3
Condorcet à Euler
[Paris], 15 décembre [1775]

Ce 15 X$^{\text{bre}}$[1]

Je suis charmé, mon cher et illustre Confrere, que vous n'ayez point perdu sur Vos lettres de change, car les operations de la banque sont vraisemblablement la seule branche de calcul à laquelle vous n'ayez point fai[t] faire quelque progrès.[2]

M. de Fouchi m'a promis un récépissé de la piece des Cometes à laquelle vous vous intéressés, l'auteur ne doit d'ailleurs avoir aucune inquiétude. Je n'ai pu lire encore qu'une partie de cet ouvrage, la méthode m'a paru bien élégante et bien simple, et je suis persuadé qu'appliquée par des mains habiles à une comete en particulier elle donnerait des résultats très exacts.[3]

J'ai cherché la démonstration de la premiere des deux formules que vous avez bien voulu m'envoier[,] voici ce que j'ai trouvé.[4] Je serai fort aise de savoir si vous êtes content de ma méthode et si elle a quelque rapport à la votre[;] rien ne pourrait être plus glorieux pour moi que cette ressemblance.

Soit donc $\int \frac{x^m}{\ell\, x}\,\frac{\partial x}{x}$ don[t] on cherche la valeur depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$.[5] J'ai en géneral

$$\int \frac{x^m}{\ell\, x}\,\frac{\partial x}{x} = x^m \cdot \frac{1}{m\,\ell\, x} + \frac{1}{m^2\,\ell\, x^2} + \frac{2}{m^3\,\ell\, x^3} + \frac{2\cdot 3}{m^4\,\ell\, x^4}\ \text{etc.}$$

Ainsi sa valeur depuis $x = X$ jusqu'à $x = X'$ sera

$$\begin{aligned} &X'^m \cdot \frac{1}{m\,\ell\, X'} + \frac{1}{m^2\,\ell\, X'^2} + \frac{2}{m^3\,\ell\, X'^3} + \frac{2\cdot 3}{m^4\,\ell\, X'^4}\ \text{etc.}\\ -&X^m \cdot \frac{1}{m\,\ell\, X} + \frac{1}{m^2\,\ell\, X^2} + \frac{2}{m^3\,\ell\, X^3} + \frac{2\cdot 3}{m^4\,\ell\, X^4}\ \text{etc.}\end{aligned}$$

Pour trouver maintenant la valeur de cette serie en m, je la differentie et la difference devient

$$\begin{aligned} X'^m \cdot \frac{\partial m}{m} &+ \frac{\partial m}{m^2\,\ell\, X'} + \frac{2\partial m}{m^3\,\ell\, X'^2} + \frac{2\cdot 3\cdot \partial m}{m^4\,\ell\, X'^3}\ \text{etc.}\\ &- \frac{\partial m}{m^2\,\ell\, X'} - \frac{2\partial m}{m^3\,\ell\, X'^2} - \frac{2\cdot 3\,\partial m}{m^4\,\ell\, X'^3}\ \text{etc.}\\ -X^m \cdot \frac{\partial m}{m} &+ \frac{\partial m}{m^2\,\ell\, X} + \frac{2\partial m}{m^3\,\ell\, X^2} + \frac{2\cdot 3\cdot \partial m}{m^4\,\ell\, X^3}\ \text{etc.}\\ &- \frac{\partial m}{m^2\,\ell\, X} - \frac{2\partial m}{m^3\,\ell\, X^2} - \frac{2\cdot 3\cdot \partial m}{m^4\,\ell\, X^3}\ \text{etc.}\end{aligned}$$

$= X'^m - X^m \cdot \frac{\partial m}{m}$ en otant ce qui se détruit[.]

Mais lorsque $X' = 1$ et $X = 0$, $X'^{\,m} - X^{\,m} = 1$, donc alors la valeur de $\int \frac{x^{\,m}}{\ell\, x}\,\frac{\partial x}{x}$ prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$ est $\int \frac{\partial m}{m} = \ell\, m$,[6] de même $\int \frac{x^{\,n}}{\ell\, x}\,\frac{\partial x}{x}$ prise entre les mêmes limites est $\ell\, n$, et la valeur de $\int \frac{x^{\,m} - x^{\,n}}{\ell\, x}\,\frac{\partial x}{x}$ est $\ell\,\frac{m}{n}$, come vous l'avez trouvé.

En general[7] si l'on cherche des valeurs particulieres de $\int A\,\partial x$ où A contient des coefficiens ou des exposans indeterminés[,] appelant X et X' les deux valeurs de x entre lesquelles on prend l'intégrale et Z, Z' les valeurs de A corré[s]pondantes à $x = X'$,