3 Метод локальных вариаций

Рассмотрим следующую вариационную задачу. Пусть требуется найти функцию $y(x)$, заданную на интервале $[a, b]$, удовлетворяющую ограничениям

$$\alpha(x) \leqslant y(x) \leqslant \beta(x), \quad x \in [a, b]\,, \tag{1}$$

и доставляющую экстремум (для определенности — минимум) функционалу

$$V[y(x)] = \int\limits_a^b F(x, y(x), y'(x))dx. \tag{2}$$

Одно или оба ограничения (1) в некоторых частях интервала могут отсутствовать. Если в некоторой точке x отсутствует ограничение $y(x) \geqslant \alpha(x)$, то полагаем $\alpha(x) = -\infty$, а если ограничение $y(x) \leqslant \beta(x)$, то полагаем $\beta(x) = \infty$. Ограничения вида (1) включают обычные краевые условия как частный случай. Действительно, если мы хотим задать ограничения

$$y(a) = A, \quad y(b) = B,$$

то можно положить

$$\alpha(a) = \beta(a) = A, \quad \alpha(b) = \beta(b) = B.$$

Опишем простейший вариант метода локальных вариаций для решения этой задачи. Вначале разобьем отрезок $[a, b]$ на равные отрезки точками $x_i = a + i\Delta x$, $\Delta x = \dfrac{b-a}{N}$, $i = \overline{0, N}$.

Введем обозначение

$$W_i(y_1, y_2) = F\left(x_i + \frac{\Delta x}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{y_2 - y_1}{\Delta x}\right)\Delta x.$$

Нетрудно заметить, что последнее выражение есть приближенное значение следующего интеграла

$$W_i(y_1, y_2) \approx \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} F\left(x, y(x), y'(x)\right)dx,$$

при условии, что $y(x_i) = y_1$, $y(x_{i+1}) = y_2$.

Обозначим $y(x_i) = y_i$, $i = \overline{0, N}$. Искомую функцию $y(x)$ мы будем аппроксимировать кусочно-линейной функцией — ломаной, соединяющей точки (x_i, y_i), а функционал $V[y(x)]$ приближенно заменим суммой

$$V[y(x)] \approx W = \sum_{i=0}^{N-1} W_i(y_i, y_{i+1}). \tag{3}$$

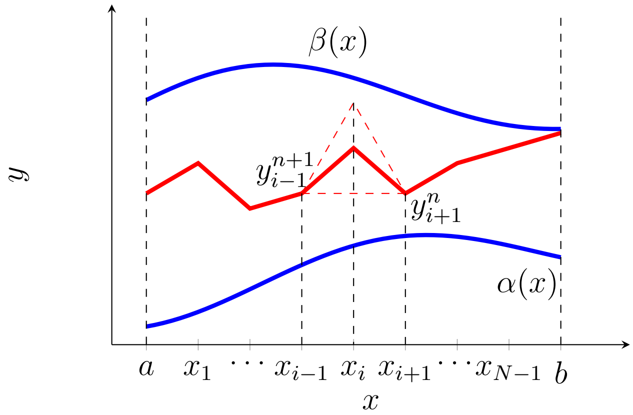
Ограничения на $y(x)$ в точках x_i запишутся теперь в виде

$$\alpha(x_i) \leqslant y_i \leqslant \beta(x_i), \quad i = \overline{0, N}. \tag{4}$$

Таким образом, вместо решения непрерывной вариационной задачи (1), (2) будем решать ее дискретный (конечномерный) аналог — задачу (3), (4). Решение этой последней задачи мы будем строить последовательными приближениями.

В качестве нулевого приближения можно взять любой набор чисел, который удовлетворяет ограничениям (4). Обозначим их y_i^0, $i = \overline{0, N}$. При решении реальных задач следует при выборе начального приближения учитывать качественные, физические и прочие априорные соображения — удачный выбор может значительно ускорить сходимость метода.

Зададимся достаточно малым положительным числом h, которое будем называть шагом варьирования. Предположим, что уже полностью построено n-ое приближение и первые i компонент $(n+1)$-го приближения, т.е. $y_0^{n+1}, y_1^{n+1}, \ldots, y_{i-1}^{n+1}$, $1 \leqslant i \leqslant N$. Все найденные величины, очевидно, должны удовлетворять ограничениям задачи. В качестве возможных значений y_i^{n+1} рассмотрим трех «кандидатов»: y_i^n, $y_i^n + h$, $y_i^n - h$. Другими словами, мы *варьируем* кривую, надеясь найти лучшее приближение. Схематически этот процесс изображен на рисунке ниже.



Далее, следует проверить, удовлетворяют ли две последние величины ограничениям (4) (для y_i^n ограничения выполняются по построению). При нарушении ограничений соответствующая величина исключается из рассмотрения. После этого вычислим следующие суммы:

$$\begin{aligned}
\Phi_i &= W_{i-1}(y_{i-1}^{n+1}, y_i^n) + W_i(y_i^n, y_{i+1}^n),\\
\Phi_i^+ &= W_{i-1}(y_{i-1}^{n+1}, y_i^n + h) + W_i(y_i^n + h, y_{i+1}^n),\\
\Phi_i^- &= W_{i-1}(y_{i-1}^{n+1}, y_i^n - h) + W_i(y_i^n - h, y_{i+1}^n).
\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что эти суммы являются суммами тех двух членов выражения (3), которые зависят от величины y_i. При $i = 0$ суммы состоят лишь из второго слагаемого, при $i = N$ — только из первого. Если величина $y_i^n + h$ (или $y_i^n - h$) не удовлетворяет ограничениям (4), то сумму Φ_i^+ (или Φ_i^-) рассчитывать не нужно, их можно считать равными ∞ (если речь идет о поиске минимума функционала).

Далее, положим

$$y_i^{n+1} = \begin{cases} y_i^n \text{ при } \Phi_i \leqslant \Phi_i^+, \Phi_i \leqslant \Phi_i^- \\ y_i^n + h \text{ при } \Phi_i^+ < \Phi_i, \Phi_i^+ \leqslant \Phi_i^- \\ y_i^n - h \text{ при } \Phi_i^- < \Phi_i, \Phi_i^- < \Phi_i^+ \end{cases}$$

После определения y_i^{n+1} переходим к нахождению величины y_{i+1}^{n+1}, которое осуществляется аналогично. Продолжая этот процесс вплоть до нахождения y_N^{n+1}, мы полностью построем $(n+1)$-е приближение решения. Очевидно, в ходе итераций значение функционала W не возрастает, т.е. $W^{n+1} \leqslant W^n$. Если на некоторой итерации $y_i^{n+1} = y_i^n$, $i = \overline{0, N}$ (а значит, и $W_i^{n+1} = W_i^n$, то дальнейшие вычисления с данным шагом варьирования h и шагом дискретизации Δx не имеют смысла — достигнута полная сходимость. При ограниченности области значений y_i, заданной ограничениями (4), полной сходимости при фиксированных h и Δx обязательно можно достигнуть за конечное число шагов.

После достижения полной сходимости уменьшим шаг варьирования, например, вдвое и начнем описанный процесс варьирования заново. При этом в качестве нулевого приближения берем тот набор значений, который получили после полной сходимости при предыдущем значении h. После сходимости при новом значении снова уменьшаем шаг и так далее, пока не достигнем сходимости при достаточно малом шаге h (чем меньше шаг, тем точнее найдены координаты y_i приближенного решения).

Затем уменьшим шаг дискретизации Δx, например, вдвое. Значения начального приближения для новых итераций нельзя взять непосредственно из предыдщуего шага, так как неизвестны значения y_i в новых промежуточных точках (точек x_i стало вдвое больше). Эти неизвестные значения можно найти, интерполируя последнее (лучшее) решение. Имея нулевое приближения, снова задаемся таким же шагом варьирования, как в самом начале вычислений и проведем итерации, уменьшая h до заданой малой величины.

После того, как и шаг варьирования h, и шаг дискретизации Δx станут достаточно малы, полученная при последней полной сходимости итераций кусочно-линейная функция будет приближенным решением задачи (3), (4). Таким образом, простейший вариант реализации метода локальных вариаций включает в себя несколько вложенных друг в друга итерационных вычислительных процесса. Это процесс уменьшения шага дискретизации Δx, процесс уменьшения шага варьирования h и итерационный процесс вычисления y_i при фиксированных Δx и h. При этом, пока шаг дискретизации постоянен, функционал W в процессе итераций не возрастает. Он может увеличиться при дроблении шага Δx, т.к. в новых точках x_i значения y_i вычисляются путем интерполяции и проверка их «удачности» нет производится. Однако после начала итераций и уменьшения шага h, функционал снова монотонно уменьшается.

Описанный метод позволяет найти, вообще говоря, лишь локальный минимум функционала. При этом для сходимости всего процесса требуется, чтобы выполнялось определенное соотношение между шагом дискретизации и шагом варьирования, а именно, чтобы $h = \Delta x^{1+p}$, где $p \geqslant 1$ зависит от формы области, описываемой ограничениями (4). На практике часто используется шаг $h = O(\Delta x^2)$.

Заметим, что одним из самых полезных достоинств метода является легкость, с которой можно учесть так называемые ограничения, т.е. ограничения вида $y(t) \in G(t)$, где $G(t)$ — заданное множество допустимых значений. Достаточно легко метод обобщается на случай, когда функционал вариационной задачи зависит от нескольких незвестных кривых, от их производных и от неизвестных кривых, зависящих от нескольких переменных. Другим достоинством является сравнительная простота алгоритма и, соответственно, простота программирования и отладки. Из-за этого метод пользовался популярностью в эпоху использования вычислительной техники II и III поколений. Наконец, объем памяти, используемой при расчете, вероятно, минимально возможный в принципе. Действительно, в целом для решения задачи достаточно хранить в памяти лишь массив значений $y_1, y_2, \ldots, y_N$ (счетчики и вспомогательные пременные не в счет), которые пересчитывается «на лету».

Существенным минусом метода является сравнительно большой объем вычислений. Однако при этом дробление шага варьирования h не приводит к увеличению количества операций, равно как и не требует увеличени затрат памяти. Поэтому h можно уменьшать до очень малых значений без ущерба для производительности.