Практическое занятие №2.
Уравнение Эйлера–Лагранжа

Варианты заданий

Вариант	1a	1b	2d	2e
1	$y'' + y = 0$	$y'' - 3x - 1 = 0$	$y(x) = \dfrac{4}{x^2} + 1$	$y(x) = 2x^2 - 1$
2	$y'' \sin y' = 0$	$y''y + y'^2 = 0$	$y(x) = -\dfrac{x^3 + 5x}{6}$	$y(x) = \sqrt{x}$
3	$y'' \sin y' = 0$	$y'' - 3x - 1 = 0$	$y(x) = \cos x$	Задача не имеет смысла
4	$y''y + y'^2 = 0$	$y'' + y = 0$	Нет экстр.	$y(x) = \cos x + C \cdot \sin x$
5	$y'' + y = 0$	$y'' - 3x - 1 = 0$	Нет экстр.	$y(x) = \dfrac{4}{x^2} + 1$
6	$y'' \sin y' = 0$	$y'' - 3x - 1 = 0$	$y(x) = \sqrt{x}$	$y(x) = \cos x + C \cdot \sin x$
7	$y'' \sin y' = 0$	$y''y + y'^2 = 0$	$y(x) = 2x^2 - 1$	$y(x) = -\dfrac{x^3 + 5x}{6}$
8	$y''y + y'^2 = 0$	$y'' + y = 0$	$y(x) = \cos x$	$y(x) = \dfrac{4}{x^2} + 1$
9	$y'' \sin y' = 0$	$y''y + y'^2 = 0$	Нет экстр.	$y(x) = \cos x + C \cdot \sin x$
10	$y'' + y = 0$	$y'' - 3x - 1 = 0$	Нет экстр.	$y(x) = \dfrac{4}{x^2} + 1$

Задача 2a: интеграл не зависит от путей интегрирования, вариационная задача не имеет смысла.

Задача 2b: решение уравнения Эйлера–Лагранжа имеет вид $y(x) \equiv C = const$, и не может удовлетворить граничным условиям.

Задача 2c: решение существует при одном значении параметра a.

Вариант 1.

Во всех заданиях ниже предполагается, что поставлена простейшая вариационная задача

$$V[y] = \int\limits_a^b F\,(x, y, y')dx.$$

Определение. Уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \qquad \left(\text{в краткой форме } F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0\right)$$

называется уравнением Эйлера–Лагранжа.

1. (1б.) Для заданных функционалов записать уравнение Эйлера–Лагранжа:

1a. $F\,(x, y, y') = y^2 - y'^2$

1b. $F\,(x, y, y') = 2xy' - y'^2 + 3y'x^2$

Теорема. Если непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a, b]$ функция $y_0(x)$, проходящая через две заданные точки, доставляет экстремум функционалу $V\,[y(x)]$, то она удовлетворяет также уравнению Эйлера–Лагранжа. Интегральные кривые уравнения Эйлера–Лагранжа называются экстремалями функционала.

2. (2б.) Найти экстремали функционалов:

2a. $V\,[y(x)] = \int\limits_0^1 y'(x)dx, \quad y(0) = 0, y(1) = 1;$

2b. $V\,[y(x)] = \int\limits_0^1 y(x)y'(x)dx, \quad y(0) = 0, y(1) = 1;$

2c. $V\,[y(x)] = \int\limits_0^1 [y(x) + xy'(x)]dx, \quad y(0) = 0, y(1) = a$ (исследовать множество решений в зависимости от параметра a);

2d. $V\,[y(x)] = \int\limits_1^2 x^3y'^2(x)dx, \quad y(1) = 5, y(2) = 2;$

2e. $V\,[y(x)] = \int\limits_1^2 \frac{y'^3(x)}{x^2}dx, \quad y(1) = 1, y(2) = 7.$

3.* (2б.) Найти экстремали функционала:

$$V\,[y] = \int\limits_a^b x^n y'^2 dx \to \text{extr}, \quad y(a) = y_a, y(b) = y_b.$$

Доказать, что при $n \geqslant 1$ никакие две точки, находящиеся по разные стороны оси Oy, не могут быть соединены экстремалью этого функционала.

Вариант 2.

Во всех заданиях ниже предполагается, что поставлена простейшая вариационная задача

$$V[y] = \int\limits_a^b F\,(x, y, y')dx.$$

Определение. Уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \qquad \left(\text{в краткой форме } F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0\right)$$

называется уравнением Эйлера–Лагранжа.

1. (1б.) Для заданных функционалов записать уравнение Эйлера–Лагранжа:

1a. $F\,(x, y, y') = \sin y'$

1b. $F\,(x, y, y') = y^3 y'^3$

Теорема. Если непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a, b]$ функция $y_0(x)$, проходящая через две заданные точки, доставляет экстремум функционалу $V\,[y(x)]$, то она удовлетворяет также уравнению Эйлера–Лагранжа. Интегральные кривые уравнения Эйлера–Лагранжа называются экстремалями функционала.

2. (2б.) Найти экстремали функционалов:

2a. $V\,[y(x)] = \int\limits_0^1 y'(x)dx, \quad y(0) = 0, y(1) = 1;$

2b. $V\,[y(x)] = \int\limits_0^1 y(x)y'(x)dx, \quad y(0) = 0, y(1) = 1;$

2c. $V\,[y(x)] = \int\limits_0^1 [y(x) + xy'(x)]dx, \quad y(0) = 0, y(1) = a$ (исследовать множество решений в зависимости от параметра a);

2d. $V\,[y(x)] = \int\limits_0^1 \left[2xy(x) - y'^2(x) + 3y^2(x)y'(x)\right]dx, \quad y(0) = 0, y(1) = -1;$

2e. $V\,[y(x)] = \int\limits_0^1 \left[2y^3(x) + 3x^2y'(x)\right]dx, \quad y(0) = 0, y(1) = 2.$

3.* (2б.) Найти экстремали функционала:

$$V\,[y] = \int\limits_a^b x^n y'^2 dx \to \text{extr}, \quad y(a) = y_a, y(b) = y_b.$$

Доказать, что при $n \geqslant 1$ никакие две точки, находящиеся по разные стороны оси Oy, не могут быть соединены экстремалью этого функционала.

Вариант 3.

Во всех заданиях ниже предполагается, что поставлена простейшая вариационная задача

$$V[y] = \int\limits_a^b F\,(x, y, y')dx.$$

Определение. Уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \qquad \left(\text{в краткой форме } F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0\right)$$

называется уравнением Эйлера–Лагранжа.

1. (1б.) Для заданных функционалов записать уравнение Эйлера–Лагранжа:

1a. $F\,(x, y, y') = \sin y'$

1b. $F\,(x, y, y') = 2xy' - y'^2 + 3y'x^2$

Теорема. Если непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a, b]$ функция $y_0(x)$, проходящая через две заданные точки, доставляет экстремум функционалу $V\,[y(x)]$, то она удовлетворяет также уравнению Эйлера–Лагранжа. Интегральные кривые уравнения Эйлера–Лагранжа называются экстремалями функционала.

2. (2б.) Найти экстремали функционалов:

2a. $V\,[y(x)] = \int\limits_0^1 y'(x)dx, \quad y(0) = 0, y(1) = 1;$

2b. $V\,[y(x)] = \int\limits_0^1 y(x)y'(x)dx, \quad y(0) = 0, y(1) = 1;$

2c. $V\,[y(x)] = \int\limits_0^1 [y(x) + xy'(x)]dx, \quad y(0) = 0, y(1) = a$ (исследовать множество решений в зависимости от параметра a);

2d. $V\,[y(x)] = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(y'^2(x) - y^2(x)\right)dx, \quad y(0) = 1, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2};$

2e. $V\,[y(x)] = \int\limits_a^b \left(2xy(x) + (x^2 + e^y)y'(x)\right)dx, \quad y(a) = y_a, y(b) = y_b.$

3.* (2б.) Найти экстремали функционала:

$$V\,[y] = \int\limits_a^b x^n y'^2 dx \to \mathrm{extr}, \quad y(a) = y_a, y(b) = y_b.$$

Доказать, что при $n \geqslant 1$ никакие две точки, находящиеся по разные стороны оси Oy, не могут быть соединены экстремалью этого функционала.

Вариант 4.

Во всех заданиях ниже предполагается, что поставлена простейшая вариационная задача

$$V[y] = \int\limits_a^b F(x, y, y')dx.$$

Определение. Уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \qquad \left(\text{в краткой форме } F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0\right)$$

называется уравнением Эйлера–Лагранжа.

1. (1б.) Для заданных функционалов записать уравнение Эйлера–Лагранжа:

1a. $F(x, y, y') = y^3 y'^3$

1b. $F(x, y, y') = y^2 - y'^2$

Теорема. Если непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a, b]$ функция $y_0(x)$, проходящая через две заданные точки, доставляет экстремум функционалу $V[y(x)]$, то она удовлетворяет также уравнению Эйлера–Лагранжа. Интегральные кривые уравнения Эйлера–Лагранжа называются экстремалями функционала.

2. (2б.) Найти экстремали функционалов:

2a. $V[y(x)] = \int\limits_0^1 y'(x)dx, \quad y(0) = 0, y(1) = 1;$

2b. $V[y(x)] = \int\limits_0^1 y(x)y'(x)dx, \quad y(0) = 0, y(1) = 1;$

2c. $V[y(x)] = \int\limits_0^1 [y(x) + xy'(x)]dx, \quad y(0) = 0, y(1) = a$ (исследовать множество решений в зависимости от параметра a);

2d. $V[y(x)] = \int\limits_0^2 \left(2e^{y(x)} - y^2(x)\right)dx, \quad y(0) = 1, y(1) = e;$

2e. $V[y(x)] = \int\limits_0^\pi \left(y'^2(x) - y^2(x)\right)dx, \quad y(0) = 1, y(\pi) = -1.$

3.* (2б.) Найти экстремали функционала:

$$V[y] = \int\limits_a^b x^n y'^2 dx \to \text{extr}, \quad y(a) = y_a, y(b) = y_b.$$

Доказать, что при $n \geqslant 1$ никакие две точки, находящиеся по разные стороны оси Oy, не могут быть соединены экстремалью этого функционала.

Вариант 5.

Во всех заданиях ниже предполагается, что поставлена простейшая вариационная задача

$$V[y] = \int\limits_a^b F(x, y, y')dx.$$

Определение. Уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \qquad \left(\text{в краткой форме } F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0\right)$$

называется уравнением Эйлера–Лагранжа.

1. (1б.) Для заданных функционалов записать уравнение Эйлера–Лагранжа:

1a. $F(x, y, y') = y^2 - y'^2$

1b. $F(x, y, y') = 2xy' - y'^2 + 3y'x^2$

Теорема. Если непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a, b]$ функция $y_0(x)$, проходящая через две заданные точки, доставляет экстремум функционалу $V[y(x)]$, то она удовлетворяет также уравнению Эйлера–Лагранжа. Интегральные кривые уравнения Эйлера–Лагранжа называются экстремалями функционала.

2. (2б.) Найти экстремали функционалов:

2a. $V[y(x)] = \int\limits_0^1 y'(x)dx, \quad y(0) = 0, y(1) = 1;$

2b. $V[y(x)] = \int\limits_0^1 y(x)y'(x)dx, \quad y(0) = 0, y(1) = 1;$

2c. $V[y(x)] = \int\limits_0^1 [y(x) + xy'(x)]dx, \quad y(0) = 0, y(1) = a$ (исследовать множество решений в зависимости от параметра a);

2d. $V[y(x)] = \int\limits_a^b \left(y(x) + \frac{y^2(x)}{3}\right)dx, \quad y(a) = y_a, y(b) = y_b;$

2e. $V[y(x)] = \int\limits_1^2 y'^2(x)x^3dx, \quad y(1) = 5, y(2) = 2.$

3.* (2б.) Найти экстремали функционала:

$$V[y] = \int\limits_a^b x^n y'^2 dx \to \text{extr}, \quad y(a) = y_a, y(b) = y_b.$$

Доказать, что при $n \geqslant 1$ никакие две точки, находящиеся по разные стороны оси Oy, не могут быть соединены экстремалью этого функционала.

Вариант 6.

Во всех заданиях ниже предполагается, что поставлена простейшая вариационная задача

$$V[y] = \int_a^b F(x, y, y')dx.$$

Определение. Уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \qquad \left(\text{в краткой форме } F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0\right)$$

называется уравнением Эйлера–Лагранжа.

1. (1б.) Для заданных функционалов записать уравнение Эйлера–Лагранжа:

1a. $F(x, y, y') = \sin y'$

1b. $F(x, y, y') = 2xy' - y'^2 + 3y'x^2$

Теорема. Если непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a, b]$ функция $y_0(x)$, проходящая через две заданные точки, доставляет экстремум функционалу $V[y(x)]$, то она удовлетворяет также уравнению Эйлера–Лагранжа. Интегральные кривые уравнения Эйлера–Лагранжа называются экстремалями функционала.

2. (2б.) Найти экстремали функционалов:

2a. $V[y(x)] = \int_0^1 y'(x)dx, \quad y(0) = 0, y(1) = 1;$

2b. $V[y(x)] = \int_0^1 y(x)y'(x)dx, \quad y(0) = 0, y(1) = 1;$

2c. $V[y(x)] = \int_0^1 \left[e^{y(x)} + xy'(x)\right]dx, \quad y(0) = 0, y(1) = a$ (исследовать множество решений в зависимости от параметра a);

2d. $V[y(x)] = \int_0^1 \left(2y^3(x) + 3x^2y'(x)\right)dx, \quad y(0) = 0, y(1) = 1;$

2e. $V[y(x)] = \int_0^\pi \left(y'^2(x) - y^2(x)\right)dx, \quad y(0) = 1, y(\pi) = -1.$

3.* (2б.) Найти экстремали функционала:

$$V[y] = \int_a^b x^n y'^2 dx \to \text{extr}, \quad y(a) = y_a, y(b) = y_b.$$

Доказать, что при $n \geqslant 1$ никакие две точки, находящиеся по разные стороны оси Oy, не могут быть соединены экстремалью этого функционала.

Вариант 7.

Во всех заданиях ниже предполагается, что поставлена простейшая вариационная задача

$$V[y] = \int\limits_a^b F\,(x, y, y')dx.$$

Определение. Уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \qquad \left(\text{в краткой форме } F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0\right)$$

называется уравнением Эйлера–Лагранжа.

1. (1б.) Для заданных функционалов записать уравнение Эйлера–Лагранжа:

1a. $F\,(x, y, y') = \sin y'$

1b. $F\,(x, y, y') = y^3 y'^3$

Теорема. Если непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a, b]$ функция $y_0(x)$, проходящая через две заданные точки, доставляет экстремум функционалу $V\,[y(x)]$, то она удовлетворяет также уравнению Эйлера–Лагранжа. Интегральные кривые уравнения Эйлера–Лагранжа называются экстремалями функционала.

2. (2б.) Найти экстремали функционалов:

2a. $V\,[y(x)] = \int\limits_0^1 y'(x)dx, \quad y(0) = 0, y(1) = 1;$

2b. $V\,[y(x)] = \int\limits_0^1 y(x)y'(x)dx, \quad y(0) = 0, y(1) = 1;$

2c. $V\,[y(x)] = \int\limits_0^1 \left[e^{y(x)} + xy'(x)\right]dx, \quad y(0) = 0, y(1) = a$ (исследовать множество решений в зависимости от параметра a);

2d. $V\,[y(x)] = \int\limits_1^2 \frac{y'^3(x)}{x^2}dx, \quad y(1) = 1, y(2) = 7;$

2e. $V\,[y(x)] = \int\limits_0^1 \left(2xy(x) - y'^2(x) + 3y'(x)y^2(x)\right)dx, \quad y(0) = 0, y(1) = -1.$

3.* (2б.) Найти экстремали функционала:

$$V\,[y] = \int\limits_a^b x^n y'^2 dx \to \mathrm{extr}, \quad y(a) = y_a, y(b) = y_b.$$

Доказать, что при $n \geqslant 1$ никакие две точки, находящиеся по разные стороны оси Oy, не могут быть соединены экстремалью этого функционала.

Вариант 8.

Во всех заданиях ниже предполагается, что поставлена простейшая вариационная задача

$$V[y] = \int_a^b F\,(x, y, y')dx.$$

Определение. Уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \qquad \left(\text{в краткой форме } F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0\right)$$

называется уравнением Эйлера–Лагранжа.

1. (1б.) Для заданных функционалов записать уравнение Эйлера–Лагранжа:

1a. $F\,(x, y, y') = y^3 y'^3$

1b. $F\,(x, y, y') = y^2 - y'^2$

Теорема. Если непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a, b]$ функция $y_0(x)$, проходящая через две заданные точки, доставляет экстремум функционалу $V\,[y(x)]$, то она удовлетворяет также уравнению Эйлера–Лагранжа. Интегральные кривые уравнения Эйлера–Лагранжа называются экстремалями функционала.

2. (2б.) Найти экстремали функционалов:

2a. $V\,[y(x)] = \displaystyle\int_0^1 y'(x)dx, \quad y(0) = 0, y(1) = 1;$

2b. $V\,[y(x)] = \displaystyle\int_0^1 y(x)y'(x)dx, \quad y(0) = 0, y(1) = 1;$

2c. $V\,[y(x)] = \displaystyle\int_0^1 \left[e^{y(x)} + xy'(x)\right]dx, \quad y(0) = 0, y(1) = a$ (исследовать множество решений в зависимости от параметра a);

2d. $V\,[y(x)] = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(y'^2(x) - y^2(x)\right)dx, \quad y(0) = 1, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2};$

2e. $V\,[y(x)] = \displaystyle\int_1^2 x^3 y'^2(x)dx, \quad y(1) = 5, y(2) = 2.$

3.* (2б.) Найти экстремали функционала:

$$V\,[y] = \int_a^b x^n y'^2 dx \to \text{extr}, \quad y(a) = y_a, y(b) = y_b.$$

Доказать, что при $n \geqslant 1$ никакие две точки, находящиеся по разные стороны оси Oy, не могут быть соединены экстремалью этого функционала.

Вариант 9.

Во всех заданиях ниже предполагается, что поставлена простейшая вариационная задача

$$V[y] = \int\limits_a^b F(x, y, y')dx.$$

Определение. Уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \qquad \left(\text{в краткой форме } F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0\right)$$

называется уравнением Эйлера–Лагранжа.

1. (1б.) Для заданных функционалов записать уравнение Эйлера–Лагранжа:

1a. $F(x, y, y') = \sin y'$

1b. $F(x, y, y') = y^3 y'^3$

Теорема. Если непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a, b]$ функция $y_0(x)$, проходящая через две заданные точки, доставляет экстремум функционалу $V[y(x)]$, то она удовлетворяет также уравнению Эйлера–Лагранжа. Интегральные кривые уравнения Эйлера–Лагранжа называются экстремалями функционала.

2. (2б.) Найти экстремали функционалов:

2a. $V[y(x)] = \int\limits_0^1 y'(x)dx, \quad y(0) = 0, y(1) = 1;$

2b. $V[y(x)] = \int\limits_0^1 y(x)y'(x)dx, \quad y(0) = 0, y(1) = 1;$

2c. $V[y(x)] = \int\limits_0^1 \left[e^{y(x)} + xy'(x)\right]dx, \quad y(0) = 0, y(1) = a$ (исследовать множество решений в зависимости от параметра a);

2d. $V[y(x)] = \int\limits_a^b \left(y(x) + \frac{y^2(x)}{3}\right)dx, \quad y(a) = y_a, y(b) = y_b;$

2e. $V[y(x)] = \int\limits_0^\pi \left(y'^2(x) - y^2(x)\right)dx, \quad y(0) = 1, y(\pi) = -1;$

3.* (2б.) Найти экстремали функционала:

$$V[y] = \int\limits_a^b x^n y'^2 dx \to \text{extr}, \quad y(a) = y_a, y(b) = y_b.$$

Доказать, что при $n \geqslant 1$ никакие две точки, находящиеся по разные стороны оси Oy, не могут быть соединены экстремалью этого функционала.

Вариант 10.

Во всех заданиях ниже предполагается, что поставлена простейшая вариационная задача

$$V[y] = \int\limits_a^b F(x, y, y')dx.$$

Определение. Уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \qquad \left(\text{в краткой форме } F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0\right)$$

называется уравнением Эйлера–Лагранжа.

1. (1б.) Для заданных функционалов записать уравнение Эйлера–Лагранжа:

1a. $F(x, y, y') = y^2 - y'^2$

1b. $F(x, y, y') = 2xy' - y'^2 + 3y'x^2$

Теорема. Если непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a, b]$ функция $y_0(x)$, проходящая через две заданные точки, доставляет экстремум функционалу $V[y(x)]$, то она удовлетворяет также уравнению Эйлера–Лагранжа. Интегральные кривые уравнения Эйлера–Лагранжа называются экстремалями функционала.

2. (2б.) Найти экстремали функционалов:

2a. $V[y(x)] = \int\limits_0^1 y'(x)dx, \quad y(0) = 0, y(1) = 1;$

2b. $V[y(x)] = \int\limits_0^1 y(x)y'(x)dx, \quad y(0) = 0, y(1) = 1;$

2c. $V[y(x)] = \int\limits_0^1 \left[e^{y(x)} + xy'(x)\right]dx, \quad y(0) = 0, y(1) = a$ (исследовать множество решений в зависимости от параметра a);

2d. $V[y(x)] = \int\limits_0^1 \left(2e^{y(x)} - y^2(x)\right)dx, \quad y(0) = 1, y(1) = e;$

2e. $V[y(x)] = \int\limits_1^2 x^3y'^2(x)dx, \quad y(1) = 5, y(2) = 2.$

3.* (2б.) Найти экстремали функционала:

$$V[y] = \int\limits_a^b x^n y'^2 dx \to \text{extr}, \quad y(a) = y_a, y(b) = y_b.$$

Доказать, что при $n \geqslant 1$ никакие две точки, находящиеся по разные стороны оси Oy, не могут быть соединены экстремалью этого функционала.