Лабораторная работа №1.
Метод Ритца

Задание. Используя метод Ритца, решить численно предложенные простейшие вариационные задачи:

задачи a) и b) — используя конечно-линейный базис с $n = 10$, $n = 15$;

задачи a) и b) — используя базис из B-сплайнов с $n = 5$, $n = 10$;

задачу c) — используя любой подходящий базис.

В случае необходимости, преобразовать исходную задачу к стандартному виду.

Оценка. Решение каждой из трех задач оценивается максимум в 4 балла. Итоговая максимальная оценка за работу: **12 баллов**.

Сроки выполнения. Четыре недели со дня выдачи задания.

Варианты заданий

Вариант 1.

a) $V[y] = \int\limits_0^1 \left[(y'(x))^2 + y^2(x) - (4 + 2x(1-x))y(x)\right]dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0;$

b) $V[y] = \int\limits_0^2 \left[2(y'(x))^2 + \pi^2 y^2(x) - 6\pi^2 \sin(\pi x) y(x)\right]dx, \quad y(0) = 0, \quad y(2) = -2;$

c) $V[y] = \int\limits_0^1 y\sqrt{1 + y'^2}dx; \quad y(0) = 2; \quad y(1) = 3;$

Вариант 2.

a) $V[y] = \int\limits_0^1 \left[(y'(x))^2 + y^2(x) - 2(\pi^2 + 1)\sin(\pi x) y(x)\right]dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0;$

b) $V[y] = \int\limits_0^2 \left[x(y'(x))^2 + \pi^2 y^2(x) - \left(8x - 2 + 2\pi^2 x(1-x)\right) y(x)\right]dx, \quad y(0) = 0, \quad y(2) = -2;$

c) $V[y] = \int\limits_0^1 \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y}dx; \quad y(0) = 2; \quad y(1) = 1;$

Вариант 3.

a) $V[y] = \int\limits_0^1 \left[2(y'(x))^2 + \pi^2 y^2(x) - 6\pi^2 \sin(\pi x) y(x)\right]dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0;$

b) $V[y] = \int\limits_0^{\frac{3}{2}} \left[x(y'(x))^2 + \pi^2 y^2(x) + \left(\pi\cos(\pi x) - \pi^2(x+1)\sin(\pi x)\right) y(x)\right]dx, \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{3}{2}\right) = -1;$

c) $V[y]=\int\limits_0^1 yy'^2dx;\quad y(0)=2;\quad y(1)=1;$

Вариант 4.

a) $V[y]=\int\limits_0^1 \left[(y'(x))^2+y^2(x)+2\left(x^3-x^2-6x+2\right)y(x)\right]dx,\quad y(0)=0,\quad y(1)=0;$

b) $V[y]=\int\limits_0^2 \left[(y'(x))^2+2y^2(x)-(4+4x(1-x))\,y(x)\right]dx,\quad y(0)=0,\quad y(2)=-2;$

c) $V[y]=\int\limits_0^1 \sqrt{y\left(1+y'^2\right)}dx;\quad y(0)=1;\quad y(1)=3;$

Вариант 5.

a) $V[y]=\int\limits_0^1 \left[(y'(x))^2+2y^2(x)-(4+4x(1-x))\,y(x)\right]dx,\quad y(0)=0,\quad y(1)=0;$

b) $V[y]=\int\limits_0^2 \left[(y'(x))^2+y^2(x)-(4+2x(1-x))y(x)\right]dx,\quad y(0)=0,\quad y(2)=-2;$

c) $V[y]=\int\limits_1^3 y\sqrt{y'}dx;\quad y(1)=2;\quad y(3)=8;$

Вариант 6.

a) $V[y]=\int\limits_0^1 \left[(y'(x))^2+2y^2(x)-2(\pi^2+2)\sin(\pi x)y(x)\right]dx,\quad y(0)=0,\quad y(1)=0;$

b) $V[y]=\int\limits_0^2 \left[(y'(x))^2+2y^2(x)+\left(2x^3-2x^2-6x+2\right)y(x)\right]dx,\quad y(0)=0,\quad y(2)=$
$-4;$

c) $V[y]=\int\limits_0^2 y\sqrt{1+y'^2}dx;\quad y(0)=-1;\quad y(2)=-3;$

Вариант 7.

a) $V[y]=\int\limits_0^1 \left[(y'(x))^2+2y^2(x)+\left(2x^3-2x^2-6x+2\right)y(x)\right]dx,\quad y(0)=0,\quad y(1)=0;$

b) $V[y]=\int\limits_0^{\frac{3}{2}} \left[(y'(x))^2+y^2(x)-2(\pi^2+1)\sin(\pi x)y(x)\right]dx,\quad y(0)=0,\quad y\left(\frac{3}{2}\right)=-1;$

c) $V[y]=\int\limits_0^2 yy'^2dx;\quad y(0)=1;\quad y(2)=3;$

Вариант 8.

a) $V[y]=\int\limits_0^1 \left[x(y'(x))^2+\pi^2y^2(x)-\left(8x-2+2\pi^2x(1-x)\right)y(x)\right]dx,\quad y(0)=0,\quad y(1)=$

0;

b) $V[y]=\int\limits_0^2 \left[e^x(y'(x))^2+x^2y^2(x)-\left(4x^3(1-x)-(4x+2)e^x\right)y(x)\right]dx, \quad y(0)=0, \quad y(2)=-2;$

c) $V[y]=\int\limits_0^2 \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}dx; \quad y(0)=4; \quad y(2)=2;$

Вариант 9.

a) $V[y]=\int\limits_0^1 \left[x(y'(x))^2+\pi^2y^2(x)+\left(\pi\cos(\pi x)-\pi^2(x+1)\sin(\pi x)\right)y(x)\right]dx, \quad y(0)=0, \quad y(1)=0;$

b) $V[y]=\int\limits_0^2 \left[(y'(x))^2+y^2(x)+2\left(x^3-x^2-6x+2\right)y(x)\right]dx, \quad y(0)=0, \quad y(2)=-4;$

c) $V[y]=\int\limits_0^2 y\sqrt{y'}dx; \quad y(0)=2; \quad y(2)=4;$

Вариант 10.

a) $V[y]=\int\limits_0^1 \left[e^x(y'(x))^2+x^2y^2(x)-\left(4x^3(1-x)-(4x+2)e^x\right)y(x)\right]dx, \quad y(0)=0, \quad y(1)=0;$

b) $V[y]=\int\limits_0^{\frac{3}{2}} \left[(y'(x))^2+2y^2(x)-2(\pi^2+2)\sin(\pi x)y(x)\right]dx, \quad y(0)=0, \quad y\left(\frac{3}{2}\right)=-1;$

c) $V[y]=\int\limits_0^2 \sqrt{y\left(1+y'^2\right)}dx; \quad y(0)=2; \quad y(2)=1;$