

Giochi di Gale-Stewart su A

Sia $A \neq \emptyset$ un insieme e $X \subseteq A^\omega$ un **payoff set**. Consideriamo il gioco di Gale-Stewart $G(A, X)$

I	a_0	a_2	...
II	a_1	a_3	...

Giochi di Gale-Stewart su A

Sia $A \neq \emptyset$ un insieme e $X \subseteq A^\omega$ un **payoff set**. Consideriamo il gioco di Gale-Stewart $G(A, X)$

$$\begin{array}{rcll} \text{I} & a_0 & a_2 & \dots \\ \text{II} & & a_1 & a_3 \dots \end{array}$$

dove

- ▶ I vince se $(a_n)_{n < \omega} \in X$;
- ▶ II vince se $(a_n)_{n < \omega} \notin X$.

Giochi di Gale-Stewart su T

Sia $T \subseteq A^{<\omega}$ e $X \subseteq [T]$ un payoff set; allora possiamo considerare il gioco $G(T, X)$

$$\begin{array}{ccccccc} \text{I} & a_0 & & a_2 & & \dots \\ \text{II} & & a_1 & & a_3 & \dots \end{array}$$

con la restrizione aggiunta che $(a_0, \dots, a_n) \in T$ per ogni $n < \omega$ e le medesime condizioni di vittoria.

Giochi di Gale-Stewart su T

Sia $T \subseteq A^{<\omega}$ e $X \subseteq [T]$ un payoff set; allora possiamo considerare il gioco $G(T, X)$

$$\begin{array}{cccc} \text{I} & a_0 & a_2 & \dots \\ \text{II} & & a_1 & a_3 \dots \end{array}$$

con la restrizione aggiunta che $(a_0, \dots, a_n) \in T$ per ogni $n < \omega$ e le medesime condizioni di vittoria.

Remark

Se $T = A^{<\omega}$ otteniamo i giochi di Gale-Stewart su A .

Strategie

Fissiamo un gioco $G(X, T)$.

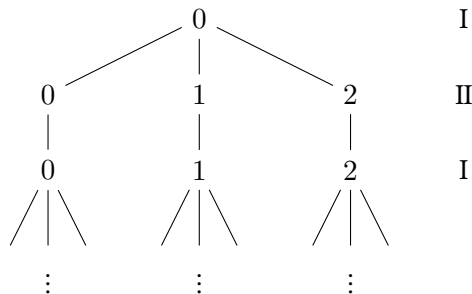
Definizione

Una **strategia** per I è un albero $\sigma \subseteq T$ tale che

1. σ è potato e non vuoto;
2. se $(a_0, \dots, a_{2j}) \in \sigma$ allora ogni $(a_0, \dots, a_{2j}, a_{2j+1}) \in T$ è in σ ;
3. se $(a_0, \dots, a_{2j-1}) \in \sigma$ allora esiste un unico $a_{2j} \in A$ tale che $(a_0, \dots, a_{2j-1}, a_{2j}) \in \sigma$.

Strategie

Se $A = \{0, 1, 2\}$ e $T = A^{<\omega}$ allora



è una strategia per I.

Strategie

Definizione

Una strategia $\sigma \subseteq T$ per I è **vincente** se $[\sigma] \subseteq X$ i.e. se I vince ogni partita giocata seguendo σ .

Strategie

Definizione

Una strategia $\sigma \subseteq T$ per I è **vincente** se $[\sigma] \subseteq X$ i.e. se I vince ogni partita giocata seguendo σ .

Similmente definiamo strategie per II.

Strategie

Definizione

Una strategia $\sigma \subseteq T$ per I è **vincente** se $[\sigma] \subseteq X$ i.e. se I vince ogni partita giocata seguendo σ .

Similmente definiamo strategie per II.

Remark

Siccome $G(X, T)$ non può finire in un pareggio non è possibile che sia I che II abbiano una strategia vincente.

Determinatezza

Definizione

Un gioco $G(X, T)$, o solamente l'insieme $X \subseteq T$, si dice **determinato** se uno dei due giocatori ha una strategia vincente.

Determinatezza

Definizione

Un gioco $G(X, T)$, o solamente l'insieme $X \subseteq T$, si dice **determinato** se uno dei due giocatori ha una strategia vincente.

Domande

- ▶ I chiusi e gli aperti sono determinati?
- ▶ I Boreliani sono determinati?
- ▶ Gli analitici sono determinati?

Determinatezza dei giochi chiusi

Teorema (Gale-Stewart)

Dato $T \subseteq A^{<\omega}$ potato e non-vuoto se $X \subseteq [T]$ è aperto (o chiuso) in $[T]$ allora $G(X, T)$ è determinato.

Posizioni non perdenti

Definizione

Data una posizione $p = (a_0, \dots, a_{2n+1}) \in T$ diciamo che p è **non perdente** per I se II non ha una strategia vincente a partire da p . Formalmente p è non perdente per I se II non ha una strategia vincente per il gioco $G(T_p, X_p)$ dove

$$T_p = \{s \in A^{<\omega} : p \frown s \in T\} \quad \text{e} \quad X_p = \{x \in A^\omega : p \frown x \in X\}.$$

Posizioni non perdenti

Definizione

Data una posizione $p = (a_0, \dots, a_{2n+1}) \in T$ diciamo che p è **non perdente** per I se II non ha una strategia vincente a partire da p . Formalmente p è non perdente per I se II non ha una strategia vincente per il gioco $G(T_p, X_p)$ dove

$$T_p = \{s \in A^{<\omega} : p \frown s \in T\} \quad \text{e} \quad X_p = \{x \in A^\omega : p \frown x \in X\}.$$

Remark

Se una posizione $p = (a_0, \dots, a_{2n+1}) \in T$ è non perdente per I allora esiste un a_{2n+2} che I può giocare (i.e. $(a_{2n+2}) \in T_p$) tale che per ogni a_{2n+3} con cui II può rispondere (i.e. $(a_{2n+2}, a_{2n+3}) \in T_p$) la posizione $p \frown (a_{2n+2}, a_{2n+3}) \in T$ sia ancora non perdente per I.

Dimostrazione

Lavoriamo con X chiuso ed assumiamo che Π non abbia strategia vincente (se la ha allora abbiamo il teorema).

Dimostrazione

Lavoriamo con X chiuso ed assumiamo che II non abbia strategia vincente (se la ha allora abbiamo il teorema).

Per costruire una strategia vincente per I osserviamo che se II non ha una strategia vincente allora \emptyset è una posizione non perdente per I . Allora I può, come prima mossa, giocare un a_0 tale che per ogni a_1 per cui $(a_0, a_1) \in T$ quest'ultima posizione è ancora non perdente per I .

Dimostrazione

Lavoriamo con X chiuso ed assumiamo che II non abbia strategia vincente (se la ha allora abbiamo il teorema).

Per costruire una strategia vincente per I osserviamo che se II non ha una strategia vincente allora \emptyset è una posizione non perdente per I . Allora I può, come prima mossa, giocare un a_0 tale che per ogni a_1 per cui $(a_0, a_1) \in T$ quest'ultima posizione è ancora non perdente per I .

Adesso per ogni a_1 con cui II può rispondere, per scelta di a_0 , esiste un a_2 che I può giocare e tale che per ogni a_3 tale che $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in T$ questa sia una posizione non perdente per I .

Dimostrazione

In questo modo costruiamo una strategia $\sigma \subseteq T$ per I con la proprietà che, se $(a_0, \dots, a_{2n+1}) \in \sigma$ allora questa è una posizione non perdente per I.

Dimostrazione

In questo modo costruiamo una strategia $\sigma \subseteq T$ per I con la proprietà che, se $(a_0, \dots, a_{2n+1}) \in \sigma$ allora questa è una posizione non perdente per I.

Sia $(a_n)_n$ una partita dove I ha seguito σ i.e. $(a_n)_n \in [\sigma]$. Se $(a_n)_n \notin X$, cioè $(a_n)_n \in [T] - X$, siccome $[T]$ è chiuso abbiamo che esiste un $k < \omega$ tale che

$$N_{(a_0, \dots, a_{2k+1})} \cap [T] \subseteq [T] - X.$$

Ma, se esiste un tale k , abbiamo che (a_0, \dots, a_{2k+1}) è una posizione perdente per I siccome II vince giocando mosse arbitrarie.

Dimostrazione

Questo è assurdo perché $(a_0, \dots, a_{2k+1}) \in \sigma$ e dunque deve essere non perdente per I. Dobbiamo dunque avere $(a_n)_n \in X$ e quindi $[\sigma] \subseteq X$; I ha una strategia vincente.

Dimostrazione

Questo è assurdo perché $(a_0, \dots, a_{2k+1}) \in \sigma$ e dunque deve essere non perdente per I. Dobbiamo dunque avere $(a_n)_n \in X$ e quindi $[\sigma] \subseteq X$; I ha una strategia vincente.

Se X è aperto possiamo ripetere lo stesso argomento invertendo i ruoli di I e II.



Ricoprimenti

Definizione

Dato $T \subseteq A^{<\omega}$ potato e non-vuoto. Un **ricoprimento** di T è una tripla $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$ dove

1. \tilde{T} è un albero potato e non-vuoto;
2. $\pi : \tilde{T} \rightarrow T$ è monotona i.e. se $s \subseteq t$ allora $\pi(s) \subseteq \pi(t)$ e tale che $|\pi(s)| = |s|$;
3. φ mappa strategie per I (e per II) in \tilde{T} a strategie per I (e per II) in T in modo tale che $\varphi(\tilde{\sigma})$ ristretta a posizioni di lunghezza $\leq n$ dipende solo da $\tilde{\sigma}$ ristretta a posizioni di lunghezza $\leq n$;
4. se $\tilde{\sigma}$ è una strategia per I (o II) in \tilde{T} e $x \in [\varphi(\tilde{\sigma})] \subseteq [T]$ allora esiste $\tilde{x} \in [\tilde{\sigma}] \subseteq [\tilde{T}]$ tale che $\pi(\tilde{x}) = x$.

Se $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$ è un ricoprimento di T e $X \subseteq [T]$ allora a $G(T, X)$ associamo $G(\tilde{T}, \tilde{X})$ dove $\tilde{X} = \pi^{-1}(X)$. Infatti ad ogni partita $\tilde{x} \in [\tilde{T}]$ corrisponde $\pi(x) \in [T]$, una partita di $G(T, X)$.

Se $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$ è un ricoprimento di T e $X \subseteq [T]$ allora a $G(T, X)$ associamo $G(\tilde{T}, \tilde{X})$ dove $\tilde{X} = \pi^{-1}(X)$. Infatti ad ogni partita $\tilde{x} \in [\tilde{T}]$ corrisponde $\pi(x) \in [T]$, una partita di $G(T, X)$.

Osservazione

Se $\tilde{\sigma}$ è una strategia vincente per I (o II) in $G(\tilde{T}, \tilde{X})$ allora $\varphi(\tilde{\sigma})$ è una strategia vincente per I (o II) in $G(T, X)$.

Se $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$ è un ricoprimento di T e $X \subseteq [T]$ allora a $G(T, X)$ associamo $G(\tilde{T}, \tilde{X})$ dove $\tilde{X} = \pi^{-1}(X)$. Infatti ad ogni partita $\tilde{x} \in [\tilde{T}]$ corrisponde $\pi(x) \in [T]$, una partita di $G(T, X)$.

Osservazione

Se $\tilde{\sigma}$ è una strategia vincente per I (o II) in $G(\tilde{T}, \tilde{X})$ allora $\varphi(\tilde{\sigma})$ è una strategia vincente per I (o II) in $G(T, X)$.

Se così non fosse dovrebbe esserci un $x \in [\varphi(\tilde{\sigma})]$ tale che $x \notin X$. Ma, per la condizione 4, esiste un $\tilde{x} \in [\tilde{\sigma}]$ tale che $\pi(\tilde{x}) = x$. Ora siccome $\tilde{\sigma}$ è vincente $\tilde{x} \in \tilde{X}$ e dunque $\pi(\tilde{x}) = x \in X$; assurdo.

k -ricoprimenti

Definizione

Fissato $k < \omega$ un ricoprimento $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$ è un **k -ricoprimento** se

1. $T \restriction 2k = \tilde{T} \restriction 2k$ dove $T \restriction n = \{x \in T : |x| \leq n\}$;
2. $\pi \restriction (\tilde{T} \restriction 2k)$ è la funzione identità.

k -ricoprimenti

Definizione

Fissato $k < \omega$ un ricoprimento $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$ è un **k -ricoprimento** se

1. $T \restriction 2k = \tilde{T} \restriction 2k$ dove $T \restriction n = \{x \in T : |x| \leq n\}$;
2. $\pi \restriction (\tilde{T} \restriction 2k)$ è la funzione identità.

Questo significa che nel gioco $G(\tilde{T}, \tilde{X})$ le prime k mosse di entrambi i giocatori sono le stesse che in $G(T, X)$.

k -ricoprimenti

Definizione

Fissato $k < \omega$ un ricoprimento $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$ è un **k -ricoprimento** se

1. $T \restriction 2k = \tilde{T} \restriction 2k$ dove $T \restriction n = \{x \in T : |x| \leq n\}$;
2. $\pi \restriction (\tilde{T} \restriction 2k)$ è la funzione identità.

Questo significa che nel gioco $G(\tilde{T}, \tilde{X})$ le prime k mosse di entrambi i giocatori sono le stesse che in $G(T, X)$.

Inoltre se $\tilde{\sigma}$ è una strategia per \tilde{T} allora $\varphi(\tilde{\sigma}) \restriction 2k = \tilde{\sigma} \restriction 2k$ i.e. φ mappa strategie in strategie senza cambiare le prime k mosse.

Definizione

Un ricoprimento $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$ **srotola** $X \subseteq [T]$ se $\pi^{-1}(X)$ è un clopen di \tilde{T} .

Definizione

Un ricoprimento $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$ **srotola** $X \subseteq [T]$ se $\pi^{-1}(X)$ è un clopen di \tilde{T} .

Osservazione

In particolare se $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$ srotola X allora $G(\tilde{T}, \tilde{X})$ è un gioco chiuso, dunque determinato, e quindi anche $G(T, X)$ è determinato perché φ trasforma strategie vincenti in strategie vincenti.

Determinatezza Boreli

Teorema (Determinatezza Boreliana)

Dato $T \subseteq A^{<\omega}$ potato e non-vuoto se $X \subseteq [T]$ è Boreliano in $[T]$ allora $G(X, T)$ è determinato.

Determinatezza Boreli

Teorema (Determinatezza Boreliana)

Dato $T \subseteq A^{<\omega}$ potato e non-vuoto se $X \subseteq [T]$ è Boreliano in $[T]$ allora $G(X, T)$ è determinato.

Teorema

Dato $T \subseteq A^{<\omega}$ potato e non-vuoto se $X \subseteq [T]$ è Boreliano in $[T]$ allora per ogni $k < \omega$ esiste un k -ricoprimento di T che srotola X .

Lemma 1

Siano T un albero potato e non-vuoto e $X \subseteq [T]$ un chiuso. Allora per ogni $k < \omega$ esiste un k -ricoprimento di T the srotola X .

Lemma 1

Siano T un albero potato e non-vuoto e $X \subseteq [T]$ un chiuso. Allora per ogni $k < \omega$ esiste un k -ricoprimento di T the srotola X .

Lemma 2

Sia $k < \omega$ e $(T_{i+1}, \pi_{i+1}, \varphi_{i+1})$ un $(k+i)$ -ricoprimento di T_i per $i = 0, 1, 2, \dots$. Allora esiste un albero potato T_∞ e mappe $\pi_{\infty,i}, \varphi_{\infty,i}$ tali che $(T_\infty, \pi_{\infty,i}, \varphi_{\infty,i})$ sia un $(k+i)$ -ricoprimento di T_i e

$$\pi_{i+1} \circ \pi_{\infty,i+1} = \pi_{\infty,i}, \quad \varphi_{i+1} \circ \varphi_{\infty,i+1} = \varphi_{\infty,i}.$$

