1 Метод Ритца

Выделяют два основных типа методов решения вариационных задач. К первому типу относятся методы, сводящие исходную задачу к решению дифференциальных уравнений. Эти методы очень хорошо развиты и им будет посвящено основное время на лекциях. Альтернативой являются так называемые прямые методы. Эти методы тем или иным способом решают исходную задачу по поиску функции в заданном классе, которая доставляла бы экстремальное значение заданному функционалу. Один из самых популярных методов этого класса — метод Ритца (также называемый методом Рэлея-Ритца).

В основе метода Ритца лежит построение минимизирующей последовательности функций. Пусть, например, необходимо найти минимум функционала $V[y]$ в классе функций M. Чтобы задача имела смысл, потребуем, чтобы существовал конечный инфимум μ значений функционала и в классе допустимых функций существовали функции, на которых функционал принимает конечные значения. Тогда по определению инфимума существует минимизирующая последовательность функций $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} V[y_n] = \mu \ .$$

Если существует предел y^* этой последовательности, она и будет решением исходной задачи, так как будет законен предельный переход

$$V[y^*] = \lim_{n\to\infty} V[y_n] \ .$$

Каким же образом стоится эта минимизирующая последовательность в методе Ритца? Сначала изложим общую идею, а потом рассмотрим ее конкретную реализацию для одного типа вариационных задач. Итак, сначала необходимо выбрать некоторую систему функций, которую мы назовем базисной:

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots \ .$$

К функциям φ_n выдвигаются два требования. Во-первых, сами эти функции принадлежат классу M, а во-вторых — любая конечная линейная комбинация этих функций вида

$$y_n = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \dots + c_n\varphi_n$$

принадлежит тому же классу M. Исходная задача заменяется следующей: минимизировать функцию многих переменных

$$\max_{c_1,\dots,c_n} V[c_1\varphi_1 + \dots + c_2\varphi_n]$$

Решая эту задачу известными (из курса «Методов оптимизации», например) методами, получаем некоторое минимальное значение μ_n. Поскольку при увеличении числа слагаемых мы только расширяем множество функций, на котором ищется минимум, будет справедлива цепочка неравенств $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \mu_n \geq \mu_{n+1} \geq \dots$. Можно доказать, что при некоторых условиях эта последовательность значений сходится к μ.

Теорема. *Если функционал $V[y]$ непрерывен (в смысле метрики пространства, в котором он рассматривается) и система функций φ_n полная, то*

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n = \mu \ ,$$

где μ — минимум функционала $V[y]$.

Замечание. *Быстрота сходимости метода Ритца сильно зависит от выбора системы базисных функций. Однако при удачном выборе для достижения приемлемой точности часто бывает достаточно 3-4 слагаемых в линейной комбинации.*

Применим изложенную идею к достаточно часто встречающейся вариационной задаче. Итак, пусть необходимо минимизировать значение функционала

$$V[y] = \int\limits_0^1 \Big[p(x)\left(y'(x)\right)^2 + q(x)y^2(x) - 2f(x)y(x)\Big]dx$$

на множестве функций $M = \Big\{y(x) \mid y(x) \in C^2_{[0,1]},\ y(0) = y(1) = 0\Big\}$. Зафиксируем теперь некоторую конечную систему линейно-независимых функций $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ из того же класса M. Вместо исходной задачи будем решать значительно более узкую задачу минимизации функционала на множестве линейных комбинаций

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n c_i\varphi_i(x)\ .$$

Подставим эту линейную комбинацию в функционал:

$$V[\varphi(x)] = V\left[\sum_{i=1}^n c_i\varphi_i(x)\right] =$$
$$= \int\limits_0^1 \left\{p(x)\left[\sum_{i=1}^n c_i\varphi_i'(x)\right]^2 + q(x)\left[\sum_{i=1}^n c_i\varphi_i(x)\right]^2 - 2f(x)\sum_{i=1}^n c_i\varphi_i(x)\right\}dx\ .$$

Чтобы найти минимум функционала, воспользуемся необходимым условием экстремума:

$$\frac{\partial V}{\partial c_j} = 0, \quad j = \overline{1,n}$$

Дифференцирование функционала по c_j дает

$$\frac{\partial V}{\partial c_j} = \int\limits_0^1 \left\{2p(x)\sum_{i=1}^n c_i\varphi_i'(x)\varphi_j'(x) + 2q(x)\sum_{i=1}^n c_i\varphi_i(x)\varphi_j(x) - 2f(x)\varphi_j(x)\right\}dx\ .$$

После очевидных преобразований получаем систему линейных алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов линейной комбинации:

$$\sum_{i=1}^n \left[\int\limits_0^1 \big(p(x)\varphi_i'(x)\varphi_j'(x) + q(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\big)\,dx\right]c_i - \int\limits_0^1 f(x)\varphi_j(x)dx = 0, \quad j = \overline{1,n}$$

В матричной форме эта система запишется в виде $Ac = b$, где

$$a_{ij} = \int\limits_0^1 \big(p(x)\varphi_i'(x)\varphi_j'(x) + q(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\big)\,dx,$$

$$b_j = \int\limits_0^1 f(x)\varphi_j(x)dx$$

Рассмотрим теперь вопрос выбора базисных функций. Простейшим вариантом является система кусочно-линейных функций. Чтобы ее построить, необходимо вначале задать разбиение отрезка $[0,1]$ на n отрезков:

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = 1 \ .$$

Полагая $h_i = x_{i+1} - x_i$, определим следующие функции:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad 0 \le x \le x_{i-1}, \\ \frac{1}{h_{i-1}}\left(x - x_{i-1}\right), & \text{если} \quad x_{i-1} < x \le x_i, \\ \frac{1}{h_i}\left(x_{i+1} - x\right), & \text{если} \quad x_i < x \le x_{i+1}, \\ 0, & \text{если} \quad x_{i+1} < x < 1 \ . \end{cases}, \quad i = \overline{1,n}$$