Adresse: «A Monsieur / Monsieur Euler directeur / de l'academie imperiale etc. / A Petersbourg» (l. 255v)

[1] Cette proposition sur la somme des carrés des coefficients du binôme figurait sans doute dans une lettre actuellement perdue qui répondait à la lettre 5 (R 455) de Condorcet. Voir la lettre 4 (R 454), note 7, et *infra*, note 6.

[2] Comme c'était encore le cas parfois à l'époque, Condorcet utilise ici un trait supérieur au lieu de parenthèses. L'oubli fréquent de ce trait rend certaines de ses formules ambiguës.

[3] Condorcet donne ici une démonstration par récurrence, plus satisfaisante d'ailleurs que celle publiée dans Condorcet 1781, p. 613–614 (Euler 1920 (O. I 18), p. 80–82). Condorcet a évoqué ce théorème d'Euler et la démonstration qu'il en a donné dans une lettre perdue à Lagrange du 6 août 1776 (voir la réponse de Lagrange du 3 janvier 1777 dans Lagrange, *Œuvres*, vol. 14, 1892, p. 41).

[4] Dans le cadre de ses nombreuses recherches de cette période sur l'intégration des différentielles irrationnelles, Euler a mis en évidence le cas de celles qui, bien qu'on ne voie pas a priori comment les rendre rationnelles, ont cependant une intégrale indéfinie s'exprimant à l'aide de logarithmes ou d'arcs circulaires. Voir notamment le mémoire «De integrationibus difficillimis, quarum integralia tamen aliunde exhiberi possunt» (Euler 1805 (E. 721); Euler 1932 (O. I 19), p. 369–389), présenté à l'Académie de Saint-Pétersbourg le 31 mars (11 avril) 1777 (*Protokoly* III, 1900, p. 296). Le post-scriptum de la lettre de Fuss à Condorcet du 15 (26) mai 1778 (voir annexe 4) laisse à penser que la «formule» évoquée ici était $dx\,\frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}$. Il indique, en effet, qu'Euler avait d'abord cru que cette différentielle entrait dans la catégorie en question, avant de parvenir à montrer qu'elle pouvait être rendue rationnelle par une substitution globale adéquate. Euler fera la correction dans la lettre 7 ([R 456a]) (voir la note 8 de cette lettre).

[5] Il s'agit peut-être de la série figurant à la fin de la lettre 7 ([R 456a]) (Euler 1920 (O. I 18), p. 77).

[6] Cette allusion à une démonstration d'Euler du premier des deux théorèmes proposés précédemment (voir lettre 5 (R 455), note 3) montre l'existence d'une lettre d'Euler à Condorcet, actuellement perdue, à laquelle la présente lettre constitue une réponse. Cette lettre était vraisemblablement la réponse d'Euler à la lettre de Condorcet du 1er avril 1776 (R 455); on est conduit à penser qu'elle contenait tous les énoncés évoqués par Condorcet ici, et notamment celui sur la somme des carrés des coefficients du binôme.

[7] Voir lettre 5 (R 455).

[8] Euler 1776 (E. 426^2). Cet ouvrage d'Euler sera effectivement publié à Paris en 1776 (voir lettre 1 (R 452), note 2).

[9] Anders Johan Lexell fut nommé correspondant de Lalande à l'Académie des sciences de Paris le 24 mai 1776 (voir aussi le post-scriptum de l'annexe 1). Il joua un rôle important auprès d'Euler, étant un de ses proches collaborateurs (voir Euler 1980 (O. IVA 5), p. 470, note 5).

[10] La signature manque.

7
Euler à Condorcet
[Saint-Pétersbourg], 12 (23) septembre 1776

[*Démonstration de ce Théorème.*][1]

En supposant

$$(1+z)^n = 1 + \binom{n}{1} z + \binom{n}{2} z^2 + \binom{n}{3} z^3 + \text{ etc;}^{[2]}$$

d'où l'on voit que $\binom{n}{0} = 1$, aussi-bien que $\binom{n}{n}$, et de-là il s'ensuit, que $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$; outre cela, il est clair que la valeur de la formule $\binom{n}{p}$ est toujours égale à zéro, tant dans les cas où p est un nombre négatif, que dans ceux où il est un nombre plus grand que n, ce qui s'entend des nombres entiers; ensuite, on sait que la valeur développée de ce caractère $\binom{n}{p}$ est $= \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{n-3}{4} \cdots \frac{n-p+1}{p}$.