Soit maintenant le terme général $X = \ell\,(1+x)$ et il y aura

$$A = \ell\,1;\ B = \ell\,2;\ C = \ell\,3;\ D = \ell\,4;\ E = \ell\,5;\ \text{etc.}$$

Ensuite

$$\begin{aligned}
\Delta A &= \ell\,\frac{2}{1};\ \Delta B = \ell\,\frac{3}{2};\ \Delta C = \ell\,\frac{4}{3};\ \Delta D = \ell\,\frac{5}{4};\ \text{etc.}\\
\Delta^2 A &= \ell\,\frac{1\cdot 3}{2^2};\ \Delta^2 B = \ell\,\frac{2\cdot 4}{3^2};\ \Delta^2 C = \ell\,\frac{3\cdot 5}{4^2};\ \text{etc.}\\
\Delta^3 A &= \ell\,\frac{4\cdot 2^3}{1\cdot 3^3};\ \Delta^3 B = \ell\,\frac{5\cdot 3^3}{2\cdot 4^3};\ \text{etc.}\\
\Delta^4 A &= \ell\,\frac{1\cdot 3^6\cdot 5}{2^4\cdot 4^4};\ \text{etc.}\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

et ces valeurs étant substituées donnent la serie proposée

$$\ell\,2 - \frac{1}{2}\,\ell\,\frac{1\cdot 3}{2^2} + \frac{1}{3}\,\ell\,\frac{4\cdot 2^3}{1\cdot 3^3} - \frac{1}{4}\,\ell\,\frac{1\cdot 3^6\cdot 5}{2^4\cdot 4^4} + \text{etc.}$$

dont la somme $= \frac{\ell\,(1+x)-\ell\,1}{x}$ en mettant $x = 0$ et partant $= \frac{\partial x}{(1+x)\,\partial x} = \frac{1}{1+x} = 1$.

Cette methode sommatoire, étant générale, on en pourra déduire avec la même facilité une infinité d'autres séries également remarquables.

P[ar] E[xemple] pour le cas $X = \ell\,(1+xx)$ on obtient

$$\ell\,2 - \frac{1}{2}\,\ell\,\frac{5}{2^2} + \frac{1}{3}\,\ell\,\frac{2^3\cdot 10}{5^3} - \frac{1}{4}\,\ell\,\frac{5^6\cdot 17}{2^4\cdot 10^4} + \text{etc.} = 0.$$

Mais une autre sommation des plus remarquables se présente dans le cas $X =$ Sin $(1+2x)\,\varphi$ ce qui donne la série: Sin φ + Sin 3φ + Sin 5φ + Sin 7φ + etc. dont les différences sont

$$\begin{aligned}
&\text{Les } 1^{\text{res}} \ldots + \ 2\,\text{Sin}\ \varphi\ (\text{Cos}\ 2\varphi + \text{Cos}\ 4\varphi + \text{Cos}\ 6\varphi + \text{Cos}\ 8\varphi + \text{etc.})\\
&\text{Les } 2^{\text{des}} \ldots - \ 4\,\text{Sin}\ \varphi^{\,2}\ (\text{Sin}\ 3\varphi + \text{Sin}\ 5\varphi + \text{Sin}\ 7\varphi + \text{Sin}\ 9\varphi + \text{etc.})\\
&\text{Les } 3^{\text{es}} \ \ldots - \ 8\,\text{Sin}\ \varphi^{\,3}\ (\text{Cos}\ 4\varphi + \text{Cos}\ 6\varphi + \text{Cos}\ 8\varphi + \text{Cos}\ 10\varphi + \text{etc.})\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

et partant la serie, qu'on en a formé auparavant, sera

$$2\,\text{Sin}\ \varphi\ \text{Cos}\ 2\varphi + \frac{1}{2}\cdot 4\,\text{Sin}\ \varphi^{\,2}\ \text{Sin}\ 3\varphi - \frac{1}{3}\cdot 8\,\text{Sin}\ \varphi^{\,3}\cdot \text{Cos}\ 4\varphi - \frac{1}{4}\cdot 16\,\text{Sin}\ \varphi^{\,4}\ \text{Sin}\ 5\varphi + \text{etc.}$$

dont la somme est

$$\frac{X-A}{x} = \frac{\text{Sin}\ (1+2x) - \text{Sin}\ \varphi}{x},\ [13]$$

dont la valeur en mettant $x = 0$ est $2\varphi\,\text{Cos}\ \varphi$. Soit pour abreger $2\,\text{Sin}\ \varphi = \alpha$ et on obtient la sommation suivante:

$$2\varphi\ \text{Cos}\ \varphi = \alpha\ \text{Cos}\ 2\varphi + \frac{1}{2}\alpha^2\ \text{Sin}\ 3\varphi - \frac{1}{3}\alpha^3\ \text{Cos}\ 4\varphi - \frac{1}{4}\alpha^4\ \text{Sin}\ 5\varphi + \text{etc.}$$

dont il seroit bien difficile de demontrer directement la verité.

Daignés recevoir les assurances de la profonde vénération, du sincère et respectueux dévoüement avec lequel j'ai l'honneur d'être

Monsieur