Cela posé, si nous passons aux coëfficiens de la puissance suivante $(1+z)^{n+1}$, on sait qu'on aura $\left(\frac{n+1}{p+1}\right) = \left(\frac{n}{p}\right) + \left(\frac{n}{p+1}\right)$; de sorte que réciproquement $\left(\frac{n}{p+1}\right) + \left(\frac{n}{p+2}\right) = \left(\frac{n+1}{p+2}\right)$; ajoutons ces deux équations ensemble, et nous aurons

$$\left(\frac{n}{p}\right) + 2\left(\frac{n}{p+1}\right) + \left(\frac{n}{p+2}\right) = \left(\frac{n+1}{p+1}\right) + \left(\frac{n+1}{p+2}\right) = \left(\frac{n+2}{p+2}\right);$$

de la même manière, nous aurons

$$\left(\frac{n}{p+1}\right) + 2\left(\frac{n}{p+2}\right) + \left(\frac{n}{p+3}\right) = \left(\frac{n+2}{p+3}\right);$$

cette équation ajoutée à la précédente, donne

$$\left(\frac{n}{p}\right) + 3\left(\frac{n}{p+1}\right) + 3\left(\frac{n}{p+2}\right) + \left(\frac{n}{p+3}\right) = \left(\frac{n+2}{p+2}\right) + \left(\frac{n+2}{p+3}\right) = \left(\frac{n+3}{p+3}\right);$$

ensuite

$$\left(\frac{n}{p+1}\right) + 3\left(\frac{n}{p+2}\right) + 3\left(\frac{n}{p+3}\right) + \left(\frac{n}{p+4}\right) = \left(\frac{n+3}{p+4}\right),$$

qui, encore ajoutée à la précédente, donne

$$\left(\frac{n}{p}\right) + 4\left(\frac{n}{p+1}\right) + 6\left(\frac{n}{p+2}\right) + 4\left(\frac{n}{p+3}\right) + \left(\frac{n}{p+4}\right)$$
$$= \left(\frac{n+3}{p+3}\right) + \left(\frac{n+3}{p+4}\right) = \left(\frac{n+4}{p+4}\right),$$

et de-là il est aisé à conclure qu'on aura en général

$$1\left(\frac{n}{p}\right) + \left(\frac{m}{1}\right)\cdot\left(\frac{n}{p+1}\right) + \left(\frac{m}{2}\right)\cdot\left(\frac{n}{p+2}\right) + \left(\frac{m}{3}\right)\cdot\left(\frac{n}{p+3}\right) + \text{ etc. } = \left(\frac{n+m}{p+m}\right).$$

Voilà donc une progression bien générale, dont chaque terme est le produit de deux coëfficiens de puissances différentes du binome, dont le terme général peut être exprimé par la formule $\left(\frac{m}{x}\right)\cdot\left(\frac{n}{p+x}\right)$, où mettant pour x successivement les nombres 0, 1, 2, 3, 4, etc. jusqu'à ce qu'on parvienne à des termes évanouissans, la somme de toute cette progression sera infailliblement $= \left(\frac{n+m}{p+m}\right) = \left(\frac{n+m}{n-p}\right)$. C'est de-là que résulte le Théorème que je vous ai communiqué, en faisant $m = n$, et $p = 0$, de sorte qu'il est un cas infiniment plus particulier, que la série que je viens de sommer ici. Dans ce cas, on aura cette sommation,

$$1^2 + \left(\frac{n}{1}\right)^2 + \left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{n}{3}\right)^2 + \text{ etc. } = \left(\frac{2n}{n}\right);$$

or cette formule développée donne

$$\frac{2n}{1}\cdot\frac{2n-1}{2}\cdot\frac{2n-2}{3}\cdot\frac{2n-3}{4}\ \cdots\ \frac{n+1}{n},$$

ce qui, comme il est aisé à démontrer, est égal à

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{6}{2}\cdot\frac{10}{3}\cdot\frac{14}{4}\ \cdots\ \frac{4n-2}{n}.$$ [3]

Il est fort remarquable que cette sommation a aussi lieu, lors même que les exposans m et n sont des fractions quelconques, pourvu que par la voie d'interpolation, on puisse assigner la juste valeur de $\left(\frac{m+n}{m+p}\right)$; et si le développement n'a pas lieu dans ce cas, il faut recourir à des formules intégrales: or posant pour abréger $\ell\,\frac{1}{x} = u$, on aura toujours[4]

$$\left(\frac{m+n}{m+p}\right) = \frac{\int u^{m+n}\,\partial x}{\int u^{m+p}\,\partial x\ \cdot\ \int u^{n-p}\,\partial x}\ \left\{\begin{array}{c}\text{de } x=0\\ \text{à } x=1\end{array}\right\}:$$