or, si λ marque un nombre entier positif quelconque, on sait qu'il y aura

$$\int u^{\lambda}\,\partial x = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots\lambda,$$

et de-là on tirera

$$\int u^{\lambda+1}\,\partial x = (\lambda+1)\int u^{\lambda}\,\partial x,$$

$$\int u^{\lambda+2}\,\partial x = (\lambda+1)\cdot(\lambda+2)\int u^{\lambda}\,\partial x, \text{ etc.}$$

et cette réduction aura toujours lieu, quelque nombre qu'on prenne pour λ. Prenant donc $\lambda = -\frac{1}{2}$, j'ai démontré autrefois[5] qu'on aura $\int \frac{\partial x}{\sqrt{u}} = \pi$,[6] et $\int \partial x\sqrt{u} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, π désignant la circonférence d'un cercle, dont le diamètre $= 1$. Maintenant, si l'on met $m = n\,\frac{1}{2}\,\partial p = 0$,[7] puisque les coëfficiens de $(1+z)^{\frac{1}{2}}$ sont

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4} + \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6} - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} + \text{ etc.},$$

nous en tirons cette série des carrés,

$$1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\right)^2 + \left(\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 + \text{ etc.},$$

dont la somme sera

$$\frac{\int u\,\partial x}{\int \partial x\sqrt{u}\,\int \partial x\sqrt{u}} = \frac{4}{\pi},$$

à cause de

$$\int u\,\partial x = 1 \quad \text{et} \quad \int \partial x\sqrt{u} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

ce qui s'accorde parfaitement avec la somme qu'on trouve par la voie de l'approximation.[8]

[R 456a] (Dans l'inventaire de la correspondance d'Euler figurant dans Euler 1975 (O. IVA 1), p. 90, cette lettre ne porte pas de numéro de registre. Les pages correspondantes ont été incluses par erreur dans la référence de la lettre 4 (R 454). Mais comme il s'agit d'une lettre autonome, constituant une réponse à la lettre 6 (R 456), nous avons respecté la chronologie en lui donnant le numéro [R 456a]).
Publié: *Mém. Paris* (1778), 1781, mémoires, p. 606–609 (Euler 1781a (E. 521); Euler 1920 (O. I 18), p. 74–77)

[1] Voir la fin de la lettre 4 (R 454) et la note 5 de la lettre 6 (R 456).

[2] Euler note ici $(\frac{n}{p})$ les coefficients du binôme qui correspondent aux nombres de combinaisons que l'on écrit aujourd'hui C_n^p ou $\binom{n}{p}$. On trouve cette notation notamment dans le mémoire Euler 1794a (E. 663; voir *infra*, note 4). Cf. *infra*, note 3.

[3] Les résultats précédents figurent dans le mémoire «De mirabilibus proprietatibus unciarum, quae in evolutione binomii ad potestatem quamcunque evecti occurrunt» (Euler 1784 (E. 575); Euler 1927 (O. I 15), p. 528–568), présenté à l'Académie des sciences de Saint-Pétersbourg le 13 (24) mai 1776 (*Protokoly* III, 1900, p. 241). On y trouve la notation $[\frac{n}{p}]$ pour les coefficients du binôme.

[4] On trouve les résultats qui suivent dans le mémoire «Plenior expositio serierum illarum memorabilium, quae ex unciis potestatum binomii formantur» (Euler 1794a (E. 663); Euler 1933 (O. I 16/1), p. 193–234), présenté à l'Académie des sciences de Saint-Pétersbourg le 30 septembre (11 octobre) 1776 (*Protokoly* III, 1900, p. 259). Sur l'intégrale $\int_0^1 \left(\ell\,\frac{1}{x}\right)^l dx$, voir le mémoire Euler 1794 (E. 662), «De vero valore formulae integralis $\int \partial x\,(\ell\,\frac{1}{x})^n$ a termino $x = 0$ usque ad terminum $x = 1$ extensae», présenté lors de la même séance académique (Euler 1932 (O. I 19), p. 63–83). Cette intégrale correspond à la valeur $\Gamma(l+1)$ de la fonction gamma telle qu'elle est définie plus tard par Legendre, qui la nomme intégrale eulérienne de seconde espèce.