

# Giochi di Gale-Stewart e Determinatezza Boreliana

Gabriele Rastello

1 Giugno 2022

# Giochi di Gale-Stewart su $A$

Sia  $A \neq \emptyset$  un insieme e  $X \subseteq A^\omega$  un **payoff set**. Consideriamo il gioco di Gale-Stewart  $G(A, X)$

$$\begin{array}{ccccccc} \text{I} & a_0 & & a_2 & & \dots \\ \text{II} & & a_1 & & a_3 & \dots \end{array}$$

# Giochi di Gale-Stewart su $A$

Sia  $A \neq \emptyset$  un insieme e  $X \subseteq A^\omega$  un **payoff set**. Consideriamo il gioco di Gale-Stewart  $G(A, X)$

$$\begin{array}{ccccccc} \text{I} & a_0 & & a_2 & & \dots \\ \text{II} & & a_1 & & a_3 & \dots \end{array}$$

dove

- I vince se  $(a_n)_{n < \omega} \in X$ ;
- II vince se  $(a_n)_{n < \omega} \notin X$ .

# Giochi di Gale-Stewart su $T$

Sia  $T \subseteq A^{<\omega}$  non vuoto e potato,  $X \subseteq [T]$  un payoff set; allora possiamo considerare il gioco  $G(T, X)$

$$\begin{array}{ccccccc} \text{I} & a_0 & & a_2 & & \dots \\ \text{II} & & a_1 & & a_3 & \dots \end{array}$$

con la restrizione aggiuntiva  $(a_0, \dots, a_n) \in T$  per ogni  $n < \omega$  e le medesime condizioni di vittoria.

# Giochi di Gale-Stewart su $T$

Sia  $T \subseteq A^{<\omega}$  non vuoto e potato,  $X \subseteq [T]$  un payoff set; allora possiamo considerare il gioco  $G(T, X)$

$$\begin{array}{cccc} \text{I} & a_0 & & a_2 & \dots \\ \text{II} & & a_1 & & a_3 & \dots \end{array}$$

con la restrizione aggiuntiva  $(a_0, \dots, a_n) \in T$  per ogni  $n < \omega$  e le medesime condizioni di vittoria.

## Osservazione

Se  $T = A^{<\omega}$  otteniamo i giochi di Gale-Stewart su  $A$ .

# Strategie

Fissiamo un gioco  $G(X, T)$ .

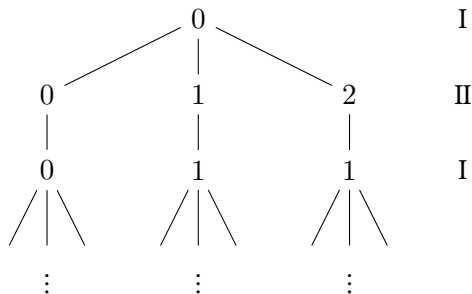
## Definizione

Una **strategia** per I è un albero  $\sigma \subseteq T$  tale che per ogni  $j < \omega$

1.  $\sigma$  è potato e non vuoto;
2. se  $(a_0, \dots, a_{2j}) \in \sigma$  allora ogni  $(a_0, \dots, a_{2j}, a_{2j+1}) \in T$  è in  $\sigma$ ;
3. se  $(a_0, \dots, a_{2j+1}) \in \sigma$  allora esiste un unico  $a_{2j+2} \in A$  tale che  $(a_0, \dots, a_{2j+1}, a_{2j+2}) \in \sigma$ .

# Strategie

Se  $A = \{0, 1, 2\}$  e  $T = A^{<\omega}$  allora



è una strategia per I.

# Strategie

## Definizione

Una strategia  $\sigma \subseteq T$  per I è **vincente** se  $[\sigma] \subseteq X$  i.e. se I vince ogni partita giocata seguendo  $\sigma$ .



# Strategie

## Definizione

Una strategia  $\sigma \subseteq T$  per I è **vincente** se  $[\sigma] \subseteq X$  i.e. se I vince ogni partita giocata seguendo  $\sigma$ .

Similmente definiamo strategie per II.

# Strategie

## Definizione

Una strategia  $\sigma \subseteq T$  per I è **vincente** se  $[\sigma] \subseteq X$  i.e. se I vince ogni partita giocata seguendo  $\sigma$ .

Similmente definiamo strategie per II.

## Osservazione

Non è possibile che sia I che II abbiano una strategia vincente.

# Determinatezza

## Definizione

Un gioco  $G(X, T)$ , o solamente l'insieme  $X \subseteq T$ , si dice **determinato** se uno dei due giocatori ha una strategia vincente.

# Determinatezza

## Definizione

Un gioco  $G(X, T)$ , o solamente l'insieme  $X \subseteq T$ , si dice **determinato** se uno dei due giocatori ha una strategia vincente.

## Domande

- I chiusi e gli aperti sono determinati?
- I Boreliani sono determinati?
- I proiettivi sono determinati?

# Determinatezza dei giochi chiusi

## Teorema (Gale-Stewart)

Dato  $T \subseteq A^{<\omega}$  potato e non-vuoto se  $X \subseteq [T]$  è aperto (o chiuso) in  $[T]$  allora  $G(X, T)$  è determinato.

# Posizioni non perdenti

## Definizione

Data una posizione  $p = (a_0, \dots, a_{2n+1}) \in T$  diciamo che  $p$  è **non perdente** per I se II non ha una strategia vincente a partire da  $p$ . Formalmente  $p$  è non perdente per I se II non ha una strategia vincente per il gioco  $G(T_p, X_p)$  dove

$$T_p = \{s \in A^{<\omega} : p \frown s \in T\} \quad \text{e} \quad X_p = \{x \in A^\omega : p \frown x \in X\}.$$

# Posizioni non perdenti

## Definizione

Data una posizione  $p = (a_0, \dots, a_{2n+1}) \in T$  diciamo che  $p$  è **non perdente** per I se II non ha una strategia vincente a partire da  $p$ . Formalmente  $p$  è non perdente per I se II non ha una strategia vincente per il gioco  $G(T_p, X_p)$  dove

$$T_p = \{s \in A^{<\omega} : p \frown s \in T\} \quad \text{e} \quad X_p = \{x \in A^\omega : p \frown x \in X\}.$$

## Osservazione

Se una posizione  $p = (a_0, \dots, a_{2n+1}) \in T$  è non perdente per I allora esiste un  $a_{2n+2}$  che I può giocare (i.e.  $(a_{2n+2}) \in T_p$ ) tale che per ogni  $a_{2n+3}$  con cui II può rispondere (i.e.  $(a_{2n+2}, a_{2n+3}) \in T_p$ ) la posizione  $p \frown (a_{2n+2}, a_{2n+3}) \in T$  sia ancora non perdente per I.

# Dimostrazione

Lavoriamo con  $X$  chiuso ed assumiamo che  $\Pi$  non abbia strategia vincente (se la ha allora abbiamo il teorema).



# Dimostrazione

Lavoriamo con  $X$  chiuso ed assumiamo che  $\text{II}$  non abbia strategia vincente (se la ha allora abbiamo il teorema).

Per costruire una strategia vincente per  $\text{I}$  osserviamo che se  $\text{II}$  non ha una strategia vincente allora  $\emptyset$  è una posizione non perdente per  $\text{I}$ . Allora  $\text{I}$  può, come prima mossa, giocare un  $a_0$  tale che per ogni  $a_1$  per cui  $(a_0, a_1) \in T$  quest'ultima posizione è ancora non perdente per  $\text{I}$ .

# Dimostrazione

Lavoriamo con  $X$  chiuso ed assumiamo che  $\text{II}$  non abbia strategia vincente (se la ha allora abbiamo il teorema).

Per costruire una strategia vincente per  $\text{I}$  osserviamo che se  $\text{II}$  non ha una strategia vincente allora  $\emptyset$  è una posizione non perdente per  $\text{I}$ . Allora  $\text{I}$  può, come prima mossa, giocare un  $a_0$  tale che per ogni  $a_1$  per cui  $(a_0, a_1) \in T$  quest'ultima posizione è ancora non perdente per  $\text{I}$ .

Adesso per ogni  $a_1$  con cui  $\text{II}$  può rispondere, per scelta di  $a_0$ , esiste un  $a_2$  che  $\text{I}$  può giocare e tale che per ogni  $a_3$  tale che  $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in T$  questa sia una posizione non perdente per  $\text{I}$ .

# Dimostrazione

In questo modo costruiamo una strategia  $\sigma \subseteq T$  per I con la proprietà che, se  $(a_0, \dots, a_{2n+1}) \in \sigma$  allora questa è una posizione non perdente per I.

## Dimostrazione

In questo modo costruiamo una strategia  $\sigma \subseteq T$  per I con la proprietà che, se  $(a_0, \dots, a_{2n+1}) \in \sigma$  allora questa è una posizione non perdente per I.

Sia  $(a_n)_n$  una partita dove I ha seguito  $\sigma$  i.e.  $(a_n)_n \in [\sigma]$ . Se  $(a_n)_n \notin X$ , cioè  $(a_n)_n \in [T] - X$ , siccome  $X$  è chiuso abbiamo che esiste un  $k < \omega$  tale che

$$N_{(a_0, \dots, a_{2k+1})} \cap [T] \subseteq [T] - X.$$

Ma, se esiste un tale  $k$ , abbiamo che  $(a_0, \dots, a_{2k+1})$  è una posizione perdente per I siccome II vince giocando mosse arbitrarie.

# Dimostrazione

Questo è assurdo perché  $(a_0, \dots, a_{2k+1}) \in \sigma$  e dunque deve essere non perdente per I. Dobbiamo dunque avere  $(a_n)_n \in X$  e quindi  $[\sigma] \subseteq X$ ; I ha una strategia vincente.

# Dimostrazione

Questo è assurdo perché  $(a_0, \dots, a_{2k+1}) \in \sigma$  e dunque deve essere non perdente per I. Dobbiamo dunque avere  $(a_n)_n \in X$  e quindi  $[\sigma] \subseteq X$ ; I ha una strategia vincente.

Se  $X$  è aperto possiamo ripetere lo stesso argomento invertendo i ruoli di I e II.



# Ricoprimenti

## Definizione

Dato  $T \subseteq A^{<\omega}$  potato e non-vuoto. Un **ricoprimento** di  $T$  è una tripla  $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$  dove

1.  $\tilde{T}$  è un albero potato e non-vuoto;
2.  $\pi : \tilde{T} \rightarrow T$  è monotona i.e. se  $s \subseteq t$  allora  $\pi(s) \subseteq \pi(t)$  e tale che  $|\pi(s)| = |s|$ ;
3.  $\varphi$  mappa strategie per I (e per II) in  $\tilde{T}$  a strategie per I (e per II) in  $T$  in modo tale che  $\varphi(\tilde{\sigma})$  ristretta a posizioni di lunghezza  $\leq n$  dipende solo da  $\tilde{\sigma}$  ristretta a posizioni di lunghezza  $\leq n$ ;
4. se  $\tilde{\sigma}$  è una strategia per I (o II) in  $\tilde{T}$  e  $x \in [\varphi(\tilde{\sigma})] \subseteq [T]$  allora esiste  $\tilde{x} \in [\tilde{\sigma}] \subseteq [\tilde{T}]$  tale che  $\pi(\tilde{x}) = x$ .

Se  $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$  è un ricoprimento di  $T$  e  $X \subseteq [T]$  allora a  $G(T, X)$  associamo  $G(\tilde{T}, \tilde{X})$  dove  $\tilde{X} = \pi^{-1}(X)$ . Infatti ad ogni partita  $\tilde{x} \in [\tilde{T}]$  corrisponde  $\pi(x) \in [T]$ , una partita di  $G(T, X)$ .



Se  $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$  è un ricoprimento di  $T$  e  $X \subseteq [T]$  allora a  $G(T, X)$  associamo  $G(\tilde{T}, \tilde{X})$  dove  $\tilde{X} = \pi^{-1}(X)$ . Infatti ad ogni partita  $\tilde{x} \in [\tilde{T}]$  corrisponde  $\pi(x) \in [T]$ , una partita di  $G(T, X)$ .

### Osservazione

Se  $\tilde{\sigma}$  è una strategia vincente per I (o II) in  $G(\tilde{T}, \tilde{X})$  allora  $\varphi(\tilde{\sigma})$  è una strategia vincente per I (o II) in  $G(T, X)$ .

Se  $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$  è un ricoprimento di  $T$  e  $X \subseteq [T]$  allora a  $G(T, X)$  associamo  $G(\tilde{T}, \tilde{X})$  dove  $\tilde{X} = \pi^{-1}(X)$ . Infatti ad ogni partita  $\tilde{x} \in [\tilde{T}]$  corrisponde  $\pi(x) \in [T]$ , una partita di  $G(T, X)$ .

### Osservazione

Se  $\tilde{\sigma}$  è una strategia vincente per I (o II) in  $G(\tilde{T}, \tilde{X})$  allora  $\varphi(\tilde{\sigma})$  è una strategia vincente per I (o II) in  $G(T, X)$ .

Se così non fosse dovrebbe esserci un  $x \in [\varphi(\tilde{\sigma})]$  tale che  $x \notin X$ . Ma, per la condizione 4, esiste un  $\tilde{x} \in [\tilde{\sigma}]$  tale che  $\pi(\tilde{x}) = x$ . Ora siccome  $\tilde{\sigma}$  è vincente  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  e dunque  $\pi(\tilde{x}) = x \in X$ ; assurdo.

# $k$ -ricoprimenti

## Definizione

Fissato  $k < \omega$  un ricoprimento  $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$  è un  **$k$ -ricoprimento** se

1.  $T \restriction 2k = \tilde{T} \restriction 2k$  dove  $T \restriction n = \{x \in T : |x| \leq n\}$ ;
2.  $\pi \restriction (\tilde{T} \restriction 2k)$  è la funzione identità.

# $k$ -ricoprimenti

## Definizione

Fissato  $k < \omega$  un ricoprimento  $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$  è un  **$k$ -ricoprimento** se

1.  $T \restriction 2k = \tilde{T} \restriction 2k$  dove  $T \restriction n = \{x \in T : |x| \leq n\}$ ;
2.  $\pi \restriction (\tilde{T} \restriction 2k)$  è la funzione identità.

Questo significa che nel gioco  $G(\tilde{T}, \tilde{X})$  le prime  $k$  mosse di entrambi i giocatori sono le stesse che in  $G(T, X)$ .

# $k$ -ricoprimenti

## Definizione

Fissato  $k < \omega$  un ricoprimento  $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$  è un  **$k$ -ricoprimento** se

1.  $T \restriction 2k = \tilde{T} \restriction 2k$  dove  $T \restriction n = \{x \in T : |x| \leq n\}$ ;
2.  $\pi \restriction (\tilde{T} \restriction 2k)$  è la funzione identità.

Questo significa che nel gioco  $G(\tilde{T}, \tilde{X})$  le prime  $k$  mosse di entrambi i giocatori sono le stesse che in  $G(T, X)$ .

Inoltre se  $\tilde{\sigma}$  è una strategia per  $\tilde{T}$  allora  $\varphi(\tilde{\sigma}) \restriction 2k = \tilde{\sigma} \restriction 2k$  i.e.  $\varphi$  mappa strategie in strategie senza cambiare le prime  $k$  mosse.

## Definizione

Un ricoprimento  $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$  **srotola**  $X \subseteq [T]$  se  $\pi^{-1}(X)$  è un clopen di  $\tilde{T}$ .

## Definizione

Un ricoprimento  $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$  **srotola**  $X \subseteq [T]$  se  $\pi^{-1}(X)$  è un clopen di  $\tilde{T}$ .

## Osservazione

In particolare se  $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$  srotola  $X$  allora  $G(\tilde{T}, \tilde{X})$  è un gioco chiuso, dunque determinato, e quindi anche  $G(T, X)$  è determinato perché  $\varphi$  trasforma strategie vincenti in strategie vincenti.

# Determinatezza Boreliana

## Teorema (Determinatezza Boreliana)

Dato  $T \subseteq A^{<\omega}$  potato e non-vuoto se  $X \subseteq [T]$  è Boreliano in  $[T]$  allora  $G(X, T)$  è determinato.



# Determinatezza Boreliana

## Teorema (Determinatezza Boreliana)

Dato  $T \subseteq A^{<\omega}$  potato e non-vuoto se  $X \subseteq [T]$  è Boreliano in  $[T]$  allora  $G(X, T)$  è determinato.

## Teorema

Dato  $T \subseteq A^{<\omega}$  potato e non-vuoto se  $X \subseteq [T]$  è Boreliano in  $[T]$  allora per ogni  $k < \omega$  esiste un  $k$ -ricoprimento di  $T$  che srotola  $X$ .

## Lemma 1

Siano  $T$  un albero potato e non-vuoto e  $X \subseteq [T]$  un chiuso. Allora per ogni  $k < \omega$  esiste un  $k$ -ricoprimento di  $T$  che srotola  $X$ .

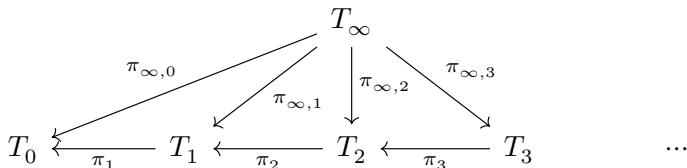
## Lemma 1

Siano  $T$  un albero potato e non-vuoto e  $X \subseteq [T]$  un chiuso. Allora per ogni  $k < \omega$  esiste un  $k$ -ricoprimento di  $T$  the srotola  $X$ .

## Lemma 2

Sia  $k < \omega$  e  $(T_{i+1}, \pi_{i+1}, \varphi_{i+1})$  un  $(k+i)$ -ricoprimento di  $T_i$  per  $i = 0, 1, 2, \dots$ . Allora esiste un albero potato  $T_\infty$  e mappe  $\pi_{\infty,i}, \varphi_{\infty,i}$  tali che  $(T_\infty, \pi_{\infty,i}, \varphi_{\infty,i})$  sia un  $(k+i)$ -ricoprimento di  $T_i$  e

$$\pi_{i+1} \circ \pi_{\infty,i+1} = \pi_{\infty,i}, \quad \varphi_{i+1} \circ \varphi_{\infty,i+1} = \varphi_{\infty,i}.$$



# Dimostrazione

Mostreremo per induzione su  $1 \leq \alpha < \omega_1$  che per ogni  $T$ ,  $k < \omega$  e  $X \subseteq [T]$  in  $\Sigma_\alpha^0([T])$  esiste un  $k$ -ricoprimento di  $T$  che srotola  $X$ .

# Dimostrazione

Mostreremo per induzione su  $1 \leq \alpha < \omega_1$  che per ogni  $T$ ,  $k < \omega$  e  $X \subseteq [T]$  in  $\Sigma_\alpha^0([T])$  esiste un  $k$ -ricoprimento di  $T$  che srotola  $X$ .

Osserviamo che un  $k$ -ricoprimento che srotola  $X$  srotola anche  $\neg X$  (dove  $\neg X = [T] - X$ ) perché  $\pi^{-1}(\neg X) = \neg \pi^{-1}(X)$  e il complementare di un clopen è clopen. Dunque per il Lemma 1 abbiamo la tesi per  $\alpha = 1$ .

# Dimostrazione

Ora assumiamo di avere la tesi per ogni  $\beta < \alpha$ . In particolare abbiamo che per ogni  $T, Y \in \Pi_\beta^0([T])$  e  $k < \omega$  esiste un  $k$ -ricoprimento di  $T$  che srotola  $\neg Y$  ( $\in \Sigma_\beta^0([T])$ ) e dunque anche  $Y$ .

# Dimostrazione

Ora assumiamo di avere la tesi per ogni  $\beta < \alpha$ . In particolare abbiamo che per ogni  $T, Y \in \Pi_\beta^0([T])$  e  $k < \omega$  esiste un  $k$ -ricoprimento di  $T$  che srotola  $\neg Y$  ( $\in \Sigma_\beta^0([T])$ ) e dunque anche  $Y$ .

Sia  $X \in \Sigma_\alpha^0([T])$  e  $k < \omega$ . Allora  $X = \bigcup_{i < \omega} X_i$  con  $X_i \in \Pi_{\beta_i}^0([T])$  e  $\beta_i < \alpha$ . Sia  $(T_1, \pi_1, \varphi_1)$  un  $k$ -ricoprimento di  $T = T_0$  che srotola  $X_0$ . Ora  $\pi_1^{-1}(X_i) \in \Pi_{\beta_i}^0([T_1])$  per  $i \geq 1$  siccome  $\Pi_{\beta_i}^0$  è una boldface pointclass. Per ricorsione sia  $(T_{i+1}, \pi_{i+1}, \varphi_{i+1})$  un  $(k+i)$ -ricoprimento di  $T_i$  che srotola  $(\pi_1 \circ \dots \circ \pi_i)^{-1}(X_i)$ .

$$T_0 \xleftarrow{\pi_1} T_1 \xleftarrow{\pi_2} T_2 \xleftarrow{\pi_3} T_3 \quad \dots$$

# Dimostrazione

Ora, per il Lemma 2, sia  $(T_\infty, \pi_{\infty,i}, \varphi_{\infty,i})_{i < \omega}$  il limite. Osserviamo che  $(T_\infty, \pi_{\infty,0}, \varphi_{\infty,0})$  srotola ogni  $X_i$ .



# Dimostrazione

Ora, per il Lemma 2, sia  $(T_\infty, \pi_{\infty,i}, \varphi_{\infty,i})_{i < \omega}$  il limite. Osserviamo che  $(T_\infty, \pi_{\infty,0}, \varphi_{\infty,0})$  srotola ogni  $X_i$ .

Infatti per ogni  $i < \omega$  abbiamo

$$\begin{aligned}\pi_{\infty,0}^{-1}(X_i) &= (\pi_1 \circ \dots \circ \pi_{i+1} \circ \pi_{\infty,i+1})^{-1}(X_i) \\ &= \pi_{\infty,i+1}^{-1}(\pi_{i+1}^{-1}((\pi_1 \circ \dots \circ \pi_i)^{-1}(X_i)))\end{aligned}$$

ma  $\pi_{i+1}^{-1}((\pi_1 \circ \dots \circ \pi_i)^{-1}(X_i))$  è un clopen per definizione di  $\pi_{i+1}$  e  $\pi_{\infty,i+1}$  è continua dunque  $\pi_{\infty,0}^{-1}(X_i)$  è clopen.

# Dimostrazione

Adesso abbiamo che  $\pi_{\infty,0}^{-1}(X) = \bigcup_{i < \omega} \pi_{\infty,0}^{-1}(X_i)$  è un aperto di  $[T_\infty]$  quindi, per il Lemma 1, esiste  $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$   $k$ -ricoprimento di  $T_\infty$  che srotola  $\pi_{\infty,0}^{-1}(X)$ . Infine  $(\tilde{T}, \pi_{\infty,0} \circ \pi, \varphi_{\infty,0} \circ \varphi)$  è un  $k$ -ricoprimento di  $T$  che srotola  $X$ .

