dont l'intégrale doit être étendue depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$; or pour ce cas, j'ai démontré autrefois[2] que cette intégrale se réduit à cette forme, $\frac{\pi}{2m\cos.\frac{\pi y}{2m}}$; d'où nous tirons $Z = \int \frac{\pi\,\partial y}{2m\cos.\frac{\pi y}{2m}}$. Pour cette forme, posons $\frac{\pi y}{2m} = \varphi$ pour avoir

$$Z = \int \frac{\partial\varphi}{\cos.\varphi} = \int \frac{\partial\varphi}{\sin.(90^{\mathrm{d}} + \varphi)},$$

dont l'intégrale est $\ell\,.\,\mathrm{tang.}\,(45^{\mathrm{d}} + \frac{1}{2}\varphi)$, et partant $Z = \ell\,.\,\mathrm{tang.}\,\big(45^{\mathrm{d}} + \frac{\pi y}{4m}\big)$, qui en effet s'évanouit prenant $y = 0$. Faisons donc $y = n$, et nous aurons $Z = \ell\,.\,\mathrm{tang.}\,\big(45^{\mathrm{d}} + \frac{\pi n}{4m}\big)$; d'où il est clair que sous les conditions présentes, on aura

$$\int \frac{(x^{m+n-1} - x^{m-n-1})\,\partial x}{(1+x^{2m})\,\ell x} \left\{\begin{matrix}\text{depuis} & x=0\\ \text{jusqu'à} & x=1\end{matrix}\right\} = \ell\,.\,\mathrm{tang.}\left(45^{\mathrm{d}} + \frac{\pi n}{4m}\right).$$ [3]

Par ces deux exemples, on verra aisément que cette spéculation mérite toute l'attention des Géomètres. La première idée qui m'a conduit à cette recherche, étoit tirée d'un principe entièrement différent, que voici.[4] J'avois considéré cette formule $\int \frac{(x-1)\,\partial x}{\ell x}$, où au lieu de ℓx j'ai écrit cette valeur $\frac{x^{\omega}-1}{\omega}$, en supposant ω infiniment petit, ou bien $\ell x = i\,(x^{\frac{1}{i}} - 1)$, en prenant pour i un nombre infiniment grand.[5] Qu'on pose à présent $x^{\frac{1}{i}} = z$, ou bien $x = z^i$, où il faut remarquer que les termes de l'intégration $x = 0$ et $x = 1$ se réduisent à $z = 0$ et à $z = 1$; cette valeur étant substituée, transforme notre formule en celle-ci, $\frac{(z^i-1)\,z^{i-1}\,\partial z}{z-1}$; or la fraction $\frac{z^i-1}{z-1}$ ou bien $\frac{1-z^i}{1-z}$, se réduit à la série

$$1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{i-1},$$

qui étant multipliée et intégrée, donne

$$\frac{z^i}{i} + \frac{z^{i+1}}{i+1} + \frac{z^{i+2}}{i+2} + \frac{z^{i+3}}{i+3} + \cdots + \frac{z^{2i-1}}{2i-1},$$

et posant $z = 1$, la valeur cherchée sera

$$\frac{1}{i} + \frac{1}{i+1} + \frac{1}{i+2} + \frac{1}{i+3} + \frac{1}{i+4} + \cdots + \frac{1}{2i-1},$$

dont la valeur est $\ell\,2$, de sorte que

$$\int \frac{(x-1)\,\partial x}{\ell x} \left\{\begin{matrix}\text{depuis} & x=0\\ \text{jusqu'à} & x=1\end{matrix}\right\}$$

est $= \ell\,2$.

Pour démontrer la somme de la série trouvée qu'on appellera A, on n'a qu'à remarquer que

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{i-1} + \frac{1}{i} + \frac{1}{i+1} + \frac{1}{i+2} + \frac{1}{i+3} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{1}{2i-1} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{1-i}\right),$$

où, parce que la série supérieure contient deux fois plus de termes que l'inférieure, on n'a qu'à soustraire chaque terme de la dernière de la supérieure alternativement, et l'on aura

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{i-1} + \frac{1}{i} + \frac{1}{i-1} \cdots$$
$$\cdots + \frac{1}{2i-1} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \text{etc.}$$ [6]