Algebre Iniziali, Coalgebre Terminali e Punti Fissi di un Funtore

Candidato:
Gabriele Rastello

Relatore:
Alessandro Ardizzoni

13 Aprile 2023

Il Punto di Partenza

Teorema (Knaster Tarski, 1955)

Sia $(L, \leq)$ *un reticolo completo e* $f : L \to L$ *una funzione monotona allora*

$$\inf A, \quad \sup B$$

dove

$$A = \{x \in L : fx \leq x\}, \quad B = \{x \in L : x \leq fx\}$$

sono punti fissi di f*.*

A è l'insieme dei **pre-punti fissi di** f, B quello dei **post-punti fissi di** f.

Il Punto di Partenza

Teoria degli Ordini	Teoria delle Categorie
preordine L	categoria $\mathscr{A}$
funzione monotona f	funtore F
pre-punto fisso $fx \leq x$	F-algebra $FX \to X$
post-punto fisso $x \leq fx$	F-coalgebra $X \to FX$
minimo pre-punto fisso inf A	algebra iniziale μF
massimo post-punto fisso sup B	coalgebra terminale νF

F-algebre

Definizione

*Una F-**algebra** è un oggetto $A \in \mathscr{A}$ assieme ad una freccia*

$$\alpha : FA \to A.$$

Esempio

Per il funtore $FX = X + 1$ su Set le F-algebre sono strutture del tipo

$$X + 1 \to X$$

cioè insiemi dotati di una costante e un'operazione unaria.

F-coalgebre

Definizione

*Una F-**coalgebra** è un oggetto $B \in \mathscr{A}$ assieme ad una freccia*

$$\beta : B \to FB.$$

Esempio

Per il funtore $FX = X + 1$ su Set una F-coalgebra è un sistema con terminazione.

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[d, bend right] & & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[d] \\
\bullet \arrow[u, bend right] & & \bullet \arrow[u] & \bullet^{T}
\end{tikzcd}$$

Morfismi di F-(co)algebre

Definizione

*Un **morfismo** di F-(co)algebre è una freccia*

$$f : A \to A' \quad o \quad g : B \to B'$$

di $\mathscr{A}$ tale che

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "Ff"] & A \arrow[d, "f"] \\ FA' \arrow[r, "\alpha'"] & A' \end{tikzcd} \quad o \quad \begin{tikzcd} B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"] & FB \arrow[d, "Fg"] \\ B' \arrow[r, "\beta'"] & FB' \end{tikzcd}$$

commuti. In questo modo otteniamo AlgF, la categoria delle F-algebre, e CoalgF, la categoria delle F-coalgebre.

Algebre Iniziali e Coalgebre Terminali

Definizione

In una categoria $\mathscr{A}$ un oggetto A è ***iniziale*** *se per ogni $B \in \mathscr{A}$ esiste un'unica freccia $A \to B$, è* ***terminale*** *se per ogni $B \in \mathscr{A}$ esiste un'unica freccia $B \to A$.*

Definizione

*Una F-**algebra iniziale**, μF, è un oggetto iniziale in AlgF.*
*Una F-**(co)algebra terminale**, νF, è un oggetto terminale in CoalgF.*

Algebre Iniziali e Coalgebre Terminali

Esempio

L'algebra iniziale per $FX = X + 1$ *è* $\mathbb{N}$ *con costante* 0 *e l'operazione di successore.*

Esempio

La coalgebra terminale per $FX = X + 1$ *è il sistema con terminazione*

$$0 \longleftarrow 1 \longleftarrow 2 \longleftarrow \cdots \qquad \infty \circlearrowleft$$

Il Lemma di Lambek

Un **punto fisso** per un funtore F è un oggetto $A \in \mathscr{A}$ tale che $A \cong FA$.

Lemma (Lambek, 1968)

L'algebra iniziale μF e la coalgebra terminale νF, quando esistono, sono punti fissi di F.

Osservazione

Il funtore insieme delle parti $\mathcal{P}$ su Set non ha punti fissi e quindi non ammette algebra iniziale o coalgebra terminale.

Ricorsione ed Coricorsione

Definizione

*Una freccia $f : \mu F \to A$ di $\mathscr{A}$ è **specificata ricorsivamente** se esiste una struttura di F-algebra su A che rende f un morfismo di F-algebre.*

Esempio

Sia $FX = X \times X + 1$ su Set. L'algebra terminale μF è formata dagli alberi binari finiti. Il morfismo unico da μF all'algebra $\alpha : \mathbb{N} \times \mathbb{N} + 1 \to \mathbb{N}$ data da $\alpha = [\alpha_1, \alpha_0]$ con

$$\alpha_0 = 0$$
$$\alpha_1(n, m) = 1 + \max\{n, m\}$$

assegna ad ogni albero la sua altezza.

Teorema (Ricorsione Primitiva)

Per ogni freccia $\alpha : F(A \times \mu F) \to A$ *esiste un'unica* $h : \mu F \to A$ *tale che*

$$\begin{tikzcd} F(\mu F) \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "F\langle h, id_{\mu F}\rangle"] & \mu F \arrow[d, "h"] \\ F(A \times \mu F) \arrow[r, "\alpha"] & A \end{tikzcd}$$

commuti.

Come corollario otteniamo il classico teorema di ricorsione con parametri su Set.

Ricorsione e Coricorsione

Definizione

*Una freccia $g : B \to \nu F$ di $\mathscr{A}$ è **specificata coricorsivamente** se esiste una struttura di F-coalgebra su B che rende g un morfismo di F-coalgebre.*

Esempio

Sia $FX = X + 1$. Il morfismo unico dalla seguente coalgebra su $\nu F \times \nu F$

$$\begin{tikzcd}
(0,2) \arrow[d] & (1,2) \arrow[l] & (2,2) \arrow[l] & \cdots \arrow[l] \\
(0,1) \arrow[d] & (1,1) \arrow[l] & (2,1) \arrow[l] & \cdots \arrow[l] \\
(0,0) & (1,0) \arrow[l] & (2,0) \arrow[l] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

in νF è l'addizione.

Teorema (Coricorsione Primitiva)

Per ogni freccia $\beta : B \to F(B + \nu F)$ esiste un'unica $h : B \to \nu F$ tale che

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "h"] & F(B + \nu F) \arrow[d, "{F[h, id_{\nu F}]}"] \\ \nu F \arrow[r, "\tau"] & F(\nu F) \end{tikzcd}$$

commuti.

Induzione e Bisimulazione

Teorema (Principio di Induzione)

L'algebra iniziale μF non ha sottoalgebre proprie.

Esempio

Sia $FX = X + 1$. Non ci sono sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ contenenti 0 e chiusi per successore diversi da $\mathbb{N}$ stesso.

Teorema (Principio di Coinduzione)

Non ci sono bisimulazioni proprie sulla coalgebra terminale νF.

Esempio

Sia $FX = X + 1$. Non ci sono due stati differenti di νF che si comportano nello stesso modo.

Teorema di Adámek

Teorema (Kleene)

Se P è un ordine parziale completo con un minimo globale $\bot$ allora ogni funzione continua $f : P \to P$ ha un punto fisso $\mu f = \sup_{n<\omega} f^n(\bot)$.

Generalizzando si ottiene il Teorema di Adámek.

Teorema (Adámek, 1974)

*Se $\mathscr{A}$ ha un oggetto iniziale 0, ω-colimiti e F preserva gli ω-colimiti allora F ha un'algebra iniziale e μF è il colimite dell'ω-**catena dell'algebra iniziale***

$$0 \xrightarrow{\;!\;} F0 \xrightarrow{F!} F^2 0 \xrightarrow{F^2!} F^3 0 \xrightarrow{F^3!} \cdots .$$

Teorema di Adámek

Teorema

*Se $\mathscr{A}$ ha un oggetto terminale 1, ω-limiti e F preserva gli ω-limiti allora F ha una coalgebra terminale e νF è il limite dell'$\omega^{\mathbf{op}}$**-catena della coalgebra terminale***

$$1 \xleftarrow[!]{} F1 \xleftarrow[F!]{} F^2 1 \xleftarrow[F^2!]{} F^3 1 \xleftarrow[F^3!]{} \cdots .$$

Osservazione

Le ipotesi del Teorema di Adámek per le coalgebre sono più difficili da soddisfare. Ad esempio $\mathcal{P}_f$, il funtore insieme delle parti finito, non preserva gli ω-limiti.

Iterazione Transfinita

Le catene si possono estendere oltre ad ω.

$W_0 = 0$	caso base	$V_0 = 1$
$W_{j+1} = FW_j$	j ordinale successore	$V_{j+1} = FV_j$
$W_j = \operatorname{colim}_{i<j} W_i$	j ordinale limite	$V_j = \lim_{i<j} V_i$

Teorema (Adámek, 1974)

Se la catena della (co)algebra (terminale) iniziale converge, allora F ha una (co)algebra (terminale) iniziale.

F-algebre: condizioni equivalenti

Definizione

Una classe di monomorfismi $\mathcal{M}$ è ***liscia*** *se $Sub_{\mathcal{M}}(A)$ è un preordine con* sup *di catene calcolati come colimiti in $\mathscr{A}$.*

Teorema

Se $\mathscr{A}$ ha una classe $\mathcal{M}$ di monomorfismi lisci, ogni oggetto ha solo un insieme di $\mathcal{M}$-sottoggetti e F preserva $\mathcal{M}$ allora le seguenti condizioni sono equivalenti.

1. *La catena dell'algebra iniziale di F converge.*
2. *F ha un'algebra iniziale.*
3. *F ha un punto fisso.*
4. *F ha un $\mathcal{M}$-pre-punto fisso.*

F-coalgebre: condizioni sufficienti

Osservazione (Adámek, Koubek, 1995)

Esiste un funtore F su Set che ha un punto fisso, ma non una coalgebra terminale.

Definizione

*Sia λ un cardinale regolare. Un funtore F su Set è λ-**accessibile** quando per ogni $x \in FX$ esiste un $m : M \rightarrowtail X$ tale che $|M| < \lambda$ e $x \in \mathrm{im}\,(Fm)$.*

Teorema (Worrell, 2005)

La catena della coalgebra terminale di un funtore λ-accessibile converge in $\lambda + \lambda$ passi.

F-coalgebre: condizioni sufficienti

Teorema (Adámek, Koubek, 1995)

Sotto GCH, se F su Set ha un punto fisso di cardinalità λ e uno di cardinalità λ^+ allora F ha una coalgebra terminale.

Teorema

L'ipotesi del continuo (CH) vale se e solo se ogni funtore su Set con un punto fisso di cardinalità $\aleph_0$ e uno di cardinalità $\aleph_1$ ha una coalgebra terminale.