Giochi di Gale-Stewart e Determinatezza Boreliana

Gabriele Rastello

1 Giugno 2022

Giochi di Gale-Stewart su A

Sia $A \neq \emptyset$ un insieme e $X \subseteq A^\omega$ un **payoff set**. Consideriamo il gioco di Gale-Stewart $G(A, X)$

$$
\begin{array}{cccccc}
\mathrm{I} & a_0 & & a_2 & & \dots \\
\mathrm{II} & & a_1 & & a_3 & \dots
\end{array}
$$

Giochi di Gale-Stewart su A

Sia $A \neq \emptyset$ un insieme e $X \subseteq A^\omega$ un **payoff set**. Consideriamo il gioco di Gale-Stewart $G(A, X)$

$$\begin{array}{lccccc} \mathrm{I} & a_0 & & a_2 & & \dots \\ \mathrm{II} & & a_1 & & a_3 & \dots \end{array}$$

dove

- I vince se $(a_n)_{n<\omega} \in X$;
- II vince se $(a_n)_{n<\omega} \notin X$.

Giochi di Gale-Stewart su T

Sia $T \subseteq A^{<\omega}$ non vuoto e potato, $X \subseteq [T]$ un payoff set; allora possiamo considerare il gioco $G(T, X)$

$$\begin{array}{lccccc} \mathrm{I} & a_0 & & a_2 & & \dots \\ \mathrm{II} & & a_1 & & a_3 & \dots \end{array}$$

con la restrizione aggiuntiva $(a_0, \dots, a_n) \in T$ per ogni $n < \omega$ e le medesime condizioni di vittoria.

Giochi di Gale-Stewart su T

Sia $T \subseteq A^{<\omega}$ non vuoto e potato, $X \subseteq [T]$ un payoff set; allora possiamo considerare il gioco $G(T, X)$

$$\begin{array}{lccccc} \mathrm{I} & a_0 & & a_2 & & \dots \\ \mathrm{II} & & a_1 & & a_3 & \dots \end{array}$$

con la restrizione aggiuntiva $(a_0, \dots, a_n) \in T$ per ogni $n < \omega$ e le medesime condizioni di vittoria.

Remark

Se $T = A^{<\omega}$ otteniamo i giochi di Gale-Stewart su A.

Strategie

Fissiamo un gioco $G(X, T)$.

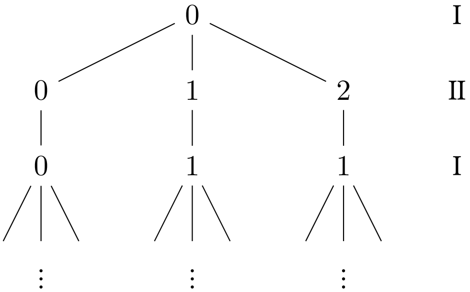
Definizione

Una **strategia** per I è un albero $\sigma \subseteq T$ tale che per ogni $j < \omega$

1. σ è potato e non vuoto;
2. se $(a_0, \dots, a_{2j}) \in \sigma$ allora ogni $(a_0, \dots, a_{2j}, a_{2j+1}) \in T$ è in σ;
3. se $(a_0, \dots, a_{2j+1}) \in \sigma$ allora esiste un unico $a_{2j+2} \in A$ tale che $(a_0, \dots, a_{2j+1}, a_{2j+2}) \in \sigma$.

Strategie

Se $A = \{0, 1, 2\}$ e $T = A^{<\omega}$ allora



è una strategia per I.

Strategie

Definizione

Una strategia $\sigma \subseteq T$ per I è **vincente** se $[\sigma] \subseteq X$ i.e. se I vince ogni partita giocata seguendo σ.

Strategie

Definizione

Una strategia $\sigma \subseteq T$ per I è **vincente** se $[\sigma] \subseteq X$ i.e. se I vince ogni partita giocata seguendo σ.

Similmente definiamo strategie per II.

Strategie

Definizione

Una strategia $\sigma \subseteq T$ per I è **vincente** se $[\sigma] \subseteq X$ i.e. se I vince ogni partita giocata seguendo σ.

Similmente definiamo strategie per II.

Remark

Non è possibile che sia I che II abbiano una strategia vincente.

Determinatezza

Definizione

Un gioco $G(X, T)$, o solamente l'insieme $X \subseteq T$, si dice **determinato** se uno dei due giocatori ha una strategia vincente.

Determinatezza

Definizione

Un gioco $G(X, T)$, o solamente l'insieme $X \subseteq T$, si dice **determinato** se uno dei due giocatori ha una strategia vincente.

Domande

- I chiusi e gli aperti sono determinati?
- I Boreliani sono determinati?
- I proiettivi sono determinati?

Determinatezza dei giochi chiusi

Teorema (Gale-Stewart)

Dato $T \subseteq A^{<\omega}$ potato e non-vuoto se $X \subseteq [T]$ è aperto (o chiuso) in $[T]$ allora $G(X, T)$ è determinato.

Posizioni non perdenti

Definizione

Data una posizione $p = (a_0, \dots, a_{2n+1}) \in T$ diciamo che p è **non perdente** per I se II non ha una strategia vincente a partire da p. Formalmente p è non perdente per I se II non ha una strategia vincente per il gioco $G(T_p, X_p)$ dove

$$T_p = \{s \in A^{<\omega} : p^\frown s \in T\} \quad \text{e} \quad X_p = \{x \in A^\omega : p^\frown x \in X\}.$$

Posizioni non perdenti

Definizione

Data una posizione $p = (a_0, \ldots, a_{2n+1}) \in T$ diciamo che p è **non perdente** per I se II non ha una strategia vincente a partire da p. Formalmente p è non perdente per I se II non ha una strategia vincente per il gioco $G(T_p, X_p)$ dove

$$T_p = \{s \in A^{<\omega} : p^\frown s \in T\} \quad \text{e} \quad X_p = \{x \in A^\omega : p^\frown x \in X\}.$$

Osservazione

Se una posizione $p = (a_0, \ldots, a_{2n+1}) \in T$ è non perdente per I allora esiste un a_{2n+2} che I può giocare (i.e. $(a_{2n+2}) \in T_p$) tale che per ogni a_{2n+3} con cui II può rispondere (i.e. $(a_{2n+2}, a_{2n+3}) \in T_p$) la posizione $p^\frown(a_{2n+2}, a_{2n+3}) \in T$ sia ancora non perdente per I.

Dimostrazione

Lavoriamo con X chiuso ed assumiamo che II non abbia strategia vincente (se la ha allora abbiamo il teorema).

Dimostrazione

Lavoriamo con X chiuso ed assumiamo che II non abbia strategia vincente (se la ha allora abbiamo il teorema).

Per costruire una strategia vincente per I osserviamo che se II non ha una strategia vincente allora $\emptyset$ è una posizione non perdente per I. Allora I può, come prima mossa, giocare un a_0 tale che per ogni a_1 per cui $(a_0, a_1) \in T$ quest'ultima posizione è ancora non perdente per I.

Dimostrazione

Lavoriamo con X chiuso ed assumiamo che II non abbia strategia vincente (se la ha allora abbiamo il teorema).

Per costruire una strategia vincente per I osserviamo che se II non ha una strategia vincente allora $\emptyset$ è una posizione non perdente per I. Allora I può, come prima mossa, giocare un a_0 tale che per ogni a_1 per cui $(a_0, a_1) \in T$ quest'ultima posizione è ancora non perdente per I.

Adesso per ogni a_1 con cui II può rispondere, per scelta di a_0, esiste un a_2 che I può giocare e tale che per ogni a_3 tale che $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in T$ questa sia una posizione non perdente per I.

Dimostrazione

In questo modo costruiamo una strategia $\sigma \subseteq T$ per I con la proprietà che, se $(a_0, \dots, a_{2n+1}) \in \sigma$ allora questa è una posizione non perdente per I.

Dimostrazione

In questo modo costruiamo una strategia $\sigma \subseteq T$ per I con la proprietà che, se $(a_0, \dots, a_{2n+1}) \in \sigma$ allora questa è una posizione non perdente per I.

Sia $(a_n)_n$ una partita dove I ha seguito σ i.e. $(a_n)_n \in [\sigma]$. Se $(a_n)_n \notin X$, cioè $(a_n)_n \in [T] - X$, siccome $[T]$ è chiuso abbiamo che esiste un $k < \omega$ tale che

$$N_{(a_0,\dots,a_{2k+1})} \cap [T] \subseteq [T] - X.$$

Ma, se esiste un tale k, abbiamo che $(a_0, \dots, a_{2k+1})$ è una posizione perdente per I siccome II vince giocando mosse arbitrarie.

Dimostrazione

Questo è assurdo perché $(a_0, \dots, a_{2k+1}) \in \sigma$ e dunque deve essere non perdente per I. Dobbiamo dunque avere $(a_n)_n \in X$ e quindi $[\sigma] \subseteq X$; I ha una strategia vincente.

Dimostrazione

Questo è assurdo perché $(a_0, \dots, a_{2k+1}) \in \sigma$ e dunque deve essere non perdente per I. Dobbiamo dunque avere $(a_n)_n \in X$ e quindi $[\sigma] \subseteq X$; I ha una strategia vincente.

Se X è aperto possiamo ripetere lo stesso argomento invertendo i ruoli di I e II.

$\square$

Ricoprimenti

Definizione

Dato $T \subseteq A^{<\omega}$ potato e non-vuoto. Un **ricoprimento** di T è una tripla $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$ dove

1. $\tilde{T}$ è un albero potato e non-vuoto;
2. $\pi : \tilde{T} \to T$ è monotona i.e. se $s \subseteq t$ allora $\pi(s) \subseteq \pi(t)$ e tale che $|\pi(s)| = |s|$;
3. φ mappa strategie per I (e per II) in $\tilde{T}$ a strategie per I (e per II) in T in modo tale che $\varphi(\tilde{\sigma})$ ristretta a posizioni di lunghezza $\leq n$ dipende solo da $\tilde{\sigma}$ ristretta a posizioni di lunghezza $\leq n$;
4. se $\tilde{\sigma}$ è una strategia per I (o II) in $\tilde{T}$ e $x \in [\varphi(\tilde{\sigma})] \subseteq [T]$ allora esiste $\tilde{x} \in [\tilde{\sigma}] \subseteq [\tilde{T}]$ tale che $\pi(\tilde{x}) = x$.

Se $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$ è un ricoprimento di T e $X \subseteq [T]$ allora a $G(T, X)$ associamo $G(\tilde{T}, \tilde{X})$ dove $\tilde{X} = \pi^{-1}(X)$. Infatti ad ogni partita $\tilde{x} \in [\tilde{T}]$ corrisponde $\pi(x) \in [T]$, una partita di $G(T, X)$.

Se $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$ è un ricoprimento di T e $X \subseteq [T]$ allora a $G(T, X)$ associamo $G(\tilde{T}, \tilde{X})$ dove $\tilde{X} = \pi^{-1}(X)$. Infatti ad ogni partita $\tilde{x} \in [\tilde{T}]$ corrisponde $\pi(x) \in [T]$, una partita di $G(T, X)$.

Osservazione

Se $\tilde{\sigma}$ è una strategia vincente per I (o II) in $G(\tilde{T}, \tilde{X})$ allora $\varphi(\tilde{\sigma})$ è una strategia vincente per I (o II) in $G(T, X)$.

Se $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$ è un ricoprimento di T e $X \subseteq [T]$ allora a $G(T, X)$ associamo $G(\tilde{T}, \tilde{X})$ dove $\tilde{X} = \pi^{-1}(X)$. Infatti ad ogni partita $\tilde{x} \in [\tilde{T}]$ corrisponde $\pi(x) \in [T]$, una partita di $G(T, X)$.

Osservazione

Se $\tilde{\sigma}$ è una strategia vincente per I (o II) in $G(\tilde{T}, \tilde{X})$ allora $\varphi(\tilde{\sigma})$ è una strategia vincente per I (o II) in $G(T, X)$.

Se così non fosse dovrebbe esserci un $x \in [\varphi(\tilde{\sigma})]$ tale che $x \notin X$. Ma, per la condizione 4, esiste un $\tilde{x} \in [\tilde{\sigma}]$ tale che $\pi(\tilde{x}) = x$. Ora siccome $\tilde{\sigma}$ è vincente $\tilde{x} \in \tilde{X}$ e dunque $\pi(\tilde{x}) = x \in X$; assurdo.

k-ricoprimenti

Definizione

Fissato $k < \omega$ un ricoprimento $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$ è un k-**ricoprimento** se

1. $T \upharpoonright 2k = \tilde{T} \upharpoonright 2k$ dove $T \upharpoonright n = \{x \in T : |x| \leq n\}$;
2. $\pi \upharpoonright (\tilde{T} \upharpoonright 2k)$ è la funzione identità.

k-ricoprimenti

Definizione

Fissato $k < \omega$ un ricoprimento $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$ è un k-**ricoprimento** se

1. $T \restriction 2k = \tilde{T} \restriction 2k$ dove $T \restriction n = \{x \in T : |x| \leq n\}$;
2. $\pi \restriction (\tilde{T} \restriction 2k)$ è la funzione identità.

Questo significa che nel gioco $G(\tilde{T}, \tilde{X})$ le prime k mosse di entrambi i giocatori sono le stesse che in $G(T, X)$.

k-ricoprimenti

Definizione

Fissato $k < \omega$ un ricoprimento $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$ è un k-**ricoprimento** se

1. $T \restriction 2k = \tilde{T} \restriction 2k$ dove $T \restriction n = \{x \in T : |x| \leq n\}$;
2. $\pi \restriction (\tilde{T} \restriction 2k)$ è la funzione identità.

Questo significa che nel gioco $G(\tilde{T}, \tilde{X})$ le prime k mosse di entrambi i giocatori sono le stesse che in $G(T, X)$.

Inoltre se $\tilde{\sigma}$ è una strategia per $\tilde{T}$ allora $\varphi(\tilde{\sigma}) \restriction 2k = \tilde{\sigma} \restriction 2k$ i.e. φ mappa strategie in strategie senza cambiare le prime k mosse.

Definizione

Un ricoprimento $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$ **srotola** $X \subseteq [T]$ se $\pi^{-1}(X)$ è un clopen di $\tilde{T}$.

Definizione

Un ricoprimento $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$ **srotola** $X \subseteq [T]$ se $\pi^{-1}(X)$ è un clopen di $\tilde{T}$.

Osservazione

In particolare se $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$ srotola X allora $G(\tilde{T}, \tilde{X})$ è un gioco chiuso, dunque determinato, e quindi anche $G(T, X)$ è determinato perché φ trasforma strategie vincenti in strategie vincenti.

Determinatezza Boreliana

Teorema (Determinatezza Boreliana)

Dato $T \subseteq A^{<\omega}$ potato e non-vuoto se $X \subseteq [T]$ è Boreliano in $[T]$ allora $G(X, T)$ è determinato.

Determinatezza Boreliana

Teorema (Determinatezza Boreliana)

Dato $T \subseteq A^{<\omega}$ potato e non-vuoto se $X \subseteq [T]$ è Boreliano in $[T]$ allora $G(X, T)$ è determinato.

Teorema

Dato $T \subseteq A^{<\omega}$ potato e non-vuoto se $X \subseteq [T]$ è Boreliano in $[T]$ allora per ogni $k < \omega$ esiste un k-ricoprimento di T che srotola X.

Lemma 1

Siano T un albero potato e non-vuoto e $X \subseteq [T]$ un chiuso. Allora per ogni $k < \omega$ esiste un k-ricoprimento di T the srotola X.

Lemma 1

Siano T un albero potato e non-vuoto e $X \subseteq [T]$ un chiuso. Allora per ogni $k < \omega$ esiste un k-ricoprimento di T the srotola X.

Lemma 2

Sia $k < \omega$ e $(T_{i+1}, \pi_{i+1}, \varphi_{i+1})$ un $(k+i)$-ricoprimento di T_i per $i = 0, 1, 2, \ldots$. Allora esiste un albero potato T_∞ e mappe $\pi_{\infty,i}, \varphi_{\infty,i}$ tali che $(T_\infty, \pi_{\infty,i}, \varphi_{\infty,i})$ sia un $(k+i)$-ricoprimento di T_i e

$$\pi_{i+1} \circ \pi_{\infty,i+1} = \pi_{\infty,i}, \quad \varphi_{i+1} \circ \varphi_{\infty,i+1} = \varphi_{\infty,i}.$$

$$\begin{tikzcd}
& & T_\infty \arrow[dll, "\pi_{\infty,0}"'] \arrow[dl, "\pi_{\infty,1}"] \arrow[d, "\pi_{\infty,2}"] \arrow[dr, "\pi_{\infty,3}"] & & \\
T_0 & T_1 \arrow[l, "\pi_1"] & T_2 \arrow[l, "\pi_2"] & T_3 \arrow[l, "\pi_3"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Dimostrazione

Mostreremo per induzione su $1 \leq \alpha < \omega_1$ che per ogni T, $k < \omega$ e $X \subseteq [T]$ in $\Sigma^0_\alpha([T])$ esiste un k-ricoprimento di T che srotola X.

Dimostrazione

Mostreremo per induzione su $1 \leq \alpha < \omega_1$ che per ogni T, $k < \omega$ e $X \subseteq [T]$ in $\Sigma^0_\alpha([T])$ esiste un k-ricoprimento di T che srotola X.

Osserviamo che un k-ricoprimento che srotola X srotola anche $\neg X$ (dove $\neg X = [T] - X$) perché $\pi^{-1}(\neg X) = \neg \pi^{-1}(X)$ e il complementare di un clopen è clopen. Dunque per il Lemma 1 abbiamo la tesi per $\alpha = 1$.

Dimostrazione

Ora assumiamo di avere la tesi per ogni $\beta < \alpha$. In particolare abbiamo che per ogni $T, Y \in \Pi^0_\beta([T])$ e $k < \omega$ esiste un k-ricoprimento di T che srotola $\neg Y$ ($\in \Sigma^0_\beta([T])$) e dunque anche Y.

Dimostrazione

Ora assumiamo di avere la tesi per ogni $\beta < \alpha$. In particolare abbiamo che per ogni $T, Y \in \Pi^0_\beta([T])$ e $k < \omega$ esiste un k-ricoprimento di T che srotola $\neg Y$ $(\in \Sigma^0_\beta([T]))$ e dunque anche Y.

Sia $X \in \Sigma^0_\alpha([T])$ e $k < \omega$. Allora $X = \bigcup_{i<\omega} X_i$ con $X_i \in \Pi^0_{\beta_i}([T])$ e $\beta_i < \alpha$. Sia (T_1, π_1, φ_1) un k-ricoprimento di $T = T_0$ che srotola X_0. Ora $\pi_1^{-1}(X_i) \in \Pi^0_{\beta_i}([T_1])$ per $i \geq 1$ siccome $\Pi^0_{\beta_i}$ è una boldface pointclass. Per ricorsione sia $(T_{i+1}, \pi_{i+1}, \varphi_{i+1})$ un $(k+i)$-ricoprimento di T_i che srotola $(\pi_1 \circ \ldots \circ \pi_i)^{-1}(X_i)$.

$$T_0 \xleftarrow[\pi_1]{} T_1 \xleftarrow[\pi_2]{} T_2 \xleftarrow[\pi_3]{} T_3 \qquad \cdots$$

Dimostrazione

Ora, per il Lemma 2, sia $(T_\infty, \pi_{\infty,i}, \varphi_{\infty,i})_{i<\omega}$ il limite. Osserviamo che $(T_\infty, \pi_{\infty,0}, \varphi_{\infty,0})$ srotola ogni X_i.

Dimostrazione

Ora, per il Lemma 2, sia $(T_\infty, \pi_{\infty,i}, \varphi_{\infty,i})_{i<\omega}$ il limite. Osserviamo che $(T_\infty, \pi_{\infty,0}, \varphi_{\infty,0})$ srotola ogni X_i.

Infatti per ogni $i < \omega$ abbiamo

$$\begin{aligned}\pi_{\infty,0}^{-1}(X_i) &= (\pi_1 \circ \ldots \circ \pi_{i+1} \circ \pi_{\infty,i+1})^{-1}(X_i)\\ &= \pi_{\infty,i+1}^{-1}(\pi_{i+1}^{-1}((\pi_1 \circ \ldots \circ \pi_i)^{-1}(X_i)))\end{aligned}$$

ma $\pi_{i+1}^{-1}((\pi_1 \circ \ldots \circ \pi_i)^{-1}(X_i))$ è un clopen per definizione di π_{i+1} e $\pi_{\infty,i+1}$ è continua dunque $\pi_{\infty,0}^{-1}(X_i)$ è clopen.

Dimostrazione

Adesso abbiamo che $\pi_{\infty,0}^{-1}(X) = \bigcup_{i<\omega} \pi_{\infty,0}^{-1}(X_i)$ è un aperto di $[T_\infty]$ quindi, per il Lemma 1, esiste $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$ k-ricoprimento di T_∞ che srotola $\pi_{\infty,0}^{-1}(X)$. Infine $(\tilde{T}, \pi_{\infty,0} \circ \pi, \varphi_{\infty,0} \circ \varphi)$ è un k-ricoprimento di T che srotola X.

$\square$