3 Численные методы решения систем нелинейных уравнений

3.1 Метод простой итерации

Рассматривается система уравнений

$$f(x) = 0, \quad f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m.$$

Предположим, что эту систему можно записать в виде $x = g(x)$ и выбран некоторый вектор x^0, лежащий в области определения функции $g(x)$.

Последовательное применение функции g к точке x^0, ее образу $g(x^0)$, образу образа $g(g(x^0))$ и т.д., называется итерированием функции g в этой точке или — процессом итерации:

$$x^{k+1} = g(x^k), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Для решения уравнений важна именно последовательность точек $\left\{x^k\right\}$, однако сначала остановимся на таком понятии, как неподвижная точка. Для простоты ограничимся случаем скалярного уравнения, т.е. $n = m = 1$.

Определение. Неподвижной точкой отображения $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется число P такое, что $g(P) = P$.

Теорема 3.1 *Пусть $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Если $\exists \lim\limits_{k\to\infty} x^k = P$, то P — неподвижная точка функции g.*

Таким образом, итерирование дает возможность находить корни уравнений. Вопрос лишь в том, каковы условия сходимости последовательности $\left\{x^k\right\}$, т.е. к какому классу уравнений применим метод итераций?

Ответ на этот вопрос основан на такой фундаментальной теореме, как теорема Брауэра о неподвижной точке. Она допускает многие обобщения, но основная (первоначальная) идея формулируется следующим образом:

Теорема 3.2 *(Брауэра) Любое непрерывное отображение (не обязательно биекция) замкнутого шара в себя в конечномерном евклидовом пространстве имеет неподвижную точку.*

С этой теоремой непосредственно связан интересный математический зверек — сферический ёж.

Теорема 3.3 *(о причесывании ежа) Не существует непрерывного касательного векторного поля на сфере, которое нигде бы не обращалось в нуль.*

Этот математический факт имеет важное значение в метеорологии — он обосновывает существование циклонов в атмосфере.

Вернемся, однако, к итерациям. Следующие две теоремы определяют условия сходимости процесса итераций.

Теорема 3.4 *Пусть $g \in C_{[a,b]}$.*

1. *Если g отображает отрезок $[a, b]$ в себя, то g имеет неподвижную точку на $[a, b]$.*

2. *Если существует производная g' на интервале (a, b) и она ограничена по модулю константой $K < 1$ на этом интервале, то g имеет единственную неподвижную точку на отрезке $[a, b]$.*

Пример. Имеет ли функция $\cos x$ неподвижную точку на отрезке $[0, 1]$? Одну?

Теорема 3.5 *(о сходимости итераций) Пусть g — непрерывно дифференцируемое отображение отрезка $[a, b]$ в себя и точка x^0 взята из интервала (a, b).*

1. *Если существует константа K такая, что $|g'(x)| \leq K < 1 \quad \forall x \in [a, b]$, то итерационный процесс $x^{k+1} = g(x^k)$ сходится к единственной неподвижной точке $P \in [a, b]$. Говорят, что неподвижная точка P является притягивающей (аттрактором).*

2. *Если $\forall x \in [a, b] \quad g'(x) > 1$, то итерационный процесс не сходится к P. В этом случае неподвижная точка называется отталкивающей.*

Следствие 3.6 $\left|P - x^k\right| \leq K^k \left|P - x^0\right|$.

Таким образом, на скорость сходимости итерационного процесса влияют как свойства функции g, так и точность начального приближения.

Замечание. Случай $|g'(x)| \equiv 1$ теорема оставляет без внимания. Что можно сказать в этом случае?

Пример. Исследовать сходимость итерационного процесса, где $g(x) = 2\,(x-1)^{\frac{1}{2}}, x \geq 1, P = 2$?

Замечание. Можно использовать более простой критерий сходимости: $|g'(P)| > 1$ или, соответственно, $|g'(P)| < 1$.

Графически итерационный процесс удобно изображать в пространстве $(x, g(x))$.

Пример. Решить уравнение $x^2 = a$.

I способ. $x^2 = a \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{x}, x \neq 0$. Строим итерационный процесс по формуле

$$x^{n+1} = \frac{a}{x^n} = g_I(x^n).$$

Пусть теперь x^0 — некоторое начальное приближение, $x^0 \neq \sqrt{a}$.

$$\left|x^{n+1} - \sqrt{a}\right| = \left|\frac{a}{x^n} - \sqrt{a}\right| = \left|\frac{a - \sqrt{a}x^n}{x^n}\right| = \frac{\sqrt{a}\left|\sqrt{a} - x^n\right|}{|x^n|} = \frac{\sqrt{a}}{|x^n|}\left|\sqrt{a} - x^n\right|.$$

Итерации расходятся при любом начальном приближении.

II способ. $x^2 = a \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{a}{x}\right)$. Строим итерационный процесс по формуле

$$x^{n+1} = \frac{1}{2}\left(x^n + \frac{a}{x^n}\right) = g_{II}(x^n).$$

Оценим производную:

$$g'_{II}(x^{n+1}) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{\left(x^{n+1}\right)^2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{\frac{1}{4}\left(x^n + \frac{a}{x^n}\right)^2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{\frac{1}{4}\frac{\left((x^n)^2 + a\right)^2}{(x^n)^2}}\right) < \frac{1}{2}.$$

Значит, в этом случае итерации сходятся.

Задача 3.1.1. На языке программирования $\mathcal{N}$ реализовать метод простых итераций. Критерием останова должна служить величина абсолютной и/или относительной ошибки. Программа должна рисовать график итераций, т.е. точки $\left(x^k, x^{k+1}\right)$, соединенные прямыми.

Протестировать программу на функциях:

1. $g(x) = x^5 - 3x^3 - 2x^2 + 2$;
2. $g(x) = \cos\sin x$;
3. $g(x) = x^2 - \sin(x + 0.15)$;
4. $g(x) = x^{x-\cos x}$;
5. $g(x) = (6 + x)^{\frac{1}{2}}$;
6. $g(x) = 1 + \dfrac{2}{x}$;
7. $g(x) = \dfrac{x^2}{3}$;
8. $g(x) = -x^2 + 2x + 2$.

не менее чем при трех различных начальных приближениях. Проверить (аналитически) условия теоремы сходимости.

Задача 3.1.2. Пусть $g(x) = \dfrac{x}{2}$. Найти относительную ошибку на k-ой итерации. Что произойдет, если в качестве критерия останова использовать только малость относительной ошибки?

Задача 3.1.3. Что может произойти, если $g'(P) \approx 0$?

Задача 3.1.4. Переделайте алгоритм, используя в качестве критерия останова условие $\left|f(x^k)\right| < \varepsilon$. Как изменится работа алгоритма на протестированных задачах?

3.2 Метод Ньютона-Рафсона

Если функция $f(x) \in C^2_{[a,b]}$, то эту дополнительную информацию о ее поведении можно использовать для решения уравнения $f(x) = 0$. Методы, использующие информацию и о второй производной, называются методами второго порядка. Простейший и исторически популярный — метод Ньютона-Рафсона. Его идея очевидна из следующего чертежа:

Таким образом, новое приближение x^1 есть точка пересечения оси абсцисс с касательной к $f(x)$ в точке x^0. Из геометрических соображений

$$f'(x^0) = \frac{0 - f(x^0)}{x^1 - x^0},$$

откуда получаем формулу для нового приближения

$$x^1 = x^0 - \frac{f(x^0)}{f'(x^0)}.$$

Эту операцию можно повторить и мы получаем в итоге последовательность приближений $\left\{x^k\right\}$.

Опуская подробности доказательства, сразу сформулируем условия, при которых такой итеративный процесс приводит к решению исходной задачи.

Теорема 3.7 *(о методе Ньютона-Рафсона) Пусть $f(x) \in C^2_{[a,b]}$ и существует точка $P \in [a,b] : f(P) = 0$. Если $f'(P) \neq 0$, то найдется такое $\delta > 0$, что последовательность $\left\{x^k\right\}$, определенная формулой*

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots\ ,$$

сходится к P при любом начальном приближении $x^0 \in [P - \delta, P + \delta]$.

Замечание.

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \implies g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2}.$$

Значит, из $f(P) = 0$ следует, что $g'(P) = 0$. Поэтому найдется такое $\delta > 0$, что для всех $x \in (P - \delta, P + \delta)$ выполняется условие $|g'(x)| < 1$. Далее применяем теорему о неподвижной точке. Отсюда видно, что начальное приближение надо выбирать из такой δ-окрестности корня, чтобы $\left|\dfrac{f(x)f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2}\right| < 1$. Это главный недостаток метода, т.к. обычно промежуток очень мал и надо иметь очень хорошее начальное приближение.

Определение. Пусть $\left\{x^k\right\}_{k=0}^{\infty} \longrightarrow x^*$. Если существуют константы $A \neq 0$ и $R > 0$ такие, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left|x^* - x^{k+1}\right|}{\left|x^* - x^k\right|^R} = A,$$

то говорят, что порядок сходимости $\left\{x^k\right\}$ к x^* равен R.

Если $R = 1$, то сходимость называют линейной, если $R = 2$, то квадратичной.

Пример. Проверьте, что сходимость метода Ньютона-Рафсона для уравнения $f(x) = x^3 - 3x + 2 = 0$ к корню $x^* = -2$ является квадратичной (принимая $x^0 = -2.4$). После этого проверьте, что сходимость к другому корню этого же уравнения, $x^* = 1$, является линейной ($x^0 = 1.2$). В чем заключается главное отличие этих двух корней?

Теорема 3.8 *(о сходимости). Пусть $\left\{x^k\right\}$ — последовательность приближений метода Ньютона-Рафсона, которая сходится к корню x^* уравнения $f(x) = 0$.*

1. *Если x^* — простой корень, то*

$$\left|x^* - x^{k+1}\right| \approx \frac{|f''(x^*)|}{2\,|f'(x^*)|}\left|x^* - x^k\right|$$

для достаточно больших k.

2. *Если x^* — корень кратности s, то*

$$\left|x^* - x^{k+1}\right| \approx \frac{s-1}{s}\left|x^* - x^k\right|$$

для достаточно больших k.

Задача 3.2.1. На языке программирования $\mathcal{N}$ реализовать метод Ньютона-Рафсона. С его помощью подобрать примеры функций (по 2-е функции), для которых метод сходится а) линейно, б) квадратично, в) расходится.

Задача 3.2.2. Сравните метод Ньютона-Рафсона и метод Галлея:

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}\left[1 - \frac{f(x^k)f''(x^k)}{2(f'(x^k))^2}\right]^{-1}.$$

Какова скорость сходимости метода Галлея?

3.3 Метод простой итерации, многомерный случай

Имеем уравнение $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, которое в координатное форме записывается как

$$f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Предположим, что систему можно записать в эквивалентном виде

$$x = F(x).$$

Далее, выбрав начальное приближение x^0, строим последовательность векторов $\{x^j\}$:

$$x^{j+1} = F(x^j).$$

Аналогично одномерному случаю, можно показать, что при определенных ограничениях на $F(x)$ эти итерации сходятся к неподвижной точке отображения $F(x)$, а значит — к корню исходного векторного уравнения. В многомерном случае достаточным условием сходимости является, например, ограниченность нормы $\left\| \dfrac{\partial F_k(x^j)}{\partial x_i} \right\| < 1$. Заметим, что подбор $F(x)$, удовлетворяющей все условиям, сам по себе — очень сложная задача. Скорость сходимости, как и в линейной случае, остается линейным.

Задача 3.3.1. Доказать, что простые итерации сходятся линейной.

Для улучшения сходимости можно использовать ту же идею, на которой основан метод Зейделя в вести итерации по схеме

$$x_{k+1}^{j+1} = F(x_1^{j+1}, x_2^{j+1}, \ldots, x_k^{j+1}, x_{k+1}^{j}, \ldots, x_n^{j}).$$

Здесь на скорость сходимости влияет и порядок записи уравнений в системе.

3.4 Метод Ньютона, многомерный случай

Метод Ньютона-Рафсона легко переносится на многомерный случай. При этом итерации производятся по формуле:

$$x^{j+1} = x^j - \left(\frac{\partial f(x^j)}{\partial x} \right)^{-1} f\left(x^j\right).$$

Условие сходимости $\left\| \dfrac{\partial F}{\partial x} \right\| < 1$ обычно не проверяется, т.к. вычисление нормы матрицы частных производных требует значительных вычислительных затрат. Разумеется, проблема с выбором хорошего начального приближения тоже не исчезает.

Замечание. Обычно вычисления проводятся по более экономной схеме: полагая $\Delta x^j = x^{j+1} - x^j$, записывают итерационную формулу в виде системы линейных уравнений:

$$\left(\frac{\partial f(x^j)}{\partial x} \right) \Delta x^j = -f(x^j).$$

Решив эту СЛАУ, находят Δx^j, а значит, и x^{j+1}. При это нет необходимости вычислять обратную матрицу частных производных.

Задача 3.4.1. Реализовать на языке программирования $\mathcal{N}$ метод Зейделя для систем нелинейных уравнений. Решить с его помощью системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x + y - 6 = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x^2 + 2y - 4 = 0 \\ 2x + 3y - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 5\cos y = 0 \\ x \sin y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 - z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Проверить аналитически условия сходимости.

Задача 3.4.2. Реализовать на языке $\mathcal{N}$ метод Ньютона для систем нелинейных уравнений. Нарисовав с достаточной детализацией графики кривых, локализуйте (т.е. определите примерно их окрестность) корни системы уравнений

$$\begin{cases} 7x^3 - 10x - y - 1 = 0 \\ 8y^3 - 11y + x - 1 = 0 \end{cases}$$

Используя метод Ньютона, найти все корни с точностью до 9-го знака после запятой.

Задача 3.4.3. Попробуйте применить метод Ньютона к системе

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ xy - 1 = 0 \end{cases}$$

Какие могут возникнуть проблемы?

Задача 3.4.4. Постройте по аналогии с одномерным случаем метод Галлея. Будет ли он эффективней метода Ньютона?