1 Метод Ритца

Выделяют два основных типа методов решения вариационных задач. К первому типу относятся методы, сводящие исходную задачу к решению дифференциальных уравнений. Эти методы очень хорошо развиты и им будет посвящено основное время на лекциях. Альтернативой являются так называемые прямые методы. Эти методы тем или иным способом решают исходную задачу по поиску функции в заданном классе, которая доставляла бы экстремальное значение заданному функционалу. Один из самых популярных методов этого класса — метод Ритца (также называемый методом Рэлея-Ритца).

В основе метода Ритца лежит построение минимизирующей последовательности функций. Пусть, например, необходимо найти минимум функционала $V[y]$ в классе функций M. Чтобы задача имела смысл, потребуем, чтобы существовал конечный инфимум μ значений функционала и в классе допустимых функций существовали функции, на которых функционал принимает конечные значения. Тогда по определению инфимума существует минимизирующая последовательность функций $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} V[y_n] = \mu \ .$$

Если существует предел y^* этой последовательности, она и будет решением исходной задачи, так как будет законен предельный переход

$$V[y^*] = \lim_{n\to\infty} V[y_n] \ .$$

Каким же образом стоится эта минимизирующая последовательность в методе Ритца? Сначала изложим общую идею, а потом рассмотрим ее конкретную реализацию для одного типа вариационных задач. Итак, сначала необходимо выбрать некоторую систему функций, которую мы назовем базисной:

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots \ .$$

К функциям φ_n выдвигаются два требования. Во-первых, сами эти функции принадлежат классу M, а во-вторых — любая конечная линейная комбинация этих функций вида

$$y_n = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \dots + c_n\varphi_n$$

принадлежит тому же классу M. Исходная задача заменяется следующей: минимизировать функцию многих переменных

$$\max_{c_1,\dots,c_n} V[c_1\varphi_1 + \dots + c_2\varphi_n]$$

Решая эту задачу известными (из курса «Методов оптимизации», например) методами, получаем некоторое минимальное значение μ_n. Поскольку при увеличении числа слагаемых мы только расширяем множество функций, на котором ищется минимум, будет справедлива цепочка неравенств $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \mu_n \geq \mu_{n+1} \geq \dots$. Можно доказать, что при некоторых условиях эта последовательность значений сходится к μ.

Теорема. *Если функционал $V[y]$ непрерывен (в смысле метрики пространства, в котором он рассматривается) и система функций φ_n полная, то*

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n = \mu \ ,$$

где μ — минимум функционала $V[y]$.

Замечание. *Быстрота сходимости метода Ритца сильно зависит от выбора системы базисных функций. Однако при удачном выборе для достижения приемлемой точности часто бывает достаточно 3-4 слагаемых в линейной комбинации.*

Применим изложенную идею к достаточно часто встречающейся вариационной задаче. Итак, пусть необходимо минимизировать значение функционала

$$V[y] = \int\limits_0^1 \Big[p(x)\left(y'(x)\right)^2 + q(x)y^2(x) - 2f(x)y(x)\Big]dx$$

на множестве функций $M = \Big\{y(x) \mid y(x) \in C^2_{[0,1]},\ y(0) = y(1) = 0\Big\}$. Зафиксируем теперь некоторую конечную систему линейно-независимых функций $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$, которые удовлетворяют однородным краевым условиям

$$\varphi_i(0) = \varphi_i(1) = 0, \quad i = \overline{1,n}\ .$$

Вместо исходной задачи будем решать значительно более узкую задачу минимизации функционала на множестве линейных комбинаций

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n c_i\varphi_i(x)\ .$$

Подставим эту линейную комбинацию в функционал:

$$V[\varphi(x)] = V\left[\sum_{i=1}^n c_i\varphi_i(x)\right] =$$
$$= \int\limits_0^1 \left\{p(x)\left[\sum_{i=1}^n c_i\varphi_i'(x)\right]^2 + q(x)\left[\sum_{i=1}^n c_i\varphi_i(x)\right]^2 - 2f(x)\sum_{i=1}^n c_i\varphi_i(x)\right\}dx\ .$$

Чтобы найти минимум функционала, воспользуемся необходимым условием экстремума:

$$\frac{\partial V}{\partial c_j} = 0, \quad j = \overline{1,n}$$

Дифференцирование функционала по c_j дает

$$\frac{\partial V}{\partial c_j} = \int\limits_0^1 \left\{2p(x)\sum_{i=1}^n c_i\varphi_i'(x)\varphi_j'(x) + 2q(x)\sum_{i=1}^n c_i\varphi_i(x)\varphi_j(x) - 2f(x)\varphi_j(x)\right\}dx\ .$$

После очевидных преобразований получаем систему линейных алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов линейной комбинации:

$$\sum_{i=1}^n \left[\int\limits_0^1 \big(p(x)\varphi_i'(x)\varphi_j'(x) + q(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\big)\,dx\right]c_i - \int\limits_0^1 f(x)\varphi_j(x)dx = 0, \quad j = \overline{1,n}$$

В матричной форме эта система запишется в виде $Ac = b$, где

$$a_{ij} = \int\limits_0^1 \big(p(x)\varphi_i'(x)\varphi_j'(x) + q(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\big)\,dx,$$

$$b_j = \int\limits_0^1 f(x)\varphi_j(x)dx$$

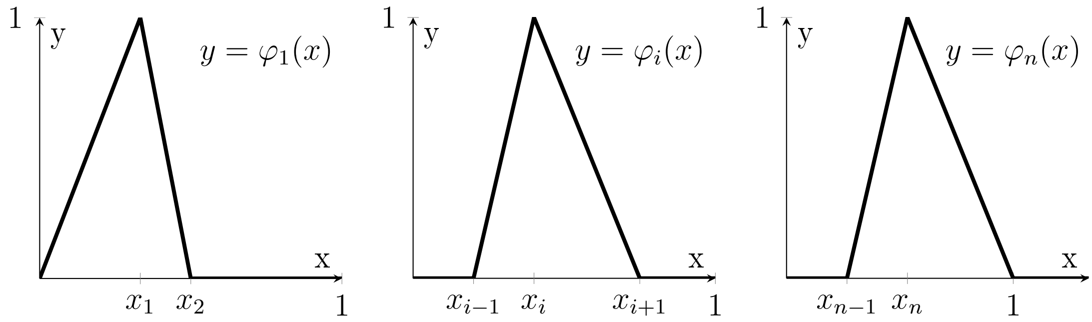
Рассмотрим теперь вопрос выбора базисных функций. Простейшим вариантом является система кусочно-линейных функций. Чтобы ее построить, необходимо вначале задать разбиение отрезка $[0,1]$ на n отрезков:

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = 1 \ .$$

Полагая $h_i = x_{i+1} - x_i$, определим следующие функции:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad 0 \le x \le x_{i-1}, \\ \frac{1}{h_{i-1}}\left(x - x_{i-1}\right), & \text{если} \quad x_{i-1} < x \le x_i, \\ \frac{1}{h_i}\left(x_{i+1} - x\right), & \text{если} \quad x_i < x \le x_{i+1}, \\ 0, & \text{если} \quad x_{i+1} < x < 1 \ . \end{cases}, \quad i = \overline{1,n}$$

Ниже на рисунке приведены схематические графики этих базисных функций.



Производные базисных функций будут кусочно-постоянными функциями и их нетрудно найти:

$$\varphi_i'(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad 0 \le x \le x_{i-1}, \\ \frac{1}{h_{i-1}}, & \text{если} \quad x_{i-1} < x \le x_i, \\ -\frac{1}{h_i}, & \text{если} \quad x_i < x \le x_{i+1}, \\ 0, & \text{если} \quad x_{i+1} < x < 1 \ . \end{cases}, \quad i = \overline{1,n}$$

Поскольку i-ая функция отлична от нуля только на промежутке $(x_{i-1}, x_{i+1}]$, то справедливы равенства

$$\varphi_i(x)\varphi_j(x) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi_i'(x)\varphi_j'(x) = 0, \quad i,j = \overline{1,n}, \quad j \ne i-1, j \ne i, j \ne i+1.$$

Последнее означает, что матрица системы уравнений для c_j при таком выборе базисных функций будет трехдиагональной. А именно, ненулевыми будут элементы:

$$a_{i,i+1} = \int\limits_0^1 \left[p(x)\varphi_i'(x)\varphi_{i+1}'(x) + q(x)\varphi_i(x)\varphi_{i+1}(x)\right] dx =$$

$$= -\left(\frac{1}{h_i}\right)^2 \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} p(x)dx + \underbrace{\left(\frac{1}{h_i}\right)^2 \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \left(x_{i+1} - x\right)\left(x - x_i\right) q(x)dx}_{I_{1,i}} \ , \quad i = \overline{1,n-1} \ .$$

$$a_{ii} = \int\limits_0^1 \left[p(x) \left(\varphi_i'(x) \right)^2 + q(x) \varphi_i^2(x) \right] dx =$$

$$= \left(\frac{1}{h_{i-1}} \right)^2 \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} p(x) dx + \left(\frac{1}{h_i} \right)^2 \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} p(x) dx +$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{1}{h_{i-1}} \right)^2 \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \left(x - x_{i-1} \right)^2 q(x) dx}_{I_{2,i}} + \underbrace{\left(\frac{1}{h_i} \right)^2 \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \left(x_{i+1} - x \right)^2 q(x) dx}_{I_{3,i}} , \quad i = \overline{1, n} ,$$

$$a_{i,i-1} = \int\limits_0^1 \left[p(x) \varphi_i'(x) \varphi_{i-1}'(x) + q(x) \varphi_i(x) \varphi_{i-1}(x) \right] dx =$$

$$= -\underbrace{\left(\frac{1}{h_{i-1}} \right)^2 \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} p(x) dx}_{I_{4,i}} + \left(\frac{1}{h_{i-1}} \right)^2 \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \left(x_i - x \right) \left(x - x_{i-1} \right) q(x) dx , \quad i = \overline{2, n} ,$$

Столбец правых частей будет состоять из элементов вида

$$b_i = \int\limits_0^1 f(x) \varphi_i(x) dx = \underbrace{\frac{1}{h_{i-1}} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \left(x - x_{i-1} \right) f(x) dx}_{I_{5,i}} + \underbrace{\frac{1}{h_i} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \left(x_{i+1} - x \right) f(x) dx}_{I_{6,i}}, \quad i = \overline{1, n} .$$

Используя введенные выше обозначения для некоторых интегралов, эти же выражения можно кратко записать следующим образом:

$$\begin{aligned} a_{ii} &= I_{4,i} + I_{4,i+1} + I_{2,i} + I_{3,i}, \quad i = \overline{2, n}, \\ a_{i,i+1} &= -I_{4,i+1} + I_{1,i}, \quad i = \overline{1, n-1}, \\ a_{i,i-1} &= -I_{4,i} + I_{1,i-1}, \quad i = \overline{2, n}, \\ b_i &= I_{5,i} + I_{6,i}, \quad i = \overline{1, n} . \end{aligned}$$

Итак, чтобы построить трехдиагональную систему линейных уравнений, необходимо вычислить $6n$ интегралов. Для некоторых задач это можно сделать аналитически, но чаще приходится прибегать к численным методам интегрирования (например, можно использовать правило Симпсона, см. Приложение).

Запишем теперь формальный алгоритм метода Ритца с кусочно-линейным базисом.

Кусочно-линейный метод Ритца

ВХОД : Целое число $n \geq 1$; точки $x_0 = 0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = 1$.

ВЫХОД : Коэффициенты $c_1, \ldots, c_n$.

ШАГ 1 **for** $i \leftarrow 0$ **to** n **do**

$h_i \leftarrow x_{i+1} - x_i$

end

ШАГ 2 **for** $i \leftarrow 1$ **to** n **do**

Определяем базисные функции φ_i:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad 0 \leq x \leq x_{i-1}, \\ \frac{1}{h_{i-1}}\left(x - x_{i-1}\right), & \text{если} \quad x_{i-1} < x \leq x_i, \\ \frac{1}{h_i}\left(x_{i+1} - x\right), & \text{если} \quad x_i < x \leq x_{i+1}, \\ 0, & \text{если} \quad x_{i+1} < x < 1\ . \end{cases}$$

end

ШАГ 3 **for** $i \leftarrow 1$ **to** $n-1$ **do**

Вычисляем $I_{1,i}, I_{2,i}, I_{3,i}, I_{4,i}, I_{5,i}, I_{6,i}$.

end

Вычисляем $I_{2,n}, I_{3,n}, I_{4,n}, I_{4,n+1}, I_{5,n}, I_{6,n}$.

ШАГ 4 **for** $i \leftarrow 1$ **to** $n-1$ **do**

$\alpha_i \leftarrow I_{4,i} + I_{4,i+1} + I_{2,i} + I_{3,i}$

$\beta_i \leftarrow I_{1,i} - I_{4,i+1}$

$b_i \leftarrow I_{5,i} + I_{6,i}$

end

ШАГ 5 Вычисляем

$\alpha_n \leftarrow I_{4,n} + I_{4,n+1} + I_{2,n} + I_{3,n}$

$b_n \leftarrow I_{5,n} + I_{6,n}$

ШАГ 6 Начинаем решать трехдиагональную систему уравнений (шаги 6-10)

$a_1 \leftarrow \alpha_1$

$\zeta_1 \leftarrow \dfrac{\beta_1}{\alpha_1}$

$z_1 \leftarrow \dfrac{b_1}{a_1}$

ШАГ 7 **for** $i \leftarrow 2$ **to** $n-1$ **do**

$a_i \leftarrow \alpha_i - \beta_{i-1}\zeta_{i-1}$

$\zeta_i \leftarrow \dfrac{\beta_i}{a_i}$

$z_i \leftarrow \dfrac{b_i - \beta_{i-1} z_{i-1}}{a_i}$

end

ШАГ 8 Вычисляем

$a_n \leftarrow \alpha_n - \beta_{n-1}\zeta_{n-1}$

$z_n \leftarrow \frac{b_n - \beta_{n-1} z_{n-1}}{a_n}$

ШАГ 9 Полагаем $c_n \leftarrow z_n$

ВЫВЕСТИ: c_n

ШАГ 10 **for** $i \leftarrow n-1$ **to** 1 **do**

$c_i \leftarrow z_i - \zeta_i c_{i+1}$

ВЫВЕСТИ: c_i

end

ШАГ 11 Процедура окончена.

Рассмотрим пример использования метода Ритца, в котором интегралы (шаги 3, 4 и 5) находятся в явном виде.

Пример. *Пусть необходимо минимизировать функционал*

$$V[y] = \int\limits_0^1 \Big(\left[y'(x)\right]^2 + \pi^2 y^2(x) - 4\pi^2 \sin \pi x \Big) dx\,,$$

на множестве $C^2_{[0,1]}$ *при заданных граничных условиях* $y(0) = y(1) = 0$.

Решение.
Положим $h_i = h = 0.1$, то есть $x_i = 0.1i$, $i = \overline{0,9}$. Вычислим интегралы:

$$I_{1,i} = 100 \int\limits_{0.1i}^{0.1i+0.1} (0.1i + 0.1 - x)\,(x - 0.1i)\,\pi^2 dx = \frac{\pi^2}{60}\,,$$

$$I_{2,i} = 100 \int\limits_{0.1i-0.1}^{0.1i} (x - 0.1i + 0.1)^2\,\pi^2 dx = \frac{\pi^2}{30}\,,$$

$$I_{3,i} = 100 \int\limits_{0.1i}^{0.1i+0.1} (0.1i + 0.1 - x)^2\,\pi^2 dx = \frac{\pi^2}{30}\,,$$

$$I_{4,i} = 100 \int\limits_{0.1i-0.1}^{0.1i} dx = 10\,,$$

$$\begin{aligned} I_{5,i} &= 10 \int\limits_{0.1i-0.1}^{0.1i} (x - 0.1i + 0.1)\,2\pi^2 \sin \pi x dx = \\ &= -2\pi \cos 0.1\pi i + 20 \left[\sin 0.1\pi i - \sin\left(0.1i - 0.1\right)\pi\right]\,, \\ I_{6,i} &= 10 \int\limits_{0.1i}^{0.1i+0.1} (0.1i + 0.1 - x)\,2\pi^2 \sin \pi x dx = \\ &= 2\pi \cos 0.1\pi i - 20 \left[\sin\left(0.1i + 0.1\right)\pi - \sin 0.1\pi i\right]\,. \end{aligned}$$

Диагональные элементы матрицы системы будут равны

$$\begin{aligned} a_{i,i} &= 20 + \frac{\pi^2}{15} \quad i = \overline{1,9}\,, \\ a_{i,i+1} &= -10 + \frac{\pi^2}{60} \quad i = \overline{1,8}\,, \\ a_{i,i+1} &= -10 + \frac{\pi^2}{60} \quad i = \overline{2,9}\,, \\ b_i &= 40 \sin 0.1\pi i \left[1 - \cos 0.1\pi\right] \quad i = \overline{1,9}\,. \end{aligned}$$

Решая трехдиагональную систему, получаем следующие значения коэффициентов:

$$\begin{aligned} &c_9 = 0.310287, \quad c_8 = 0.590200, \quad c_7 = 0.812341, \\ &c_6 = 0.954964, \quad c_5 = 1.004109, \quad c_4 = 0.954964, \\ &c_3 = 0.812341, \quad c_2 = 0.590200, \quad c_1 = 0.310287. \end{aligned}$$

Итак, мы получили приближенное решение вариационной задачи в виде линейной комбинации

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{9} c_i \varphi_i(x),$$

в то время как точным решением является $y(x) = \sin \pi x$ (**проверьте это!**). Следующая таблица демонстрирует ошибку кусочно-линейной аппроксимации, которая, как нетрудно заметить, имеет порядок $O(h^2)$.

i	x_i	$\varphi(x_i)$	$y(x_i)$	$\lvert\varphi(x_i) - y(x_i)\rvert$
1	0.1	0.310287	0.309017	0.00127
2	0.2	0.590200	0.587785	0.00241
3	0.3	0.812341	0.809017	0.00332
4	0.4	0.954964	0.951057	0.00390
5	0.5	1.004108	1.000000	0.00411
6	0.6	0.954964	0.951057	0.00390
7	0.7	0.812341	0.809017	0.00332
8	0.8	0.590200	0.587785	0.00241
9	0.9	0.310287	0.309017	0.00127

■