# Discrete Mathematics Note

Wonseok Shin

2021/03/09

Last Compile : 2021/03/09 at 23:16:46

## Contents

**March 3, 2021: Propositional Logic** **3**

**March 8, 2021: Propositional Logic II** **4**

| **Discrete Mathematics** | **[M1522.000000 Spring 2021]** |
|---|---|

# Lecture I: Propositional Logic

March 3, 2021

Lecturer: Moon Bongki

Scribe : Wonseok Shin

Logic : Formal system for describing knowledge, implement reasoning on knowledge.

Set of rules deducing entailments of a set of sentences.

Ambiguity 없이 명제를 표현하고 사고를 전개하는 언어 (Syntax, Semantics, Rules).

## Propositional Logic

기본적인 문장들을 Atomic entity로 간주하고, Boolean connective를 이용하여 복잡한 문장을 전개.

Boolean Connective : $\wedge, \vee \ldots$

**Definition 1.1.** Proposition : Assertion, declarative sentence with definite meaning, having a truth value that is either TRUE or FALSE.

Proposition variable $(P, Q, R \ldots)$ denotes arbitrary proposition with unspecified truth value.

**Definition 1.2 (Boolean Operators).**

- $\neg$ : NOT
- $\wedge$ : AND
- $\vee$ : OR
- $\oplus$ : XOR
- $\rightarrow$ : IMPLIES
- $\iff$ : IFF

| **Discrete Mathematics** | **[M1522.000000 Spring 2021]** |
|---|---|

# Lecture II: Propositional Logic II

March 8, 2021

Lecturer: Moon Bongki | Scribe : Wonseok Shin

**Definition 2.1.** 명제 $P \to Q$에 대하여 다음과 같이 용어를 정의한다.

- Converse : $Q \to P$
- Inverse : $\neg P \to \neg Q$
- Contrapositive : $\neg Q \to \neg P$

셋 중 Contrapositive만이 원래 명제의 Truth table을 보존한다.

**Definition 2.2 (Well Formed Formula).**

- Proposition variable은 WFF
- WFF $P$에 대해 $\neg P$ 는 WFF
- WFF $P, Q$에 대해 $(P \vee Q), (P \wedge Q), (P \to Q)$ 는 WFF
- 위 과정으로 만들어진 논리식들 (문자열들) 만을 WFF로 인정한다.

**Definition 2.3 (Tautology).** WFF $T$ 가 주어질 때, $T$의 모든 variable의 모든 truth value assignment에 대해서 $T$가 항상 참이면 $T$를 Tautology라고 부른다.

예를 들어, $(P \vee \neg P)$ 는 tautology. Truth table의 모든 row에서 결과가 T이면 tautology이다.

**Definition 2.4 (Contradiction).** WFF $T$ 가 주어질 때, $T$의 모든 variable의 모든 truth value assignment 에 대해서 $T$가 항상 거짓이면 $T$를 Contradiction이라고 부른다.

**Definition 2.5 (Logical Equivalence).** 두 WFF $T, S$가 주어질 때, 모든 variable의 모든 truth value assignment에 대해서 $T$와 $S$의 참/거짓이 같으면 두 식을 Logically Equivalent하다고 부른다.

**Theorem 2.6 (Logical Equivalence Theorems).**

- Identity : $P \wedge T \Leftrightarrow P, \quad P \vee F \Leftrightarrow P$
- Domination : $P \vee T \Leftrightarrow T, \quad P \wedge F \Leftrightarrow F$
- Idempotent : $P \vee P \Leftrightarrow P, \quad P \wedge P \Leftrightarrow P$

- Double Negation : $\neg\neg P \Leftrightarrow P$
- Commutatitive : $\wedge, \vee$ are commutative
- Associative : $\wedge, \vee$ are associative
- Distributive : $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R), \quad P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
- De Morgan's : $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q, \quad \neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$
- Trivial Tautology/Contradiction : $P \vee \neg P \Leftrightarrow T, \quad P \wedge \neg P \Leftrightarrow F$

**Theorem 2.7 (Operators via Equivalences).**

- XOR : $P \oplus Q \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$

  $P \oplus Q \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$
- Conditional : $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$
- Biconditional : $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow \neg Q) \Leftrightarrow \neg(P \oplus Q)$