

1 Метод Ритца

Выделяют два основных типа методов решения вариационных задач. К первому типу относятся методы, сводящие исходную задачу к решению дифференциальных уравнений. Эти методы очень хорошо развиты и им будет посвящено основное время на лекциях. Альтернативой являются так называемые прямые методы. Эти методы тем или иным способом решают исходную задачу по поиску функции в заданном классе, которая доставляла бы экстремальное значение заданному функционалу. Один из самых популярных методов этого класса — метод Ритца (также называемый методом Рэлея-Ритца).

В основе метода Ритца лежит построение минимизирующей последовательности функций. Пусть, например, необходимо найти минимум функционала $V[y]$ в классе функций M . Чтобы задача имела смысл, потребуем, чтобы существовал конечный инфимум μ значений функционала и в классе допустимых функций существовали функции, на которых функционал принимает конечные значения. Тогда по определению инфимума существует минимизирующая последовательность функций $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V[y_n] = \mu .$$

Если существует предел y^* этой последовательности, она и будет решением исходной задачи, так как будет законен предельный переход

$$V[y^*] = \lim_{n \rightarrow \infty} V[y_n] .$$

Каким же образом строится эта минимизирующая последовательность в методе Ритца? Сначала изложим общую идею, а потом рассмотрим ее конкретную реализацию для одного типа вариационных задач. Итак, сначала необходимо выбрать некоторую систему функций, которую мы назовем базисной:

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$$

К функциям φ_n выдвигаются два требования. Во-первых, сами эти функции принадлежат классу M , а во-вторых — любая конечная линейная комбинация этих функций вида

$$y_n = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \dots + c_n \varphi_n$$

принадлежит тому же классу M . Исходная задача заменяется следующей: минимизировать функцию многих переменных

$$\max_{c_1, \dots, c_n} V[c_1 \varphi_1 + \dots + c_n \varphi_n]$$

Решая эту задачу известными (из курса «Методов оптимизации», например) методами, получаем некоторое минимальное значение μ_n . Поскольку при увеличении числа слагаемых мы только расширяем множество функций, на котором ищется минимум, будет справедлива цепочка неравенств $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \mu_n \geq \mu_{n+1} \geq \dots$. Можно доказать, что при некоторых условиях эта последовательность значений сходится к μ .

Теорема. Если функционал $V[y]$ непрерывен (в смысле метрики пространства, в котором он рассматривается) и система функций φ_n полная, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \mu ,$$

где μ — минимум функционала $V[y]$.

Замечание. Быстрота сходимости метода Рунге сильно зависит от выбора системы базисных функций. Однако при удачном выборе для достижения приемлемой точности часто бывает достаточно 3-4 слагаемых в линейной комбинации.

Применим изложенную идею к достаточно часто встречающейся вариационной задаче. Итак, пусть необходимо минимизировать значение функционала

$$V[y] = \int_0^1 \left[p(x) (y'(x))^2 + q(x) y^2(x) - 2f(x)y(x) \right] dx$$

на множестве функций $M = \left\{ y(x) \mid y(x) \in C_{[0,1]}^2, y(0) = y(1) = 0 \right\}$. Зафиксируем теперь некоторую конечную систему линейно-независимых функций $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$, которые удовлетворяют однородным краевым условиям

$$\varphi_i(0) = \varphi_i(1) = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Вместо исходной задачи будем решать значительно более узкую задачу минимизации функционала на множестве линейных комбинаций

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x).$$

Подставим эту линейную комбинацию в функционал:

$$\begin{aligned} V[\varphi(x)] &= V \left[\sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x) \right] = \\ &= \int_0^1 \left\{ p(x) \left[\sum_{i=1}^n c_i \varphi_i'(x) \right]^2 + q(x) \left[\sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x) \right]^2 - 2f(x) \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x) \right\} dx. \end{aligned}$$

Чтобы найти минимум функционала, воспользуемся необходимым условием экстремума:

$$\frac{\partial V}{\partial c_j} = 0, \quad j = \overline{1, n}$$

Дифференцирование функционала по c_j дает

$$\frac{\partial V}{\partial c_j} = \int_0^1 \left\{ 2p(x) \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i'(x) \varphi_j'(x) + 2q(x) \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x) \varphi_j(x) - 2f(x) \varphi_j(x) \right\} dx.$$

После очевидных преобразований получаем систему линейных алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов линейной комбинации:

$$\sum_{i=1}^n \left[\int_0^1 (p(x) \varphi_i'(x) \varphi_j'(x) + q(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x)) dx \right] c_i - \int_0^1 f(x) \varphi_j(x) dx = 0, \quad j = \overline{1, n}$$

В матричной форме эта система запишется в виде $Ac = b$, где

$$a_{ij} = \int_0^1 (p(x) \varphi_i'(x) \varphi_j'(x) + q(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x)) dx,$$

$$b_j = \int_0^1 f(x) \varphi_j(x) dx$$

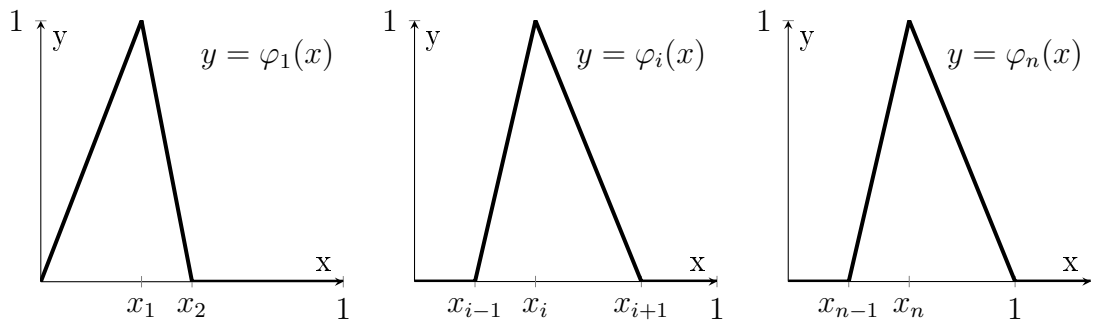
Рассмотрим теперь вопрос выбора базисных функций. Простейшим вариантом является система кусочно-линейных функций. Чтобы ее построить, необходимо вначале задать разбиение отрезка $[0, 1]$ на n отрезков:

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = 1 .$$

Полагая $h_i = x_{i+1} - x_i$, определим следующие функции:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x \leq x_{i-1}, \\ \frac{1}{h_{i-1}}(x - x_{i-1}), & \text{если } x_{i-1} < x \leq x_i, \\ \frac{1}{h_i}(x_{i+1} - x), & \text{если } x_i < x \leq x_{i+1}, \\ 0, & \text{если } x_{i+1} < x < 1 . \end{cases}, \quad i = \overline{1, n}$$

Ниже на рисунке приведены схематические графики этих базисных функций.



Производные базисных функций будут кусочно-постоянными функциями и их нетрудно найти:

$$\varphi'_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x \leq x_{i-1}, \\ \frac{1}{h_{i-1}}, & \text{если } x_{i-1} < x \leq x_i, \\ -\frac{1}{h_i}, & \text{если } x_i < x \leq x_{i+1}, \\ 0, & \text{если } x_{i+1} < x < 1 . \end{cases}, \quad i = \overline{1, n}$$

Поскольку i -ая функция отлична от нуля только на промежутке $(x_{i-1}, x_{i+1}]$, то справедливы равенства

$$\varphi_i(x)\varphi_j(x) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi'_i(x)\varphi'_j(x) = 0, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad j \neq i-1, j \neq i, j \neq i+1.$$

Последнее означает, что матрица системы уравнений для c_j при таком выборе базисных функций будет трехдиагональной. А именно, ненулевыми будут элементы:

$$\begin{aligned} a_{i,i+1} &= \int_0^1 [p(x)\varphi'_i(x)\varphi'_{i+1}(x) + q(x)\varphi_i(x)\varphi_{i+1}(x)] dx = \\ &= -\left(\frac{1}{h_i}\right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x)dx + \underbrace{\left(\frac{1}{h_i}\right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x)(x - x_i)q(x)dx}_{I_{1,i}}, \quad i = \overline{1, n-1} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{ii} &= \int_0^1 \left[p(x) (\varphi'_i(x))^2 + q(x) \varphi_i^2(x) \right] dx = \\
&= \left(\frac{1}{h_{i-1}} \right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x) dx + \left(\frac{1}{h_i} \right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x) dx + \\
&+ \underbrace{\left(\frac{1}{h_{i-1}} \right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1})^2 q(x) dx}_{I_{2,i}} + \underbrace{\left(\frac{1}{h_i} \right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x)^2 q(x) dx}_{I_{3,i}}, \quad i = \overline{1, n},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{i,i-1} &= \int_0^1 \left[p(x) \varphi'_i(x) \varphi'_{i-1}(x) + q(x) \varphi_i(x) \varphi_{i-1}(x) \right] dx = \\
&= - \underbrace{\left(\frac{1}{h_{i-1}} \right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x) dx}_{I_{4,i}} + \left(\frac{1}{h_{i-1}} \right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x_i - x) (x - x_{i-1}) q(x) dx, \quad i = \overline{2, n},
\end{aligned}$$

Столбец правых частей будет состоять из элементов вида

$$b_i = \int_0^1 f(x) \varphi_i(x) dx = \underbrace{\frac{1}{h_{i-1}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1}) f(x) dx}_{I_{5,i}} + \underbrace{\frac{1}{h_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x) f(x) dx}_{I_{6,i}}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Используя введенные выше обозначения для некоторых интегралов, эти же выражения можно кратко записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
a_{ii} &= I_{4,i} + I_{4,i+1} + I_{2,i} + I_{3,i}, \quad i = \overline{2, n}, \\
a_{i,i+1} &= -I_{4,i+1} + I_{1,i}, \quad i = \overline{1, n-1}, \\
a_{i,i-1} &= -I_{4,i} + I_{1,i-1}, \quad i = \overline{2, n}, \\
b_i &= I_{5,i} + I_{6,i}, \quad i = \overline{1, n}.
\end{aligned}$$

Итак, чтобы построить трехдиагональную систему линейных уравнений, необходимо вычислить $6n$ интегралов. Для некоторых задач это можно сделать аналитически, но чаще приходится прибегать к численным методам интегрирования (например, можно использовать правило Симпсона, см. Приложение).

Запишем теперь формальный алгоритм метода Рунге с кусочно-линейным базисом.

Кусочно-линейный метод Ритца

ВХОД : Целое число $n \geq 1$; точки $x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = 1$.

ВЫХОД : Коэффициенты c_1, \dots, c_n .

ШАГ 1 **for** $i \leftarrow 0$ **to** n **do**

$h_i \leftarrow x_{i+1} - x_i$

end

ШАГ 2 **for** $i \leftarrow 1$ **to** n **do**

Определяем базисные функции φ_i :

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x \leq x_{i-1}, \\ \frac{1}{h_{i-1}}(x - x_{i-1}), & \text{если } x_{i-1} < x \leq x_i, \\ \frac{1}{h_i}(x_{i+1} - x), & \text{если } x_i < x \leq x_{i+1}, \\ 0, & \text{если } x_{i+1} < x < 1. \end{cases}$$

end

ШАГ 3 **for** $i \leftarrow 1$ **to** $n - 1$ **do**

Вычисляем $I_{1,i}, I_{2,i}, I_{3,i}, I_{4,i}, I_{5,i}, I_{6,i}$.

end

Вычисляем $I_{2,n}, I_{3,n}, I_{4,n}, I_{4,n+1}, I_{5,n}, I_{6,n}$.

ШАГ 4 **for** $i \leftarrow 1$ **to** $n - 1$ **do**

$\alpha_i \leftarrow I_{4,i} + I_{4,i+1} + I_{2,i} + I_{3,i}$

$\beta_i \leftarrow I_{1,i} - I_{4,i+1}$

$b_i \leftarrow I_{5,i} + I_{6,i}$

end

ШАГ 5 Вычисляем

$\alpha_n \leftarrow I_{4,n} + I_{4,n+1} + I_{2,n} + I_{3,n}$

$b_n \leftarrow I_{5,n} + I_{6,n}$

ШАГ 6 Начинаем решать трехдиагональную систему уравнений (шаги 6-10)

$a_1 \leftarrow \alpha_1$

$\zeta_1 \leftarrow \frac{\beta_1}{\alpha_1}$

$z_1 \leftarrow \frac{b_1}{a_1}$

ШАГ 7 **for** $i \leftarrow 2$ **to** $n - 1$ **do**

$a_i \leftarrow \alpha_i - \beta_{i-1}\zeta_{i-1}$

$\zeta_i \leftarrow \frac{\beta_i}{a_i}$

$z_i \leftarrow \frac{b_i - \beta_{i-1}z_{i-1}}{a_i}$

end

ШАГ 8 Вычисляем

$a_n \leftarrow \alpha_n - \beta_{n-1}\zeta_{n-1}$

$z_n \leftarrow \frac{b_n - \beta_{n-1}z_{n-1}}{a_n}$

ШАГ 9 Полагаем $c_n \leftarrow z_n$

ВЫВЕСТИ: c_n

ШАГ 10 **for** $i \leftarrow n - 1$ **to** 1 **do**

$c_i \leftarrow z_i - \zeta_i c_{i+1}$

ВЫВЕСТИ: c_i

end

ШАГ 11 Процедура окончена.

Рассмотрим пример использования этого алгоритма, в котором интегралы (шаги 3, 4 и 5) находятся в явном виде.

Пример.