Kapitel X

PRÜFUNG DER HOMOGENITÄTSBEDINGUNG

1 Einführung

Gängige kausale Testverfahren setzen alle in der einen oder anderen Form die Homogenität der kausal analysierten Testsituationen voraus. Die Homogenitätsbedingungen variieren dabei je nach theoretischem Hintergrund erheblich.[1] Doch obgleich die allermeisten kausalen Schlussverfahren irgendeine Spielart der Homogenitätsbedingung voraussetzen, beschäftigt man sich in kausaltheoretischen Abhandlungen auffällig selten mit den Kriterien der Einhaltung und experimentellen Umsetzung dieser Voraussetzung. Zumal Anlage und Auswertung von Kausaltests massgeblich von der Homogenität der untersuchten Prüfsituationen abhängen, sind Kriterien der Einhaltung dieser Bedingung indes unerlässlich. Ein Experimentator muss wissen, wie er die Homogenität seiner Testreihe evaluieren und entsprechende Rückschlüsse auf deren kausale Auswertbarkeit ziehen kann.

Das vorliegende Kapitel setzt sich die Bereitstellung solcher Kriterien für unsere Version der Homogenitätsbedingung (HOB) zum Ziel. Der Einfachheit halber wird dieses Prüfverfahren für die Einhaltung von HOB am Beispiel eines Zweiertests entwickelt und auch bloss für diese Form von Relevanznachweis im Detail ausgearbeitet. Zumal jedoch der Nachweis kausaler Relevanz auch im Rahmen erweiterter Kausaltests über die Differenz zwischen Prüfsituationen zu erbringen ist und folglich genauso von deren Homogenität abhängt, ist eine Verallgemeinerung des Verfahrens auf erweiterte Kausaltests in Analogie zum nachfolgend vorgestellten Ansatz ohne weiteres möglich.

An dieser Stelle sei bereits vorweggenommen, dass ein abschliessender Nachweis der Einhaltung bzw. Verletzung von HOB nicht zu führen ist. Unser lückenhaftes Kausalwissen ist auf der einen Seite der Grund für die Einführung von HOB, andererseits aber ist die Unmöglichkeit einer zweifelsfreien Absicherung von HOB gleichermassen auf unvollständige Kenntnis kausaler Zusammenhänge zurückzuführen. Es wird im Folgenden also darum gehen, angesichts konkreter Testreihen die Plausibilität der Einhaltung der Homogenitätsbedingung abzuschätzen und damit ein Mass für die Wahrscheinlichkeit der Gültigkeit kausaler Schlüsse zu entwickeln.

2 Differenztest und Homogenität

Unser regularitätstheoretisches kausales Schlussverfahren basiert auf modernen Spielarten der klassischen Differenz- bzw. Vierertests. Gegeben HOB und voraus-

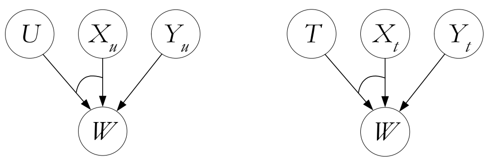
[1] Vgl. z.B. Cartwright (1979), Holland (1986) oder Spohn (1990).

Wirkung W	U	$\overline{U}$
	1	0

Tab. X.1: Einfacher Differenztest, der die potentielle kausale Relevanz des Prüffaktors U für die Wirkung W untersucht. Bei gegebener HOB lässt sich aus dieser Tabelle die kausale Relevanz von U für W ableiten.

gesetzt die Geltung der Kausalprinzipien, so folgt etwa aus dem in Tabelle X.1 dargestellten Ergebnis eines Differenztests die kausale Relevanz des Prüffaktors U für die untersuchte Wirkung W.

Die vorausgesetzte Homogenität der beiden Testsituationen ist die zentrale Prämisse, die den Schluss auf „U ist kausal relevant für W“ ermöglicht. Denn HOB garantiert, dass das Auftreten der Wirkung in der ersten Prüfsituation nicht von einer unbekannten Ursache T herrührt, die zufälligerweise in der zweiten Situation gemeinsam mit U abwesend ist. Bei verletzter Homogenität wäre indes nicht nur denkbar, dass dem kausalen Prozess, der zum Auftreten von W führt, der Graph (a) aus Abbildung X.1 zugrunde liegt, sondern verträglich mit dem Differenztest aus Tabelle X.1 wäre dann etwa auch Graph (b).



(a) (b)

Abb. X.1: Beide Graphen, (a) und (b), könnten, sofern HOB in der Testserie aus Tabelle X.1 nicht erfüllt ist, die kausale Struktur korrekt wiedergeben, die dem Auftreten von W unterliegt. T ist eine unbekannte Ursache von W. X_u und X_t stehen jeweils für nicht redundante Restfaktoren der Ursachenbündel, deren Teile U bzw. T sind. Bei Y_u und Y_t handelt es sich um Variablen für alternativ zu U bzw. T minimal hinreichende Bedingungen von W.

✍ ÜBUNG: *Schliessen auf Kausalgraphen 2*

3 STÖRFAKTOREN

Unbekannte Ursachen der in einem jeweiligen Kausaltest untersuchten Wirkung können durch wechselnde und unkontrollierte An- und Abwesenheit die Homogenität der verglichenen Prüfsituationen verhindern. Doch nicht alle kausal relevanten Faktoren, die in einzelnen Prüfsituationen auftreten, in anderen dagegen ausbleiben, verletzen – oder ‚stören' – die Homogenität der Prüfsituationen. Nur bei einer Teilmenge der unkontrollierten Kausalfaktoren handelt es sich tatsächlich um so genannte *Störfaktoren*.

Ein kausal relevanter Faktor ist dann ein Störfaktor, wenn er durch sein wechselndes Auftreten und Ausbleiben einen kausalen Fehlschluss provozieren *kann*, d.h., dafür sorgen kann, dass einem Prüffaktor fälschlicherweise kausale Relevanz zugesprochen wird. Dies „kann" ein kausal relevanter Faktor genau dann, wenn er nicht Teil eines Ursachenbündels der untersuchten Wirkung ist, das den Prüffaktor enthält, das genuine Prüffaktor-Ursache ist, das zwischen Prüffaktor und Wirkung auf einer Kette angesiedelt ist oder von dem in jeder Prüfsituation mindestens ein Faktor unterdrückt ist. Damit ein Kausaltest bei entsprechendem Testergebnis als Grundlage für einen kausalen Schluss dient, ist – soweit bekannt und kontrollierbar – die Unterdrückung von Alternativursachen erforderlich. Zu diesem Zweck werden bekannte Ursachenbündel, deren Teil der Prüffaktor nicht ist und die weder genuine Prüffaktor-Ursachen noch auf einer Kette zwischen Prüffaktor und Wirkung angesiedelt sind, in sämtlichen Prüfsituationen unterdrückt, indem jeweils die Negation mindestens eines ihrer Glieder instantiiert wird. Alle Faktoren, die solchen Ursachenbündeln angehören, von denen mindestens ein Faktor in dieser Weise unterdrückt ist, können damit die Homogenität der analysierten Testsituationen nicht stören. Sämtliche übrigen unbekannten kausal relevanten Faktoren der Wirkung sind dagegen in der Lage, die Einhaltung von HOB zu verhindern. Bei diesen Faktoren handelt es sich um Störfaktoren.

Veranschaulichen wir, was Störfaktoren sind, an einem Beispiel. Angenommen, der zur Wirkung W von Tabelle X.1 hinführende Prozess habe die in Abbildung X.2 dargestellte Struktur. Ferner werde bei der Anlage des in Tabelle X.1 schematisierten Differenztests der Faktor Q zwecks Kontrolle von bekannten Alternativursachen in sämtlichen Prüfsituationen unterdrückt. Relativ zu dieser Testanlage können nur die Faktoren S und T bei entsprechend variierter An- und Abwesenheit als Störfaktoren fungieren. Der ebenfalls unkontrollierte Kausalfaktor V dagegen darf beliebig variieren, angesichts des durchgehend instantiierten $\overline{Q}$ wird

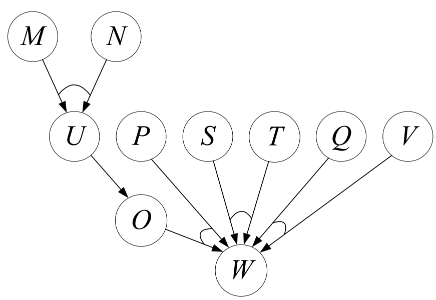


Abb. X.2: Unterstellte tatsächliche Struktur des W hervorbringenden Kausalprozesses.

	F1 (U)	F2 ($\overline{U}$)	HOB
(1)	P	P	h
(2)	P	$\overline{P}$	h
(3)	$\overline{P}$	P	h
(4)	$\overline{P}$	$\overline{P}$	h

Tab. X.2: Auflistung der logisch möglichen Differenztest-Konstellationen des Faktors P, der im selben Ursachenbündel enthalten ist wie der Prüffaktor U. Keine dieser Verteilungen verletzt HOB. („h" bezeichnet die Einhaltung von HOB.)

eine solche Variation nie zu einer Verletzung von HOB führen. M und N ihrerseits werden zur Manipulation von U benötigt. Es ist nachgerade eine Voraussetzung des Designs von Kausaltests, dass sich Prüfsituationen in den Ursachen des Prüffaktors unterscheiden. Gleiches gilt für den zwischen Prüffaktor und Wirkung auf einer Kette angesiedelten Faktor O. Zwischenglieder dürfen in Kausaltests nicht homogenisiert werden. Bei Anwesenheit von U sind mithin M, N und O ebenfalls instantiiert, bei Abwesenheit von U dagegen fehlt mindestens ein Konjunkt des Bündels MN sowie das Zwischenglied O. Auch der Faktor P, der demselben Ursachenbündel angehört wie der Prüffaktor, kann in den beiden Prüfsituationen abwechselnd an- und abwesend sein, ohne dass dadurch gegen HOB verstossen würde. Tabelle X.2 verdeutlicht diesen Umstand, indem sie sämtliche logisch möglichen Verteilungen von P und $\overline{P}$ bezogen auf die beiden Testfelder F1[2] bei gesetztem und F2 bei abwesendem Prüffaktor verzeichnet. Keine dieser Verteilungen verletzt HOB. Faktoren, die demselben Ursachenbündel angehören wie der Prüffaktor, sind nicht in der Lage, die Einhaltung von HOB zu stören.

Als Störfaktoren kommen also nur unkontrollierte kausal relevante Faktoren in Frage, die einem alternativen Ursachenbündel angehören, das als Ganzes in einem jeweiligen Kausaltest nicht kontrolliert ist, d.h., dessen sämtliche Faktoren beliebig variieren können. Welche unbekannten Kausalfaktoren Störfaktoren sind und welche nicht, ist somit abhängig von der Anlage eines Kausaltests und insbesondere von den in den einzelnen Prüfsituationen dieses Kausaltests unterdrückten Faktoren.

Dass es sich relativ zu unserem exemplarischen Differenztest von Tabelle X.1 bei den Faktoren S und T um Störfaktoren handelt, heisst nicht, dass sämtliche Konstellationen dieser beiden Faktoren tatsächlich die Homogenität der analysierten Prüfsituationen stören. Nur bei einer Teilmenge aller logisch möglichen Konstellationen von S und T in den beiden Testfeldern F1 und F2 handelt es sich um HOB verletzende Störfaktorenszenarien. Störfaktorenszenarien verhindern immer dann die Einhaltung von HOB, wenn in F1 das Bündel ST instantiiert ist, während es in F2 ausbleibt, oder umgekehrt, wenn ST in F1 abwesend ist, dafür in

[2] Zur Nummerierung der Testfelder in Differenz- und Vierertests vgl. Kapitel IX, Abschnitt 3.

F2 eine Instantiierung erfährt. Ein Störfaktorenszenario, das in einem Differenztest die Erfüllung von HOB verhindert, ist also stets ein Paar bestehend aus einer Konstellation von Störfaktoren in F1 und einer Konstellation in F2 derart, dass im einen Testfeld eine minimal für die untersuchte Wirkung W hinreichende Bedingung X_i instantiiert ist, deren Teil der Prüffaktor nicht ist, die keine genuinen Prüffaktor-Ursachen und keine Zwischenglieder enthält und die kausal relevant ist für W, während X_i im zweiten Testfeld ausbleibt.

Störfaktor: Ein Störfaktor relativ zu einem Kausaltest D mit dem Prüffaktor U ist ein unkontrollierter Faktor, der einer minimal hinreichenden Bedingung X_i der untersuchten Wirkung angehört, wobei X_i folgende vier Bedingungen erfüllt:

(i) U, $\overline{U}$, W und $\overline{W}$ sind nicht Teil von X_i,

(ii) kein Teil von X_i ist genuine Prüffaktor-Ursache oder Kettenglied zwischen Prüffaktor und Wirkung,

(iii) die Teile von X_i sind kausal relevant für W,

(iv) X_i ist *nicht* von der Art, dass in jeder Prüfsituation von D jeweils mindestens ein Faktor von X_i unterdrückt ist.

Untersuchen wir die für unser Beispiel denkbaren Störfaktorenszenarien genauer. Tabelle X.3 listet die möglichen Verteilungen der Faktoren S und T in den beiden Prüfsituationen F1 und F2 auf. Die Homogenität von F1 und F2 ist in ins-

	F1	F2	HOB		F1	F2	HOB
(1)	ST	ST	h	(9)	$S\overline{T}$	$\overline{S}T$	h
(2)	ST	$S\overline{T}$	¬h	(10)	$\overline{S}T$	$\overline{S}T$	h
(3)	ST	$\overline{S}T$	¬h	(11)	$\overline{ST}$	ST	¬h
(4)	$S\overline{T}$	ST	¬h	(12)	$S\overline{T}$	$\overline{ST}$	h
(5)	$\overline{S}T$	ST	¬h	(13)	$\overline{S}T$	$\overline{ST}$	h
(6)	ST	$\overline{ST}$	¬h	(14)	$\overline{ST}$	$\overline{S}T$	h
(7)	$S\overline{T}$	$S\overline{T}$	h	(15)	$\overline{ST}$	$S\overline{T}$	h
(8)	$\overline{S}T$	$S\overline{T}$	h	(16)	$\overline{ST}$	$\overline{ST}$	h

Tab. X.3: Auflistung der logisch möglichen Konstellationen der beiden Störfaktoren S und T. „F1“ bezeichnet die Prüfsituation bei gesetztem Prüffaktor, „F2“ diejenige bei abwesendem Prüffaktor. Bei den 6 mit „¬h “ gekennzeichneten Szenarien handelt es sich um Störfaktorenszenarien, welche die Homogenität von F1 und F2 verletzen.

gesamt 6 der 16 möglichen Konstellationen von S und T, und zwar in (2), (3), (4), (5), (6) und (11), verletzt. Bei all diesen Szenarien handelt es sich um nicht-homogene Störfaktorenszenarien.

Störfaktoren sind eine der Hauptschwierigkeiten, die Kausaluntersuchungen fehleranfällig machen. Man kann sich der Abwesenheit von Störfaktoren bei der Anlage von Versuchsreihen, welche die Grundlage theoretischer Kausalschlüsse bilden sollen, nie wirklich sicher sein. Deshalb muss nun nach der Entwicklung eines kausalen Schlussverfahrens der Frage nachgegangen werden, wie sich die hierzu vorausgesetzte Abwesenheit von nicht-homogenen Störfaktorenszenarien in der experimentellen Praxis abschätzen lässt.

4 Prüfverfahren für die Einhaltung der Homogenitätsbedingung

4.1 Grundidee

Ausgangspunkt des hier vorzuschlagenden Prüfverfahrens für das Erfülltsein von HOB bildet die Replikation von Differenztests unter Einhaltung einer möglichst weitgehenden Übereinstimmung sämtlicher bekannter Hintergrundbedingungen des untersuchten Prozesses. Mit jeder erfolgreichen Reproduktion einer Versuchsreihe, in welcher die Homogenität der Prüfsituationen durch Störfaktoren verletzt sein könnte, steigt die Plausibilität der Homogenitätsannahme. Bevor diese Grundidee im Detail entwickelt wird, sei sie zunächst grob skizziert.

Führt man den Differenztest aus Tabelle X.1 mit Hilfe derselben Versuchsanlage erneut durch und erhält auch beim zweiten Versuchsdurchlauf dasselbe Testergebnis, sinkt die Plausibilität der Hypothese, dass Graph (b) die kausale Struktur hinter der Wirkung W korrekt beschreibe. Denn wollte man auch angesichts einer erfolgreichen Reproduktion dieses Differenztests an der Kausalhypothese (b) festhalten, müsste man geltend machen, anlässlich beider Instantiierungen des Prüffaktors U sei zufälligerweise ein unbekannter Störfaktor T anwesend gewesen, der – aus welchen Gründen auch immer – in den Kontrollsituationen bei abwesendem Prüffaktor ebenfalls beide Male nicht realisiert gewesen sei. Diese Argumentation mag bei nur einer erfolgreichen Replikation zwar noch akzeptabel erscheinen, insbesondere wenn man von mehr als einem Störfaktor ausgeht, ihre Plausibilität wird jedoch bei weiteren erfolgreichen Wiederholungen dieses Kausaltests rapide sinken. Zumal, wer dennoch weiterhin an (b) festhalten wollte, erklären müsste, weshalb ein unbekannter Störer stets ausgerechnet in solchen Testdurchläufen auftritt, in denen auch U instantiiert ist, und in den anderen Prüfsituationen gemeinsam mit U ausbleibt. Mit jeder erfolgreichen Replikation des ursprünglichen Differenztests wird eine solche perfekte (Zufalls-)Korrelation von T und U wundersamer. Jede Reproduktion, die dasselbe Ergebnis liefert, führt zu einem Plausibilitätsverlust von Kausalhypothese (b) und ist ein deutliches Indiz dafür, dass die kausale Entstehungsgeschichte von W nicht durch unbekannte

Faktoren gestört wird und infolgedessen Graph (a) aus Abbildung X.1 den zu W hinführenden Kausalprozess korrekt wiedergibt.

Diese Grundidee soll nun konkretisiert werden. Insbesondere gilt es in der Folge, ein Wahrscheinlichkeitsmodell zu entwickeln, das es gestattet, zwischen den beiden konkurrierenden Kausalhypothesen aus Abbildung X.1 je nach Ergebnis von Versuchswiederholungen eine Entscheidung zu treffen.

4.2 Replikation eines Differenztests

Angenommen, in 99 von insgesamt 100 Replikationsversuchen des Differenztests aus Tabelle X.1 erhalte man dasselbe Ergebnis: Bei gesetztem Prüffaktor tritt die Wirkung auf, bei abwesendem Prüffaktor bleibt sie aus. In einem Fall jedoch finde trotz aller Bemühungen um eine exakte Wiederholung derselben Testanlage die Wirkung nicht bei an-, sondern bei abwesendem Prüffaktor statt. Tabelle X.4 stellt diese Replikationsversuche zusammen. Welchen Einfluss hat dieser eine erfolglose Reproduktionsversuch auf die Wahrscheinlichkeit der Einhaltung von HOB?

Aufgrund von z_{100} ist klar, dass minimal hinreichende Bedingungen Y_u von W existieren, deren Teil der Prüffaktor U nicht ist. Ferner zeigt dieser erfolglose Replikationsversuch, dass der Prüffaktor, wenn er denn überhaupt kausal relevant ist, nicht alleine, sondern nur gemeinsam mit unbekannten Restfaktoren X_u hinreichend ist für W. Diese Differenztest-Replikationsreihe ist verträglich mit beiden der in Abbildung X.1 dargestellten Kausalhypothesen. Entweder ist in 99 Fällen X_u je in der ersten Prüfsituation an- und Y_u je in beiden Prüfsituationen abwesend, so dass in jeweils zwei zusammengehörenden Versuchssituationen Homogenität sichergestellt ist. Aus jeder einzelnen 1-0-Zeile folgt in diesem Fall die kausale Relevanz von U für W. Oder die hier vorliegende Versuchsanlage verletzt HOB, so dass das Auftreten der Wirkung von einer unkontrollierten An- und Abwesenheit eines Störfaktors $T \in Y_u$ herrührt.

		U	$\overline{U}$
Wirkung W	z_1	1	0
	z_2	1	0
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	z_{99}	1	0
	z_{100}	0	1

Tab. X.4: Hundertfache Wiederholung des Differenztests aus Tabelle X.1. In 99 Fällen verläuft die Replikation erfolgreich, einmal tritt nicht bei an-, sondern bei abwesendem Prüffaktor die Wirkung auf. z_1 bis z_{100} bezeichnen die Zeilennummern.

Die 99 1-0-Zeilen und die eine 0-1-Zeile können je nach tatsächlicher kausaler Relevanz von U auf diverse Konstellationen von X_u und Y_u zurückzuführen sein. Um abzuschätzen, welche dieser Konstellationen angesichts der Replikationsreihe von Tabelle X.4 die wahrscheinlichste ist, wollen wir uns zunächst einen Überblick verschaffen über die logisch möglichen Verteilungen von X_u, $\overline{X_u}$, Y_u und $\overline{Y_u}$ sowie die daraus je nach kausaler Relevanz von U resultierenden Differenztestresultate. Einer jeden logisch möglichen Konstellation von X_u, $\overline{X_u}$, Y_u und $\overline{Y_u}$ soll danach ein Wahrscheinlichkeitswert zugeordnet werden, um schliesslich abschätzen zu können, ob den 99 1-0-Zeilen mit grösserer Wahrscheinlichkeit ein homogenes oder ein nicht-homogenes Szenario von unbekannten Faktoren zugrunde liegt und ob folglich der Schluss auf die kausale Relevanz von U für W berechtigt ist oder nicht. Kausale Schlüsse sollen dabei weiterhin aufgrund jeder einzelnen 1-0-Zeile anhand der bekannten Schlussformen gezogen werden. Ziel des Prüfverfahrens für HOB ist es lediglich, über die Wahrscheinlichkeit der Einhaltung von HOB die Plausibilität der Konklusion eines kausalen Schlusses abzuschätzen.

	F1	F2	HOB	Difftestresultat bei $kr(U)$	Difftestresultat bei $\neg kr(U)$
(i)	$X_u Y_u$	$X_u Y_u$	h	1 | 1	1 | 1
(ii)	$X_u Y_u$	$X_u \overline{Y}_u$	¬h	1 | 0	1 | 0
(iii)	$X_u Y_u$	$\overline{X}_u Y_u$	h	1 | 1	1 | 1
(iv)	$X_u \overline{Y}_u$	$X_u Y_u$	¬h	1 | 1	0 | 1
(v)	$\overline{X}_u Y_u$	$X_u Y_u$	h	1 | 1	1 | 1
(vi)	$X_u Y_u$	$\overline{X_u Y_u}$	¬h	1 | 0	1 | 0
(vii)	$X_u \overline{Y}_u$	$\overline{X}_u Y_u$	¬h	1 | 1	0 | 1
(viii)	$\overline{X_u Y_u}$	$X_u Y_u$	¬h	0 | 1	0 | 1
(ix)	$X \overline{Y}_u$	$X_u \overline{Y}_u$	h	1 | 0	0 | 0
(x)	$\overline{X}_u Y_u$	$\overline{X}_u Y_u$	h	1 | 1	1 | 1
(xi)	$\overline{X}_u Y_u$	$X_u \overline{Y}_u$	¬h	1 | 0	1 | 0
(xii)	$\overline{X_u Y_u}$	$\overline{X}_u Y_u$	¬h	0 | 1	0 | 1
(xiii)	$\overline{X_u Y_u}$	$X_u \overline{Y}_u$	h	0 | 0	0 | 0
(xiv)	$\overline{X}_u Y_u$	$\overline{X_u Y_u}$	¬h	1 | 0	1 | 0
(xv)	$X_u \overline{Y}_u$	$\overline{X_u Y_u}$	h	1 | 0	0 | 0
(xvi)	$\overline{X_u Y_u}$	$\overline{X_u Y_u}$	h	0 | 0	0 | 0

Tab. X.5: Die 16 logisch möglichen Verteilungen von $X_u, \overline{X_u}$, Y_u und $\overline{Y_u}$ in zwei Testdurchläufen, einmal (F1) bei an- und einmal (F2) bei abwesendem Prüffaktor U. Je nach kausaler Relevanz von U ändern sich die Testergebnisse und je nach Szenario ist HOB erfüllt oder verletzt.

Die mit „F1“ und „F2“ überschriebenen beiden Spalten von Tabelle X.5 stellen die logisch möglichen Verteilungen von X_u, $\overline{X_u}$, Y_u und $\overline{Y_u}$ für die Testfelder bei gesetztem bzw. abwesendem Prüffaktor U zusammen. Je nach Konstellation, ist HOB erfüllt (h) oder nicht (¬h). Die entsprechenden Fallunterscheidungen vermerkt die folgende Spalte. In der vierten Spalte erscheint das Differenztestresultat, das bei betreffendem Szenario unter der Voraussetzung, dass der Prüffaktor kausal relevant ($kr(U)$) ist, auftritt. Die fünfte Spalte schliesslich listet analog, die Ergebnisse der Differenztests auf, die auftreten, gesetzt den Fall, dass der Prüffaktor nicht kausal relevant ist ($\neg kr(U)$).

4.3 Unabhängigkeitsannahmen zur Abschätzung von $P(Y_u)$ und $P(X_u)$

Um den Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Verteilungen von Y_u und X_u konkrete Werte zuzuordnen, müssen als Erstes die Werte für $P(Y_u)$ bzw. $P(\overline{Y_u})$ sowie $P(X_u)$ bzw. $P(\overline{X_u})$ abgeschätzt werden. Y_u und X_u sind Variablen, die für eine Menge unbekannter Faktoren stehen. Zur Beurteilung von deren Wahrscheinlichkeiten kann deshalb nicht auf eigens zu diesem Zweck konzipierte Tests abgestellt werden. Das einzige Datenmaterial, das für eine solche Abschätzung zur Verfügung steht, ist die Replikationstabelle X.4.

Die Wahrscheinlichkeiten unbekannter Störer erschliessen sich näherungsweise aus Tabelle X.4 nur unter Voraussetzung von vier Zusatzannahmen: Der Prüffaktor U und die Restfaktoren X_u der minimal hinreichenden Bedingung, deren Teil U ist, sind probabilistisch unabhängig voneinander – symbolisch: $U \perp\!\!\!\perp X_u$;[3] Gleiches muss für U und potentielle Störfaktoren in Y_u ($U \perp\!\!\!\perp Y_u$), für U und die Konjunktion $X_u Y_u$ ($U \perp\!\!\!\perp X_u Y_u$) sowie für die Faktoren in X_u und Y_u ($X_u \perp\!\!\!\perp Y_u$) gelten. Es gelte mithin:

$$P(UX_u) = P(U)P(X_u) \qquad (U \perp\!\!\!\perp X_u)$$
$$P(UY_u) = P(U)P(Y_u) \qquad (U \perp\!\!\!\perp Y_u)$$
$$P(UX_uY_u) = P(U)P(X_uY_u) \qquad (U \perp\!\!\!\perp X_uY_u)$$
$$P(X_uY_u) = P(X_u)P(Y_u) \qquad (X_u \perp\!\!\!\perp Y_u)$$

Diese Unabhängigkeitsannahmen leiten sich direkt aus der Definition von Wurzelfaktoren eines Kausalgraphen ab.[4] Bei U, X_u und Y_u soll es sich um (potentielle) Wurzelfaktoren des W hervorbringenden Kausalzusammenhanges handeln und Wurzelfaktoren sind als Knoten ohne einmündende Kausalpfeile logisch, kausal und nicht zuletzt auch probabilistisch unabhängig voneinander.[5] Gegen diese

[3] Es gilt $U \perp\!\!\!\perp X_u$ gdw. $P(UX_u) = P(U)P(X_u)$. Zu dieser abgekürzten Notation für probabilistische Unabhängigkeit vgl. z.B. Pearl (2000), S. 11.

[4] Vgl. Kapitel III.

[5] Im Rahmen Probabilistischer Kausalität spricht man synonym anstatt von Wurzelfaktoren auch von exogenen Faktoren.

über die Definition des Begriffs des Wurzelfaktors argumentierende Rechtfertigung der Unabhängigkeitsannahmen $(U \perp\!\!\!\perp X_u)$, $(U \perp\!\!\!\perp Y_u)$, $(U \perp\!\!\!\perp X_u Y_u)$ und $(X_u \perp\!\!\!\perp Y_u)$ mag vielleicht eingewandt werden, dass es gerade die Eigenschaft von U, X_u und Y_u, Wurzelfaktoren zu sein, sei, die im vorliegenden Kontext in Frage stehe. Deshalb könne nicht einfach vorausgesetzt werden, diese Ereignistypen fungierten im kausalen Entstehungsprozess von W als Wurzelfaktoren. $(U \perp\!\!\!\perp X_u)$, $(U \perp\!\!\!\perp Y_u)$, $(U \perp\!\!\!\perp X_u Y_u)$ und $(X_u \perp\!\!\!\perp Y_u)$ können auch unabhängig vom Begriff des Wurzelfaktors gerechtfertigt werden. Betrachten wir die Unabhängigkeitsannahmen im Einzelnen.

4.3.1 Rechtfertigung von $(U \perp\!\!\!\perp X_u)$

Gelingt mittels Differenztest der Nachweis kausaler Relevanz von U für W, so sind U und X_u – vorausgesetzt natürlich, X_u hat keinen leeren Gegenstandsbereich – nicht-redundante Teile derselben minimal hinreichenden Bedingung von W. Bestünde jedoch zwischen U und X_u eine probabilistische Abhängigkeit, so wären U und die Faktoren in X_u entweder in einer verketteten oder einer epiphänomenalen Kausalstruktur miteinander verhängt oder zwischen ihnen bestünde irgendeine andere Form von Abhängigkeit – z.B. eine logische. In allen Fällen könnten U und die Faktoren in X_u nicht Teil derselben minimal hinreichenden Bedingung sein, denn, von welcher Art die Abhängigkeit zwischen U und X_u auch wäre, eines der beiden Konjunkte der für W vermeintlich minimal hinreichenden Bedingung UX_u wäre redundant, zumal aus dem Auftreten des einen Konjunktes auf das Auftreten des anderen geschlossen werden könnte und folglich das Wissen ums Auftreten des einen Konjunktes für eine Prognose von W ausreichte. Faktoren, die korreliert auftreten, weil sie auf unterschiedlichen Ebenen einer Kausalkette oder in einer epiphänomenalen Struktur angeordnet sind oder weil sie gar logisch voneinander abhängen, können nicht Teil derselben minimal hinreichenden Bedingung sein.

Wäre etwa U Ursache von X_u oder X_u Ursache von U, so dürfte der Fall nicht auftreten, dass U instantiiert ist, aber die Wirkung ausbleibt, denn mit U wäre unter diesen Umständen immer auch X_u und damit eine hinreichende Bedingung für W gegeben. Freilich wäre die in Tabelle X.4 dargestellte Replikationsreihe durchaus mit einer hohen Korrelation von U und X_u verträglich, doch gerade bei weniger erfolgreichen Replikationsreihen tritt oft der Fall auf, dass der Prüffaktor gegeben ist, aber die Wirkung ausbleibt. Bei erfüllter HOB lässt sich auch in solchen Fällen ohne weiteres kausal schliessen.

4.3.2 Rechtfertigung von $(U \perp\!\!\!\perp Y_u)$

U und Y_u sollen gegebenenfalls Alternativursachen von W und damit je nicht-redundante Teile alternativer minimal hinreichender Bedingungen bzw. je nicht-redundante Teile derselben minimal notwendigen Bedingung von W sein. Dies sind sie nur, wenn sie im Sinne von $(U \perp\!\!\!\perp Y_u)$ unabhängig voneinander sind. Denn bestünde zwischen U und Y_u eine probabilistische Abhängigkeit, so wären U und die Faktoren in Y_u entweder in einer verketteten oder einer epiphänomenalen Kausalstruktur kausal miteinander verhängt oder zwischen ihnen bestünde irgendeine andere Form von Abhängigkeit – z.B. eine logische. In allen Fällen könnten U und die Faktoren in Y_u nicht Teil derselben minimal notwendigen Bedingung von W sein.

Denn wäre etwa ein für W hinreichender Störfaktor $T \in Y_u$ nicht nur Ursache von W, sondern auch von U, so könnten T und U nicht in verschiedenen Disjunkten derselben minimal notwendigen Bedingung enthalten sein. Einer der beiden Faktoren wäre redundant. Freilich ist nie zweifelsfrei sichergestellt, dass ein Störfaktor T tatsächlich derselben minimal notwendigen Bedingung von W angehört wie U, so dieser denn überhaupt kausal relevant ist. Ein Faktor kann auch die Homogenität von Differenztests stören, ohne Teil einer vom Prüffaktor unabhängigen Alternativursache zu sein. Es ist damit grundsätzlich denkbar, dass ein Störfaktor $T \in Y_u$ eine gemeinsame Ursache von U und W ist. Dies um so mehr, als damit erklärbar würde, weshalb T im Rahmen der Differenztests aus Tabelle X.4 nur in der linken Spalte, d.h. stets in Verbindung mit U, auftritt. Vor dem Hintergrund eines solchen Szenarios wäre der Schluss auf die kausale Relevanz von U für W natürlich trotz 99 erfolgreichen Testreproduktionen falsch. Nun wird man vielleicht denken, ob T tatsächlich eine gemeinsame Ursache von U und W sei, liesse sich vermittels eines weiteren Differenztests leicht ermitteln. Doch die Faktoren in Y_u sind *unbekannt* und können daher nicht selbst als Prüffaktoren Differenztests unterzogen werden. Auch wird man sich in Anbetracht unserer Unkenntnis der Faktoren in Y_u nicht mit statistischen Mitteln über eine mögliche Unabhängigkeit von U und Y_u Klarheit verschaffen können.

Das Risiko, mit $(U \perp\!\!\!\perp Y_u)$ falsch zu liegen, ist demnach nie wirklich auszuschliessen. Doch obwohl die Unabhängigkeit von Prüffaktor und unbekannten Störfaktoren nicht abschliessend beweisbar ist, gibt es durchaus gute Argumente, die für eine hohe Plausibilität der Zusatzannahme $(U \perp\!\!\!\perp Y_u)$ sprechen. Die Anlage von Differenz-, Vierer- sowie erweiterten Kausaltests verlangt eine direkte Manipulierbarkeit des Prüffaktors. Der Prüffaktor muss gezielt in der einen Sorte von Prüfsituationen gesetzt und in der anderen unterdrückt werden können. Wäre T tatsächlich eine unbekannte Ursache von U, wäre diese strikte Kontrolle des Prüffaktors nicht möglich. U würde hie und da scheinbar spontan bzw. unter Verursachung durch eine unbekannte Instanz von T und also auch in Prüfsituationen, in denen man U eigentlich unterdrücken möchte, auftreten. Denkbar wäre natürlich, dass U nicht direkt, sondern nur unter Vermittlung durch andere Faktoren manipulierbar ist. Um U zu setzen, müsste demnach zunächst ein anderer Faktor instantiiert werden, dessen Instanzen anschliessend U auftreten liessen. Der Störfaktor T könnte möglicherweise eine solche vermittelnde Rolle spielen. Könnte U jedoch nur unter Vermittlung durch T manipuliert werden, ist es kaum denkbar, dass T nicht bekannt wäre – man müsste T schliesslich kontrollieren können, bevor man in der Lage wäre, mit U als Prüffaktor einen Kausaltest anzulegen.

Wären in dieser Versuchsreihe also in der Tat kausal für U relevante Störfaktoren im Spiel, würde dies früher oder später durch eine mangelhafte Kontrollierbarkeit von U auffallen, d.h., mit U als Prüffaktor wäre ein Kausaltest nicht durchführbar. Könnte U andererseits nur unter Vermittlung durch unbekannte Störfaktoren manipuliert werden, wären diese nicht unbekannt. Die Annahme dagegen, U sei einwandfrei kontrollierbar und dennoch handle es sich bei gewissen Faktoren in Y_u um unbekannte Ursachen von U (und W), ist damit in höchstem Masse unplausibel.

Ganz analog lässt sich natürlich auch für $(U \perp\!\!\!\perp X_u)$ argumentieren. Anlage und Durchführung eines Differenztests setzen die perfekte Manipulierbarkeit des Prüffaktors voraus. Gäbe es im kausalen Hintergrund der Durchführung eines Differenztests unbekannte und zufällig instantiierte Faktoren, die kausal relevant wären für U, so wäre dessen Manipulierbarkeit nicht gewährleistet und damit die Durchführung einer Reihe von Testreplikationen verunmöglicht. Für die unkontrollierte An- und Abwesenheit unbekannter Ursachen des Prüffaktors lässt sich also ein experimenteller Nachweis führen. Solange die Durchführung von Differenztests nicht gestört ist, besteht kein Anlass, von der kausalen Relevanz unbekannter Störer für U oder von einer epiphänomenalen Abhängigkeit dieser Faktoren auszugehen. Auf der anderen Seite handelt es sich bei allen Faktoren, die zwischen U und W auf einer Kette angesiedelt sind, d.h., für die U kausal relevant ist, nicht um potentielle Störfaktoren.

4.3.3 Rechtfertigung von $(U \perp\!\!\!\perp X_u Y_u)$

Was oben zur Rechtfertigung von $(U \perp\!\!\!\perp X_u)$ und $(U \perp\!\!\!\perp Y_u)$ gesagt worden ist, gilt auch für $(U \perp\!\!\!\perp X_u Y_u)$. Bestünde eine probabilistische Abhängigkeit zwischen U und dem Faktorenbündel $X_u Y_u$, würde U nicht zusammen mit X_u eine minimal hinreichende Bedingung bilden, die ihrerseits Teil derselben minimal notwendigen Bedingung von W wäre, in der auch Y_u enthalten wäre. Gälte $(U \perp\!\!\!\perp X_u Y_u)$ nicht, könnte aus den im letzten Abschnitt genannten Gründen ferner entweder kein Kausaltest mit U als Prüffaktor angelegt werden oder X_u und Y_u wären nicht unbekannt.

4.3.4 Rechtfertigung von $(X_u \perp\!\!\!\perp Y_u)$

Dies ist die kritischste der vier Unabhängigkeitsannahmen, zumal sowohl X_u wie auch Y_u für unbekannte Faktoren stehen und folglich deren mutmassliche Unabhängigkeit weder direkt noch indirekt messbar ist. Für $(X_u \perp\!\!\!\perp Y_u)$ lässt sich nur über den Begriff der alternativen Verursachung argumentieren. X_u und Y_u seien alternative Ursachen der Wirkung W und damit verschiedenen Disjunkten einer minimal notwendigen Bedingung zuzurechnen. Bestünde zwischen X_u und Y_u eine probabilistische Abhängigkeit, wären X_u und Y_u in einer verketteten oder epiphänomenalen Kausalstruktur miteinander verhängt oder zwischen ihnen bestünde eine andere Form von Abhängigkeit – etwa eine logische. Eine Disjunktion derart, dass X_u und Y_u in verschiedenen Disjunkten auftreten, wäre in diesem Fall keine minimal notwendige Bedingung von W.

Die vier Unabhängigkeitsannahmen werden, wie gesagt, vorausgesetzt, ohne dass deren Gültigkeit abschliessend beweisbar wäre. Sie gehören jedoch zum Standardrepertoire sämtlicher probabilistischer oder statistischer kausaler Schlussverfahren, insbesondere Regressionsanalysen machen regen Gebrauch von $(U \perp\!\!\!\perp X_u)$, $(U \perp\!\!\!\perp Y_u)$, $(U \perp\!\!\!\perp X_u Y_u)$ und $(X_u \perp\!\!\!\perp Y_u)$.[6]

4.4 Abschätzung von $P(Y_u)$ und $P(X_u)$

Um nun bei unterstellter Gültigkeit von $(U \perp\!\!\!\perp X_u)$, $(U \perp\!\!\!\perp Y_u)$, $(U \perp\!\!\!\perp X_u Y_u)$ und $(X_u \perp\!\!\!\perp Y_u)$ für die Replikationstabelle X.4 die konkreten Zahlwerte von $P(Y_u)$, $P(\overline{Y_u})$, $P(X_u)$ und $P(\overline{X_u})$ abzuschätzen, wählen wir aus der Gesamtpopulation der 200 Testdurchläufe – 100 bei an- und 100 bei abwesendem U – für $P(Y_u)$ bzw. $P(X_u)$ jeweils andere Stichproben aus.

Zumal die Möglichkeit besteht, dass U kausal relevant für W ist, lässt sich die Wahrscheinlichkeit unbekannter Störfaktoren Y_u nicht über die linke Spalte von Tabelle X.4 abschätzen. Instantiierungen von Y_u sind nicht direkt messbar, sondern nur indirekt vermittels des Auftretens von W. Kann W alternativ zu Y_u auch durch UX_u hervorgebracht werden, so gibt die Auftretenshäufigkeit von W in der linken Spalte keinen Aufschluss über $P(Y_u)$, da bei gesetztem Prüffaktor Instanzen von W nicht mit Sicherheit als Wirkungen von Y_u oder UX_u identifizierbar sind. In der rechten Spalte hingegen sind Instanzen von W zweifelsfrei nicht auf UX_u, sondern auf Y_u zurückzuführen. Ferner gilt aufgrund von $(U \perp\!\!\!\perp Y_u)$ auch[7]

$$P(Y_u) = P(Y_u \mid \overline{U}). \tag{I}$$

(I) und der Umstand, dass Instanzen von W bei nicht instantiiertem Prüffaktor von Y_u herrühren müssen, erlauben eine Abschätzung von $P(Y_u)$ über die relative Häufigkeit von W bei $\overline{U}$, d.h. über die Anzahl Instanzen von W in der *rechten Spalte* von Tabelle X.4.

$$\begin{aligned} P(Y_u) &= P(Y_u \mid \overline{U}) = P(W \mid \overline{U}) \\ P(\overline{Y_u}) &= 1 - P(Y_u) \end{aligned} \tag{II}$$

Derart erhalten wir für unser Beispiel die Werte $P(Y_u) \approx \frac{1}{100}$ und $P(\overline{Y_u}) \approx \frac{99}{100}$.

Ist U tatsächlich kausal relevant für W, so tritt bei gegebenem U die Wirkung W nur dann auf, wenn zugleich die Faktoren in X_u oder Y_u instantiiert sind. Es gilt mithin:

$$P(W \mid U) = P(X_u \mid U) + P(Y_u \mid U) - P(X_u Y_u \mid U). \tag{III}$$

---

[6] Vgl. Simon (1952), Blalock (1961), Spirtes, Glymour und Scheines (2000 (1993)) oder Pearl (2000).

[7] Beweis: Aus dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit $P(Y_u) = P(Y_u U) + P(Y_u \overline{U})$ folgt bei vorausgesetztem $(U \perp\!\!\!\perp Y_u)$ $P(Y_u) = P(Y_u)P(U) + P(Y_u \overline{U})$ und hieraus wiederum folgt $P(Y_u \overline{U}) = (1 - P(U))P(Y_u) = P(\overline{U})P(Y_u)$. Das heisst, auch Y_u und $\overline{U}$ sind probabilistisch unabhängig voneinander. Damit gilt $P(Y_u \mid \overline{U}) = \frac{P(Y_u \overline{U})}{P(\overline{U})} = \frac{P(Y_u)P(\overline{U})}{P(\overline{U})} = P(Y_u)$.

Aufgrund von $(U \perp\!\!\!\perp X_u)$, $(U \perp\!\!\!\perp Y_u)$, $(U \perp\!\!\!\perp X_u Y_u)$ und $(X_u \perp\!\!\!\perp Y_u)$ reduziert sich die rechte Seite von (III) zu

$$\mathrm{P}(W \mid U) = \mathrm{P}(X_u) + \mathrm{P}(Y_u) - \mathrm{P}(X_u Y_u). \tag{IV}$$

Daraus ergibt sich für $\mathrm{P}(X_u)$ und $\mathrm{P}(\overline{X_u})$:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X_u) &= \frac{\mathrm{P}(W \mid U) - \mathrm{P}(Y_u)}{1 - \mathrm{P}(Y_u)} = \frac{\mathrm{P}(W \mid U) - \mathrm{P}(Y_u)}{\mathrm{P}(\overline{Y_u})} \\ \mathrm{P}(\overline{X_u}) &= 1 - \mathrm{P}(X_u). \end{aligned} \tag{V}$$

Der Wert von $\mathrm{P}(W \mid U)$ lässt sich, zumal hier nur bekannte Faktoren eine Rolle spielen, leicht aus Replikationsreihen nach dem Muster von Tabelle X.4 ablesen. Wir schätzen $\mathrm{P}(X_u)$ also über die relative Häufigkeit von W bei gegebenem Prüffaktor ab, d.h. über die Anzahl Instanzen von W in der *linken Spalte* von Tabelle X.4. (V) liefert für unser Beispiel die Werte $\mathrm{P}(X_u) \approx \frac{99}{100}$ und $\mathrm{P}(\overline{X_u}) \approx \frac{1}{100}$.

4.5 Wahrscheinlichkeiten der Hintergrundszenarien

Die Verteilungen von X_u und Y_u in Tabelle X.5 bilden die 16 logisch möglichen Szenarien der unbekannten Faktoren unserer Differenztest-Replikationsreihe. Wir nennen diese Szenarien kurz *Hintergrundszenarien.* Als Nächstes müssen auf der Basis von $(U \perp\!\!\!\perp X_u)$, $(U \perp\!\!\!\perp Y_u)$, $(U \perp\!\!\!\perp X_u Y_u)$ und $(X_u \perp\!\!\!\perp Y_u)$ sowie den oben errechneten Werten für das Beispiel aus Tabelle X.4 die Wahrscheinlichkeiten jener 16 Hintergrundszenarien bestimmt werden. Für diese Berechnung ist eine weitere Unabhängigkeitsannahme erforderlich: Die in einer Durchführung eines Differenztests bei gesetztem bzw. abwesendem Prüffaktor instantiierten Faktorenkoinzidenzen sind unabhängig voneinander.

Ein Hintergrundszenario besteht jeweils aus zwei Konstellationen der unter X_u und Y_u fallenden Faktoren, d.h. aus einer Konstellation $\mathcal{K}_u$ dieser Faktoren bei gesetztem Prüffaktor und aus einer Konstellation $\mathcal{K}_{\overline{u}}$ bei abwesendem Prüffaktor.

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_u &= X_u Y_u \vee X_u \overline{Y_u} \vee \overline{X_u} Y_u \vee \overline{X_u Y_u} \\ \mathcal{K}_{\overline{u}} &= X_u Y_u \vee X_u \overline{Y_u} \vee \overline{X_u} Y_u \vee \overline{X_u Y_u} \end{aligned} \tag{VI}$$

Die Konstellationen $\mathcal{K}_u$ und $\mathcal{K}_{\overline{u}}$, die im Rahmen eines einzelnen Differenztest-Replikationsversuches auftreten, entsprechen jeweils zwei in Tabelle X.4 auf einer Zeile angeordneten Feldern. Wir bezeichnen mit $\mathcal{K}_u^i$ diejenige $\mathcal{K}_u$-Konstellation, die im i-ten Differenztest-Replikationsversuch, d.h. auf der i-ten Zeile von Tabelle X.4, auftritt. Analog ist $\mathcal{K}_{\overline{u}}^i$ zu verstehen. Die Konjunktion von $\mathcal{K}_u^i$ und $\mathcal{K}_{\overline{u}}^i$ bildet das Hintergrundszenario, das dem i-ten Differenztest-Replikationsversuch unterliegt.

Hintergrundszenarien einer beliebigen Differenztest-Replikation haben eine der in Tabelle X.5 dargestellten 16 Formen $\mathcal{S}_{(i)}$, $\mathcal{S}_{(ii)}$, …, $\mathcal{S}_{(xvi)}$, die ihrerseits je einem Paar $\langle \mathcal{K}_u, \mathcal{K}_{\overline{u}} \rangle$ entsprechen. So wird $\mathcal{S}_{(xi)}$ beispielsweise vom Paar $\langle \overline{X}_u Y_u, X_u \overline{Y}_u \rangle$ gebildet.

Sobald der i-te Differenztest durchgeführt und ein Resultat erzielt ist, wird der Raum an Hintergrundszenarien, welche diesem Testdurchlauf zugrunde liegen könnten, erheblich eingeschränkt. Das in der ersten Zeile von Tabelle X.4 abgebildete Testergebnis – $1|0$ – kann nur von 6 der 16 möglichen Szenarien herrühren, und zwar von $\mathcal{S}_{(ii)}$, $\mathcal{S}_{(vi)}$, $\mathcal{S}_{(ix)}$, $\mathcal{S}_{(xi)}$, $\mathcal{S}_{(xiv)}$ oder $\mathcal{S}_{(xv)}$. Zwei dieser Szenarien erfüllen HOB – $\mathcal{S}_{(ix)}$ und $\mathcal{S}_{(xv)}$ –, die anderen nicht. Die Frage nach der Gültigkeit von HOB für die Replikationsreihe aus Tabelle X.4 ist damit nichts anderes als die Frage, ob die 1-0-Zeilen mit grösserer Wahrscheinlichkeit vor dem Hintergrund von $\mathcal{S}_{(ix)} \vee \mathcal{S}_{(xv)}$ oder von $\mathcal{S}_{(ii)} \vee \mathcal{S}_{(vi)} \vee \mathcal{S}_{(xi)} \vee \mathcal{S}_{(xiv)}$ zustande kommen.

Um auf der Grundlage der oben abgeschätzten Werte für $P(X_u)$, $P(Y_u)$ usw. die Wahrscheinlichkeit eines Hintergrundszenarios wie etwa $\mathcal{S}_{(xi)} = \langle \overline{X_u} Y_u, X_u \overline{Y_u} \rangle$ zu errechnen, muss für jede Durchführung eines Differenztests die Unabhängigkeit von $\mathcal{K}_u$- und $\mathcal{K}_{\overline{u}}$-Konstellation vorausgesetzt werden:

$$P(\mathcal{K}_u^i \mathcal{K}_{\overline{u}}^i) = P(\mathcal{K}_u^i) P(\mathcal{K}_{\overline{u}}^i). \qquad (\mathcal{K}_u^i \perp\!\!\!\perp \mathcal{K}_{\overline{u}}^i)$$

Unter Voraussetzung von $(U \perp\!\!\!\perp X_u)$, $(U \perp\!\!\!\perp Y_u)$, $(U \perp\!\!\!\perp X_u Y_u)$, $(X_u \perp\!\!\!\perp Y_u)$ und $(\mathcal{K}_u^i \perp\!\!\!\perp \mathcal{K}_{\overline{u}}^i)$ folgt damit beispielsweise für $P(\mathcal{S}_{(xi)})$:

$$P(\mathcal{S}_{(xi)}) = P(\overline{X_u} Y_u, X_u \overline{Y_u}) = P(\overline{X_u}) P(Y_u) P(X_u) P(\overline{Y_u}) \approx \frac{1}{10000} \qquad \text{(VII)}$$

wobei $P(\overline{X_u} Y_u, X_u \overline{Y_u})$ die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, dass das Paar $\langle \overline{X_u} Y_u, X_u \overline{Y_u} \rangle$ auftritt.

Interessant für die Analyse des Beispieles aus Tabelle X.4 sind lediglich diejenigen Hintergrundszenarien, die mit den Differenztestresultaten $1|0$ und $0|1$ verträglich sind. Tabelle X.6 ordnet sämtlichen dieser für den vorliegenden Zusammenhang interessanten Hintergrundszenarien eine Wahrscheinlichkeit zu.

In den 16 logisch möglichen Hintergrundszenarien tritt bei $kr(U)$ sechsmal und bei $\neg kr(U)$ viermal das Testergebnis $1|0$ bzw. bei $kr(U)$ zweimal und bei $\neg kr(U)$ viermal das Testergebnis $0|1$ auf. Von den 6 1-0-Szenarien sind zwei homogen, und zwar die Fälle $\mathcal{S}_{(ix)}$ und $\mathcal{S}_{(xv)}$. Die Frage nach der Plausibilität der Einhaltung von HOB, die sich angesichts der Replikationstabelle X.4 stellt, entspricht damit der Frage, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass in den 99 erfolgreichen Testwiederholungen die Fälle $\mathcal{S}_{(ix)}$ oder $\mathcal{S}_{(xv)}$ und nicht eines der anderen 1-0-Szenarien instantiiert waren. Diese Frage lässt sich nun einfach beantworten. Die Wahrscheinlichkeiten, dass bei einem Testdurchlauf, bei dem das Ergebnis $1|0$ auftritt, die Szenarien $\mathcal{S}_{(ix)} \vee \mathcal{S}_{(xv)}$ bzw. $\mathcal{S}_{(ii)} \vee \mathcal{S}_{(vi)} \vee \mathcal{S}_{(xi)} \vee \mathcal{S}_{(xiv)}$ gegeben sind, betragen:

$$P(\mathcal{S}_{(ix)} \vee \mathcal{S}_{(xv)}) = P(X_u \overline{Y_u}, X_u \overline{Y_u}) + P(X_u \overline{Y_u}, \overline{X_u Y_u}) \approx 0.97 \qquad \text{(VIII)}$$

$$\begin{aligned} P(\mathcal{S}_{(ii)} \vee \mathcal{S}_{(vi)} \vee \mathcal{S}_{(xi)} \vee \mathcal{S}_{(xiv)}) = {} & P(X_u Y_u, X_u \overline{Y_u}) + P(X_u \overline{Y_u}, X_u Y_u) + \\ & P(\overline{X_u} Y_u, X_u \overline{Y_u}) + P(\overline{X_u} Y_u, \overline{X_u Y_u}) \approx 0.01 \end{aligned} \qquad \text{(IX)}$$

Test-resultat	HOB		$kr(U)$		$\neg kr(U)$
1 | 0	¬h	(ii)	$\mathrm{P}(X_u Y_u, X_u \overline{Y_u}) \approx \frac{1}{100}$	(ii)	$\mathrm{P}(X_u Y_u, X_u \overline{Y_u}) \approx \frac{1}{100}$
		(vi)	$\mathrm{P}(X_u Y_u, \overline{X_u Y_u}) \approx \frac{1}{10^4}$	(vi)	$\mathrm{P}(X_u Y_u, \overline{X_u Y_u}) \approx \frac{1}{10^4}$
		(xi)	$\mathrm{P}(\overline{X_u} Y_u, X_u \overline{Y_u}) \approx \frac{1}{10^4}$	(xi)	$\mathrm{P}(\overline{X_u} Y_u, X_u \overline{Y_u}) \approx \frac{1}{10^4}$
		(xiv)	$\mathrm{P}(\overline{X_u} Y_u, \overline{X_u Y_u}) \approx \frac{1}{10^6}$	(xiv)	$\mathrm{P}(\overline{X_u} Y_u, \overline{X_u Y_u}) \approx \frac{1}{10^6}$
	h	(ix)	$\mathrm{P}(X_u \overline{Y_u}, X_u \overline{Y_u}) \approx \frac{96}{100}$	–	–
		(xv)	$\mathrm{P}(X_u \overline{Y_u}, \overline{X_u Y_u}) \approx \frac{1}{100}$	–	–
0 | 1	¬h	–	–	(iv)	$\mathrm{P}(X_u \overline{Y_u}, X_u Y_u) \approx \frac{1}{100}$
		–	–	(vii)	$\mathrm{P}(X_u \overline{Y_u}, \overline{X_u} Y_u) \approx \frac{1}{10^4}$
		(viii)	$\mathrm{P}(\overline{X_u Y_u}, X_u Y_u) \approx \frac{1}{10^4}$	(viii)	$\mathrm{P}(\overline{X_u Y_u}, X_u Y_u) \approx \frac{1}{10^4}$
		(xii)	$\mathrm{P}(\overline{X_u Y_u}, \overline{X_u} Y_u) \approx \frac{1}{10^6}$	(xii)	$\mathrm{P}(\overline{X_u Y_u}, \overline{X_u} Y_u) \approx \frac{1}{10^6}$

Tab. X.6: Auf Grundlage von $(U \perp\!\!\!\perp X_u)$, $(U \perp\!\!\!\perp Y_u)$, $(U \perp\!\!\!\perp X_u Y_u)$ und $(X_u \perp\!\!\!\perp Y_u)$ sowie $(\mathcal{K}_u^i \perp\!\!\!\perp \mathcal{K}_{\overline{u}}^i)$ berechnete Werte der Hintergrundszenarien, die 1-0- bzw. 0-1-Zeilen ergeben. Die Werte sind einerseits geordnet nach Homogenität der entsprechenden Szenarien und andererseits nach den Voraussetzungen $kr(U)$ und $\neg kr(U)$. Ein Ausdruck wie $\mathrm{P}(X_u Y_u, X_u \overline{Y_u})$ steht für die Wahrscheinlichkeit, dass im Durchlauf mit gesetztem U die Koinzidenz $X_u Y_u$ und im Durchlauf mit abwesendem U die Koinzidenz $X_u \overline{Y_u}$ instantiiert ist.

Die Hypothese, dass den 99 erfolgreichen Reproduktionen des Differenztests aus Tabelle X.1 ein *homogenes* Szenario an unbekannten Faktoren unterliegt und folglich der Schluss auf die kausale Relevanz von U für W seine Berechtigung hat, ist damit um ein Vielfaches wahrscheinlicher als die in Graph (b) von Abbildung X.1 dargestellte Gegenhypothese.

4.6 Allgemeines Testverfahren

Das in den letzten Abschnitten an einem Beispiel entwickelte Prüfverfahren für die Einhaltung von HOB soll nun allgemein gefasst werden. Es setzt fünf Unabhängigkeitsannahmen voraus:

(a) Der Prüffaktor U ist probabilistisch unabhängig von den potentiellen Restfaktoren X_u desjenigen Ursachenbündels von W, dessen Teil U möglicherweise ist.

$$\mathrm{P}(UX_u) = \mathrm{P}(U)\mathrm{P}(X_u). \qquad (U \perp\!\!\!\perp X_u)$$

(b) Der Prüffaktor U ist probabilistisch unabhängig von den Faktoren Y_u sämtlicher alternativer Ursachenbündel von W, deren Teil U nicht ist.

$$\mathrm{P}(UY_u) = \mathrm{P}(U)\mathrm{P}(Y_u). \qquad (U \perp\!\!\!\perp Y_u)$$

(c) Der Prüffaktor U ist probabilistisch unabhängig von der Konjunktion $X_u Y_u$ bestehend aus den Restfaktoren X_u desjenigen Ursachenbündels von W, dessen Teil U möglicherweise ist, und den Faktoren Y_u sämtlicher alternativer Ursachenbündel von W.

$$\mathrm{P}(UX_uY_u) = \mathrm{P}(U)\mathrm{P}(X_uY_u). \qquad (U \perp\!\!\!\perp X_uY_u)$$

(d) Die Restfaktoren X_u desjenigen Ursachenbündels von W, dessen Teil U möglicherweise ist, und die Faktoren Y_u sämtlicher alternativer Ursachenbündel von W sind probabilistisch unabhängig voneinander.

$$\mathrm{P}(X_uY_u) = \mathrm{P}(X_u)\mathrm{P}(Y_u) \qquad (X_u \perp\!\!\!\perp Y_u)$$

(e) In einem beliebigen Reproduktionsversuch i eines Differenztests D sind die Konstellationen von X_u und Y_u, die bei gesetztem Prüffaktor auftreten ($\mathcal{K}_u^i$), und diejenigen, die bei abwesendem Prüffaktor auftreten ($\mathcal{K}_{\overline{u}}^i$), probabilistisch unabhängig voneinander.

$$\mathrm{P}(\mathcal{K}_u^i\mathcal{K}_{\overline{u}}^i) = \mathrm{P}(\mathcal{K}_u^i)\mathrm{P}(\mathcal{K}_{\overline{u}}^i) \qquad (\mathcal{K}_u^i \perp\!\!\!\perp \mathcal{K}_{\overline{u}}^i)$$

Gegeben einen einmalig durchgeführten Differenztest D, der ein potentiell kausal interpretierbares Resultat liefert, und vorausgesetzt die fünf Unabhängigkeitsannahmen ($U \perp\!\!\!\perp X_u$), ($U \perp\!\!\!\perp Y_u$), ($U \perp\!\!\!\perp X_uY_u$), ($X_u \perp\!\!\!\perp Y_u$) und ($\mathcal{K}_u^i \perp\!\!\!\perp \mathcal{K}_{\overline{u}}^i$), sieht das Prüfverfahren für HOB in der Faktorenmenge bestehend aus Prüffaktor U, potentiellen Restfaktoren X_u des Ursachenbündels, dessen Teil U möglicherweise ist, potentiellen Alternativursachen Y_u und der Wirkung W wie folgt aus:

(i) Reproduziere D.

(ii) Schätze die Werte von $\mathrm{P}(Y_u)$ und $\mathrm{P}(\overline{Y_u})$ über diejenigen Testsituationen der Reproduktionsreihe von D ab, in denen U nicht instantiiert ist, d.h.

$$\mathrm{P}(Y_u) = \mathrm{P}(W \mid \overline{U})$$
$$\mathrm{P}(\overline{Y_u}) = 1 - P(Y_u).$$

(iii) Schätze die Werte von $\mathrm{P}(X_u)$ und $\mathrm{P}(\overline{X_u})$ über diejenigen Testsituationen der Reproduktionsreihe von D ab, in denen U instantiiert ist, d.h.

$$\mathrm{P}(X_u) = \frac{\mathrm{P}(W \mid U) - \mathrm{P}(Y_u)}{\mathrm{P}(\overline{Y_u})}$$
$$\mathrm{P}(\overline{X_u}) = 1 - \mathrm{P}(X_u).$$

(iv) Greife aus den logisch möglichen Hintergrundszenarien die Menge M derjenigen Szenarien heraus, welche den in D erzielten Testresultaten entsprechen.

(v) Berechne aufgrund der geschätzten Werte für $P(X_u)$, $P(\overline{X_u})$, $P(Y_u)$ und $P(\overline{Y_u})$ die Wahrscheinlichkeiten der Hintergrundszenarien in M entsprechend der Konstellation der Faktoren X_u, $\overline{X_u}$, Y_u und $\overline{Y_u}$ in einem jeweiligen Szenario.

(vi) Teile die Szenarien in M in die zwei Submengen $\mathsf{H} \subseteq \mathsf{M}$ und $\neg\mathsf{H} \subseteq \mathsf{M}$ auf: die homogenen und die nicht-homogenen Szenarien.

(vii) Prüfe, ob aufgrund der in Schritt (v) berechneten Werte für $P(X_u)$, $P(\overline{X_u})$, $P(Y_u)$ und $P(\overline{Y_u})$ die Disjunktion der Szenarien in H oder in $\neg\mathsf{H}$ die grössere Wahrscheinlichkeit für sich beanspruchen kann, d.h. kurz, ob $P(\mathsf{H}) > P(\neg\mathsf{H})$ oder ob $P(\mathsf{H}) < P(\neg\mathsf{H})$.

(viii) Gilt $P(\mathsf{H}) > P(\neg\mathsf{H})$, so ziehe gemäss dem Resultat von D einen kausalen Schluss, gilt dagegen $P(\mathsf{H}) < P(\neg\mathsf{H})$, so verzichte auf einen kausalen Schluss.

✍ ÜBUNG: *Schliessen auf Kausalgraphen 3*

✍ ÜBUNG: *Kausales Schliessen und Häufigkeitstabellen*