ou bien

$$A = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \text{etc.} = \ell\, 2.$$

[*Autre Théorème.*][7]

En prenant les lettres α, β, γ, δ, etc. pour marquer les coëfficiens d'un binome élevé à l'exposant n, de sorte que

$$(1+x)^n = 1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \text{etc.}$$

on aura toujours

$$1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \text{etc.} = \frac{2}{1} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{10}{3} \cdot \frac{14}{4} \cdots \frac{4n-2}{n},$$

par exemple, si $n = 6$, on aura $\alpha = 6$, $\beta = 15$, $\gamma = 20$, $\delta = 15$, $\varepsilon = 6$, $\zeta = 1$, et les suivans $= 0$; et partant on aura

$$1 + 6^2 + 15^2 + 20^2 + 15^2 + 6^2 + 1 = \frac{2}{1} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{10}{3} \cdot \frac{14}{4} \cdot \frac{18}{5} \cdot \frac{22}{6},$$

dont la démonstration directe me paroît extrêmement difficile.

R 454
Publié: *Mém. Paris* (1778), 1781, mémoires, p. 603–606 (Euler 1781a (E. 521); Euler 1920 (O. I 18), p. 70–74)

[1] Euler démontre ici la première formule dans le cas particulier où le second exposant est égal à 1 (cf. lettre 2 (R 453), note 2).

[2] Voir le § 3 du mémoire «De valore formulae integralis $\int \frac{z^{\lambda-\omega} \pm z^{\lambda+\omega}}{1 \pm z^{2\lambda}} \cdot \frac{dz}{z} (\ell\, z)^{\mu}$ casu, quo post integrationem ponitur $z = 1$» (Euler 1775 (E. 463); Euler 1915 (O. I 17), p. 389), présenté à l'Académie de Saint-Pétersbourg le 3 (14) octobre 1774 (*Protokoly* III, 1900, p. 150). Cf. Euler 1932 (O. I 19), p. XXXVIII, note 2.

[3] La deuxième formule que démontre Euler dans cette lettre est donc:

$$\int_0^1 \frac{(x^{m+n-1} - x^{m-n-1})\, dx}{(1 + x^{2m})\, \ell\, x} = \ell \left[\operatorname{tang} \frac{\pi\,(m+n)}{4m} \right].$$

Cette démonstration figure dans le § 30 de son mémoire «Nova methodus quantitates integrales determinandi» (Euler 1775a (E. 464); Euler 1915 (O. I 17), p. 439–440), présenté le 10 (21) octobre 1774 à l'Académie des sciences de Saint-Pétersbourg (*Protokoly* III, 1900, p. 152), de même que celle de la première formule (*ibid.*, § 21–22), comme exemple d'application de la méthode utilisant l'intégration d'une fonction de deux variables de deux façons différentes. Sur les diverses occurrences de cette formule, voir Euler 1932 (O. I 19), p. XLII, note 1. Curieusement, la démonstration que donne ici Euler n'est donc pas celle de la seconde formule qu'il avait proposée à Condorcet dans sa lettre du 3 (14) novembre 1775, formule qui lui a été indiquée par Lagrange postérieurement à Euler 1775a (cf. lettre 2 (R 453), note 4).

[4] Cf. les §§ 3–5 du mémoire «Nova methodus quantitates integrales determinandi» (Euler 1775a (E. 464); Euler 1915 (O. I 17), p. 425–426).

[5] Sur ce mode d'expression des logarithmes hyperboliques chez Euler, voir le mémoire «De la controverse entre Mrs. Leibnitz et Bernoulli sur les logarithmes des nombres negatifs et imaginaires» (Euler 1751 (E. 168), p. 156–157; Euler 1915 (O. I 17), p. 210–211).

[6] Il faut lire $+\frac{1}{i+1}$ après $\frac{1}{i}$.

[7] La présentation de Condorcet semble inclure cet «autre théorème» dans la présente lettre du 2 (13) février 1776, mais il ne l'évoque pas dans sa lettre à Euler du 1er avril (R 455) et le considère seulement dans celle du 10 juillet (R 456). Il nous semble donc plus cohérent de situer la présence de ce théorème sur la somme des carrés des coefficients du binôme dans une lettre manquante d'Euler postérieure à la lettre R 455 (voir lettre 6 (R 456), note 6). Par contre, on peut conjecturer qu'y figurait l'énoncé de deux autres théorèmes (voir lettre 5 (R 455), note 4).