

# Лабораторная работа №1.

## Метод Ритца

**Задание.** Используя метод Ритца, решить численно предложенные простейшие вариационные задачи:

задачи а) и б) — используя конечно-линейный базис с  $n = 10, n = 15$ ;

задачи а) и б) — используя базис из В-сплайнов с  $n = 5, n = 10$ ;

задачу с) — используя любой подходящий базис.

В случае необходимости, преобразовать исходную задачу к стандартному виду.

**Оценка.** Баллы за выполнение лабораторной работы распределяются следующим образом:

№	Подзадача	Балл
1	Реализация метода Ритца с конечно-линейным базисом ( $n = 10, n = 15$ ) для задачи а)	1.5
2	Реализация метода Ритца с базисом из В-сплайнов ( $n = 5, n = 10$ ) для задачи а)	2
3	Реализация метода Ритца с конечно-линейным базисом ( $n = 10, n = 15$ ) для задачи б)	1.5
4	Реализация метода Ритца с базисом из В-сплайнов ( $n = 5, n = 10$ ) для задачи б)	2
5	Реализация метода Ритца с произвольным базисом ( $n = 3, n = 5$ ) для задачи с). Необходимая точность $\varepsilon = 0.01$ , точное решение найти при помощи уравнения Эйлера.	3
6	Повышение точности решения задачи с) из пункта 5. до $\varepsilon = 0.001$ .	1
7	Блок-схема программного кода (в любой нотации), комментирование кода	1
<b>ИТОГО</b>		12

**Сроки выполнения.** Четыре недели со дня выдачи задания.

## Варианты заданий

Вариант 1.

$$\text{а) } V[y] = \int_0^1 [(y'(x))^2 + y^2(x) - (4 + 2x(1-x))y(x)] dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0;$$

$$\text{б) } V[y] = \int_0^2 [2(y'(x))^2 + \pi^2 y^2(x) - 6\pi^2 \sin(\pi x)y(x)] dx, \quad y(0) = 0, \quad y(2) = -2;$$

$$\text{с) } V[y] = \int_0^1 y\sqrt{1+y'^2} dx; \quad y(0) = 2; \quad y(1) = 3;$$

Вариант 2.

$$\text{а) } V[y] = \int_0^1 [(y'(x))^2 + y^2(x) - 2(\pi^2 + 1)\sin(\pi x)y(x)] dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0;$$

$$\text{b) } V[y] = \int_0^2 [x(y'(x))^2 + \pi^2 y^2(x) - (8x - 2 + 2\pi^2 x(1-x)) y(x)] dx, \quad y(0) = 0, \quad y(2) = -2;$$

$$\text{c) } V[y] = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx; \quad y(0) = 2; \quad y(1) = 1;$$

Вариант 3.

$$\text{a) } V[y] = \int_0^1 [2(y'(x))^2 + \pi^2 y^2(x) - 6\pi^2 \sin(\pi x) y(x)] dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0;$$

$$\text{b) } V[y] = \int_0^{\frac{3}{2}} [x(y'(x))^2 + \pi^2 y^2(x) + (\pi \cos(\pi x) - \pi^2(x+1) \sin(\pi x)) y(x)] dx, \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{3}{2}\right) = -1;$$

$$\text{c) } V[y] = \int_0^1 y y'^2 dx; \quad y(0) = 2; \quad y(1) = 1;$$

Вариант 4.

$$\text{a) } V[y] = \int_0^1 [(y'(x))^2 + y^2(x) + 2(x^3 - x^2 - 6x + 2) y(x)] dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0;$$

$$\text{b) } V[y] = \int_0^2 [(y'(x))^2 + 2y^2(x) - (4 + 4x(1-x)) y(x)] dx, \quad y(0) = 0, \quad y(2) = -2;$$

$$\text{c) } V[y] = \int_0^1 \sqrt{y(1+y'^2)} dx; \quad y(0) = 1; \quad y(1) = 3;$$

Вариант 5.

$$\text{a) } V[y] = \int_0^1 [(y'(x))^2 + 2y^2(x) - (4 + 4x(1-x)) y(x)] dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0;$$

$$\text{b) } V[y] = \int_0^2 [(y'(x))^2 + y^2(x) - (4 + 2x(1-x)) y(x)] dx, \quad y(0) = 0, \quad y(2) = -2;$$

$$\text{c) } V[y] = \int_1^3 y \sqrt{y'} dx; \quad y(1) = 2; \quad y(3) = 8;$$

Вариант 6.

$$\text{a) } V[y] = \int_0^1 [(y'(x))^2 + 2y^2(x) - 2(\pi^2 + 2) \sin(\pi x) y(x)] dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0;$$

$$\text{b) } V[y] = \int_0^2 [(y'(x))^2 + 2y^2(x) + (2x^3 - 2x^2 - 6x + 2) y(x)] dx, \quad y(0) = 0, \quad y(2) = -4;$$

$$\text{c) } V[y] = \int_0^2 y \sqrt{1+y'^2} dx; \quad y(0) = -1; \quad y(2) = -3;$$

Вариант 7.

$$\text{a) } V[y] = \int_0^1 [(y'(x))^2 + 2y^2(x) + (2x^3 - 2x^2 - 6x + 2)y(x)] dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0;$$

$$\text{b) } V[y] = \int_0^{\frac{3}{2}} [(y'(x))^2 + y^2(x) - 2(\pi^2 + 1) \sin(\pi x)y(x)] dx, \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{3}{2}\right) = -1;$$

$$\text{c) } V[y] = \int_0^2 yy'^2 dx; \quad y(0) = 1; \quad y(2) = 3;$$

Вариант 8.

$$\text{a) } V[y] = \int_0^1 [x(y'(x))^2 + \pi^2 y^2(x) - (8x - 2 + 2\pi^2 x(1-x))y(x)] dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0;$$

$$\text{b) } V[y] = \int_0^2 [e^x (y'(x))^2 + x^2 y^2(x) - (4x^3(1-x) - (4x+2)e^x)y(x)] dx, \quad y(0) = 0, \quad y(2) = -2;$$

$$\text{c) } V[y] = \int_0^2 \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx; \quad y(0) = 4; \quad y(2) = 2;$$

Вариант 9.

$$\text{a) } V[y] = \int_0^1 [x(y'(x))^2 + \pi^2 y^2(x) + (\pi \cos(\pi x) - \pi^2(x+1) \sin(\pi x))y(x)] dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0;$$

$$\text{b) } V[y] = \int_0^2 [(y'(x))^2 + y^2(x) + 2(x^3 - x^2 - 6x + 2)y(x)] dx, \quad y(0) = 0, \quad y(2) = -4;$$

$$\text{c) } V[y] = \int_0^2 y \sqrt{y'} dx; \quad y(0) = 2; \quad y(2) = 4;$$

Вариант 10.

$$\text{a) } V[y] = \int_0^1 [e^x (y'(x))^2 + x^2 y^2(x) - (4x^3(1-x) - (4x+2)e^x)y(x)] dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0;$$

$$\text{b) } V[y] = \int_0^{\frac{3}{2}} [(y'(x))^2 + 2y^2(x) - 2(\pi^2 + 2) \sin(\pi x)y(x)] dx, \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{3}{2}\right) = -1;$$

$$\text{c) } V[y] = \int_0^2 \sqrt{y(1+y'^2)} dx; \quad y(0) = 2; \quad y(2) = 1;$$