Giochi di Gale-Stewart su A

Sia $A \neq \emptyset$ un insieme e $X \subseteq A^\omega$ un **payoff set**. Consideriamo il gioco di Gale-Stewart $G(A, X)$

$$\begin{array}{cccccc} \mathrm{I} & a_0 & & a_2 & & \ldots \\ \mathrm{II} & & a_1 & & a_3 & \ldots \end{array}$$

Giochi di Gale-Stewart su A

Sia $A \neq \emptyset$ un insieme e $X \subseteq A^\omega$ un **payoff set**. Consideriamo il gioco di Gale-Stewart $G(A, X)$

$$\begin{array}{cccccc} \mathrm{I} & a_0 & & a_2 & & \dots \\ \mathrm{II} & & a_1 & & a_3 & \dots \end{array}$$

dove

- I vince se $(a_n)_{n<\omega} \in X$;
- II vince se $(a_n)_{n<\omega} \notin X$.

Giochi di Gale-Stewart su T

Sia $T \subseteq A^{<\omega}$ e $X \subseteq [T]$ un payoff set; allora possiamo considerare il gioco $G(T, X)$

$$\begin{array}{cccccc} \mathrm{I} & a_0 & & a_2 & & \dots \\ \mathrm{II} & & a_1 & & a_3 & \dots \end{array}$$

con la restrizione aggiunta che $(a_0, \dots, a_n) \in T$ per ogni $n < \omega$ e le medesime condizioni di vittoria.

Giochi di Gale-Stewart su T

Sia $T \subseteq A^{<\omega}$ e $X \subseteq [T]$ un payoff set; allora possiamo considerare il gioco $G(T, X)$

$$\begin{array}{lccccc} \mathrm{I} & a_0 & & a_2 & & \dots \\ \mathrm{II} & & a_1 & & a_3 & \dots \end{array}$$

con la restrizione aggiunta che $(a_0, \dots, a_n) \in T$ per ogni $n < \omega$ e le medesime condizioni di vittoria.

Remark

Se $T = A^{<\omega}$ otteniamo i giochi di Gale-Stewart su A.

Strategie

Fissiamo un gioco $G(X, T)$.

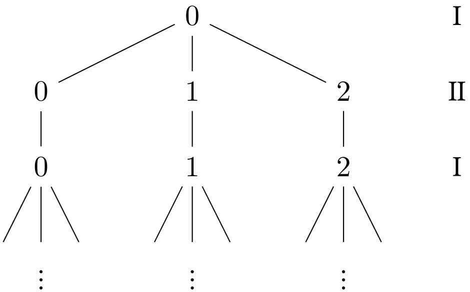
Definizione

Una **strategia** per I è un albero $\sigma \subseteq T$ tale che

1. σ è potato e non vuoto;
2. se $(a_0, \dots, a_{2j}) \in \sigma$ allora ogni $(a_0, \dots, a_{2j}, a_{2j+1}) \in T$ è in σ;
3. se $(a_0, \dots, a_{2j-1}) \in \sigma$ allora esiste un unico $a_{2j} \in A$ tale che $(a_0, \dots, a_{2j-1}, a_{2j}) \in \sigma$.

Strategie

Se $A = \{0, 1, 2\}$ e $T = A^{<\omega}$ allora



è una strategia per I.

Strategie

Definizione

Una strategia $\sigma \subseteq T$ per I è **vincente** se $[\sigma] \subseteq X$ i.e. se I vince ogni partita giocata seguendo σ.

Strategie

Definizione

Una strategia $\sigma \subseteq T$ per I è **vincente** se $[\sigma] \subseteq X$ i.e. se I vince ogni partita giocata seguendo σ.

Similmente definiamo strategie per II.

Strategie

Definizione

Una strategia $\sigma \subseteq T$ per I è **vincente** se $[\sigma] \subseteq X$ i.e. se I vince ogni partita giocata seguendo σ.

Similmente definiamo strategie per II.

Remark

Siccome $G(X, T)$ non può finire in un pareggio non è possibile che sia I che II abbiano una strategia vincente.

Determinatezza

Definizione

Un gioco $G(X, T)$, o solamente l'insieme $X \subseteq T$, si dice **determinato** se uno dei due giocatori ha una strategia vincente.

Determinatezza

Definizione

Un gioco $G(X,T)$, o solamente l'insieme $X \subseteq T$, si dice **determinato** se uno dei due giocatori ha una strategia vincente.

Domande

- I chiusi e gli aperti sono determinati?
- I Boreliani sono determinati?
- Gli analitici sono determinati?

Determinatezza dei giochi chiusi

Teorema (Gale-Stewart)

Dato $T \subseteq A^{<\omega}$ potato e non-vuoto se $X \subseteq [T]$ è aperto (o chiuso) in $[T]$ allora $G(X, T)$ è determinato.

Posizioni non perdenti

Definizione

Data una posizione $p = (a_0, \dots, a_{2n+1}) \in T$ diciamo che p è **non perdente** per I se II non ha una strategia vincente a partire da p. Formalmente p è non perdente per I se II non ha una strategia vincente per il gioco $G(T_p, X_p)$ dove

$$T_p = \{s \in A^{<\omega} : p^\frown s \in T\} \quad \text{e} \quad X_p = \{x \in A^\omega : p^\frown x \in X\}.$$

Posizioni non perdenti

Definizione

Data una posizione $p = (a_0, \dots, a_{2n+1}) \in T$ diciamo che p è **non perdente** per I se II non ha una strategia vincente a partire da p. Formalmente p è non perdente per I se II non ha una strategia vincente per il gioco $G(T_p, X_p)$ dove

$$T_p = \{s \in A^{<\omega} : p^\frown s \in T\} \quad \textbf{e} \quad X_p = \{x \in A^\omega : p^\frown x \in X\}.$$

Remark

Se una posizione $p = (a_0, \dots, a_{2n+1}) \in T$ è non perdente per I allora esiste un a_{2n+2} che I può giocare (i.e. $(a_{2n+2}) \in T_p$) tale che per ogni a_{2n+3} con cui II può rispondere (i.e. $(a_{2n+2}, a_{2n+3}) \in T_p$) la posizione $p^\frown(a_{2n+2}, a_{2n+3}) \in T$ sia ancora non perdente per I.

Dimostrazione

Lavoriamo con X chiuso ed assumiamo che II non abbia strategia vincente (se la ha allora abbiamo il teorema).

Dimostrazione

Lavoriamo con X chiuso ed assumiamo che II non abbia strategia vincente (se la ha allora abbiamo il teorema).

Per costruire una strategia vincente per I osserviamo che se II non ha una strategia vincente allora $\emptyset$ è una posizione non perdente per I. Allora I può, come prima mossa, giocare un a_0 tale che per ogni a_1 per cui $(a_0, a_1) \in T$ quest'ultima posizione è ancora non perdente per I.

Dimostrazione

Lavoriamo con X chiuso ed assumiamo che II non abbia strategia vincente (se la ha allora abbiamo il teorema).

Per costruire una strategia vincente per I osserviamo che se II non ha una strategia vincente allora $\emptyset$ è una posizione non perdente per I. Allora I può, come prima mossa, giocare un a_0 tale che per ogni a_1 per cui $(a_0, a_1) \in T$ quest'ultima posizione è ancora non perdente per I.

Adesso per ogni a_1 con cui II può rispondere, per scelta di a_0, esiste un a_2 che I può giocare e tale che per ogni a_3 tale che $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in T$ questa sia una posizione non perdente per I.

Dimostrazione

In questo modo costruiamo una strategia $\sigma \subseteq T$ per I con la proprietà che, se $(a_0, \dots, a_{2n+1}) \in \sigma$ allora questa è una posizione non perdente per I.

Dimostrazione

In questo modo costruiamo una strategia $\sigma \subseteq T$ per I con la proprietà che, se $(a_0, \dots, a_{2n+1}) \in \sigma$ allora questa è una posizione non perdente per I.

Sia $(a_n)_n$ una partita dove I ha seguito σ i.e. $(a_n)_n \in [\sigma]$. Se $(a_n)_n \notin X$, cioè $(a_n)_n \in [T] - X$, siccome $[T]$ è chiuso abbiamo che esiste un $k < \omega$ tale che

$$N_{(a_0,\dots,a_{2k+1})} \cap [T] \subseteq [T] - X.$$

Ma, se esiste un tale k, abbiamo che $(a_0, \dots, a_{2k+1})$ è una posizione perdente per I siccome II vince giocando mosse arbitrarie.

Dimostrazione

Questo è assurdo perché $(a_0, \dots, a_{2k+1}) \in \sigma$ e dunque deve essere non perdente per I. Dobbiamo dunque avere $(a_n)_n \in X$ e quindi $[\sigma] \subseteq X$; I ha una strategia vincente.

Dimostrazione

Questo è assurdo perché $(a_0, \dots, a_{2k+1}) \in \sigma$ e dunque deve essere non perdente per I. Dobbiamo dunque avere $(a_n)_n \in X$ e quindi $[\sigma] \subseteq X$; I ha una strategia vincente.

Se X è aperto possiamo ripetere lo stesso argomento invertendo i ruoli di I e II.

$\square$