2 a^2}{h^2\left(e - k^2\right)^2}$$

si sumatur

$$h = \frac{b\left(e - k^2\right) \pm \sqrt{a^2\left(e + k^2\right)^2 + b^2\left(e - k^2\right)^2}}{a\left(e + k^2\right)}.$$

Ferner ist auch diese *proprietät* merckwürdig ohngeachtet ich mich um deren *demonstration* nicht bemühet: *Si quadratum aliquod divisum per numerum primum* p *huius formae* $4n + 1$ *relinquat numerum* r, *dabitur etiam aliud quadratum quod divisum per eundem numerum* p *det residuum* $p - r$.[2]

Imgleichen *numerus primus* $4n + 1$ *dividens numeros quadratos quoscunque tot relinquere potest diversa residua quot* $2n$ *continet unitates*, als zum Ex[empel] wann $n = 1$, so kan der *divisor* 5 nur zwey *residua* nachlassen nemlich 1 und 4; wann $n = 3$, so lässet der *divisor* 13 *dividens quadratos, sex residua* nemlich 1, 3, 4, 9, 10, 12, *et ita reliqui.*

Hiernechst verharre ich mit vieler Hochachtung
Eurer HochEdelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.^{t} Petersburg
den 26. *Apr. st. n.* 1755.

P. S. Das *avancement* Dero ältesten H.n Sohns, wozu Eurer HochEdelgebohrnen so wohl als ihm von hertzen *gratuli*re, habe ich unlängst mit vielem vergnügen erfahren.[3] Ich bin versichert daß er es bereits zu einer ausserordlichen[!] Wissenschafft *in mathematicis* gebracht hat; nichts destoweniger wird er es sich, im fall er ein Liebhaber von gelehrten Streitigkeiten ist, gefallen lassen müssen wann er von seinen *Antagonist*en *more Hermanniano* als *Leonhardus Eulerus Leonhardi Filius* widerleget werden möchte.[4]

Weil mir der H. *Spener* seine *Catalogos* zugeschicket so hoffe ich er werde die Güte haben mir die in beyliegender *Specification* enthaltenen Bücher theils aus seinem theils aus andern Buchladen zu *procuri*ren,[5] Ew. Hgb. aber ersuche ich dienstl[ich] nicht übel zu nehmen daß ich solche *Specification* an Sie *adressi*re und erbiete mich hingegen, dafern Sie mir allhie einige *Commissiones* auftragen wolten, selbige mit gehöriger Aufmercksamkeit zu besorgen.

R 884 Petersburg, April (15th) 26th, 1755
Original, 2 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 162–163r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 619–620; *Euler-Goldbach* (1965), p. 376

171
Euler to Goldbach
Berlin, May 17th, 1755

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats*-Rath

Nachdem ich von Ewr. Hochwohlgeb. so lange Zeit mit keinem Schreiben erfreuet worden, so wäre ich wegen Dero Zustandes in sehr grosser Bekümmernüß gewesen, wann ich nicht von Zeit zu Zeit von dem H. *Etats* Rath Schumacher von Dero Wohlseyn wäre benachrichtiget worden.[1] Inzwischen hat mich doch einige Furcht eines von Ewr. Hochwohlgeb. mir etwan zugezogenen Unwillens nicht wenig beunruhiget, welche aber jetzt durch Dero geehrtestes Zuschreiben um so viel mehr verschwunden, da ich mir alles Nachsinnens ungeacht keines Versehens erinnern kan. Für den Hochgeneigten Antheil, welchen Ewr. Hochwohlgeb. an der Beförderung meines ältesten Sohns als Dero gehorsamsten Pathens zu nehmen belieben,[2] erkenne ich mich auf das schuldigste verpflichtet, und erkühne mich denselben noch ferner Dero Huld und Gewogenheit gehorsamst zu empfehlen. Er wendet allen möglichen Fleiß an, sich der besonderen Gnade, welche ihm durch die Aufnahme in unsere *Academie* wiederfahren, je länger je mehr würdig zu machen. Es ist aber jetz das *Mathemati*sche *Studium* so weitläuffig, daß es eine lange Zeit erfordret, ehe man sich in allen Theilen so fest setzen kan, daß man ohne Anstoß etwas nahmhaftes darinn zu leisten im Stand kommt; dahero er freylich ohne meine Hülfe noch nichts sonderliches würde zum Vorschein bringen können.

Insonderheit muß er sich ja in keine gelehrte Streitigkeiten mischen weilen sonsten seine *Antagonist*en, welche ihm *more Hermanniano* antworteten, nicht so sehr unrecht haben dörften.[3] Ich habe aber die gute Hoffnung, daß er je länger je mehr Stärke erreichen und meines beständigen Beystandes nicht mehr lang benöthiget seyn werde.

Die Bücher, welche Ewr. Hochwohlgeb. verlangen, wird der H. Spener ohne Verzug zusammen schaffen und abschicken; ich habe ihm insonderheit empfohlen dahin zu sehen, daß die Bände Dero ausdrüklichen Vorschrifft gemäß seyn möchten.[4]

Ewr. Hochwohlgeb. Betrachtungen über das *Theorema* daß die Zahl $1+4ef$, so offt sie ein *numerus primus* ist, immer in dieser *form* P^2+eQ^2 enthalten sey,[5] habe ich mit dem grösten Vergnügen zu ergründen gesucht, und darinn sehr wichtige Kunstgriffe wahrgenommen, nur ist es schad, daß dieselben noch so weit von einer vollständigen *Demonstration* entfernt sind. Doch ist es schon von keinem geringen Nutzen, daß da man von der Wahrheit des *Theorematis* versichert ist, auch alle die daraus hergeleiteten *Formuln* gewiß *resolvir*t werden können, welches sonsten sehr schwehr fallen würde. Aus allen Bemühungen die ich hierüber angewandt, deucht mich so viel sicher schliessen zu können, daß man niemals eine solche *Demonstration* finden wird, aus welcher zugleich *ex dato numero primo* $1+4ef$ die *quadrata* P^2 und Q^2 selbst angegeben werden könnten; sondern man muß sich nur mit einer solchen begnügen, welche die Möglichkeit, daß $1+4ef = P^2+eQ^2$, beweiset, ohne den *modum* anzuzeigen, wie diese *Resolution* würklich anzustellen. Dann da dieselbe nur alsdann möglich ist, wann $1+4ef$ ein *numerus primus* ist, so sehe ich nicht ab, wie man diese nothwendige Bedingung in Betrachtung ziehen könnte. Es ist allso eine verlohrne Mühe, die *numeros* P *et* Q *generaliter* durch e und f bestimmen wollen; dann wann solches möglich wäre, so müssten auch die Zahlen P und Q gefunden werden können, wann auch $1+4ef$ kein *numerus primus* wäre, welches doch gewiß öffters unmöglich ist.

Es ist mir endlich wohl gelungen zu beweisen, daß $1+4f = PP+QQ$ so offt $1+4f$ ein *numerus primus* ist; allein der Beweiß hilft mir im geringsten nichts um einen solchen *numerum primum* $1+4f$ würklich in 2 *quadrata* zu *resolvi*ren.[6]

Neulich habe ich auch die Beweise zu Stande gebracht, daß $1+8f=1+4\cdot 2f=PP+2QQ$ und $1+12f=1+4\cdot 3f=PP+3QQ$ so offt nehmlich diese Zahlen $1+8f$ und $1+12f$ *numeri primi* sind; doch habe ich bißher noch nicht weiter gehen können.

Ich sehe aber daß sich diese *Formuln* noch weiter erstrecken; dann es ist nicht nur $1+8f=PP+2QQ$ sondern auch $3+8f=PP+2QQ$ wann es *numeri primi* sind. Hernach ist auch $7+12f=PP+3QQ$. Hernach wann $e=5$ genommen wird, so hat man diese *Theoremata* $1+20f=P^2+5Q^2$; $9+20f=P^2+5Q^2$; welche ich aber nicht beweisen kan. Vielleicht aber, wann auch diese Fälle mit in Betrachtung gezogen werden, findet man etwan eher Mittel zu einer allgemeinen *Demonstration* zu gelangen.[7]

Das *Theorema* daß wann ein *quadratum per numerum primum* $p=1+4n$ getheilt das *residuum* r lässt, ein anders *quadrat* das *residuum* $p-r$ zurücklassen müsse,[8] habe ich schon lang bewiesen: dann wann $1+4n$ *numerus primus*, *et a numerus datus*, so können immer unendlich viel Zahlen $aa+xx$ gefunden werden, *qui per* $1+4n=p$ *sint divisibiles*; wann allso *aa per p divisum r* zurüklässt, so muß xx, $p-r$ zurüklassen.

Ewr. Hochwohlgeb. ist der Beweiß bekannt, daß $a^4\pm b^4\neq p^4$; neulich bin ich auch mit dem Beweiß zu Stande gekommen, daß $a^3\pm b^3\neq p^3$; weiter kan ich aber auch nicht kommen. *Fermat* hat aber nicht nur dieses bewiesen, sondern auch daß $a^5\pm b^5\neq p^5$, $a^7\pm b^7\neq p^7$ und *generaliter* daß $a^n\pm b^n\neq p^n$ *exceptis casibus* $n=1$ *et* $n=2$. Allem Ansehen nach kommt es hier auf einen besondern Einfall an, und so lang man nicht darauf kommt, ist alle Arbeit vergebens:[9] ohne Zweifel wird man darauf sehen müssen daß a^5+b^5 ausser $a+b$ keine andere *divisores primos* haben kan als *hujus formae* $10m+1$, welches ich bewiesen habe.[10]

Mein gantzes Hauß befindet sich Gott sey Dank noch recht wohl, und lässt sich Ewr. Hochwohlgeb. gantz gehorsamst empfehlen; ich habe die Ehre mit der schuldigsten Hochachtung zu verharren

Eur. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 17 *May* 1755.

R 885 Reply to n° 170
Berlin, May 17th, 1755
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. V, fol. 117–118v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 621–623; *Euler-Goldbach* (1965), p. 377–378

172
Goldbach to Euler
Petersburg, (July 25th) August 5th, 1755

HochEdelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*

Eurer HochEdelgebohrnen werthestes Schreiben vom 17. *Maii* habe ich den 29. *ei*[*usdem*] wohl erhalten und daraus mit vielem vergnügen ersehen daß Sie meine Anmerckungen über die Verwandlung des *numeri primi* $1+4ef$ in P^2+eQ^2 richtig befunden; Sie führen zwar an, daß die von Ihnen *demonstrir*te *proposition*, *numerum* $1+4f$, *si est primus, esse* $= P^2+Q^2$, zu würcklicher *determination* der *numerorum* P *et* Q im geringsten nichts beyträget,[1] allein ich bin der Meinung, *quidquid per certum et determinatum numerum tentaminum inveniri potest, illud pro invento habendum esse*, als zum *exemple* wenn ein *problema ad aequationem quatuor potestatum reduci*ret wird, wo man *per unum, duo, vel tria tentamina* die *radicem satisfacientem* finden muß;[2] imgleichen halte ich das *problema*: *invenire omnes divisores numeri dati pro solubili quia solvi potest per finitum numerum tentaminum &c.* In dem *casu* nun, da Ew. HochEdelg. gefunden haben daß ein jeder *numerus primus hujus formae* $1+4f = P^2+Q^2$, sind zu gleich die *numeri* P *et* Q für gefunden zu achten *quia per numerum finitum tentaminum inveniri possunt*, denn ich darf nur P oder Q den *numeris integris* 1, 2, 3 *&c. successive* = setzen und deren *quadrata* von dem *numero primo* $1+4f$ so lang *subtrahi*ren biß das *residuum* ein *quadratum* wird, wozu noch viele *compendia*, *ut eligantur numeri idonei*, angegeben werden können.[3]

Die *demonstrationes* zu den *casibus* $1+8f$ und $1+12f$ möchte ich gern sehen im fall sie nicht weitläufftig sind und eine sehr grosse *attention* erfordern.

Sonst habe ich auch gefunden daß wann y durch diese *aequation*

$$\frac{\left(ay^2+2by-a\right)\left(by^2-2ay-b\right)}{\left(y^2+1\right)^2} = abeS^2$$

[gegeben ist][4] und *posita* S *rationali* auch y *rationalis* wird alsdann auch diese *aequation* statt hat

$$a^2+b^2 = \frac{\left(\left(ay^2+2by-a\right)-\left(by^2-2ay-b\right)\right)^2}{\left(y^2+1\right)^2} + 2abeS^2,$$

welcher *casus*, wie ich schon in meinem letzteren Schreiben angemercket, allezeit auf die Form P^2+eQ^2 *reduci*ret werden kan, ja wann in dieser letzten Formul P oder Q nur *unico casu* gegeben wird, so kan ich daraus unzehliche *similes et rationales* finden nehmlich:

$$\frac{\left(ePy^2+2eQy-P\right)^2+e\left(Q+2Py-eQy^2\right)^2}{\left(ey^2+1\right)^2}$$

wann ich vor y einen *numerum quemcunque rationalem* annehme, als zum *exemple*, weil $89 = \dfrac{9^2}{2^2} + \dfrac{11 \cdot 5^2}{2^2}$ allwo $P = \dfrac{9}{2}$, $Q = \dfrac{5}{2}$, $e = 11$, so wird *posita* $y = 2$ der *numerus primus* $89 = \dfrac{607^2 + 11 \cdot 179^2}{90^2}$ welches vieleicht noch zu andern anmerckungen gelegenheit geben wird.

Es deucht mir daß ich schon vor langer Zeit gehöret habe die Briefe an Ew. HochEdelgebohrne würden Deroselben allezeit *franco* zugestellet,[5] falls aber dieser Umstand nicht richtig ist, werde ich ins künfftige meine Briefe an Ew. H. über Königsberg durch meinen dortigen *Correspond*enten *franco* zusenden lassen;[6] ich würde auch vor dieses mal noch nicht geschrieben haben wenn ich nicht die auf beyliegendem Zettel *noti*rten Bücher annoch dieses Jahr durch H.n *Spener* zu erlangen hoffte. Indessen bitte sehr um Verzeihung daß Eure HochEdelgeb. hiedurch abermal *incommodi*re.[7]

Ubrigens habe mit vielem Vergnügen vernommen daß Sie nebst Dero sämtlichen *familie* sich wohl auf befinden, ich bitte mich derselben bestens zu empfehlen und wünsche hertzlich irgend worin durch würckliche Proben bezeugen zu können daß ich mit besonderer Hochachtung bin

Eurer HochEdelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.^{t} Petersburg
den 5. *Aug.* 1755.

R 886 Reply to n° 171
Petersburg, (July 25th) August 5th, 1755
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 164–165r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 624–626; *Euler-Goldbach* (1965), p. 379–380

173
Euler to Goldbach
Berlin, August 23rd, 1755

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Die von Ewr. HochwohlGeb. verlangten Bücher sollten eben weggeschickt werden, als Dero letstes Schreiben ankam, welches aber jetz nur einen Aufenthalt von etlichen Tagen verursachen wird. H. Spener versichert mich daß alles künftige Woche gewiß nach Lübeck abgehen wird.[1]

Es muß allerdings die *Reductio numeri primi* $1 + 4f$ *ad formam* $PP + QQ$ *pro possibili* gehalten werden, ungeacht keine Regul gegeben werden kan in jedem

Fall die *Quadrata* PP und QQ selbst zu finden: sondern die Sache auf blosses *Probi*ren ankommt. Ich hatte aber dieses nur angeführt um zu zeigen, daß um dieses *Theorema* zu beweisen, *quod* $1 + 4f = PP + QQ$, die *Demonstration* nicht aus der würklichen *Resolution* hergeleitet werden könne.[2] Nehmlich *dato numero* f *in genere*, halte ich für unmöglich die Zahlen P *et* Q *per* f zu bestimmen. Ebenso verhält sich auch die Sach mit diesem *Theoremate*, *quod* $1 + 8f = 2PP + QQ$ (wann nehmlich $1+8f$ ein *Numerus primus* ist), dessen *Demonstration* unmöglich so beschaffen seyn kan, daß die *valores numerorum* P *et* Q würklich durch f ausgedrückt würden. Mein Beweiß davon grundet sich auf folgenden Sätzen:

I. *Numerus* $2aa + bb$, *si non est primus alios non admittit divisores nisi qui ipsi sint formae* $2pp + qq$ (*posito scilicet, quod* a *et* b *sint numeri inter se primi*).

II. *Si* $1+8f$ *est primus, forma* $a^{8f} - b^{8f}$ *quicunque numeri pro* a *et* b *accipiantur, semper est divisibilis per* $1 + 8f$ (*dum modo neuter numerorum* a *et* b *sit per* $1+8f$ *divisibilis*). *Cum jam sit* $a^{8f} - b^{8f} = \left(a^{4f} - b^{4f}\right)\left(a^{4f} + b^{4f}\right)$ *alteruter factor* $a^{4f} - b^{4f}$ *vel* $a^{4f} + b^{4f}$ *per* $1 + 8f$ *erit divisibilis.*

III. *At non omnes numeri formae* $a^{4f} - b^{4f}$ *per* $1 + 8f$ *sunt divisibiles; nam si singuli hi numeri* $2^{4f} - 1$; $3^{4f} - 1$; $4^{4f} - 1$; $5^{4f} - 1$; $\ldots$, $(8f)^{4f} - 1$ *per* $1 + 8f$ *essent divisibiles, eorum quoque differentiae tam primae quam secundae et sequentes omnes essent etiam per* $1 + 8f$ *divisibiles; at differentiae ultimae seu constantes sunt* $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots 4f$ *quae cum non sit per* $1 + 8f$ *divisibilis, sequitur etiam non omnes illos numeros per* $1 + 8f$ *esse divisibiles.*

IV. *Dantur ergo numeri pro* a *et* b, *quibus* $a^{4f} - b^{4f}$ *non est divisibilis per* $1 + 8f$; *iis ergo casibus numerus* $a^{4f} + b^{4f}$ *certe est per* $1 + 8f$ *divisibilis. At est* $a^{4f} + b^{4f} = \left(a^{2f} - b^{2f}\right)^2 + 2a^{2f}b^{2f}$ *ideoque numerus formae* $PP + 2QQ$; *qui cum sit per* $1 + 8f$ *divisibilis, necesse est per* (I), *ut divisor* $1 + 8f$ *ipse sit numerus ejusdem formae* $PP + 2QQ$.

Wann man einen einigen *Casum* gefunden, *quo formula* $xx + eyy$ *fit aequalis dato numero* N, so können daraus *infiniti alii in fractis scilicet* gefunden werden. Als wann $aa + ebb = N$, *ponatur* $x = a + pz$ *et* $y = b - qz$ *fietque*

$$aa + 2apz + ppzz + ebb - 2ebqz + eqqzz = N;$$

at $aa + ebb = N$, *ergo* $2apz + ppzz - 2ebqz + eqqzz = 0$, *unde fit* $z = \dfrac{2ebq - 2ap}{pp + eqq}$. *Ergo sumendo pro* p *et* q *numeros quoscunque erit*

$$x = \frac{eaqq + 2ebpq - app}{pp + eqq}$$

et

$$y = \frac{bpp - ebqq + 2apq}{pp + eqq}.$$

Wann aber e ein *numerus negativus*, so können aus einem einigen *casu* $aa - ebb = N$ *in integris invento infiniti alii etiam* [*in*] *integris* gefunden werden, welches ich allso kürzlich zeige:

Theorema. Si fuerit $aa - ebb = N$, *tum infiniti casus in numeris integris* x *et* y *assignari possunt, quibus fiat* $xx - eyy = N$, (*dummodo* e *non sit numerus quadratus*).

Demonstratio. Quicunque sit numerus e, *dum non quadratus, semper assignari possunt numeri* p *et* q *ut sit* $pp - eqq = 1$, *seu* $pp = eqq + 1$; *cum jam sit per hypothesin* $aa - ebb = N$, *erit quoque* $(aa - ebb)(pp - eqq) = N$.[3] *At est*

$$(aa - ebb)(pp - eqq) = aapp - ebbpp - eaaqq + eebbqq = (ap \pm ebq)^2 - e(bp \pm aq)^2 .$$

Capiatur ergo $x = ap \pm ebq$ *et* $y = bp \pm aq$ *eritque* $xx - eyy = N$. *Jam quemadmodum ex primo casu* $x = a$ *et* $y = b$ *hinc duo adeo novi sunt inventi, ex his simili modo porro novi, ex iisque deinceps alii in infinitum elici poterunt. Q. E. D.*

Die gantze Sache kommt allso darauf an, daß *pro quovis numero* e die Zahlen p *et* q angegeben werden, *ut sit* $pp = eqq + 1$, welches *in numeris integris* allzeit geschehen kan, wie schon *Pell* und *Fermat* gezeiget. Dazu kan beygesetzte *Tabelle* dienen.

Ut sit $pp = eqq + 1$	*si sit*	*erit*	*et*
	$e = 2$	$q = 2$	$p = 3$
	$e = 3$	$q = 1$	$p = 2$
	$e = 5$	$q = 4$	$p = 9$
	$e = 6$	$q = 2$	$p = 5$
	$e = 7$	$q = 3$	$p = 8$
	$e = 8$	$q = 1$	$p = 3$
	$e = 10$	$q = 6$	$p = 19$
	$e = 11$	$q = 3$	$p = 10$
	$e = 12$	$q = 2$	$p = 7$
	$e = 13$	$q = 180$	$p = 649$
		etc.	

Diese *Tabelle* enthält die kleinsten Werthe für p *et* q, welche durch die sogenannte *Pelliani*sche *Methode* gefunden werden.[4] Diese *Method*e ist aber ziemlich beschwehrlich, wann die Zahlen für p und q wie bey dem *casu* $e = 13$ geschiht groß werden, und ich habe Mittel gefunden dieselbe sehr abzukürzen.[5] Dann es geschieht in einigen Fällen daß die kleinsten Zahlen p und q ungeheur groß werden als:

wann $e = 61$ so ist $q = 226\,153\,980$ und $p = 1\,766\,319\,049$;

wann $e = 109$, so ist $\begin{cases} q = 15\,140\,424\,455\,100 \\ p = 158\,070\,671\,986\,249 \end{cases}$

Ewr. Hochwohlgeb. haben vormals auch solche Zahlen $\square + \triangle$ oder $\square + 2\triangle$ in Betrachtung gezogen; und neulich haben mich dieselben auf *curieus*e *Theoremata exclusiva* geleitet. Als I. *Cum non omnes numeri si*[*n*]*t aggregata ex quadrato et trigonali, seu formae* $\square + \triangle$, *dantur infiniti numeri in hac forma non contenti; cujusmodi numerus si fuerit* n, *tum numerus* $8n+1$ *certe non est primus.* II. *Infiniti* *dantur numeri in forma* $\square + 2\,\triangle$ *non contenti; sit n hujusmodi numerus, et* $4n+1$ *certe non erit numerus primus.*[6]

Le[t]stens bin i[ch] ungefehr auf dieses *Problema* gefallen:

Invenire aequationem cubicam $x^3 - Axx + Bx - C = 0$, *quae habeat omnes suas radices rationales, et in qua coefficientes* A, B, C *sint numeri quadrati.*

Vel si p, q, r *sint ejus radices, eas ita comparatas esse oportet, ut primo* $p+q+r$ *secundo* $pq+pr+qr$ *et tertio* pqr *sint numeri quadrati.*

Ich halte dieses *Problema* um so viel schwehrer, da ich glaube daß für p, q, r nicht wohl kleinere Zahlen gefunden werden können, als diese:

$$p = 252\,782\,198\,228, \quad q = 1\,633\,780\,814\,400, \quad r = 3\,474\,741\,058\,973.$$ [7]

Ich habe neulich wieder einige Untersuchungen über solche *Differentialaequation*en dergleichen die *Riccatiana* ist, angestellt, welche sich nur in gewissen Fällen *integri*ren lassen. Wann nun für i ein *numerus integer quicunque* angenommen wird so sind folgende *aequationes* immer *integrabel*:[8]

I. $dy + yy\,dx = aax^{2n-2}dx + ((2i+1)\,n \pm 1)\,ax^{n-2}dx.$

II. $dy + yy\,dx = \dfrac{(in \pm 1)\,(in + n \pm 1)\,abx^{n-2}dx}{(a-bx^n)^2}$;

vel haec aequatio

$$dy + yy\,dx = \frac{mabx^{n-2}dx}{(a-bx^n)^2}$$

toties est integrabilis, quoties fuerit

$$n = \frac{\sqrt{(1 + 4i\,(i+1)\,m)} \pm (2i+1)}{2i\,(i+1)}:$$

ita si $i = 2$, $m = 3$, *erit* $n = \dfrac{\sqrt{73}+5}{12}$; *unde integrabilis haec aequatio*

$$dy + yy\,dx = \frac{3abx^{\frac{\sqrt{73}-19}{12}}dx}{\left(a - bx^{\frac{\sqrt{73}+5}{12}}\right)^2}.$$

Porro sit $n = 2$, *et* $i = 2$, *integrabilis erit haec aequatio, ponendo* $a = 1$, $b = 1$:

$$dy + yy\,dx = \frac{15\,dx}{(1-xx)^2};$$

est vero integrale

$$y = \frac{15x + 14xxx - 2x^5}{(1-xx)\,(1+6xx+2x^4)}.$$ [9]

III. $dy + yy\,dx = \dfrac{in\,(in \pm 1)\,bx^{n-2}dx}{a + bx^n}$;

IV. $dy + yy\,dx = \dfrac{in\,(in \pm 1)\;a\,dx}{xx\;(a+bx^n)}$;

V. *Haec aequatio*

$$dy + yy\,dx = \frac{\lambda\,(\lambda-1)\;aa - \mu abx^n + \nu\,(\nu-1)\,bbx^{2n}}{xx\;(a+bx^n)^2}\,dx$$

semper est integrabilis quoties sumto pro i numero integro quocunque fuerit

$$\mu = i\,(i+1)\;nn - (2i+1)\;n\,(\lambda-\nu) + \lambda + \nu - 2\lambda\nu.$$

So viel ich weiß geniesst hier Niemand die Postfreyheit,[10] und so lang ich hier bin, hat mich meine *Correspondentz* jährlich wohl 200 Rthl. gekostet; ich gebe aber für keine Briefe das Postgeld mit grösseren Freuden aus als diejenigen, welche von Ewr. Hochwohlgeb. zu erhalten die Ehre habe, und wünschte, daß wofern solches ohne Dero Unbequemlichkeit geschehen könnte, ich dieses Vergnügens öffter theilhaftig werden könnte.

Jüngsthin hat mir die Königl[iche] *Pariser Academi*e die Ehre gethan, mich unter ihre auswärtige Mitglieder aufzunehmen;[11] der H. Graf von *Argenson* hat mir diese Nachricht selbst in einem Schreiben gemeldet, wovon ich die Freyheit nehme Ewr. Hochwohlgeb. eine *Copi*e beyzulegen.

Alle die meinige und insonderheit Dero Pathe[12] lassen sich Ewr. Hochwohlgeb. gehorsamst empfehlen, und ich habe die Ehre mit der schuldigsten Hochachtung lebenslang zu verharren

Ewr. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berli[*n*] den 23 *Augusti*
1755.

A Versailles le 15 *Juin* 1755

Le Roy vient de vous choisir, Monsieur, d'après le vœu de Son Academie Royale des sciences pour remplir une place d'associé etranger dans cette Academie, et comme elle a nommé en meme tems Milord Macclesfield President de la Societé Royale de Londres pour remplir une pareille place qui vaque par la mort de M. Moivre, Sa Majesté a decidé que la premiere place de cette espece, qui vaquera, ne sera pas remplie. L'extreme rareté de ces sortes d'arrangemens est une distinction trop marquée pour ne pas vous en faire l'observation et vous asseurer de toute la part que j'y prend. L'Academie desiroit vivement de vous voir associé à ses travaux et Sa Majesté n'a pu qu'adopter un temoignage d'estime, que vous merités à si juste titre. Soyes persuadé, Monsieur, qu'on ne peut vous etre plus parfaitement devoué que je le suis

M. D'Argenson.

M.r Euler Directeur de la Classe des Mathematiques de l'Academie Royale de Berlin.[13]

In meiner *Mechan*[*ica*] *Tom.* II, *pag.* 405 kommt diese *series* vor

$$1-\frac{n}{3}+\frac{n\,(n-2)}{3\cdot 5}-\frac{n\,(n-2)\,(n-4)}{3\cdot 5\cdot 7}+\frac{n\,(n-2)\,(n-4)\,(n-6)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}-etc.$$

deren *summ* dort gegeben wird $=\dfrac{1}{n+1}$. Ich kan mich nicht mehr recht erinnern wie ich damals auf diese *summ* gekommen, glaube aber daß damals mehrmals darüber mit Ew. Hochwohlgeb. zu *conferi*ren die Ehre gehabt habe.[14]

R 887 Reply to nº 172
Berlin, August 23rd, 1755
Original, 3 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. V, fol. 114–116v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 627–633; *Euler-Goldbach* (1965), p. 380–383

174
Goldbach to Euler
Petersburg, (November 28th) December 9th, 1755

HochEdelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*,

Eurer HochEdelgebohrnen *gratuli*re ich zuforderst zu der erhaltenen Stelle eines *Academicien Honoraire* bey der Parisischen *Acad*[*emie*] *des Sciences*[1] und dancke Deroselben für die mir übersandte *Copie* von dem Briefe des *M.r d'Argenson*; es fehlet aber dabey das beste, nemlich Eurer Hochedelg. Antwort welche wie ich gäntzlich glaube, sehr wohl abgefasset und *digne de l'approbation des Quarante* seyn wird.[2] Ferner gereichet es mir zu grossem Vergnügen daß Dero ältester Herr Sohn das *praemium* bey der hiesigen *Acad*[*emie*] der W[issenschaften] erhalten hat;[3] ich zweiffele im geringsten nicht daß solches noch öffters geschehen werde wann er die Mühe nehmen wird seine *pieces* zu solchem Ende einzusenden.

Vor die mir *communici*rten merckwürdigen *theoremata* sage ich schuldigsten Danck, und ob ich gleich wenige Hofnung habe daß ich dieselben jemals *pro dignitate* werde betrachten können so ist es mir doch sehr lieb daß Ew. Hochedelg. noch immer fortfahren solche schöne *decouvertes* zu machen. Mir ist seit meinem letzteren Schreiben nichts sonderliches eingefallen. Was aber die *seriem*

$$1-\frac{n}{3}+\frac{n\,(n-2)}{3\cdot 5}-\frac{n\,(n-2)\,(n-4)}{3\cdot 5\cdot 7}+\&c.=\frac{1}{n+1}$$

betrifft, so kan ich mich zwar nicht erinneren selbige schon gesehen zu haben, es ist aber deren *summa* gantz offenbar;[4] eine andere Bewandniß hat es mit den

Seriebus deren *denominatores in certis casibus* $= 0$ und folglich die *summa seriei infinite magna* werden kan.

Die Bücher von Berlin sind bereits, wiewohl in geringer Anzahl allhie ankommen; die Rechnung aber habe ich bißhero nicht erhalten, sonsten es an *promt*er Bezahlung nicht ermangelt haben würde wovon ich dienstlich bitte den H.n *Spener averti*ren zu lassen.[5]

Im übrigen verharre ich nechst schuldigster Empfehlung an Dero sämmtliche *Familie*

Eurer HochEdelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.t Petersburg
den 9. *Dec.* 1755 *st. n.*

Theorema: Si sit $a^2 + b^2 = P^2 + eQ^2$*, ubi* P *et* Q *rationales, erit etiam*

$$a^2 + ((2e+1)\,b - P - Q)^2 = M^2 + eN^2,$$

ubi M *et* N *rat*[*ionales*].[6]

R 888 Reply to n° 173
Petersburg, (November 28th) December 9th, 1755
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 166–167r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 634–635; *Euler-Goldbach* (1965), p. 383–384

175
Goldbach to Euler
[Petersburg], December (2nd) 13th, 1755

P. S. ad litt[*eras*] *d*[*atas*] 9. *Dec.*

Ich finde nöthig Ew. Hochedelgeb. unverzüglich von einem Schreibfehler in meinem neulichen *theoremate* zu *averti*ren indem es heissen soll *Si sit* $a^2 + b^2 = P^2 + eQ^2$*, ubi* P *et* Q *rationales, erit etiam*

$$a^2 + ((2e+1)\,b - eP - eQ)^2 = M^2 + eN^2,$$

ubi M *et* N *rationales.*[1]

den 13. *Dec.* 1755.

In des H.n *Etienne de Bourdeaux* Buchladen in Berlin ist *la Clef du Cabinet des Princes* in 100 *volumes* in 8. befindlich.[2] Ew. HochEdelg. würden mich *obligi*ren wann Sie durch Dero Bedienten wollten nachfragen lassen was selbige kosten und ob die Bücher schon eingebunden sind?

R 889 Postscript to nº 174
[Petersburg], December (2nd) 13th, 1755
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 168r
Published: *Euler-Goldbach* (1965), p. 384

176
Euler to Goldbach
Berlin, January 3rd, 1756

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Bey dem Antritt dieses neuen Jahrs lege ich zuvorderst meinen herzlichsten Wunsch für das beständige Wohlseyn Eur. Hochwohlgeb. ab, und empfehle mich dabey gehorsamst sammt den meinigen zu Dero fortdaurenden Wohlgewogenheit. Zugleich statte ich auch Eur. Hochwohlgeb. meine verpflichtetste Danksagung ab für den gütigen Antheil welchen Dieselben an unserem Zustand zu nehmen belieben und habe das Vergnügen Eur. Hochwohlgeb. zu berichten, daß S[ein]e Königl[iche] *Majestät* bey dem Anfang dieses Jahrs Dero Pathen unsern ältesten Sohn mit einer jährlichen Besoldung von 200 Rthl. begnadiget.[1]

Ich habe nun schon eine geraume Zeit so viel andere Geschäfte gehabt daß ich an *numeri*sche *Theoremata*, dergleichen ich Eur. Hochwohlgeb. das letste mal vorzulegen die Ehre gehabt, nicht habe denken können. Die *Partes Matheseos applicatae* nehmen mir die meiste Zeit weg, wo es immer mehr zu untersuchen gibt, je mehr man damit umgeht.[2] Weil nun mein Kopf mit so viel anderen Sachen angefüllet ist, so mag das wohl die Ursache seyn, daß ich mich in das von Eur. Hochwohlgeb. *communicir*te und nach der Hand verbesserte *Theorema* nicht finden kan. Vielleicht haben Eur. Hochwohlgeb. vergessen noch eine wesentliche *Condition* hinzuzusetzen.[3]

Das *Theorema* war: *Si sit* $aa + bb = P^2 + eQ^2$ *erit etiam*

$$a^2 + ((2e + 1)\, b - eP - eQ)^2 = M^2 + eN^2;$$

weil ich den Grund desselben nicht einsehen konnte, so habe ich die Richtigkeit desselben durch *Exempel* erforschen wollen.

I. Da $1^2 + 4^2 = 17 = 3^2 + 2 \cdot 2^2$, so ist $a = 1$, $b = 4$, $P = 3$, $Q = 2$ und $e = 2$, allso müste seyn

$$1^2 + (5 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - 2 \cdot 2)^2 = 1^2 + 10^2 = 101 = M^2 + 2N^2$$

welches unmöglich ist.

II. Da $9^2 + 4^2 = 97 = 7^2 + 3 \cdot 4^2$, so ist $a = 9$; $b = 4$; $P = 7$; $Q = 4$ und $e = 3$, allso müsste seyn

$$9^2 + (7 \cdot 4 - 3 \cdot 7 - 3 \cdot 4)^2 = 9^2 + 5^2 = 106 = M^2 + 3N^2$$

welches ebenfalls unmöglich ist.

Da ich nun nicht einmal ein *Exempel* finden kan, welches einträfe, so schliesse ich daraus, daß eine gewisse Bedingung in den Zahlen a, b, P und Q müsse weggelassen seyn, welche ich aber nicht ausfündig machen kan.[4]

Ich habe dem H. *Spener* zu wissen gethan, daß Eur. Hochwohlgeb. die Rechnung für die überschickten Bücher verlangen; bekomme ich dieselbe vor Schliessung dieses Briefs, wie ich ihm habe sagen lassen, so werde ich sie beylegen.[5] Sonsten da er nicht alle verlangte Bücher gehabt, so werde ich inskünftige dergleichen *Commission*en dem *M.r Neaulme*, welcher weit *activer* ist und alles schaffen kan, auftragen. Wegen des Werks: *La Clef du Cabinet des Princes* füge hier die Antwort des *M.r de Bourdeaux* bey.[6] Sollte dasselbe vor der Ankunft einer *Resolution* von Eur. Hochwohlgeb. schon verkauft worden seyn, so hat sich *M.r Neaulme* anheischig gemacht, dasselbe auch zu liefern.

Ich habe die Ehre mit der schuldigsten Hochachtung zu verharren

Eur. Hochwohlgebohrnen

gehorsamster Diener

L. Euler

Berlin den 3ten *Januarii*

1756.

R 890 Reply to nº 174 and nº 175
Berlin, January 3rd, 1756
Original, 1 fol. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. V, fol. 123rv
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 636–637; *Euler-Goldbach* (1965), p. 385–386

177
Goldbach to Euler
Petersburg, January (13th) 24th, 1756

HochEdelgebohrner Herr

Hochgeehrter Herr *Professor*

So leyd es mir ist daß ich Eurer Hochedelgebohrnen durch mein unrecht abgeschriebenes *theorema* einige Mühe verursachet habe, so lieb ist es mir hingegen daß Sie selbiges Ihrer untersuchung werth gehalten[1] denn wann Sie nichts darauf geantwortet hätten, würde ich auch gewiß nicht mehr daran gedacht haben, nachdem ich solches aber auf Dero veranlassung wieder übersehen so habe ich zugleich bemercket daß es unendlich *general*er gemachet werden kan und der bey einer andern gelegenheit von mir angeführte Vers: *Si non errasset fecerat ille minus* findet hier abermal statt.[2] Es soll heissen: *Si* $a^2+b^2=P^2+eQ^2$ *ubi* P *et* Q *sint numeri rationales poterit etiam fieri*

$$a^2+(b+2em\,(mb-mP-Q))^2=M^2+eN^2,$$

ita ut M *et* N *sint rationales modo pro* m *sumatur numerus rationalis.*[3] In dem von Eurer HochE. angeführten ersten *exemple*[4] woselbst $a=1$, $b=4$, $P=3$, $Q=2$ und $e=2$, wird $1^2+4^2=3^2+2\cdot 2^2$, *ergo etiam*

$$1^2+\left(4+4m^2-8m\right)^2$$

seu[5]

$$1^2+2^2\,(m-1)^4=M^2+2N^2,$$

de quo dubitare nefas; in dem andern *exemple* wo $a=9$, $b=4$, $P=7$, $Q=4$, $e=3$ oder $9^2+4^2=7^2+3\cdot 4^2$ wird

$$9^2+\left(4-24m-18m^2\right)^2=M^2+3N^2,$$

welches gleichfalls eine gewisse Wahrheit ist. So offt nun

$$a^2+(b+2em\,(mb-mP-Q))^2$$

ein *numerus primus* ist so kan er diese Form M^2+eN^2 haben wann gleich a^2+b^2 kein *numerus primus* ist.

Die mühe so Ew. Hochedelgeb. nehmen wollen sich bey *M.^r de Bourdeaux* nach dem *Clé du Cabinet informi*ren zu lassen[6] erkenne ich mit schuldigstem Danck und übersende darauf die hiebeyliegende *Assignation* von 45 Rthl. mit dienstlicher Bitte die Bücher wann sie bey dem *M.^r de Bourdeaux* zusammengepackt und versiegelt worden, sonder Beschwerde in Dero hause biß zur künfftigen übersendung liegen zu lassen da ich denn selbige künfftiges Frühejahr mit noch andern Büchern zusammen anhero kommen lassen will. H. *Poggenpohl* hat schon *ordre* gestellet den H.n *Spener* in Berlin zu bezahlen welches auch vor ankunfft dieses geschehen seyn wird.[7] Den Vorschlag durch H.n *Neaulme* Bücher von Berlin kommen zu lassen, nehme ich mit allem Danck an, weiß aber nicht ob er in seinem Verlage auch deutsche Bücher hat oder solche zu *procuri*ren sich bemühen wird.

Vor den gütigen Wunsch zum neuen Jahre bin ich Eurer Hochedelgeb. sehr verbunden. Gott lasse Sie dieses bereits angefangene wie auch viele folgende Jahre nebst der Frau *Professo*rin und Dero sämmtlichen *Familie* bey allem ersinnlichen Wohlergehen zurücklegen. Daß mein Herr Pathe schon zu einer würcklichen Besoldung gelanget, habe ich mit vieler Freude vernommen.[8] Dieses ist schon ein guter anfang und hat er hierin Ew. HochEd. glücklich *imiti*ret in dem Sie, wie ich dafür halte, fast in gleichem Alter bey der *Acad*[*emie*] *des Sc*[*iences*] in Petersburg *engagi*ret worden.[9] Neulich vernahm ich auch daß der H. *Johannes Albertus* schon einen Preiß von der *Acad*[*emie*] zu Pariß bekommen,[10] wovon ich die *confirmation* durch Ew. Hochedelg. selbst zu erhalten wünsche, wann aber auch diese Zeitung gleich unrichtig seyn sollte, wird sie nach allem Vermuthen bald, und *suo tempore* öffters *verifici*ret werden. Eurer HochE. antwort auf das Schreiben des H.n *d'Argenson*[11] hatte ich schon im letzteren Briefe verlanget weil ich *présumi*rte daß selbige *cum censura et approbatione* des H.n von *Maupertuis* abgegangen, und an sich selbst eine schöne *piece* seyn würde, daher ich nochmals *instanter* darum bitte. Ich verharre im übrigen mit vieler Hochachtung

Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.^{t} Petersburg
den 24. *Jan.* 1756 *st. n.*

R 891 Reply to n° 176
Petersburg, January (13th) 24th, 1756
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 169–170r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 638–639; *Euler-Goldbach* (1965), p. 386–387

178
Euler to Goldbach
Berlin, February 10th, 1756

Hochwohlgebohrner *Herr*
Hochgeehrtester *Herr Etats* Rath

La Clef du Cabinet des Princes war noch vorhanden;[1] ich habe dieses Werk in 100 *Volumes* bestehend schon in meinem Haus wohl bewahrt; es sind immer 10 *Tomi* zusammen gebunden und ich sehe nicht wie dieselben bequem versiegelt werden könnten, ich müsste dann einen Kasten dazu machen lassen. Da aber Eur. Hochwohlgeb. noch mehr Bücher dazu zu verschreiben gesinnet sind, so möchte ein besondrer Kasten zu denselben unnöthig seyn: ich werde Dieselben allso biß dahin eben so gut verwahren, als wann sie versiegelt wären.

M.^{r} Neaulme hat zwar nicht viel teutsche Bücher, doch ist er im Stande alles zu schaffen; er scheint mir nur *activer* als andere und dabey billig zu seyn; weiter kan ich nicht für ihn gut sprechen.

Eur. Hochwohlgeb. statte für den Hochgeneigten Antheil so Dieselben an unserm Zustand nehmen und den damit verknüpften Gütigen Wunsch allen schuldigsten Dank ab; noch hat unser *Joh*[*ann*] Albert keinen Preiß bey der *Pariser Academie* erhalten:[2] der Nahme desjenigen, so im vorigen Jahr den Preiß erhalten, wurde nicht sogleich bekannt gemacht, man wusste nur daß es ein junger Mensch war, welches vielleicht zu der Eur. Hochwohlgeb. hinterbrachten Nachricht Anlaß gegeben haben mag. Es ist mir aber seitdem die Preißschrifft selbst zugeschickt worden, deren Verfasser *M.r Chauchot sousconstructeur des vaisseaux* genannt wird, welcher aber bald darauf gestorben seyn soll.[3] Die Frage war: *Diminuer le plus qu'il est possible les mouvemens de roulis et de tangage d'un Navire etc.* Da aber die obgemeldte Schrifft kein völliges Genügen geleistet, so ist eben diese Frage nochmals aufs künftige Jahr vorgeleget worden, worüber wir jetz würklich arbeiten.[4] Von meiner Danksagung an des H. *Comte d'Argenson*s *Exzellenz* habe ich so wenig als von allen meinen Briefen eine Abschrifft behalten: sie war sehr schlecht gerathen, und allso nicht wohl möglich viel darinn zu verbessern; mir hat sie am wenigsten gefallen, und deswegen wollt ich kein Andenken davon aufbehalten.[5]

Eur. Hochwohlgeb. *Theorema*, daß wann $aa+bb=P^2+eQ^2$ auch

$$a^2+(b+2em\,(mb-mP-Q))^2=M^2+eN^2$$

sey, hat seine völlige Richtigkeit,[6] und ist deswegen sehr merkwürdig, daß dadurch dieses *Problema solvir*t werden kan:

Datis duobus quadratis aa et bb quorum summa sit numerus formae P^2+eQ^2, *invenire infinita alia quadrata loco bb substituenda quae priori aa addita summam exhibeant, quae pariter sit numerus formae* P^2+eQ^2.

Hier wird allso das erstere *quadratum aa* beybehalten, und an statt des anderen *bb* unendlich viel andere Werthe angegeben, daß die *summ* allzeit in dieser Form P^2+eQ^2 enthalten sey. Man könnte allso das *Problema* noch *generaler* allso *proponi*ren:

Proposita summa duorum quadratorum $aa+bb$, *quae sit numerus formae* P^2+eQ^2, *invenire infinitas alias binorum quadratorum summas* $xx+yy$, *quae in eadem forma contineantur.*

Wovon ich folgende *Solution* gefunden:

Cum sit $aa+bb=P^2+eQ^2$, *tribuantur numeris x et y sequentes valores:*

$$\begin{aligned} x &= a\,(tt+evv+rr-ss)+2r\,(bs-Pt-eQv)\\ y &= b\,(tt+evv-rr+ss)+2s\,(ar-Pt-eQv) \end{aligned}$$

ubi quidem pro litteris r, s, t, v *numeros quoscunque accipere licet. Tum autem utique erit* $xx+yy=M^2+eN^2$: *fiet enim*

$$M=P\,(rr+ss+tt-evv)+2t\,(eQv-ar-bs)$$

&

$$N=Q\,(rr+ss-tt+evv)+2v\,(Pt-ar-bs)\,.$$

Solchergestalt werden nicht nur unendlich viele, sondern sogar alle mögliche Werthe für x und y gefunden.

In diesem *Problemate* wird vorausgesetzt, daß schon ein *Casus* da $aa+bb=P^2+eQ^2$ bekannt sey, um daraus alle übrige zu finden; allein dieses ist auch nicht einmal nöthig, sondern *proposito numero e quocunque*, können unmittelbar alle mögliche *summae binorum quadratorum* angegeben werden, welche zugleich in der Form P^2+eQ^2 enthalten sind.

Man nehme nehmlich sogleich $a = exx - yy + zz$ und $b = 2yz$, so wird

$$aa + bb = (exx - yy - zz)^2 + e\,(2xz)^2\,.$$

Weil nun x, y, und z nach Belieben angenommen werden können so erstreckt sich diese *Solution* auf alle mögliche Fälle, und scheinet allso vor der vorhergehenden keinen geringen Vorzug zu haben.[7]

Wir empfehlen uns insgesammt zu Eur. Hochwohlgeb. beständiger Wohlgewogenheit, und ich habe die Ehre mit der schuldigsten Hochachtung lebenslang zu verharren

Eur. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 10 *Febr.* 1756.

R 892 Reply to nº 177
Berlin, February 10th, 1756
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. V, fol. 124–125r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 640–642; *Euler-Goldbach* (1965), p. 387–389

179
Goldbach to Euler
Petersburg, March (12th) 23rd, 1756

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*,

Ich nehme die Freyheit Eurer HochEdelgebohrnen wiederum einen kleinen aufsatz von Büchern zu übersenden,[1] welche durch denjenigen Buchhändler den Sie dazu erwehlen werden besorgen zu lassen bitte, indessen dancke Eurer Hochedelgebohrnen dienstl[ich] für die bereits mit dem *Clé du Cabinet* übernommene mühe[2] und wünschete sehr Deroselben auch auf meiner seite einige gefälligkeiten erweisen zu können. Des H.n *Spener*s erste Rechnung nebst dessen Schreiben vom 27. *Sept.* 1755 ist mir nicht eher als den 2. *Mart.* 1756 zugestellet worden, nachdem die *quittance* über die zufolge der anderen Rechnung bezahlten Gelder schon ankommen war,[3] so daß ich jetzo der mühe nicht werth halte untersuchen zu lassen wo der Brief so lange geblieben.

Die von Eurer Hochedelg. angeführte *aequatio*

$$a^2 + b^2 = \left(ex^2 - y^2 - z^2\right)^2 + e\,(2xz)^2$$

ist aus unserer vorigen *Correspondance* schon bekannt, welcher umstand Deroselben vieleicht entfallen war.[4] Sonst habe ich auch noch einen andern hierher gehörigen *lusum naturae* bemercket, nemlich wann $1+4efg = P^2 + eQ^2$, *erit etiam*

$$1 + 4e\left(fg + ef^2y^2x^2\right) = (P - 2efyx)^2 + e\,(Q - x)^2$$

posita $x = \dfrac{4fPy + 2Q}{4efy^2 + 1}$;[5] so offt nun $e\left(g + efy^2x^2\right)$ ein *numerus quadratus* ist (*posito valore dicto ipsius* x) so offt kan $P^2 + eQ^2$ in diese form verwandelt werden $M^2 + fN^2$, *existentibus* M *et* N *rationalibus*, denn es wird seyn $M = (P - 2efyx)$ und $N = Q - x$.

Daß Ew. Hochedelg. sich ein Landgut gekauffet und dahin öfftere *promenad*en machen sollen[6] habe ich mit vergnügen vernommen, es wird solches Deroselben nicht allein *pro distractione* (wie die deutschen *Jesuit*en zu reden pflegen) sondern auch zu erhaltung der gesundheit sehr dienlich seyn, wie ich denn von Dero fernerem Wohlergehen viele angenehme Nachrichten zu erhalten wünsche und mit besonderer hochachtung verharre

Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S^{t} *Petersbourg*
den 23. *Mart. st. n.* 1756.

R 893 Reply to nº 178
Petersburg, March (12th) 23rd, 1756
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 171–172r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 643; *Euler-Goldbach* (1965), p. 389

180
Goldbach to Euler
Petersburg, March (16th) 27th, 1756

P. S. ad litteras d[*atas*] 23. *Mart.* 1756.

Es scheinet daß die übereilungsfehler bey mir in den Briefen an Ew. Hochedelgeb. je länger je gemeiner werden, wie es denn in dem letztern abermal $x = 4fPy + 2Q$ und nicht $x = \dfrac{4fPy + 2Q}{4efy^2 + 1}$ hätte heissen sollen, welches ohne Beschwerde zu *corrigi*ren bitte. Im übrigen wird vieleicht dieses *raisonnement* zum Beweise daß ein *numerus primus* von dieser Form $1 + 4efg$ in $P^2 + eQ^2$ verwandelt werden kan etwas beytragen:

Si positis e, f, g *rationalibus fieri potest* $1+4efg=P^2+eQ^2$, *ita ut* P *et* Q *sint rationales, poterit etiam fieri*

$$1+4efg=M^2+fN^2=R^2+gS^2,$$

ita ut M, N, R, S *sint rationales (cum in numero* $1+4efg$ *numeri* e, f, *et* g *sint natura sua permutabiles).*

Atqui in quovis numero primo $1+4efg=a^2+b^2$ *verum est prius (nam poni potest* $e=1$, $P=a$, $Q=b$, *ergo et posterius).*[1]

Auf der überschrifft dieses Briefes wird, wie auf den vorhergehenden, stehen *franco* biß Berlin; ich will aber auch hoffen daß meine Briefe Eurer Hochedelgeb. nach solcher Vorschrifft werden zugestellet werden, widrigenfalls mir darüber eine kleine *notam* ausbitte.[2] *S.^t Petersbourg* den 27. *Mart.* 1756.

R 894 Postscript to n° 179
Petersburg, March (16th) 27th, 1756
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 173r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 644; *Euler-Goldbach* (1965), p. 390

181
Euler to Goldbach
Berlin, April 17th, 1756

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Die von Eur. Hochwohlgeb. verlangten Bücher hat H. *Spener* zu überliefern und Dero *Ordre* gemäß binden zu lassen übernommen, hat auch versprochen, dieselben nächstens nebst dem *Clef du cabinet* nach Lübeck zu schaffen. Weil sich darunter so viel teutsche Bücher befanden, so möchte *M.^r Neaulme* wenig davon zu verschaffen im Stande gewesen seyn; dahingegen H. *Spener* noch nach der letsten Versendung einige von denen so Eur. Hochwohlgeb. das vorige mal verlangt, und die sich in dem jetzigen Aufsatz wiederum befinden, erhalten.[1]

Es hat seine völlige Richtigkeit, daß wann $1+4efg=P^2+eQ^2$, auch seyn werde

$$(P-2efyx)^2+e\,(Q-x)^2=1+4ef\left(g+efy^2x^2\right),$$

posita $x=4fPy+2Q$, und allso auch daß, so offt $e\left(g+efy^2x^2\right)$ ein *quadratum* ist, diese *Form* in M^2+fN^2 verwandelt werde. Hieraus aber möchte wenig zu folgern seyn: dann da e, f und g *numeri inter se primi* zu seyn pflegen, so sind die *factores* e und $g+efy^2x^2$ *inter se primi*, folglich kan ihr *product* kein *quadratum* seyn; es wäre dann daß man für y, x *numeros fractos* zulassen wollte, in welchem Fall man sich in noch grössere Schwierigkeiten verwickeln würde. Dann es sey $e = 2$, $f = 5$ und $g = 1$, allso $1 + 4efg = 41 = 3^2 + 2 \cdot 4^2$; dahero $P = 3$ und $Q = 4$. Nun nehme man $x = 4fPy + 2Q = 60y + 8$, so ist allerdings

$$1 + 40\left(1 + 10y^2x^2\right) = (3 - 20yx)^2 + 2\,(4 - x)^2\,.$$

Es wäre allso die Frage ob $e\left(g + efy^2x^2\right) = 2\left(1 + 10y^2x^2\right)$ ein *quadratum* seyn könnte: welches aber unmöglich ist so lang für x und y nur *numeri integri* angenommen werden. Wollte man aber auch Brüche zulassen, und für x seinen Werth $60y + 8$ setzen, so wäre $yx = 60y^2 + 8y$, allso $y^2x^2 = 3600y^4 + 960y^3 + 64yy$; und dahero geriethe man auf diese Frage, ob folgende *Formul*

$$72\,000y^4 + 19\,200y^3 + 1280y^2 + 2$$

ein *quadrat* seyn könne. Wann sich aber auch solches nach vieler Mühe finden sollte, so sehe ich nicht, was man damit gewonnen hätte. Inzwischen ist aber gewiß daß diese *Formul* auch in gebrochenen Zahlen niemals ein *quadrat* werden könne. Dann ehe man noch den Werth für x *substitui*rt, so setze man $yx = m$, allso $2 + 20m^2 = \square$. Ferner sey $m = \dfrac{n}{4}$, folglich $2 + \dfrac{5}{4}nn = \square$ oder $5nn + 8 = \square$ welches offenbahr unmöglich ist.

Das von Eur. Hochwohlgeb. angeführte *Argument*, daß, wann $1 + 4efg = P^2 + eQ^2$, auch seyn müsse

$$1 + 4efg = M^2 + fN^2 = R^2 + gS^2,$$

weil kein Grund vorhanden wäre, warum eine solche Auflösung bey einem der *factoren* e, f, g mehr Platz haben sollte als bey den anderen, würde in der *Metaphysic* für eine herrliche *Demonstration passi*ren können, wo man sich mit Beweisthümmern zu begnügen pflegt, welche bey weitem nicht so bündig sind. Allein in der *Mathematic* kommen mir dergleichen Schlüsse immer verdächtig vor. Eur. Hochwohlgeb. dehnen zwar diesen Satz auf alle *numeros rationales* überhaupt aus, in welchem Fall ich denselben für wahr halte, wann nur $1 + 4efg$ ein *numerus primus* ist: Welche nothwendige Bedingung gleichwohl im *Argumento* nicht enthalten ist, und auch nicht erhellet warum dieselbe hinzugesetzt werden sollte. Ohne diese Bedingung aber ist der Satz falsch, dann $1 + 4 \cdot 1 \cdot 5$ ist wohl $= P^2 + 5 \cdot Q^2$, und doch ist $1 + 4 \cdot 1 \cdot 5 = M^2 + 1 \cdot N^2$ unmöglich. Hernach wann man auch Mittel fände die Bedingung, daß $1 + 4efg$ ein *numerus primus* seyn müße, in den Beweiß einzuflechten, so sehe ich keinen Grund warum der Satz nicht auch wahr seyn sollte, wann für P, Q, M, N, R, S nicht nur *numeri rationales*, sondern auch *integri* genommen würden; dann wann die *reduction* $1 + 4efg = P^2 + eQ^2$ *in integris* Platz hat, so enthält der angegebene Beweiß keinen Grund, warum die andern *reduction*en nicht auch *in integris* Platz haben sollten. Allein in diesem Fall ist der Satz nicht mehr der Wahrheit gemäß, wie aus diesem *Exempel* erhellet: Es sey $e = 3$, $f = 5$, $g = 11$, so wird $1 + 4efg = 661$ (*numero primo*). Nun ist zwar

$661 = 19^2 + 3 \cdot 10^2$ und auch $661 = 16^2 + 5 \cdot 9^2$; doch aber kan die dritte *Resolution* $661 = R^2 + 11 \cdot S^2$ *in integris* auf keinerley Art bestehen. In Brüchen findet dieselbe aber statt, indem $661 = \left(\frac{13}{2}\right)^2 + 11\left(\frac{15}{2}\right)^2$; woraus klar abzunehmen, daß in dergleichen *Ratiociniis* die gröste Behutsamkeit gebraucht werden müsse.[2] Ich habe solches bey einigen über einige *Theoremata Fermatiana* gegebenen *Demonstration*en zur Gnüge erfahren. Als zum *Exempel* war der Beweiß sehr leicht, daß wann zwey *summae duorum quadratorum* mit einander *multiplicir*t werden, das *product* auch eine *summa* 2 *quadr*[*atorum*] seyn müsse, indem

$$(aa + bb)\,(cc + dd) = (ac \pm bd)^2 + (ad \mp bc)^2\,;$$

wer sollte nun daraus nicht schliessen, daß wann eine *summa* 2 *quadr*[*atorum*] durch eine andere *summam* 2 *quadr*[*atorum*] getheilt werden kan, der *Quotient* nicht auch eine *summa* 2 *quadr*[*atorum*] seyn müsse? Die Sache ist zwar wahr, allein der erwehnte Schluß ist unrichtig; dann wann derselbe richtig wäre müsste auch dieser richtig seyn: *Productum ex duobus numeris paribus semper est par: ergo si numerus par per alium parem sit divisibilis, quotus quoque erit par*: welches doch offenbahr falsch wäre.

Nächst gehorsamster Empfehlung aller der meinigen habe die Ehre mit der schuldigsten Hochachtung zu verharren

Eur. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 17$^{\text{ten}}$ *April.*
1756.

Eur. Hochwohlgeb. letste Briefe sind mir gantz *Franco* zugestellet worden.[3] Ungeacht es mir in der Statt an *Distraction*en nicht fehlet, so gehe ich doch öffters auf mein Guth um meine Muter zu besuchen.[4]

R 895 Reply to n° 179 and n° 180
Berlin, April 17th, 1756
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. V, fol. 119–120v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 645–648; *Euler-Goldbach* (1965), p. 390–391

182
Goldbach to Euler
Petersburg, May (7th) 18th, 1756

HochEdelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*,

Zuforderst ersuche ich Ew. HochEdelgebohrne dienstlich nicht übel zu deuten daß ich wiederum ein kleines *avertissement* an H.n *Spener* beyfüge.[1]

Was die *aequation* $1 + efg = P^2 + eQ^2 = M^2 + fN^2 = \&c.$ betrifft bin ich mit Eurer HochEdelg. einerley meinung indem die Natur der Zahlen P, Q, M, *&c.* nemlich ob es *numeri integri*, oder *fracti* oder *surdi* seyn sollen, nicht bestimmet wird, ohngeachtet die *numeri integri* e, f, und g *permutabiles* sind.[2] Daß aber die grosse Zahl $72\,000y^4 + 19\,200y^3 + 1280y^2 + 2$ kein $\Box$ seyn kan folget also fort wenn man dieselbe als ein *exemplum regulae* von $4n + 2 \neq \Box$ betrachtet.

Indessen bekenne ich daß ich noch nicht recht einsehe warum Ew. HochEdelgeb. zur wahrheit dieser *aequation* $1 + 4ef = P^2 + eQ^2$ erfordern daß $1 + 4ef$ ein *numerus primus* sey wenn P *et* Q *rationales* seyn sollen, da allein in dem *casu ubi* $f = e + k^2 - 1$, unzehliche Exempel vorhanden sind daß auch *numeri non-primi* diese Eigenschafft haben können als *posita* $e = k = 3$, *fit* $1 + 4 \cdot 3 \cdot 11 = 5^2 + 3 \cdot 6^2$.

Nachfolgendes *theorema* halte ich *pro demonstrabili*: *Sit* $p = a^2 + b^2$ *et sit* $1 + mQ^2$ *summa duorum quadratorum, erit etiam* $p = a^2 + b^2 = P^2 + \left(x^2 - mp\right) Q^2$, *ita ut, si reliqui numeri sint rationales, fiat etiam* x *rationalis.*[3]

Hiernechst verharre ich mit vieler hochachtung
Eurer HochEdelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.[t] Petersburg
den 18. *Maii st. n.*
1756.

R 896 Reply to n° 181
Petersburg, May (7th) 18th, 1756
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 174rv
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 649–650; *Euler-Goldbach* (1965), p. 392

183
Euler to Goldbach
Berlin, June 11th, 1756

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Eur. Hochwohlgeb. Einschluß habe ich sogleich bey dem H. Spener richtig bestellt,[1] zugleich aber mit dem grösten Unwillen gesehen, daß der Kasten mit den schon vorher verlangten Büchern noch nicht abgefertiget gewesen;[2] er schob die Schuld auf den Buchbinder, welcher ihn so lang aufgehalten hätte, und er hätte auch noch erst neulich einige Bücher bekommen welche er mit senden müsse. Da ich ihm aber angedeutet, daß noch ein andrer Kasten müsse nachgeschickt werden, so hat er mir heilig versprochen, daß dieser mit der ersten Fuhren nach Lübeck abgehen werde; *La Clef du Cabinet* ist darinn, und stund völlig in dem Gedanken, daß derselbe schon längst von hier abgeschickt worden.

Daß diese grosse Zahl $72\,000y^4 + 19\,200y^3 + 1280y^2 + 2$ kein *Quadrat* seyn könne, folget nur alsdann aus der *Formul* $4n+2 \neq \square$, wann y ein *numerus integer* ist; so viel ich mich aber erinnere, begriff y auch *numeros fractos*, und da wird allerdings eine besondere *Demonstration* erfordret. Man darf nur diese *Formul* $8xx + 2$ betrachten, welche wann x auch ein Bruch seyn kan, *infinitis modis* ein *Quadrat* seyn kan; als $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{7}{2}$, *etc.*; daß nun ein gleiches bey der obigen *Formul* nicht statt finde muß besonders bewiesen werden.

Daß ich zur Wahrheit dieser *Aequation* $1 + 4ef = PP + eQQ$ erfordere daß $1 + 4ef$ ein *numerus primus* seyn müsse, ist die Ursach, weil wann $1 + 4ef$ kein *numerus primus* ist, solche Fälle vorkommen, da $1 + 4ef$ nicht dieser *formul* $PP + eQQ$ gleich seyn kan; dann es sey zum *Exempel*: $e = 1$, $f = 5$, so ist gewiß $1 + 4ef = 21$ nicht gleich $PP + QQ$. Inzwischen gebe ich gern zu, daß $1 + 4ef = PP + eQQ$ in unendlich vielen Fällen wahr ist, wann gleich $1 + 4ef$ kein *numerus primus* ist; wann aber auch nur ein einiger Fall *in contrarium* könnte angeführt werden, so wäre derselbe hinlänglich die Wahrheit des Satzes zu zernichten. Hingegen wann diese Bedingung hinzugesetzt wird, daß $1+4ef$ ein *numerus primus* seyn müsse, so kan kein Fall *in contrarium* angeführt werden, wann man nehmlich für P und Q die Brüche nicht ausschliesst, und deswegen glaube ich, daß der Satz wahr sey, ungeacht ich denselben nicht beweisen kan. Wann aber die Bedingung, daß $1+4ef =$ *numero primo*, weggelassen wird, so kan man sicher behaupten, daß der Satz $1 + 4ef = PP + eQQ$ nicht wahr sey, weil die Anführung eines einzigen *exempels in contrarium* hinreichend ist denselben umzustossen.

Wann man aber für P *et* Q nur *numeros integros* zulässt, zugleich aber die *condition* fest setzt, daß $1 + 4ef$ ein *numerus primus* seyn müsse, so ist die *aequation* $1+4ef = PP+eQQ$ *in genere* gewiß nicht *demonstrabel*, indem ich unendlich viel Fälle *in contrarium* anführen kan. Ja das von Eur. Hochwohlgeb. angeführte *Exempel*, daß $1 + 4 \cdot 3 \cdot 11 = 133 = 5^2 + 3 \cdot 6^2$, ungeacht 133 kein *numerus primus* ist, reichet eine *exception* dar indem $1 + 4 \cdot 3 \cdot 11$ nicht ist $P^2 + 11Q^2$, welches gleichwohl seyn müste wann der Satz allgemein wahr wäre.

Das *Theorema*, so Eur. Hochwohlgeb. anführen,[3] daß wann $p = aa + bb$ und $1 + mQ^2$ *summa duorum quadratorum*, auch seyn werde $p = aa + bb = P^2 + (xx - mp)\,Q^2$, ist nicht nur *demonstrabel*, sondern man kan auch *in genere* die Werthe für P und x anzeigen, welche dieser *aequation* ein Genügen leisten. Dann es sey $1 + mQ^2 = rr + ss$, so nehme man $P = ar - bs$ und $x = \dfrac{as + br}{Q}$, alsdann wird augenscheinlich $aa + bb = P^2 + (xx - mp)\,Q^2$. Dann da

$$\begin{array}{c} P^2 = aarr - 2abrs + bbss \\ xxQQ = aass + 2abrs + bbrr \\ -\,mpQQ = -\,maaQQ - mbbQQ \\ \hline \end{array}$$

ob $p = aa + bb$, folglich

$$P^2 + (xx - mp)\,Q^2 = (aa + bb)\,(rr + ss) - m\,(aa + bb)\,QQ = aa + bb$$

weil $rr + ss = 1 + mQ^2$ *per hypothesin.*

Hiemit habe die Ehre mit der schuldigsten Hochachtung zu verharren
Eur. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 11 *Junii* 1756.

R 897 Reply to n° 182
Berlin, June 11th, 1756
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. V, fol. 121–122r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 651–653; *Euler-Goldbach* (1965), p. 392–393

184
Euler to Goldbach
Berlin, April 26th, 1757

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats*-Rath

Bey den gegenwärtigen Umständen, da ich mich seit geraumer Zeit der Ehre Dero Zuschrifft beraubet sehen muß,[1] würde ich Bedencken getragen haben, Eur. Hochwohlgeb. mit meinen Schreiben aufzuwarten, wann es mir nicht unverantwortlich geschienen hätte diese erwünschte Gelegenheit vorbey zu lassen, um Eur. Hochwohlgeb. meine schuldigste Ehrfurcht zu bezeugen. Der H. *Professor Aepinus*, welcher die Ehre zu haben wünschet, dieses Blatt Eur. Hochwohlgeb. einzuhändigen, ist nicht nur mein sehr guter Freund, sondern hat auch ausser seiner gründlichen Gelehrsamkeit solche Verdienste, welche mir die Versicherung geben, daß seine Bekanntschaft Eur. Hochwohlgeb. nicht unangenehm seyn wird; dahero ich mich unterstehe Denselben Eur. Hochwohlgeb. bestens zu empfehlen.[2]

Mein Sohn, welcher das Glück hat Eur. Hochwohlgeb. als seinen H. Pathen zu verehren, hat sich auch erkühnet bey dieser Gelegenheit Eur. Hochwohlgeb. seinen schuldigsten *Respect* zu bezeugen, und sich zu Dero Gewogenheit und Gnade gehorsamst zu empfehlen, welche Freyheit ich auch meiner Seits nicht übelzunehmen bitte.[3]

Die Erinnerung einer mir vormals vorgelegten Aufgabe hat mir neulich zu artigen Untersuchungen Anlaß gegeben, auf welche sonsten die *Analysis* keinen Einfluß zu haben scheinen möchte. Die Frage war: man soll mit einem Springer auf einem Schach Brett alle 64 Plätze dergestalt durchlaufen, daß derselbe keinen mehr als einmal betrette.[4] Zu diesem Ende wurden alle Plätze mit Marquen belegt, welche bey Berührung des Springers weggenommen wurden. Es wurde noch hinzugesetzt, daß man von einem gegebenen Platz den Anfang machen soll: Diese letstere Bedingung schien mir die Frage höchst schwehr zu machen; dann ich hatte bald einige Marsch*rout*en gefunden, bey welchen mir aber der Anfang musste frey gelassen werden; ich sahe aber, wann die Marsch*route in se rediens* wäre, also daß der Springer von dem letsten Platz wieder auf den ersten springen könnte, alsdann auch diese Schwierigkeit wegfallen würde. Nach einigen hierüber angestellten Versuchen habe ich endlich eine sichere *Methode* gefunden, ohne zu *probi*ren so viel dergleichen *Marchrout*en außfündig zu machen als man will (doch ist die Zahl aller möglichen nicht unendlich): eine solche wird in beygehender Figur vorgestellt. Der Springer springt nehmlich nach der Ordnung der Zahlen; weil vom letsten 64 auf *n.*° 1 ein Springe-Zug ist, so ist diese Marsch*route in se rediens.*

54	49	40	35	56	47	42	33
39	36	55	48	41	34	59	46
50	53	38	57	62	45	32	43
37	12	29	52	31	58	19	60
28	51	26	63	20	61	44	5
11	64	13	30	25	6	21	18
14	27	2	9	16	23	4	7
1	10	15	24	3	8	17	22

Hier ist noch diese Eigenschaft angebracht daß *in areolis oppositis* die *differentia numerorum* allenthalben 32 ist.

Alle die meinigen lassen sich Eur. Hochedelgeb. gehorsamst empfehlen, und ich habe die Ehre mit der schuldigsten Ehrfurcht lebenslang zu verharren

Eur. Hochwohlgeb.

gehorsamster Diener

L. Euler

Berlin den 26 *April* 1757.

R 898 Berlin, April 26th, 1757
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. V, fol. 126–127r
Address: "*A Monsieur / Monsieur de Goldbach / Conseiller d'Etat actuel de S*[*a*] *M*[*ajesté*] *Imp*[*eriale*] */ au Departement des Affaires Etrangeres / &c. &c. / à / S.t Petersbourg.*"
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 654–655; *Euler-Goldbach* (1965), p. 393–394

184a
Johann Albrecht Euler to Goldbach[1]
Berlin, April 20th, 1757

Hochwohlgebohrener Herr
Hochgeehrtester Herr Etats-Rath

Die besondere Güte und Gewogenheit, die Dieselben jederzeit gegen unser gantzes Haus haben blicken lassen, macht mich so kühn, Eur. Hochwohlgebohrnen mit diesen Zeilen aufzuwarten und zugleich meines gehohrsamsten Respects zu versichern: Es ist freylich wahr, daß dieses schon längst meine Schuldigkeit gewesen; aber, da ich es schon einmahl versäumet hatte, so habe mich nicht unterstehen dörfen dieselbe in der späteren Zeit zu beobachten: Denn so gewiß ich auch jederzeit von Eur. Hochwohlgebohrnen besondern Gewogenheit versichert gewesen, so groß war auch allezeit meine Ehrfurcht gegen Dieselben, und überdem machte mich die Furcht, Eur. Hochwohlgebohrnen beleidiget zu haben, so blöde, daß ich mich nicht mehr unterstehen dörfte Denselben mit einem Brief aufzuwarten. Dennoch hat das große Vertrauen, so ich zu Eur. Hochwohlgebohrnen Gewogenheit jederzeit geheget, meiner Blödigkeit obgesieget, und eine grössere Furcht, meine für sich schon schlimme Sache durch Fortfahrung in derselben noch schlimmer zu machen, hat mich endlich zu dem Endschluß gebracht, Eur. Hochwohlgebohrnen bey dieser schönen Gelegenheit durch diese wenige Zeilen zu zeigen, wie sehr ich Dieselben verehre und wie sehr es mich reue, dieses Bekentnüß meiner Schuldigkeit gemäß nicht eher abgelegt zu haben.

Der Herr Professor Aepinus als Überbringer dieses Briefes, einer von meinen besten Freunden, so ich hier in Berlin gehabt, reißt anjetzo nach Petersburg;[2] er war so gütig und both sich selber an Briefe mit nach Petersburg zu nehmen um dadurch Gelegenheit zu bekommen bey Eur. Hochwohlgebohrnen aufzuwarten: Dieser Umstand schien mir hinreichend zu seyn die Freyheit zu entschuldigen, welche ich nehme an Eur. Hochwohlgebohrnen zu schreiben und dasjenige wieder gut zu machen zu suchen, was ich so schändlich versäumet. Ich schmeichele mir der süssen Hoffnung, es werden Eur. Hochwohlgebohrnen meine vorige Nachlässigkeit gütigst verzeihen und diesen gegenwärtigen Brief also aufnehmen, wie ich es zu meinem Glücke immer wünschen möge.

Ich werde mich höchst glücklich schätzen, wenn Eur. Hochwohlgebohrnen dieses geringe Merckmahl meiner schuldigsten Ehrfurcht gnädig aufnehmen; und ich erkühne mich Dieselben um Dero Gewogenheit und Gnade gehohrsamst anzuflehen, der ich mit dem schuldigsten Respect lebenslang verharre

Eur. Hochwohlgebohrnen
unterthänigster und Gehohrsa[mster]
Diener
Johann Albrecht Euler

Berlin den 20$^{\text{ten}}$ Aprill
1757

n° 184$^{\text{a}}$ Enclosure in n° 184
Berlin, April 20th, 1757
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. V, fol. 128–129r

185
Euler to Goldbach
Berlin, June 29th, 1762

Hochwohlgebohrner Herr
*Hochgeehrtester Herr Etat*s Rath
Hochgeneigtester Gönner

Nach dem so schwehren Ungewitter, welches mich ausser Stand gesetzet, meine schuldigste Ehrerbietung *Ew. Hochwohlgeb.* schrifftlich zu bezeugen,[1] habe ich mich in der völligen Ungewißheit *Dero* Zustands noch nicht unterstehen dörfen meine gehorsamste Pflicht bey *Ew. Hochwohlgeb.* abzustatten; ich hatte deswegen den H. *Prof.* Müller ersuchet mir darüber die nöthigen Erläuterungen zu ertheilen.[2] Um soviel lebhafter war demnach meine Freude, als ich vorgestern *Ew. Hochwohlgeb.* gütigstes Schreiben[3] zu erhalten das Glück hatte, und ich kan so wenig mein Vergnügen über *Dero* Wohlseyn als die danckbarsten Empfindungen meines Herzens über *Dero* fortdaurende gantz ungemeine gnädige Gesinnung gegen mich und die meinigen mit Worten ausdrücken; insonderheit bin ich über das huldreiche Andenken, dessen *Ew. Hochwohlgeb.* meinen ältesten Sohn haben würdigen wollen, innigst gerührt, und derselbe ist darüber auch vor Freude gantz ausser sich selbst. Nachdem ihm von S[eine]$^{\text{r}}$ K[öniglichen] M[ajestät] eine Stelle bey unserer *Academi*e Allergnädigst ertheilet worden, so hat er sich schon vor einigen Jahren [zu] unserem Vergnügen verheurathet, und da sein Einkommen wegen der [Krie]gs Unruhen noch sehr gering, so lebt er mit seiner Frau bey uns und wir haben die Freude ein artiges Großtöchterleyn erlebet zu haben:[4] die *Göttliche* Vorsehung hat bißher bey so mancherley Trübsaalen so gnädiglich und wunderbar über uns gewaltet, daß wir auch wegen des künftigen unser festes Vertrauen auf *Dieselbe* setzen. Mein zweyter Sohn der auch noch in *Petersburg* gebohren hat sich mit allem Fleiß auf die *Medicin* gelegt, und ist gegenwärtig in Halle, wohin ich ihn vor einem Jahre gebracht habe, und gedencket daselbst auf künftigen Herbst zu *promovi*ren;[5] ich habe den Trost, daß seine HH. *Professores* seinen Fleiß und gute Aufführung nicht genug rühmen können. Mein jüngster Sohn der hier *A.* 1743 gebohren, hat sich dem Kriegswesen gewidmet, und ist nun *Lieutenant* bey der *Artillerie*, wo man ungemein wohl mit ihm zu frieden ist;[6] ausser diesen haben wir noch zwey Töchtern;[7] und leben hier in dem Grösten Vergnügen durch die Gnade Gottes beysammen ungeacht hier jederman über die ausgestandenen harten Drangsaale die bittersten Klagen führt; und ich auch das Unglück gehabt, daß mein Landguth in *Charlotten*burg, als unsere Statt in Russischen Händen war, rein ausgeplündert worden. Der H. *General Tcherni*scheff, welcher mich vormals daselbst besucht hatte, schickte mir zwar sogleich eine *salvegard*e, sie kam aber doch zu späth; und ich habe meine Hoffnung zu Ersetzung des erlittenen Verlusts noch nicht aufgegeben, da ich deswegen so wohl von des H. *Hettman*s als des H. Großkantzlers Hochgräfl[icher] *Excellenz* die gnädigsten Versicherungen erhalten habe, und mir von der *Academi*e angerathen worden mich auch deswegen bey unserem Gesandten dem H. *Baron* von *Golz* zu melden: doch scheinen mir die gegenwär[tigen] Umstände dazu noch nicht die günstigsten zu seyn.[8] Doch überwigt unseren Kummer himmelweit unsere inbrünstigste Freude über die höchst wunderbahre und *Göttliche* Errettung unsers Allertheursten *König*s, und unsere Kirchen ers[ch]allen immer von den herzlichsten Lobeserhebungen *Seiner Glorwürdigst regierenden* Russisch Kaiserl[ichen] *Majestät*, *Welchen* der *Allerhöchste* mit allem nur möglichen Segen überschütten wolle![9]

Ich habe das feste Vertrauen zu *Ewr. Hochwohlgeb.* gnädiger Zuneigung, daß *Dieselben* über die weitläufige Erzählung meiner Umstände nicht ungeduldig werden, sondern uns noch ferner *Dero* hochgeschätzte Wohlgewogenheit zuzuwenden geruhen werden, zu welcher ich mich samt den meinigen auf das inständigste gantz gehorsamst empfehle. Der *Allmächtige Gott* wolle *Ewr. Hochwohlgeb.* bey beständiger Gesundheit und allem wahrhaften Wohlseyn immerfort erhalten, und in allen Stücken S*einen* reichen und Herzerquickenden Segen verspühren lassen!

Ich habe die Ehre mit der vollkommensten Ehrerbietung zu seyn
Ew. Hochwohlgebohrnen
gehorsamstverpflichtetster Diener
L. Euler

Berlin den 29$^{\text{ten}}$ *Junii* 1762.

R 899 Berlin, June 29th, 1762
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. V, fol. 130–131r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 656–658; *Euler-Goldbach* (1965), p. 394–395

186
Euler to Goldbach
Berlin, September 25th, 1762

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr Geheimer Rath

Der H. *Prof.* Müller ist Schuld daran daß ich mich unterstehe nochmals an *Ew. Hochwohlgeb.* zu schreiben, da solches schon vor einigen Monathen geschehen, gleich nachdem ich *Dero* Geehrtestes Schreiben erhalten; derselbe meldet mir, daß *Ew. Hochwohlgeb.* mir allbereit geantwortet hätten;[1] weil ich nun seitdem von *Denselben* kein Schreiben erhalten, so komme ich auf die Gedanken, daß sich diese Nachricht auf das erstere beziehen, und allso mein gehorsamstes Schreiben nicht einmal eingelaufen seyn möchte; so wenig mir aber dieses wahrscheinlich vorkommt, da mir auch bey den grösten Verwirrungen noch kein Brief verlohren gegangen, so würde es mir um so viel schmerzlicher fallen, wann dieses Schicksaal denjenigen Brief betroffen hätte, worinn ich nach einer recht unerträglich langen Zeit *Ew. Hochwohlgeb.* meine unveränderte und vollkommenste Ehrerbietung wiedrum habe bezeugen dörfen. Über dieses entschuldiget sich auch der H. P*rof.* Müller gegen mich, daß er vergessen, mich zu seiner Zeit zu benachrichtigen, daß *Ew. Hochwohlgeb.* zu der Würde eines Geheimen Raths erhoben worden;[2] ich empfinde darüber allso nun erst die lebhafteste Freude, und ersuche *Ew. Hochwohlgeb.* gehorsamst diese meine allzuspäthe aber herzlichste Glückwünschung nicht zu verschmähen. Der *Allmächtige Gott* wolle *Dieselben* die damit verknüpfte Vortheile und Vorzüge bey vollkommner Gesundheit und allem Vergnügen biß in das spätheste Alter in dem reichsten Maasse geniessen lassen!

Meine gantze *Familie* lässt sich nebst mir *Ew. Hochwohlgeb.* auf das gehorsamste empfehlen, und insonderheit mein ältster Sohn seine tiefste Ehrfurcht bezeugen; ich aber habe die Ehre mit der vollkommensten Ehrerbietung lebenslang zu verharren

Ew. Hochwohlgebohrnen
gehorsamstverpflichtetster
Diener *L. Euler*

Berlin den 25$^{\text{ten}}$ *Sept.* 1762.

Theorema. Si habeantur numeri quotcunque inaequales a, b, c, d, etc. ex iisque formentur sequentes fractiones:

$$\frac{a^n}{(a-b)\,(a-c)\,(a-d)\ etc.};\qquad \frac{b^n}{(b-a)\,(b-c)\,(b-d)\ etc.};$$
$$\frac{c^n}{(c-a)\,(c-b)\,(c-d)\ etc.};\qquad \frac{d^n}{(d-a)\,(d-b)\,(d-c)\ etc.};\ etc.$$

earum summa semper est $= 0$*, si exponens n (quem integrum intelligi oportet) minor sit numero factorum in singulis denominatoribus; sin autem ei sit aequalis summa fit* $= 1$.[3]

Exempl[*um*]. *Sint numeri propositi* 10, 9, 7, 4, 2, *erit*

$$\frac{10^n}{1\cdot 3\cdot 6\cdot 8}-\frac{9^n}{1\cdot 2\cdot 5\cdot 7}+\frac{7^n}{3\cdot 2\cdot 3\cdot 5}-\frac{4^n}{6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}+\frac{2^n}{8\cdot 7\cdot 5\cdot 2}=0$$

si $n<4$*; at si* $n=4$ *summa est* $=1$*; sit* $n=0$ *erit*

$$\frac{1}{144}-\frac{1}{70}+\frac{1}{90}-\frac{1}{180}+\frac{1}{560}=0;$$

est manifestum; in genere fractionibus ad communem denominatorem reductis fit

$$35\cdot 10^n-72\cdot 9^n+56\cdot 7^n-28\cdot 4^n+9\cdot 2^n=0$$

dummodo $n<4$.

Dieses *Theorema* scheint nicht wenig merkwürdig zu seyn; es deucht mich aber, *Ew. Hochwohlgeb.* haben mir schon längst dergleichen etwas mitzutheilen geruhet.[4]

R 900 Berlin, September 25th, 1762
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. V, fol. 132–133r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 659–660; *Euler-Goldbach* (1965), p. 396

187
Goldbach to Euler
Petersburg, October (8th) 19th, 1762

HochEdelgebohrner Herr
Insonders Hochgeehrter Herr *Director*

Eurer HochEdelgebohrnen beyde letztere briefe sind mir den 15. *Jul.* und 11. *Oct. st. n.* allhie richtig abgegeben worden.[1] Für Dero an mich abgestattete geneigte *gratulation* wie auch für das mir *communicir*te schöne *theorema* sage ich schuldigsten Danck, befinde mich aber jetzo gäntzlich ausser Stande selbiges *pro dignitate* zu betrachten.

Ich habe unlängst einige *tomos* vom *Hamb*[*urgischen*] *Magaz*[*in*] durchgeblättert und darin die grossen *éloges* welche Eurer HochEdelgeb. an unterschiedenen orten so billig beygeleget werden,[2] mit ungemeinem Vergnügen beobachtet. Dero Herrn Sohne *gratuli*re ich von gantzem hertzen zur abermahligen Petersburgischen *piece victorieuse*,[3] bitte meine Empfehlung an Dero sämtliche [Familie] zu machen und verharre Eurer HochEdelgebohrnen

ergebenster Diener
Goldbach.

S.[t] *Petersbourg*
den 19. *Oct. st. n.* 1762.

vert[*e*]

P. S. Ich habe *observi*ret daß der *aequation* $a^2+b^2 = P^2+eQ^2$, allezeit ein gnügen geschiehet *positis* $P=\dfrac{b^2-a^2}{b}$, $e=3b^2-a^2$, $Q=\dfrac{\pm a}{b}$ woraus unzehliche dergleichen *valores pro summa* a^2+b^2 *formi*ret werden können.[4]

R 901 Reply to n° 185 and n° 186
Petersburg, October (8th) 19th, 1762
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 175r, 176r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 661–662; *Euler-Goldbach* (1965), p. 397

188
Euler to Goldbach
Berlin, November 9th, 1762

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr Geheimer Rath

Die Frage, welche *Ew. Hochwohlgeb.* zu berühren belieben,[1] was für Zahlen in einer jeden von diesen *Formuln* $aa+bb$ und $pp+eqq$ zugleich enthalten sind, ist in der Lehre von den Zahlen nicht nur von der grösten Wichtigkeit, sondern fasset auch solche besondern Schwierigkeiten in sich welche dieselbe höchst merkwürdig machen insonderheit wann mehr als zwey *Formuln* vorgeschrieben werden.[2] Wann nur zwo gegeben sind, und man sucht alle Zahlen N so zugleich in diesen beyden *Formuln* $aa+mbb$ und $cc+ndd$ enthalten sind, wo m und n gegebene Zahlen sind,[3] so finde ich

$$N=(mpp+nqq+rr+mnss)^2-4mn\,(pq-rs)^2\,,$$

dann daraus wird

$$\begin{aligned} N &= (mpp-nqq-rr+mnss)^2+m\,(2pr+2nqs)^2 \\ &= (mpp-nqq+rr-mnss)^2+n\,(2qr+2mps)^2\,. \end{aligned}$$

Wann aber mehr als zwey dergleichen Formeln vorgegeben sind, in welchen die Zahlen N enthalten seyn sollen, so hört die *algebra*ische Hülfe fast gäntzlich auf, und eben deswegen ist es um so viel merkwürdiger, daß alsdann dergleichen Fragen auf eine gantz andere Art gantz leicht aufgelöset werden können, wobey aber der Beweiß noch fehlet. Allso wann solche Zahlen verlangt werden, so zugleich in diesen *Formuln* $aa+bb$, $cc+2dd$, $ee+3ff$, $gg+5hh$ enthalten sind, so darf man nur die

Zahl nehmen die sich durch die gegebenen 1, 2, 3, 5 theilen lässt: diese ist nun 30. Alsdann so oft $4 \cdot 30x+1 = 120x+1$ ein *numerus primus* ist, so hat man eine Zahl für N, und zwey oder mehr dergleichen *numeri primi* mit einander *multiplicir*t geben ebenfals Zahlen für N. Dahero sind diese *numeri primi* $120x+1$ folgende: 241, 601, 1201, 1321, 1801, *etc.* von welchen der erste

$$241 = 15^2 + 4^2 = 13^2 + 2 \cdot 6^2 = 7^2 + 3 \cdot 8^2 = 14^2 + 5 \cdot 3^2,$$

wobey dieses ins besondere zu merken ist, daß diese Eigenschaft nur den in der *Formul* $120x+1$ enthaltenen *numeris primis* zukommt. Hernach da *Ew. Hochwohlgeb.* gezeigt, daß eine *summa duorum quadratorum* $aa+bb$ auch in dieser *Form* $PP+eQQ$ enthalten ist, wann $e = 3bb - aa$ oder $3aa - bb$; ja noch allgemeiner wann $e = (2\alpha+1)\,bb - \alpha\alpha aa$, so können daher noch gar schöne Erläuterungen der obigen Eigenschaften gezogen werden, als zum Exempel, daß eine solche Zahl $aa+nbb$ auch zugleich in dieser *Form* $PP + ((2\alpha+n)\,aa - \alpha\alpha bb)\,QQ$ enthalten ist, wo es sich aber fügen kan, daß P und Q Brüche seyn müssen. Als es sey $a=7$, $n=3$, $b=8$, und die Zahl $aa+nbb=241$, so ist dieselbe auch in dieser *Form* $PP+eQQ$ enthalten, *sumto*

$$e = (2\alpha+3)\;49 - 64\alpha\alpha = 147 + 98\alpha - 64\alpha\alpha = 147 + 49\beta - 16\beta\beta$$

(*posito* $2\alpha=\beta$); solche Zahlen für e sind demnach 147, 82, 181, 150, 87, 180, -15, oder (*per* $\square$ *dividendo*) 3, 5, 6, 82, 87, 181, wobey allso sehr merkwürdig ist daß die Zahl 241 auch in dieser *Form* $PP+82QQ$ enthalten ist, welches aus obiger Regel nicht kan erkannt werden, dann hier ist $P=\frac{81}{7}$ und $Q=\frac{8}{7}$.

Der Beweiß von dem *Theoremate numerico*, wovon letstens *Ew. Hochwohlgeb.* Erwehnung zu thun die Ehre gehabt,[4] ist auch gantz sonderbar. Ich betrachtete diesen Bruch $\dfrac{x^n}{(x-a)\,(x-b)\,(x-c)\;etc.}$, von welchem bekannt ist daß sich derselbe in diese einfache Brüche $\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{x-b}+\dfrac{C}{x-c}$ *etc.* auflösen lässt, und die Zahlen A, B, C *numeri constantes* werden, wann nur der *exponens* n kleiner ist als der *numerus factorum in denominatore*. Nun aber bestimme ich die Zähler A, B, C *etc.* folgender gestalt: Um A zu finden *multiplici*re ich alles mit $x-a$ und bekomme:

$$A = \frac{x^n}{(x-b)\,(x-c)\;etc.} - \frac{B\,(x-a)}{x-b} - \frac{C\,(x-a)}{x-c}\;etc.$$

und weil ich weiß daß A nicht von x *dependir*t, so muß für A immer einerley Werth herauskommen, ich mag für x annehmen was ich will. Ich setze allso $x=a$, und da bekomme ich $A = \dfrac{a^n}{(a-b)\,(a-c)\;etc.}$; eben so wird $B = \dfrac{b^n}{(b-a)\,(b-c)\;etc.}$,

$C = \dfrac{c^n}{(c-a)\,(c-b)\ etc.}$. Allso ist *in genere*

$$\frac{x^n}{(x-a)\,(x-b)\,(x-c)\ etc.} = \frac{a^n}{(a-b)\,(a-c)\cdots(x-a)} + \frac{b^n}{(b-a)\,(b-c)\cdots(x-b)} + \frac{c^n}{(c-a)\,(c-b)\cdots(x-c)}\ etc.$$

und diese letsteren Brüche auf die andere Seite hinübergetragen

$$\frac{a^n}{(a-b)\,(a-c)\,(a-d)\cdots(a-x)} + \frac{b^n}{(b-a)\,(b-c)\,(b-d)\cdots(b-x)} + \frac{c^n}{(c-a)\,(c-b)\,(c-d)\cdots(c-x)} + etc. = 0.$$

Ew. Hochwohlgeb. lässt sich mein gantzes Haus und insonderheit mein ältester Sohn, der dieser Tagen auch den Preiß in München erhalten,[5] gantz gehorsamst empfehlen, und ich verharre mit der tiefsten Ehrerbietung

Ew. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler.

Berlin den 9ten *Nov.* 1762.

R 902 Reply to nº 187
Berlin, November 9th, 1762
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. V, fol. 135–136r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 663–666; *Euler-Goldbach* (1965), p. 397–399

188ᵃ
Johann Albrecht Euler to Goldbach[1]
Berlin, November 9th, 1762

Hochwohlgebohrner Herr
HochzuEhrender Herr Geheimer Rath

Das gütige Andencken, womit Ew. Hochwohlgebohrnen mir durch Dero schmeichelhaffte Zuschrifft vom 7ten *Junii a*[*nni*] *c*[*urrentis*] beehret haben,[2] macht mich so verwegen daß ich mich Denenselben nochmahls schrifftlich zu empfehlen unterstehe.

Ew. Hochwohlgebohrnen haben jederzeit einen so liebreichen Antheil an allem demjenigen genommen, welches mir und den meinigen nur im geringsten angegangen ist, daß ich nicht zweiffele Dieselben werden mir nicht übel nehmen sondern es viel mehr als eine Beobachtung meiner Schuldigkeit ansehen, wenn ich

Ew. Hochwohlgebohrnen hiermit die wenige Veränderungen, die mit mir seit der Abreise des H. Raths *Aepinus* nach Petersburg vorgegangen,[3] kürtzlich berichte.

Es geht bereits schon in das dritte Jahr daß ich mit der ältesten Tochter des Hoffraths Hagmeister allhier, in dem heil[igen] Stand der Ehe vergnügt und beglückt lebe, und bißhero hat der Seegen dieser Ehe in einem Töchterlein bestanden, welches uns der gütige Himmel vergangenes Jahr zu unserer grossen Freude geschencket hat.[4] Mit dieser kleinen *famil*le lebe ich in dem Hause meiner Eltern und warte auf den schon so längst erwünschten Frieden oder vielmehr auf eine Bedienung, die mir zu meinem Eigenen verhelffen soll. Unterdessen geniesse ich der schönen Gelegenheit meine geringe Fähigkeit unter der Führung meines Vaters immer mehr und mehr zu erweitern. Ausser denen Abhandlungen welche ich in den Versamlungen der hiesigen *Academie* vorzulesen verfertige, suche ich noch immer über diejenige Preiß-Fragen zu arbeiten welche die verschiedenen *Academi*en der Wissenschafften der gelehrten Welt vorlegen und es ist mir durch Hülffe meines Vaters nicht selten geglückt einen Preiß zu erschleichen. Noch kürtzlich habe ich die angenehme Nachricht erhalten, daß mir die Müncher *Academi*e den Preiß ertheilet hat, welche dieselbe auf dieses Jahr demjenigen versprochen hatte, der die Verhältnüß der mittleren Bewegung des Mondes und s[einer] mittleren Entfernung von der Erde gegen die Kräffte, welche auf den Mond wü[rcken,] am besten bestimmen würde.[5] Dieser Preiß besteht in einer goldenen *M*[*edaille*] von 50 Dukaten und ich hoffe dieselbe gegen das Ende der Neujahrs-messe [zu] bekommen.

Meine Frau empfiehlt sich samt unserm Kinde der Wohlgewogenheit Ew. Hochwoh[lgeb.] und ich verbleibe mit einer wahren Ehrfurcht

Hochwohlgebohrner Herr
Hochzuehrender Herr Geheimer Rath
Ew. Hochwohlgebohrnen
unterthänigster Diener
J Albrecht Euler

Berlin den 9ten Winter Monaths
1762.

n° 188^a Berlin, November 9th, 1762
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. V, fol. 137–138r
Address (fol. 138): "*À Monsieur / Monsieur de Goldbach / Conseiller Privé de S*[*a*] *M*[*ajesté*] *Imp*[*ériale*] */ au Département des Affaires / Etrangères &c. &c. à / Petersbourg*"

189
Euler to Goldbach
Berlin, October 1st, 1763

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr Geheimer Rath
Hochgeneigter Herr und *Gönner*

So wohl aus *Ewr. Hochwohlgeb.* Stillschweigen als aus den Erzählungen des jungen Herrn Stähelins[1] habe mit der grösten Betrübnüß *Dero* kränclichen und so gar bettlägerigen Zustand vernommen; als ich aber heute die Ehre hatte über eine Stunde mit des H. Groß Cantzlers *Hochgräfl*[*ichen*] *Excellenz* zu sprechen,[2] so waren *Ew. Hochwohlgeb.* meistentheils davon der Vorwurf, und S[ein]e *Excell*[*enz*] sagten mir, daß *Dieselben* im Stande gewesen noch vor *Dero* Abreise persönlich Abschied zu nehmen. S[ein]e *Excell*[*enz*] haben mir auch ausdrücklich aufgetragen heute noch an *Ewr. Hochwohlgeb.* zu schreiben, und *Dieselb*en nebst der Nachricht von *Dero* glücklichen Ankunft allhie *Dero* beständigen und aufrichtigsten Freundschaft zu versichern; ich habe auch Befehl *Ewr. Hochwohlgeb.* auf das inständigste um bessere Vorsorge vor *Dero* uns so theure Gesundheit zu bitten, als zu deren Erhaltung *Ew. Hochwohlgeb.* Selbst viel mehr beytragen könnten als würklich geschieht, indem *Dieselben* Sich meistentheils in *Dero* Zimmer eingeschlossen halten, da doch gewißlich öffteres Ausfahren und Verändrung der Lufft die herrlichste Würkung haben würde. *Ewr. Hochwohlgeb.* können leicht erachten, daß ich nun auch eben diese Bitte von Grund meines Herzens auf das beweglichste wiederhohle, da die Nachricht von *Dero* völligem Wohlseyn bey mir die unaussprechlichste Freude erwecken würde.

In meinem Hause steht Gott sey Dank alles wohl, und ich habe dieser Tagen meine jüngste Tochter an einen Holländischen Edelman von grossem Vermögen nahmens *Baron* von *Delen* versprochen; derselbe ist hier *Officier* unter den *Gens d'armes*, und ist kürzlich von einer nach Holland gethanen Reise wieder zurükgekommen, wohin er meinen zweyten Sohn, der *D*[*octo*]*r Medicinae* ist, mit sich genommen hatte, um ihn bey seiner gantzen *Famille* bekannt zu machen.[3]

Noch hat sich hier der Anschein noch nicht verlohren, daß die hiesige *Academie* in eine *Academie Françoise* verwandelt werden soll: so sehr ich mich vor einer nochmaligen Orts Verändrung entsetze, so würde ich mich doch in diesem Fall dazu entschliessen müßen,[4] und nichts würde mich dabey herzlicher erfreuen als *Ewr. Hochwohlgeb.* nochmals sehen zu können.

Alle die meinigen, und insonderheit mein ältester Sohn lassen uns zu *Ewr. Hochwohlgeb.* beständigen Gewogenheit und Gnade auf das gehorsamste empfehlen, und ich habe die Ehre mit der tiefsten Ehrerbietung zu seyn

Ewr. H*ochwohlgeb.*
unterthänigstgehorsamster
Diener *L. Euler*

Berlin den 1ten *Octobr* 1763

R 903 Berlin, October 1st, 1763
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. V, fol. 139–140r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 667; *Euler-Goldbach* (1965), p. 399

190
Euler to Goldbach
Berlin, October 11th, 1763

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr Geheimer Rath
Hochgeneigtester Gönner

S[ein]e *Hochgräfl*[*iche*] *Excellenz* der H. Gross *Canzler* haben mir bey *Dero* Abreise von hier nochmals aufgetragen an *Ewr. Hochwohlgeb.* zu schreiben und *Dieselben* Dero beständigen und aufrichtigsten Freundschaft zu versichern, welches mir auch der Frau Groß *Cantzlerin* Erlaucht besonders von Ihrer Seite auf das angelegentlichste befohlen auszurichten. *Ewr. Hochwohlgeb.* kan ich nicht genug anpreisen, wie einer grossen Gnade ich von Ihro *Excellenz*en allhier gewürdiget worden: da ich täglich daselbst speisen müssen; und als vorgestern Mittag der Prinz *Dolgoruki Denselben* nach verrichtetem *Gottes*-Dienst die Abschieds Mahlzeit gab, hatten mich der H. Groß *Canzler* ausdrücklich dazu eingeladen, und darauf auf das huldreichste von mir Abschied genommen. Mehrentheils wurde von *Ewr. Hochwohlgeb.* gesprochen, und S[ein]e *Hochgräfl*[*iche*] *Excell*[*enz*] bezeugten bey aller Gelegenheit *Dero* gantz besondere Gewogenheit und Freundschaft gegen *Dieselben*, beklagten dabey aber immer *Dero* kränkliche Umstände mit dem herzlichsten Wunsch bald erfreuliche Nachrichten von *Dero* Besserung zu vernehmen. *Ihro Excellenz* denken noch in Wien zu seyn, wann ich von *Ewr. Hochwohlgeb.* auf mein voriges Schreiben Antwort erhalten werde, und ich habe *Ordre* sogleich davon Nachricht zu geben, und hernach auch ferner nach *Itali*en, wo Ihro *Excell*[*enz*] Sich biß künftige Ostern zu *Florenz* aufzuhalten, und alsdann nach *Neapolis* zu gehen willens sind.[1]

Diese mir gnädigst aufgetragene *Commission* verrichte ich mit so viel grösserer Freude, da diese Versicherungen bey *Ew. Hochwohlgeb.* ein gantz besonderes Vergnügen erwecken werden, und ich wünsche von Grund meines Herzens daß dadurch auch ein heilsamer Einfluß auf die Gesundheit *Ew. Hochwohlgeb.* gewürket werden möge.

Als sich letstens *M.r D'Alembert* einige Zeit hier aufhielt und von S[eine]r *Majestät* dem König mit den Höchsten Gnadenbezeugungen überhäuffet wurde, hatte ich auch Gelegenheit denselben persönlich kennen zu lernen, nachdem schon seit geraumer Zeit unser Briefwechsel wegen einiger gelehrten Streitigkeiten unterbrochen gewesen, in welche ich mich nicht einlassen wollte. Nun aber ist unsere Freundschaft auf das vollkommenste wiederhergestellet worden; und man kan mir nicht genug beschreiben, mit wie grossen Lobeserhebungen er beständig mit S[eine]r Königl[ichen] *Majestät* von mir gesprochen. Unter der Hand wird versichert, daß er doch künftigen *May* wieder herkommen und die *Praesident*en Stelle unserer *Academie* antretten werde.[2]

Mein gantzes Hauß empfiehlt sich gehorsamst zu *Ew. Hochwohlgeb.* beständigen Gewogenheit und Gnade, und ich verbleibe mit der tiefsten Ehrerbietung

Ewr. Hochwohlgeb.
unterthänigster Diener
L. Euler

Berlin den 11ten *Octobr.* 1763.

R 904 Berlin, October 11th, 1763
Original, 1 fol. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. V, fol. 141rv
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 668; *Euler-Goldbach* (1965), p. 400

191
Goldbach to Euler
Petersburg, October (7th) 18th, 1763

HochEdelgebohrner Herr,
Insonders Hochgeehrter Herr *Professor*,

Eurer HochEdelgebohrnen will ich mit erzehlung meiner bey dem nunmehro über $73\frac{1}{2}$ Jahr gestiegenen alter erfolgten sehr natürlichen Schwächlichkeit nicht besch[w]erlich fallen. Daß des H.n GroßCantzlers *Excell*[*enc*]*e* glücklich in Berlin angelanget und sich mit Eurer H. über eine Stunde lang zu besprechen die güte gehabt[1] gereichet mir zu ungemeiner Freude; Ihro *Ex*[*cellenc*]*e* sonderbare gewogenheit gegen mir habe ich schon seit 20 Jahren fast ohne unterlaß zu rühmen ursach gehabt.

Zu der *avantageu*sen Verlöbniß Dero Jungfer Tochter[2] *gratuli*re ich Eurer HochEdelgeb. und der Frau *Professo*rin imgleichen Dero H.n Sohn und sämmtlichen *Famili*e von gantzen hertzen und verharre nechst aufrichtigstem anwunsch alles ferneren vergnügens

Eurer HochEdelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.t Petersbourg
den 18. *Oct. st. n.* 1763.

R 905 Reply to nº 189
Petersburg, October (7th) 18th, 1763
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 178rv
Published: *Euler-Goldbach* (1965), p. 400–401

192
Goldbach to Euler
Petersburg, October (16th) 27th, 1763

HochEdelgebohrner Herr
Insonders Hochgeehrter Herr *Professor*

Auf Eurer HochEdelgebohrnen Schreiben vom 1. *Oct.* habe ich den 18. geantwordtet, und das andere vom 11. giebt mir gelegenheit inliegendes an den H.n Groß Cantzler zu senden woraus Ihre *Exc*[*ellence*] ersehen werden wie *ponctuel* Ew. HochEdelgeb. in der aufgetragenen *commission* gewesen.

Dero sämmtlichen *Famili*e insonderheit Dero ältestem H.n Sohne bitte ich meine schuldige Empfehlung zu machen, wünsche Ihnen allerseits fernere glückliche *progress*en und verharre mit sonderbarer hochachtung

Eurer HochEdelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.^{t} Petersburg
den 27. *Oct. st. n.* 1763.

R 906 Reply to n° 190
Petersburg, October (16th) 27th, 1763
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 177r
Published: *Euler-Goldbach* (1965), p. 401

193
Euler to Goldbach
Berlin, November 15th, 1763

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr Geheimer Rath
Hochgeschätztester Gönner

So bald ich das erstere geehrteste Schreiben von *Ew. Hochwohlgeb.* erhalten, habe ich nicht ermangelt der empfangenen Order gemäß des H. *Groß Cantzler*s *Hochgräfl*[*icher*] *Excellenz* von *Dero* Zustand Bericht abzustatten, wobey ich von Herzen beklage, daß *Dero* herannahendes Alter mit so viel Beschwehrlichkeiten verknüpfet ist. S[ein]^e *Hochgräfl*[*iche*] *Excell*[*enz*] behaupten aber mit dem grösten Grunde daß *Ew. Hochwohlgeb.* Selbst sehr viel zu Erleichterung derselben beytragen könnten, wann *Dieselben* sich nur entschliessen wollten, Sich mehr Bewegung zu geben, und öffters der freyen Luft zu geniessen. *Ew. Hochwohlgeb.* werden auch dieses Selbst am Besten einsehen; da mir aber *Dero* Wohlseyn so sehr am Herzen ligt, so unterstehe ich mich *Ew. Hochwohlgeb.* auf das sehnlichste zu bitten, alle mögliche Mittel zu

Dero Besserung anzuwenden, wozu ich allen *Göttlichen* Seegen von Grund meiner Seele anwünsche.

Ew. Hochwohlgeb. Schreiben an des H. Groß Cantzlers *Hochgräfl*[*iche*] *Excellenz* werde ich heute dem Prinzen *Dolgoruki* zur weiteren Bestellung einhändigen da nun solches über Wien nach *Itali*en wird gehen müssen.[1]

Ew. Hochwohlgeb. mit dem ersteren Schreiben überschriebenes *Theorema*[2] hat bey mir die lebhafteste Freude erwecket, weil ich daraus schliessen zu können glaube, daß *Dero* Gemüth besonders aufgemuntert und vergnügt gewesen; ich habe dasselbe mit allem Fleiß untersuchet und endlich gefunden, daß sich dasselbe folgender Gestalt gantz leicht beweisen lässt:

Si $P^2 + 2eQ^2$ *est quadratum, ponatur* $P^2 + 2eQ^2 = R^2$, *addatur utrinque* P^2, *erit* $2P^2 + 2eQ^2 = R^2 + P^2$, *et per* 2 *dividendo*

$$P^2 + eQ^2 = \frac{1}{2}\left(R^2 + P^2\right) = \left(\frac{R+P}{2}\right)^2 + \left(\frac{R-P}{2}\right)^2$$

ideoque $P^2 + eQ^2$ *summa duorum quadratorum. Q. E. D.*

Ewr. Hochwohlgeb. statten wir insgesammt für *Dero* Gütigsten Glückwunsch zu der bevorstehenden Heurath unserer jüngsten Tochter den gehorsamsten Dank ab; weil der Bräutigam noch jung und *Cornet* unter den *Gens d'armes* ist so muß die Vollziehung noch so lang ausgesetzt werden, biß dazu die Königl[iche] Erlaubnüß kan ausgewürket werden.[3] Mein ältester Sohn lässt sich *Ew. Hochwohlgeb.* auf das demüthigste empfehlen; er hat nun ausser seinem Töchterlein auch ein Söhnlein, so nun schon über ein Jahr alt;[4] er hat die feste Versicherung zu einer guten Besoldung, da er bißher mehr nicht als 200 Rthl. gehabt, und in dieser Hoffnung hat er auf Weynacht eine Wohnung gemiethet, da er bißher bey uns gewohnet.[5] Mein zweyter Sohn hat die Stelle als *Medicus* bey dem Französischen ArmeenWesen erhalten mit 200 Rthl. Besoldung. Mir hat die hiesige Französische *Coloni*e auch die Ehre angethan und mich *Ancien* Ihrer Kirchen und Mitglied des *Consistorii* erwählet;[6] ob ich aber diese Ehre lang geniessen werde ist sehr zweyfelhaft. Auf künftige Ostern muß sich der H. von Haller erklären, ob er seine Stelle als *Praesident* der Göttingischen *Academi*e wieder antretten will oder nicht? im letstern Fall dörfte ich genöthiget werden eine sehr grosse Verändrung vorzunehmen.[7]

Mein gantzes Haus lässt sich zu *Ewr. Hochwohlgeb.* beständigen Gewogenheit und Gnade auf das demüthigste empfehlen, und ich habe die Ehre mit der schuldigsten Ehrerbietung lebenslang zu seyn

Ewr. Hochwohlgebohrnen

unterthänigster gehorsamster

Diener *L. Euler*

Berlin den 15$^{\text{ten}}$ *Nov.* 1763.

R 907 Reply to n° 191 and n° 192
Berlin, November 15th, 1763
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. V, fol. 142–143r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 669–670; *Euler-Goldbach* (1965), p. 401–402

194
Euler to Goldbach
Berlin, December 17th, 1763

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr Geheimer Rath
Hochgeschätzter Herr und *Gönner*

Es geschieht wiedrum auf Ordre des H. *Groß Cantzlers Hochgräfl*[*ichen*] *Excellenz* daß ich mir die Ehre gebe an *Ewr. Hochwohlgeb.* zu schreiben; Dieselben sind über Wien glücklich in Venedig angelangt, und haben die Gnade gehabt mir von da zu schreiben: wovon ich die Freyheit nehme folgende Abschrifft beyzufügen.[1]

Venise ce 24 9^{bre} 1763

Monsieur

J'ai trouvé ici où je suis arrivé Dimanche passé votre lettre du 5 *du courant.*[2] *Je suis fort sensible aux sentimens que Vous m'y temoignés; ce me sera toujours une veritable satisfaction de vous donner des preuves des miens; ce sont aussi les dispositions dans lesquelles je suis pour M.*^{r} *de Goldbach à qui je vous prie de faire un mot de compliment de ma part au sujet de ce que vous me mandés de ses travaux litteraires, dans lesquels son age avancé ne l'empeche pas de s'exercer et de reussir. J'ai l'honneur d'etre avec estime*

Monsieur

Votre très humble et très obeïssant serviteur

C[*omte*] *Mich*[*el*] *Woronzow.*

Ich wünsche hiebey nichts mehr als daß *Ewr. Hochwohlgeb.* dieses *Compliment* bey guten Umständen *Dero* Gesundheit erhalten, und von den vormaligen Beschwerden gäntzlich befreyt in allem Vergnügen leben mögen!

Schon vor einigen Monathen habe ich mein Werk von dem *Calculo integrali*, woran ich schon seit vielen Jahren gearbeitet, völlig zu Stande gebracht, und die *Hauden*sche Buchhandlung allhier ist willens dasselbe nächstens zu verlegen.[3] Das Gerücht davon hatte einen jungen lehrbegierigen Menschen aus der Schweitz hieher getrieben, welcher sich nichts anders als die Erlaubnüß ausgebeten, dieses Werk abzuschreiben, und ist darauf wieder zurükgereiset; das wunderbarste dabey ist daß dieser Mensch von seiner *Profession* ein Kürschner gewesen.[4]

Hätte ich dieses Schreiben nur um einen Posttag aufschieben dörfen, so wäre ich vielleicht im Stande gewesen, *Ewr. Hochwohlgeb.* einige Nachricht von der neuen Einrichtung der hiesigen *Academie* zu geben, weil der junge H. *Bernoulli* ein Sohn des *Joh*[*annis*] *Bernoulli* der in *Petersburg* gewesen, der vor einiger Zeit hieher verschrieben worden, die Versicherung erhalten, daß um die Mitte dieses Monaths bey der Ankunft S[eine]^r K[öniglichen] *M*[*ajestät*] alles bei der *Academi*e *regulir*t werden soll.[5] Mein ältester Sohn, der bißher mehr nicht als 200 Rthl. hat, wartet insonderheit darauf mit dem grösten Schmerzen.[6] Derselbe wie auch mein gantzes Hauß lässt sich *Ewr. Hochwohlgeb.* gantz unterthänigst empfehlen und ich habe die Ehre mit der schuldigsten Ehrerbietung zu verharren

Ewr. Hochwohlgebohrnen
gantz gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 17ten *Dec.* 1763.

Meinen herzlichsten Glückwunsch zu dem bevorstehenden neuen Jahr bitte auch gütigst anzunehmen.

R 908 Berlin, December 17th, 1763
Original, 1 fol. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. V, fol. 144rv
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 671–672; *Euler-Goldbach* (1965), p. 402–403

195
Goldbach to Euler
Petersburg, (December 30th, 1763) January 10th, 1764

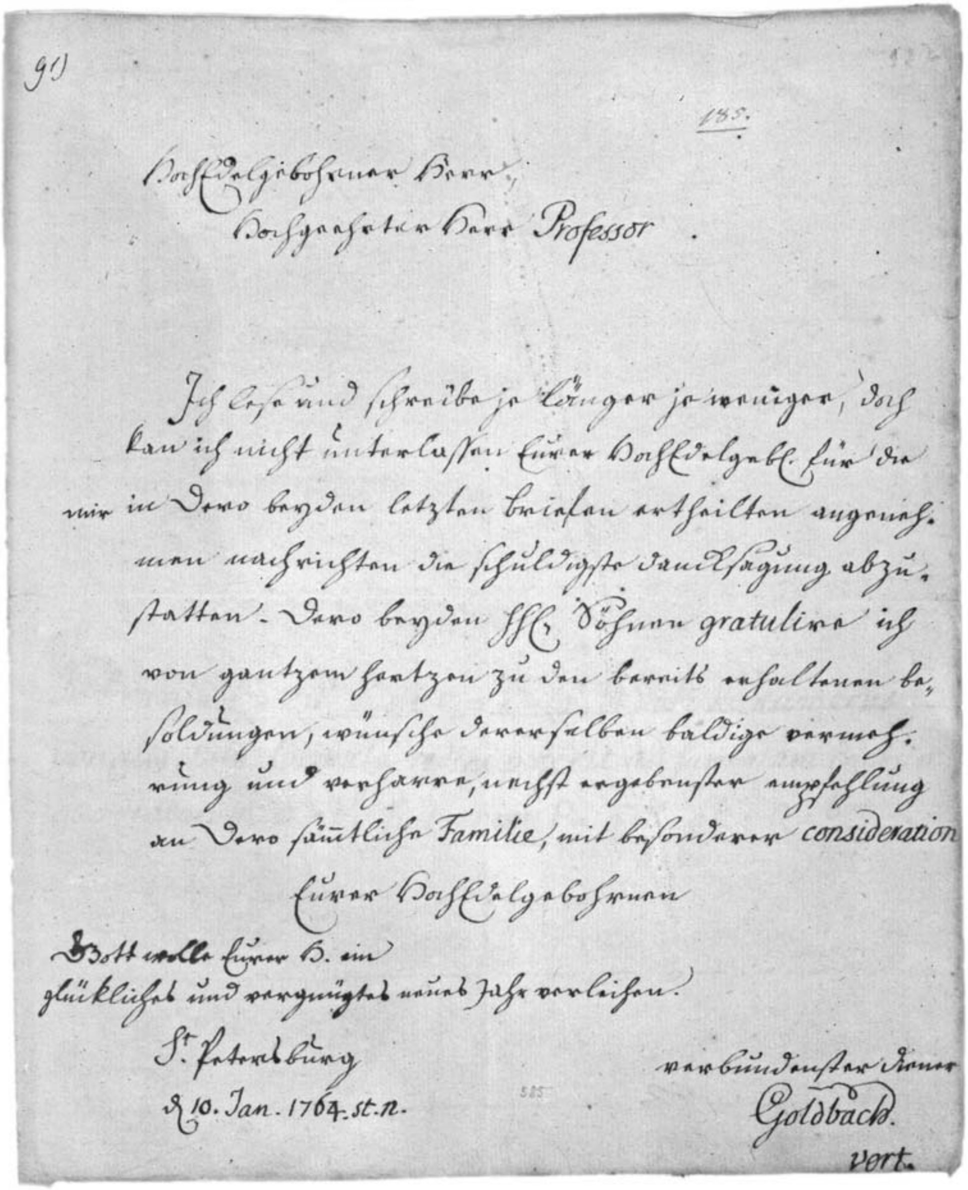
HochEdelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*

Ich lese und schreibe je länger je weniger, doch kan ich nicht unterlassen Eurer HochEdelgeb. für die mir in Dero beyden letzten Briefen ertheilten angenehmen nachrichten die schuldigste dancksagung abzustatten. Dero beyden HH.n Söhnen *gratuli*re ich von gantzem hertzen zu den bereits erhaltenen besoldungen,[1] wünsche dererselben baldige vermehrung und verharre, nechst ergebenster empfehlung an Dero sämmtliche *Familie*, mit besonderer *consideration*

Eurer HochEdelgebohrnen
verbundenster Diener
Goldbach.

Gott wolle Eurer H. ein glückliches und vergnügtes neues Jahr verleihen.

S.t Petersburg
den 10. *Jan.* 1764 *st. n.*



91)

185.

Hochedelgebohrner Herr,
Hochgeehrter Herr Professor.

Ich lese und schreibe je länger je weniger, doch kan ich nicht unterlassen Euer Hochedelgeb. für die mir in Dero beyden letzten briefen ertheilten angenehmen nachrichten die schuldigste danksagung abzustatten. Dero beyden HH. Söhnen gratulire ich von gantzem hertzen zu den bereits erhaltenen besoldungen, wünsche derenselben baldige vermehrung und verharre, nebst ergebenster empfehlung an Dero sämtliche Familie, mit besonderer consideration

Euer Hochedelgebohrnen

Gott wolle Euer H. ein glückliches und vergnügtes neues Jahr verleihen.

St. Petersburg
d. 10. Jan. 1764. st. n.

verbundenster Diener
Goldbach.

vert.

Goldbach's last letter to Euler, (December 30th, 1763) January 10th, 1764: reproduction of the first page (PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 179r)

This New Year's wish for Euler and his family may well be one of the last items Goldbach wrote, ten months before his death.

vert[e]

In formula P^2+eQ^2, si sit $e=k^2-\left(a^2+b^2\right)$ ubi k numerus rationalis, tota formula redigi poterit ad summam duorum quadratorum a^2+b^2, fiat enim $P=\dfrac{a^2+b^2-ak}{a-k}$; $Q=\dfrac{b}{a-k}$.[2]

R 909 Reply to n° 193 and n° 194
Petersburg, (December 30th, 1763) January 10th, 1764
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 179r, 180r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 673; *Euler-Goldbach* (1965), p. 403

196
Euler to Goldbach[1]
Berlin, March 17th, 1764

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr Geheimer Rath

Da *Ewr. Hochwohlgeb.* je länger je weniger lesen und schreiben so muß ich billig zuvorderst gehorsamst um Vergebung bitten daß ich mich gleichwohl unterstehe an *Dieselben* zu schreiben; ich würde meine schuldigste Pflicht hintan setzen, wann ich nicht von Zeit zu Zeit die Gelegenheit ergriffe, *Ewr. Hochwohlgeb.* meiner vollkommensten Ehrerbietung zu versicheren, und mich samt den meinigen zu *Dero* beständigen Gnade gehorsamst zu empfehlen: ich habe aber das feste Vertrauen zu der Göttlichen Barmherzigkeit, daß *Ewr. Hochwohlgeb.* Sich von der vorigen Schwachheit wiederum erhohlet, und mit der herrannahenden guten Jahrszeit wiedrum zu dem Genuß einer vollkommnen Gesundheit gelangen werden, welche Hoffnung der *Allmächtige* Gott in Gnaden erfüllen wolle!

Ewr. Hochwohlgeb. Betrachtungen über die *formel* $P^2+eQ^2=aa+bb$ zeugen noch zu meinem grossen Trost von einer besonderen Munterkeit des Geistes,[2] und daß diese Gleichung immer statt finde so offt $e=kk-(aa+bb)$ ist um so viel merkwürdiger da man sonsten sich um dergleichen *Theoremata* nicht bemühet. Es können daher in der That sehr schöne Eigenschaften der Zahlen erläutert werden: als wann man auf eine noch allgemeinere Art annimmt $e=mk^2-m\left(a^2+mb^2\right)$, so lassen sich auf gleiche Art auch die Zahlen P und Q bestimmen daß P^2+eQ^2 gleich wird der formel $aa+mbb$ oder dieser $c^2\left(a^2+mb^2\right)$: dann man setze

$$P^2+\left(mk^2-m\left(a^2+mb^2\right)\right)Q^2=c^2\left(a^2+mb^2\right)$$

so wird

$$P^2+mk^2Q^2=\left(a^2+mb^2\right)\left(c^2+mQ^2\right)=(ac\pm mbQ)^2+m\,(aQ\mp bc)^2\,,$$

folglich kan man setzen $P = ac \pm mbQ$ und $kQ = aQ \mp bc$; hieraus wird: $Q = \dfrac{\pm bc}{a-k}$ und $P = ac + \dfrac{mbbc}{a-k}$, und daher entsteht der von *Ewr. Hochwohlgeb.* betrachtete Fall wann man setzt $c = 1$ und $m = 1$.

Wir haben nun hier den geschickten H. *Lambert*, welcher dem *Chur*fürsten in Bayern die neue *Academie* in München errichtet;[3] derselbe *excellir*t nicht nur in allen Wissenschaften sondern hat es auch in der *Analysi* sehr weit gebracht: er hat mir eine *Seriem communicir*t darüber ich erstaunet bin da dieselbe von einer gantz anderen Beschaffenheit ist, als alle diejenigen, so bißher betrachtet worden. Wann m und n beliebige Zahlen, und a eine *quantitas quaecunque* ist, so ist die *Series* diese:

$$\begin{aligned} z \;=\;& 1 + \frac{a}{n} + \frac{2m-n+1}{2} \cdot \frac{a^2}{n^2} + \frac{3m-n+1}{2} \cdot \frac{3m-2n+1}{3} \cdot \frac{a^3}{n^3} \\ &+ \frac{4m-n+1}{2} \cdot \frac{4m-2n+1}{3} \cdot \frac{4m-3n+1}{4} \cdot \frac{a^4}{n^4} \\ &+ \frac{5m-n+1}{2} \cdot \frac{5m-2n+1}{3} \cdot \frac{5m-3n+1}{4} \cdot \frac{5m-4n+1}{5} \cdot \frac{a^5}{n^5} + etc. \end{aligned}$$

solche *Series* sind mir noch niemals vorgekommen, und ich wüsste es nicht anzugreiffen um die *Summ* derselben zu erforschen. Um so viel wunderbarer ist es demnach daß die *Summ* derselben, oder der Werth von z sogar *algebraice* kan angegeben werden; dann nach der Erfindung des H. *Lambert*s gibt diese *aequation* $z^n = az^m + 1$ den wahren Werth derselben *Summ* z. Es ist auch merkwürdig daß eine jegliche *Dignität* von z sich durch eine ähnliche *Seriem* ausdrucken lässt, dann es wird

$$\begin{aligned} z^\lambda \;=\;& 1 + \frac{\lambda}{1} \cdot \frac{a}{n} + \frac{\lambda}{1} \cdot \frac{\lambda+2m-n}{2} \cdot \frac{a^2}{n^2} + \frac{\lambda}{1} \cdot \frac{\lambda+3m-n}{2} \cdot \frac{\lambda+3m-2n}{3} \cdot \frac{a^3}{n^3} \\ &+ \frac{\lambda}{1} \cdot \frac{\lambda+4m-n}{2} \cdot \frac{\lambda+4m-2n}{3} \cdot \frac{\lambda+4m-3n}{4} \cdot \frac{a^4}{n^4} + etc. \end{aligned}$$

Setzt man nun erstlich $\lambda = n$ so wird:

$$z^n = 1 + a + \frac{2m}{2} \cdot \frac{a^2}{n} + \frac{3m}{2} \cdot \frac{3m-n}{3} \cdot \frac{a^3}{n^2} + \frac{4m}{2} \cdot \frac{4m-n}{3} \cdot \frac{4m-2n}{4} \cdot \frac{a^4}{n^3} + etc.;$$

hernach setze man $\lambda = m$ so wird:

$$\begin{aligned} z^m \;=\;& 1 + \frac{m}{1} \cdot \frac{a}{n} + \frac{m}{1} \cdot \frac{3m-n}{2} \cdot \frac{a^2}{n^2} + \frac{m}{1} \cdot \frac{4m-n}{2} \cdot \frac{4m-2n}{3} \cdot \frac{a^3}{n^3} \\ &+ \frac{m}{1} \cdot \frac{5m-n}{2} \cdot \frac{5m-2n}{3} \cdot \frac{5m-3n}{4} \cdot \frac{a^4}{n^4} + etc. \end{aligned}$$

woraus offenbar folgt daß $z^n = az^m + 1$. Diese Entdeckung ist allso meiner Meynung nach von der grösten Wichtigkeit.[4]