3 Метод стрельбы

В рассмотренном ранее методе конечных разностей краевая задача для уравнения Эйлера заменялась ее конечно-разностной аппроксимацией. При этом решение последней сводилось крешению системы линейных или нелинейных алгебраических уравнений.

Метод стрельбы (иногда также называемый баллистическим методом или методом начальных параметров) точно так же не решает краевую задачу в исходной постановке, а сводит ее к последовательности более простых задач, а именно — задач Коши с особым образом сформулированными начальными условиями.

Как и ранее, мы рассмотрим вначале случай линейного уравнения Эйлера, поскольку для него метод стрельбы принимает особо простой вид. Позже перейдем к более общему случаю. Одна сперва сформулируем условие существования и единственности решения краевой задачи.

Теорема. *Рассмотрим краевую задачу*

$$y'' = f(x, y, y'), \qquad x \in [a, b], \quad y(a) = \alpha, y(b) = \beta.$$

Если выполнены следующие условия:

1) *функции* $f, f_y, f_{y'}$ *непрерывны в области* $D = \{(x, y, y')| x \in [a, b], y \in \mathbb{R}, y' \in \mathbb{R}\}$;

2) $f_{y'} \geq \delta > 0$ *на* D;

3) $\exists M : M = \max\limits_D |f_{y'}(x, y, y')|$;

то краевая задача имеет единственное решение.

Заметим, что в данных указаниях мы не рассматриваем в деталях численные методы решения задачи Коши. Предполагается, что этот материал уже известен из курса численных методов, однако для справки в Приложении приводится схема метода Рунге-Кутта 4-го порядка точности.

3.1 Метод конечных разностей в случае линейного уравнения Эйлера

Пусть применение необходимого условия экстремума приводит к линейной краевой задаче, которую мы запишем в виде

$$\begin{cases} y''(x) = p(x)y'(x) + q(x)y(x) + r(x), \quad x \in [a, b], \\ y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta. \end{cases}$$

Если предположить, что $p(x), q(x), r(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и, кроме того, $q(x) > 0$, то эта задача имеет единственное решение в силу сформулированной выше теоремы.

Рассмотрим теперь две задачи Коши (т.е. задачи с начальными условиями):

$$\begin{cases} y''(x) = p(x)y'(x) + q(x)y(x) + r(x), \quad x \in [a, b], \\ y(a) = \alpha, \quad y'(a) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

и

$$\begin{cases} y''(x) = p(x)y'(x) + q(x)y(x), \quad x \in [a, b], \\ y(a) = 0, \quad y'(a) = 1. \end{cases} \tag{2}$$

В силу наложенных ограничений на правую часть уравнений, обе задачи имеют единственное решение. Обозначим через $y_1(x)$ решение задачи (1), а через $y_2(x)$ — задачи (2). Предполагая, что $y_2(b) \neq 0$, определим функцию

$$y(x) = y_1(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2(x).$$

Заметим, что $y_2(b) = 0$ противоречит условиям, сформулированным выше.

Легко показать, что $y(x)$ является решением исходной краевой задачи. Действительно, найдем производные функции $y(x)$:

$$y'(x) = y_1'(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2'(x),$$
$$y''(x) = y_1''(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2''(x)$$

и подставим эти выражения в уравнение Эйлера:

$$\begin{aligned} y''(x) &= [p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x) + r(x)] + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} [p(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x)] = \\ &= p(x)\left[y_1'(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2'(x)\right] + q(x)\left[y_1(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2(x)\right] + r(x) = \\ &= p(x)y'(x) + q(x)y(x) + r(x). \end{aligned}$$

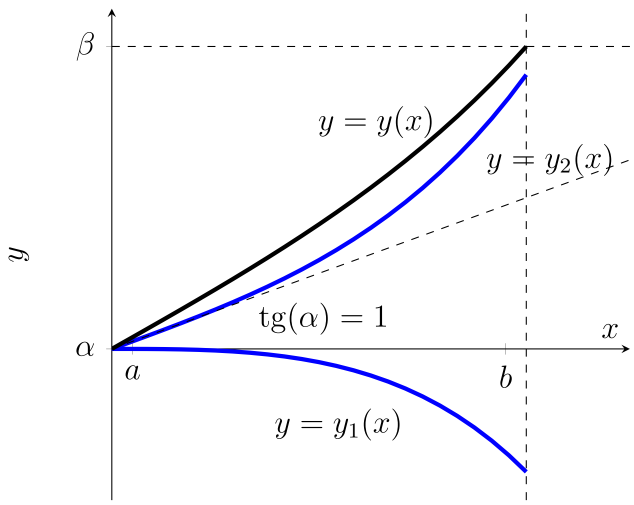
Кроме того,

$$y(a) = y_1(a) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2(a) = \alpha + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} \cdot 0 = \alpha,$$

и

$$y(b) = y_1(b) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2(b) = \beta.$$

Таким образом, решение краевой задачи (а значит, и вариационной задачи) свелось к решению двух задач Коши. Дадим небольшую графическую иллюстрацию метода:



Заметим, что точность метода в линейном случае определяется точностью решение задач Коши.

Ниже приведен пример, который можно использовать при отладке.

Пример. *Решим краевую задачу для уравнения Эйлера*

$$\begin{cases} y'' = 4(y - x), \quad x \in [0, 1] \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 2 \end{cases}$$

Решение.

Заметим, что в этом уравнении $p(x) = 0$, $q(x) = 4 > 0$, $r(x) = -4x$. Таким образом, условия теоремы выполняются и задача имеет решение и притом единственное.

Рассмотрим, согласно изложенной схеме метода, две задачи Коши:

$$\begin{cases} y_1'' = 4y_1' - 4x, \quad x \in [0, 1]\,, \\ y_1(0) = 0, \quad y_1'(0) = 0, \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} y_2''(x) = 4y_2, \quad x \in [0, 1]\,, \\ y_2(0) = 0, \quad y_2'(0) = 1. \end{cases}$$

Нетрудно найти решение этих задач:

$$y_1(x) = -\frac{1}{4}\left(e^{2x} - e^{-2x}\right) + x, \qquad y_2(x) = \frac{1}{4}\left(e^{2x} - e^{-2x}\right).$$

Осталось составить решение краевой задачи:

$$y(x) = y_1(x) + \frac{2 - y_1(1)}{y_2(1)} y_2(x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^2 - e^{-2}} + x.$$

3.2 Метод стрельбы для уравнения Эйлера общего вида

Попробуем применить изложенную идею к краевой задаче более общего вида:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), \quad x \in [a, b]\,, \\ y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta. \end{cases}$$

Задавшись некоторым произвольным значением t_0, рассмотрим задачу Коши вида

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), \quad x \in [a, b]\,, \\ y(a) = \alpha, \quad y'(a) = t_0. \end{cases}$$

Пусть $y(x; t_0)$ — ее решение. Очевидно, что, вообще говоря, $y(b; t_0) \neq \beta$. На рисунке ниже приведена геометрическая интерпретация того, что произошло: выбрав угол наклона «пушки» равным t_0, мы попали не в цель — точку (b, β), — а в точку $(b, y(b; t_0))$. Фактически, метод стрельбы сводит краевую задачу (а значит, и вариаиционную задачу тоже) к решению трансцендетного уравнения

$$y(x; t) = \beta$$

относительно параметра t, имеющего смысл угла наклона касательной к графику решения в начальной точке.

Вообще говоря, для решения этого уравнения пригоден любой удобный метод. Мы рассмотрим подробно применение метода Ньютона, с которым уже познакомились в лабораторной работе №2.

Итак, напомним, в методе Ньютона строится последовательность

$$x^{k+1} = x^k - J^{-1}\left(x^k\right) f\left(x^k\right),$$

которая при определенных условиях сходится к решению уравнения (системы уравнений) $f(x) = 0$. Здесь $J(x) = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ — якобиан системы уравнений. В нашем случае формула итераций принимает, очевидно, следующий вид