Undergraduate Real Analysis Note

Wonseok Shin

2021/03/09

Last Compile : 2021/03/09 at 23:17:41

Contents

Undergraduate Real Analysis	**[881.425 Spring 2021]**

Lecture I: Introduction / Preliminaries

March 3, 2021

Lecturer: Hunhee Lee Scribe : Wonseok Shin

Lemma 1.1. $\mathbb{R}$의 open set V는 disjoint open interval의 countable union $\bigcup_n J_n$ 으로 쓸 수 있다.

Proof. $x \in V$에 대해, I_x를 V에 포함되면서 x를 포함하는 최대의 open interval이라고 하자. 구체적인 construction은, 그러한 성질을 갖는 interval들의 union. 이때, $V = \cup_{x \in V} I_x$ 임이 자명하다. 여기에서 disjoint와 countable함을 생각하자. 두 interval I_x, I_y에 대해, construction한 방법에 의하여 $I_x = I_y$ 이거나, $I_x \cap I_y = \emptyset$ 임을 알 수 있다. 따라서, disjoint함은 자명하고, 이 줄어든 index set이 countable함을 보이면 충분. 유리수는 dense하므로, 각각의 open interval에서 유리수를 하나씩 선택할 수 있고, disjointness에서부터 이 interval의 개수가 유리수의 개수보다 많지 않음을 안다. □

Lemma 1.2. $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 에 대해, topological continuity와 analytic continuity가 동치이다. 즉, TFAE.

- $\epsilon - \delta$ Continuity
- ${}^{\forall}V$ open in $\mathbb{R}$, $f^{-1}(V)$ open in E.

Lemma 1.3. Closed, bounded interval은 compact하다. 또한, compact 구간 위에서 연속인 함수 f는 Uniformly continuous하다.

Theorem 1.4 (Uniform convergence). Compact interval $[a, b]$ 위에서 정의된 연속함수열 $(f_n)_{n\geq 1}$ 이 f로 uniformly converge [1] 할 때, 다음이 성립한다.

- f가 연속함수이다. 따라서, 리만 적분 가능하다.
- 적분과 극한의 순서를 교환할 수 있다. 즉,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x) = \int_a^b f(x)$$

[1] point에 상관 없이 수렴한다는 intuition

Lecture II: σ-algebras and measures

March 9, 2021

Lecturer: Hunhee Lee Scribe : Wonseok Shin

Measure (재는 것, 잣대) : 길이/넓이/부피의 일반화

어떤 집합들을 잴 수 있는가? $\rightarrow$ σ-algebra (잴 수 있는 집합들의 모임)

σ : Countable operation을 함의하는 관례적인 표현.

Definition 2.1 (σ-algebra). $\mathcal{A} \subset P(X)$ 가 다음 조건을 만족하면 σ-algebra라고 부른다.

- $\emptyset \in \mathcal{A}$
- $E \in \mathcal{A} \Rightarrow E^c \in \mathcal{A}$
- $E_n \in \mathcal{A}, ^\forall n \geq 1 \Rightarrow \cup_{n\geq 1} E_n \in \mathcal{A}$

(2), (3) 으로부터, countable intersection도 가능함을 알 수 있다.

Definition 2.2 (Measure). $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$가 다음을 만족하면 measure라고 부른다.

- $\mu(\emptyset) = 0$
- Disjoint한 E_n이 각각 $\mathcal{A}$의 원소일 때, $\mu\left(\cup_{n\geq 1} E_n\right) = \sum_{n\geq 1} \mu(E_n)$

집합과 σ-algebra가 주어지면 이를 measurable space, 여기에 measure μ까지 주어지면 measure space라고 정의한다. 즉, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 가 measure space.

Example (σ-algebra의 예시). 다음과 같은 σ-algebra들의 예시를 생각할 수 있다.

- $\{\emptyset, X\}$
- $\mathcal{P}(X)$
- $\{\emptyset, A, A^c, X\}$

Proposition 2.3 (Minimal σ-algebra). 임의의 $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ 에 대해, $^\exists$ smallest σ-algebra$\mathcal{A}(\mathcal{E})$ containing $\mathcal{E}$. 여기서 가장 작은 σ-algebra는, inclusion으로 주어지는 partial order를 쓴다.

Proof. $\mathcal{E}$을 포함하는 모든 σ-algebra들의 교집합 $\mathcal{A}(\mathcal{E})$을 생각하자 (Power set이 있으므로, 이러한 집합이 존재한다). 이 집합이 σ-algebra의 조건을 만족함을 보이는 것은 σ-algebra의 axiom을 하나씩 확인하여 어렵지 않게 할 수 있다.

Definition 2.4 (Borel σ-algebra). 위 과정에서, Open set의 집합 $\mathcal{E}$ 로부터 생성되는 σ-algebra를 Borel σ-algebra($\mathcal{B}$) 라고 부른다. $\mathcal{B}(\mathbb{R})$의 원소를 Borel set이라고 정의한다. 이를 확장하여, 임의의 topological space X의 topology τ를 이용하여 $\mathcal{B}(X)$를 정의할 수 있다.

자명하게, 열린 집합 / 닫힌 집합과 임의의 countable한 $\mathbb{R}$의 부분집합은 (닫힌 집합이므로) 항상 Borel set.

Proposition 2.5 ($\mathcal{B}$ on $\mathbb{R}$). 다음과 같은 집합을 generating set으로 삼아서 $\mathcal{B}$를 구성할 수 있다.

- Open interval의 집합
- Closed interval의 집합
- Half-open interval의 집합

Proof. Open interval의 경우만 증명하면 나머지는 비슷하게 할 수 있다. 앞서의 lemma(1.1) 에서, 임의의 열린 집합이 disjoint open interval의 countable union임을 보였으므로, 이들만 가지고도 σ-algebra를 만드는 (생성) 과정으로부터 open set들 모두를 얻고, 나아가 Borel σ-algebra를 얻는다.

Example (Useful $\mathcal{B}$-sets). 다음과 같은 Borel set들의 예시를 생각할 수 있다.

- G_δ set : Open set의 countable intersection
- F_σ set : Closed set의 countable union

이러한 집합들은 각각 open/closed set이 아니지만, 유용한 Borel set이다.

Fact. $|\mathcal{B}(\mathbb{R})| = |\mathbb{R}|$ (선택공리를 이용하여). 즉, Borel set이 다양하게 있지만 Non-Borel set이 더 많다.
Axiom of choice를 이용하여 Borel set이 아닌 집합을 구성할 수 있지만, 자연스러운 집합이 아니다. 즉, 해석학/확률론에서 자연스럽게 마주치는 대부분의 집합은 Borel set.

Example (Lebesgue Measure). $m : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$로서, 구간 I에 대해 $m(I)$ 가 I의 길이가 되는 measure가 유일하게 존재하며, 이를 Lebesgue measure라고 정의한다. 즉, 구간의 길이를 자연스럽게 확장하는 유일한 측도를 르벡 측도라고 정의한다. 직관적으로 생각해서, 르벡 측도는 '구간을 위한 측도'.

Remark. 르벡 측도는 translation invariant. 즉, $m(E + x) = m(E)$ 이다.
이를 위해, Borel set E가 평행이동된 $E + x$도 Borel set임을 보이자. $A = \{ B \subset \mathbb{R} \mid B + x \in B(\mathbb{R}) \}$ 라고 정의하자. 이때, open interval들이 Borel set이므로, 자명하게 임의의 open interval은 A의 원소이다.
이렇게 정의된 A가 σ-algebra임을 직접 확인해 볼 수 있고, Borel set은 open interval들로부터 generate된 (가장 작은) σ-algebra이므로 정의로부터 $\mathcal{B} \subset A$ 가 되어, Borel set의 평행이동이 Borel set임을 안다.

Example (Counting Measure). σ-algebra로 Power set을 택하고, $\mu(E) = |E|$로 정의하면 measure가 된다. 이를 counting measure라 한다.

Example (Dirac Measure). σ-algebra로 Power set을 택하고, 한 점 u를 택하여, δ_u를 다음과 같이 정의하면 measure가 된다. 이를 Dirac measure라 부른다.

$$\delta_u(A) = \begin{cases} 1 & u \in A \\ \\ 0 & u \notin A \end{cases}$$

Proposition 2.6 ($\mathcal{B}$ on $\mathbb{R}$). Measure space $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 와 $B \in \mathcal{A}$에 대해, $\mathcal{A}_B = \{ A \cap B \mid A \in \mathcal{A} \}$ 를 생각하면, 이는 σ-algebra가 되고, 이 위로 축소된 $\mu \mid_{\mathcal{A}_B}$ 도 다시 measure가 된다.

Remark. Topological space X에 대해, $\mathcal{B}(X)_B = \mathcal{B}(B)$ (subspace topology).

Example (More named measures).

- 확률분포 (Probability distribution measure)
- Lie group에서 등장하는 Locally compact group 위의 Haar measure
- Fractal에 대한 Hausdorff measure
- Representaiton space 위의 Plancherel measure

Proposition 2.7 (Measure의 성질).

(i) Finite additivity : Disjoint E, F에 대해 $\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$

(ii) Monotonicity : $A \subset B$ 에 대해 $\mu(A) \leq \mu(B)$

(iii) Excision : $A \subset B$ 에 대해 $\mu(A) < \infty$ 이면 $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$

(iv) Countable sub-additivity : 임의의 가측 A_n에 대해, $\mu(\cup A_n) \leq \sum \mu(A_n)$

(v) Continuity from below : 가측 (A_n) 이 increasing할 때,

$$\mu(\cup_{n \geq 1} A_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$$

(vi) Continuity from below : 가측 (A_n) 이 decreasing하고, $\mu(A_1) < \infty$일 때,

$$\mu(\cap_{n \geq 1} A_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$$

Proof.

(i) Countable additivity로부터 자명.

(ii) Finite additivity와 non-negativity로부터 자명.

(iii) $B = (B \setminus A) \cup A$ 이므로, finite additivity에 의해 성립.

(iv) (ii)와 (iii), countable additivity로부터 거의 자명.

(v) $B_n = A_n \setminus A_{n-1}, B_1 = A_1$ 이라고 정의하면 $\mu(\cup A_n) = \mu(\cup B_n)$임을 쉽게 알 수 있다. 이때, 이는 다시 B_n이 disjoint하므로 $\sum \mu(B_n)$과 같고, 다시 $\lim_{n\to\infty} \mu(\cup_{i=1}^n B_i) = \lim_{n\to\infty} \mu(\cup_{i=1}^n A_i)$

(vi) $B_n = A_1 \setminus A_{n-1}$로 정의하고, 위 과정과 거의 똑같이 진행할 수 있다.

Definition 2.8.

- $\mu(X) < \infty$ 인 measure를 Finite measure라고 부른다.
- X가 $X = \bigcup_{n=1}^{\infty}, \mu(X_n) < \infty$ 이면, μ를 σ-finite measure라고 부른다.

예를 들어, 르벡 측도는 $[a, b]$ 들이 유한한 길이를 가지므로 σ-finite.

Remark. 왜 "Countable" additivity를 원하는가?
→ Countable additivity가 없으면 $(0, 1] = \bigcup_n \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ 같은 집합을 다룰 수가 없다.
→ 그보다 큰 집합의 경우, $\mu([0, 1])$ 이 $\mu(\cup_{x\in[0,1]} \{x\})$ 로 나타내어지게 되면, uncountable sum의 문제가 발생한다. 다루기 어려울 뿐 아니라, 각 점의 measure가 0인데 이를 더하여 1을 얻는 모순이 발생.

Definition 2.9 (Complete Measure). 임의의 Null set ($E \in \mathcal{A}, \mu(E) = 0$) E에 대해, $F \subset E \Rightarrow F \in \mathcal{A}$ 를 만족하면, measure μ 가 complete하다고 정의한다.

Theorem 2.10 (Complete extension of measure).

임의의 measure space $(X, \mathcal{A}, \mu)$에 대해, $\mathcal{N} = \{ E \in \mathcal{A} \mid \mu(E) = 0 \}$ 을 생각하자.
이제, $\overline{\mathcal{A}} = \left\{ E \cup F \mid E \in \mathcal{A}, F \subset^{\exists} N \in \mathcal{N} \right\}$ 이 σ-algebra가 되고, μ를 확장하는 $\overline{\mu} : \overline{\mathcal{A}}$ 가 존재하여 $(X, \overline{CA}, \overline{\mu})$ 가 complete measure가 된다.

Definition 2.11 (Lebesgue Measurable Sets). $\mathcal{L}(\mathbb{R}) = \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$, 즉 Borel set의 completion을 Lebesgue measurable set이라고 정의하고, 이 위에 르벡 측도 m을 정의한다.

르벡 측도는 $\mathcal{L}(\mathbb{R})$에서 정의해야 수학적 완결성을 갖지만, 응용은 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$에서 생각해도 되는 경우가 많다.

Remark (Non-Borel Set의 construction).

$x, y \in [0, 1)$에 대해, modulo 1 sum 을 연산으로 부여하자. 이를 이용하여, $E+y$를 mod 1 translation이라고 생각하자. 이 경우에도 Borel set이 보존됨을 알 수 있다. 이 집합에 equivalence relation을 $x \sim y \iff x-y \in \mathbb{Q}$ 라고 정의하자. $\mathbb{Q} \cup [0, 1)$ 을 $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}, r_1 = 0$으로 enumeration한다. 선택 공리에 의해, $^{\exists}P \subset [0, 1)$ containing exactly 1 from each equiv class. 이때 $P_i := P + r_i$를 정의하면, P_i는 각각 disjoint하고, $\cup_i P_i = [0, 1)$ 이다. 이 P가 Borel(또는 Lebesgue measurable)하면, P_i가 각각 Borel이고, 이들에 어떤 measure 값이 부여되어야 한다. 그러나 이때 $m([0, 1)) = 1 = m(\cup_i P_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(P_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(P) = \sum_{i=1}^{\infty} k, k \in [0, \infty]$이므로, $m(P_i)$값이 부여될 수 없다. 따라서 Lebesgue measurable 하지 않은 집합이 존재한다.