Si à la place de n je mets $n+1$,[3] et que je nome alors Z la fonction proposée, il est clair que j'aurai

$$Z + \Delta Z = Z \cdot \frac{4n+2}{n+1},$$

mais A^2 devient dans ce cas

$$A^2 + 2A\,\Delta A + \Delta A^2[,]$$

B^2 devient $B^2 + 2B\,\Delta B + \Delta B^2$[,] etc. et de plus $\Delta A = 1$[,] $\Delta B = A$ et ainsi de suite[;] on aura donc

$$Z + \Delta Z = 2Z + 2A + 2AB + 2BC \text{ etc.}$$

d'où reduisant

$$\overline{n+1}\ \ \overline{A + AB + BC\ \text{ etc.}} = n\ \cdot\ 1 + A^2 + B^2 \text{ etc.}$$

mais

$$A = n, \quad AB = A^2 \cdot \frac{n-1}{2}, \quad BC = B^2 \cdot \frac{n-2}{3} \text{ etc.}$$

donc

$$n^2 + n + \frac{n+1 \cdot n-1}{2}\,A^2 + \frac{n+1 \cdot n-2}{3}\,B^2 + \frac{n+1 \cdot n-3}{4}\,C^2 \text{ etc.}$$
$$= n + nA^2 + nB^2 + nC^2 \text{ etc.}$$

donc

$$n^2 + \frac{n^2-2n-1}{2}\,A^2 + \frac{n^2-4n-2}{3}\,B^2 + \frac{n^2-6n-3}{4}\,C^2 \text{ etc.} = 0[.]$$

Joignant ensemble les deux premiers termes[,] à cause [de] $n^2 = A^2$, leur somme sera $\frac{n^2-2n+1}{2}\,A^2 = 2B^2$.

Ajoutant cette somme au 3^e^ terme il devient $\frac{n^2-4n+4}{3}\,B^2 = 3C^2$ ... et ainsi de suite... come il est aisé de voir. Or le dernier terme de la serie des A, B, C, etc. etant 1 la somme de tous les termes de la serie ci dessus egalée à zero[,] hors le dernier[,] sera egale à n, mais le dernier terme de cette même serie est $-\,n$ donc la somme totale sera zéro. Cette méthode peut s'appliquer à beaucoup de cas.

Quant à la formule que vous intégrez par les arcs de cercle quoiqu'elle ne puisse être rendue rationelle par des transformations: je n'en ai point été surpris. Je savais qu'il existait beaucoup de ces formules.[4]

Je n'ai pas encore eu le tems d'examiner l'autre serie dont vous paraissez désirer une démonstration directe.[5]

La maniere dont vous démontrez que $\int \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2} = \ell V$ ne peut avoir lieu dans les courbes algébriques ne me paraît pas suffisante.[6] J'avoue que celle que je vous ai proposée[7] peut être défectueuse. Je voudrais trouver mieux mais je crois cela fort difficile. Mais votre observation est toujours très ingénieuse et ces sortes de raisonemens, s'ils ne donnent de demonstrations rigoureuses des Théorêmes, servent à faire trouver des enoncés très piquans et dont la demonstration peut ouvrir le champ à des recherches fort importantes.

L'impression de votre *Theorie des vaisseaux* avance beaucoup.[8]

J'ai été assez heureux pour contribuer à faire donner à M. Lexell le titre de correspondant de notre academie, il honore ce titre par ses talens, et par son attachement pour vous qui doit le rendre respectable à tous ceux qui aiment le genie et la vertu.[9]

Adieu mon cher et illustre maitre. Comptez à jamais sur mon respect et mon tendre dévouement.[10]

R 456
Original, 3 p. – PFARAN, f. 1, op. 3, n° 62, l. 254–255r