(O. I 17), p. 433), la constante est ici infinie. En effet, l'intégrale $\int_0^1 \frac{x^m}{\ell\, x}\ \frac{dx}{x}$, égale à $\int_0^1 \frac{dy}{\ell\, y}$, est divergente, contrairement à $\int_0^1 \frac{x^m - x^n}{\ell\, x}\ \frac{dx}{x}$, d'où le «paradoxe» signalé par Lagrange dans sa lettre à Euler du 10 février 1775 (R 1387: Euler 1980 (O. IVA 5), p. 503). Voir à ce propos la réponse d'Euler à Lagrange du 23 mars (3 avril) 1775 (R 1388: *ibid.*, p. 506) et le mémoire «Observationes in aliquot theoremata illustrissimi de la Grange» (Euler 1785 (E. 587)), p. 19–22; Euler 1920 (O. I 18), p. 159–161), remis à l'Académie de Saint-Pétersbourg le 13 (24) mars 1775 (*Protokoly* III, 1900, p. 174).

[7] Comparer le passage qui suit avec Condorcet 1781, p. 611–613 (Euler 1920 (O. I 18), p. 79–80).

[8] Il faut lire: $x = X$, $x = X'$. (Avec la formule qui suit, on a un exemple de la tendance de Condorcet à mal choisir ses notations, ce qui a souvent contribué à rendre ses écrits mathématiques difficiles d'accès).

[9] Il faut lire: $\int X'^{\,m}\, \frac{\partial X'}{X'} = \frac{X'^{\,m}}{m}$.

[10] Voir *supra*, note 3. La bonne opinion manifestée par Condorcet sur ce mémoire ne sera pas partagée par d'Alembert (voir l'introduction, note 29). Le prix ne sera d'ailleurs pas décerné en 1776 (voir lettre 5 (R 455), note 2).

4
Euler à Condorcet
[Saint-Pétersbourg], 2 (13) février 1776

[*Démonstration des deux Théorèmes précédens.*]

Soit Q une fonction quelconque des deux variables x et y, et qu'on cherche la quantité Z, telle que $\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial x\, \partial y}\right) = Q$, où il s'agit d'une double intégration; l'une où la seule x est prise pour variable, et l'autre où la seule y varie; la première devra être étendue depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, et l'autre depuis $y = 0$ jusqu'à $y = n$: par la nature de telles formules, on aura donc d'une double manière ou $Z = \int \partial x \int Q\, \partial y$, ou $Z = \int \partial y \int Q\, \partial x$. Maintenant, qu'on suppose $Q = x^y$, et on aura $\int Q\, \partial y = \frac{x^y}{\ell\, x} - \frac{1}{\ell\, x}$, afin que cette intégrale évanouisse lorsque $y = 0$. Soit donc à présent $y = n$, et nous aurons $\int Q\, \partial y = \frac{x^n - 1}{\ell\, x}$, et partant $Z = \int \frac{(x^n - 1)\, \partial x}{\ell\, x}$; ensuite nous aurons $\int Q\, \partial x = \frac{x^{y+1}}{y+1}$, qui évanouit lorsque $x = 0$; posant donc $x = 1$, il en résulte $\int Q\, \partial x = \frac{1}{y+1}$, et de-là, $Z = \int \frac{\partial y}{y+1} = \ell\,(y+1)$, (expression qui disparoît lorsque $x = 0$). Qu'on fasse donc $y = n$, et l'on aura $Z = \ell\,(n+1)$; par conséquent, il est certain que cette intégrale $\int \frac{\partial x\, (x^n - 1)}{\ell\, x}$, prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, est $\ell\,(n+1)$.[1]

Pour l'autre formule intégrale plus compliquée que je vous avois communiquée, j'avois supposé $Q = \frac{x^{m-y} + x^{m+y}}{(1+x^{2m})x}$; de-là, prenant d'abord x constante à cause de $\int x^{m-y} \partial y = -\frac{x^{m-y}}{\ell\, x}$ et de $\int x^{m+y}\, \partial y = \frac{x^{m+y}}{\ell\, x}$, on aura $\int Q\, \partial y = \frac{x^{m+y} - x^{m-y}}{(1+x^{2m})\, x\, \ell\, x}$, ce qui devient $= 0$ posant $y = 0$. Faisant donc $y = n$, on aura $\int Q\, \partial y = \frac{x^{m+n} - x^{m-n}}{(1+x^{2m})\, x\, \ell\, x}$, et partant $Z = \int \frac{(x^{m+n} - x^{m-n})\, \partial x}{(1+x^{2m})\, x\, \ell\, x}$.

L'autre intégration donne d'abord

$$\int Q\, \partial x = \int \frac{(x^{m-y} + x^{m+y})\, \partial x}{(1+x^{2m})\, x},$$