Практическое занятие №1.

Метод Ритца

Варианты заданий

Вариант	$y = x$	$y = 1 + x$	$y = 1 - x$	$V(k, b)$	Экстремум
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{k^2}{5}$	$\min,\ k = 0, \forall b$
2	$-\frac{10}{3}$	$-\frac{100}{3}$	$\frac{16}{3}$	$-\frac{10}{3}k^2 - 14bk - 16b^2$	$\max,\ k = 0, b = 0$
3	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$k^2 + \frac{k}{2}$	$\min,\ k = -\frac{1}{4}, \forall b$
4	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3k^2}{8}$	$\min,\ k = 0, \forall b$
5	$\frac{5}{3}$	$\frac{20}{3}$	$\frac{4}{3}$	$k^2 + 2bk + \frac{2}{3}k + 2b^2 + b$	$\min,\ k = b = -\frac{1}{6}$
6	$\frac{8\pi^3 + 18\pi}{3}$		$\frac{8\pi^3 - 12\pi^2}{3}$		
7	$\frac{8\pi^3 + 6\pi}{3}$				
8	$-\frac{10}{3}$	$-\frac{100}{3}$	$\frac{16}{3}$	$-\frac{10}{3}k^2 - 14bk - 16b^2$	$\max,\ k = 0, b = 0$
9	$-\frac{10}{3}$	$-\frac{100}{3}$	$\frac{16}{3}$	$-\frac{10}{3}k^2 - 14bk - 16b^2$	$\max,\ k = 0, b = 0$
10	$-\frac{10}{3}$	$-\frac{100}{3}$	$\frac{16}{3}$	$-\frac{10}{3}k^2 - 14bk - 16b^2$	$\max,\ k = 0, b = 0$

Вариант 1.

1. (1б.) Дан функционал $V[y] = \int\limits_0^1 x^4 y'^2 dx$.

1a. Найти его значение при $y(x) = x$, $y(x) = 1 + x$, $y(x) = 1 - x$.

1b. Достигается ли экстремум $V[y]$ на множестве функций $y(x) = kx + b$? Если достигается, то при каких значениях k и b? Максимум или минимум?

2. (1б.) Дан функционал $V[y] = \int\limits_0^1 \left[y'^2 + y^2\right] dx$, и краевые условия $y(0) = 1$, $y(1) = 2$. Пусть экстремум функционала ищется в классе функций $y(x) = \varphi(x) + C \sin \pi x$, где C — параметр, $\varphi(x) \in C^1_{[0,1]}$.

2a. Подберите $\varphi(x)$ так, чтобы при любых значениях C функция $y(x)$ удовлетворяла бы краевым условиям.

2b. Достигается ли экстремум $V[y]$ на получившимся множестве функций $y(x)$? Если достигается, то при каких значениях C? Максимум или минимум?

3. (1б.) Найдите приближенное решение вариационной задачи

$$V[y] = \int\limits_0^1 \left[y'^2 - y^2 - 2xy\right] dx \to \text{extr}, \quad y(0) = y(1) = 0$$

в виде $y(x) = x(1-x)(C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_n x^n)$, ограничиться случаем $n = 0$.

4. (ДЗ 1б.) Найти приближенное решение предыдущей задачи при $n = 1$ и $n = 2$.

5.* (ДЗ 3б.) Найти приближенное решение вариационной задачи

$$V[z(x,y)] = \iint\limits_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2z\right] dxdy \to \text{extr},$$

где область интегрирования $D = \{(x,y) : -1 \leqslant x \leqslant 1, -1 \leqslant y \leqslant 1\}$ и на границе этой области $z(x,y)$ равна нулю. *Подсказка: можно попробовать искать решение в виде* $z(x,y) = C(x^2-1)(y^2-1)$.

Вариант 2.

1. (1б.) Дан функционал $V\left[y\right] = \int\limits_0^1 \left[y'^2 + 2yy' - 16y^2\right]dx.$

1a. Найти его значение при $y(x) = x$, $y(x) = 1 + x$, $y(x) = 1 - x$.

1b. Достигается ли экстремум $V[y]$ на множестве функций $y(x) = kx + b$? Если достигается, то при каких значениях k и b? Максимум или минимум?

2. (1б.) Дан функционал $V\left[y\right] = \int\limits_0^1 \left[(y'^2 + y^2\right]dx$, и краевые условия $y(0) = 0$, $y(1) = 1$. Пусть экстремум функционала ищется в классе функций $y(x) = \varphi(x) + C\sin\pi x$, где C — параметр, $\varphi(x) \in C^1_{[0,1]}$.

2a. Подберите $\varphi(x)$ так, чтобы при любых значениях C функция $y(x)$ удовлетворяла бы краевым условиям.

2b. Достигается ли экстремум $V[y]$ на получившимся множестве функций $y(x)$? Если достигается, то при каких значениях C? Максимум или минимум?

3. (1б.) Найдите приближенное решение вариационной задачи

$$V\left[y\right] = \int\limits_1^2 \left[xy'^2 - \frac{x^2-1}{x}y^2 - 2x^2y\right]dx \to \mathrm{extr}, \quad y(1) = y(2) = 0.$$

в виде $y(x) = (x-1)(x-2)(C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots + C_nx^n)$, ограничиться случаем $n = 0$.

4. (ДЗ 1б.) Найти приближенное решение предыдущей задачи при $n = 1$ и $n = 2$.

5.* (ДЗ 3б.) Найти приближенное решение вариационной задачи

$$V\left[z(x,y)\right] = \iint\limits_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2z\right]dxdy \to \mathrm{extr},$$

где область интегрирования $D = \left\{(x,y) : -1 \leqslant x \leqslant 1, -1 \leqslant y \leqslant 1\right\}$ и на границе этой области $z(x,y)$ равна нулю. *Подсказка: можно попробовать искать решение в виде* $z(x,y) = C(x^2-1)(y^2-1)$.

Вариант 3.

1. (1б.) Дан функционал $V[y] = \int\limits_0^1 \left[y'^2 + xy^2\right] dx$.

1a. Найти его значение при $y(x) = x$, $y(x) = 1 + x$, $y(x) = 1 - x$.

1b. Достигается ли экстремум $V[y]$ на множестве функций $y(x) = kx + b$? Если достигается, то при каких значениях k и b? Максимум или минимум?

2. (1б.) Дан функционал $V[y] = \int\limits_0^1 \left[y'^2 + y^2\right] dx$, и краевые условия $y(0) = 0$, $y(1) = 2$. Пусть экстремум функционала ищется в классе функций $y(x) = \varphi(x) + C\sin\pi x$, где C — параметр, $\varphi(x) \in C^1_{[0,1]}$.

2a. Подберите $\varphi(x)$ так, чтобы при любых значениях C функция $y(x)$ удовлетворяла бы краевым условиям.

2b. Достигается ли экстремум $V[y]$ на получившимся множестве функций $y(x)$? Если достигается, то при каких значениях C? Максимум или минимум?

3. (1б.) Найдите приближенное решение вариационной задачи

$$V[y] = \int\limits_0^2 \left[y'^2 + 2xy + y^2\right] dx \to \mathrm{extr}, \quad y(0) = y(2) = 0.$$

в виде $y(x) = x(x-2)(C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots + C_nx^n)$, ограничиться случаем $n = 0$.

4. (ДЗ 1б.) Найти приближенное решение предыдущей задачи при $n = 1$ и $n = 2$.

5.* (ДЗ 3б.) Найти приближенное решение вариационной задачи

$$V[z(x,y)] = \iint\limits_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2z\right] dxdy \to \mathrm{extr},$$

где область интегрирования $D = \{(x,y) : -1 \leqslant x \leqslant 1, -1 \leqslant y \leqslant 1\}$ и на границе этой области $z(x,y)$ равна нулю. *Подсказка: можно попробовать искать решение в виде* $z(x,y) = C(x^2-1)(y^2-1)$.

Вариант 4.

1. (1б.) Дан функционал $V[y] = \int\limits_1^2 \frac{y'^2}{x^3} dx$.

1a. Найти его значение при $y(x) = x$, $y(x) = 1 + x$, $y(x) = 1 - x$.

1b. Достигается ли экстремум $V[y]$ на множестве функций $y(x) = kx + b$? Если достигается, то при каких значениях k и b? Максимум или минимум?

2. (1б.) Дан функционал $V[y] = \int\limits_0^1 \left[y'^2 + y^2\right] dx$, и краевые условия $y(0) = 0$, $y(1) = \frac{1}{2}$. Пусть экстремум функционала ищется в классе функций $y(x) = \varphi(x) + C \sin \pi x$, где C — параметр, $\varphi(x) \in C^1_{[0,1]}$.

2a. Подберите $\varphi(x)$ так, чтобы при любых значениях C функция $y(x)$ удовлетворяла бы краевым условиям.

2b. Достигается ли экстремум $V[y]$ на получившимся множестве функций $y(x)$? Если достигается, то при каких значениях C? Максимум или минимум?

3. (1б.) Найдите приближенное решение вариационной задачи

$$V[y] = \int\limits_0^1 \left[y'^2 - y^2 - 2xy\right] dx \to \text{extr}, \quad y(0) = y(1) = 0$$

в виде $y(x) = x(1 - x)(C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots + C_n x^n)$, ограничиться случаем $n = 0$.

4. (ДЗ 1б.) Найти приближенное решение предыдущей задачи при $n = 1$ и $n = 2$.

5.* (ДЗ 3б.) Найти приближенное решение вариационной задачи

$$V[z(x, y)] = \iint\limits_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2z \right] dxdy \to \text{extr},$$

где область интегрирования $D = \{(x, y) : -1 \leqslant x \leqslant 1, -1 \leqslant y \leqslant 1\}$ и на границе этой области $z(x, y)$ равна нулю. *Подсказка: можно попробовать искать решение в виде* $z(x, y) = C(x^2 - 1)(y^2 - 1)$.

Вариант 5.

1. (1б.) Дан функционал $V\left[y\right]=\int\limits_0^1 \left[x^2y'^2+2y^2+2xy\right]dx$.

1a. Найти его значение при $y(x)=x$, $y(x)=1+x$, $y(x)=1-x$.

1b. Достигается ли экстремум $V[y]$ на множестве функций $y(x)=kx+b$? Если достигается, то при каких значениях k и b? Максимум или минимум?

2. (1б.) Дан функционал $V\left[y\right]=\int\limits_0^1 \left[(y'^2-y^2\right]dx$, и краевые условия $y(0)=1$, $y(1)=2$. Пусть экстремум функционала ищется в классе функций $y(x)=\varphi(x)+C\sin\pi x$, где C — параметр, $\varphi(x)\in C^1_{[0,1]}$.

2a. Подберите $\varphi(x)$ так, чтобы при любых значениях C функция $y(x)$ удовлетворяла бы краевым условиям.

2b. Достигается ли экстремум $V[y]$ на получившимся множестве функций $y(x)$? Если достигается, то при каких значениях C? Максимум или минимум?

3. (1б.) Найдите приближенное решение вариационной задачи

$$V\left[y\right]=\int\limits_1^2 \left[xy'^2-\frac{x^2-1}{x}y^2-2x^2y\right]dx\to\mathrm{extr},\quad y(1)=y(2)=0.$$

в виде $y(x)=(x-1)(x-2)(C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots+C_nx^n)$, ограничиться случаем $n=0$.

4. (ДЗ 1б.) Найти приближенное решение предыдущей задачи при $n=1$ и $n=2$.

5.* (ДЗ 3б.) Найти приближенное решение вариационной задачи

$$V\left[z(x,y)\right]=\iint\limits_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-2z\right]dxdy\to\mathrm{extr},$$

где область интегрирования $D=\left\{(x,y):-1\leqslant x\leqslant 1,-1\leqslant y\leqslant 1\right\}$ и на границе этой области $z(x,y)$ равна нулю. *Подсказка: можно попробовать искать решение в виде $z(x,y)=C(x^2-1)(y^2-1)$.*

Вариант 6.

1. (1б.) Дан функционал $V[y] = \int\limits_0^{2\pi} \left[y'^2 - 2y\sin x + y^2\right] dx$.

1a. Найти его значение при $y(x) = x$, $y(x) = 1 + x$, $y(x) = 1 - x$.

1b. Достигается ли экстремум $V[y]$ на множестве функций $y(x) = kx + b$? Если достигается, то при каких значениях k и b? Максимум или минимум?

2. (1б.) Дан функционал $V[y] = \int\limits_0^1 \left[y'^2 - y^2\right] dx$, и краевые условия $y(0) = 0$, $y(1) = 1$. Пусть экстремум функционала ищется в классе функций $y(x) = \varphi(x) + C\sin \pi x$, где C — параметр, $\varphi(x) \in C^1_{[0,1]}$.

2a. Подберите $\varphi(x)$ так, чтобы при любых значениях C функция $y(x)$ удовлетворяла бы краевым условиям.

2b. Достигается ли экстремум $V[y]$ на получившимся множестве функций $y(x)$? Если достигается, то при каких значениях C? Максимум или минимум?

3. (1б.) Найдите приближенное решение вариационной задачи

$$V[y] = \int\limits_0^2 \left[y'^2 + 2xy + y^2\right] dx \to \text{extr}, \quad y(0) = y(2) = 0.$$

в виде $y(x) = x(x-2)(C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_n x^n)$, ограничиться случаем $n = 0$.

4. (ДЗ 1б.) Найти приближенное решение предыдущей задачи при $n = 1$ и $n = 2$.

5.* (ДЗ 3б.) Найти приближенное решение вариационной задачи

$$V[z(x,y)] = \iint\limits_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2z\right] dxdy \to \text{extr},$$

где область интегрирования $D = \{(x,y) : -1 \leqslant x \leqslant 1, -1 \leqslant y \leqslant 1\}$ и на границе этой области $z(x,y)$ равна нулю. *Подсказка: можно попробовать искать решение в виде* $z(x,y) = C(x^2-1)(y^2-1)$.

Вариант 7.

1. (1б.) Дан функционал $V[y] = \int\limits_0^1 \left[-y'^2 - 2y\sin x + y^2\right] dx$.

1a. Найти его значение при $y(x) = x$, $y(x) = 1 + x$, $y(x) = 1 - x$.

1b. Достигается ли экстремум $V[y]$ на множестве функций $y(x) = kx + b$? Если достигается, то при каких значениях k и b? Максимум или минимум?

2. (1б.) Дан функционал $V[y] = \int\limits_0^1 \left[y'^2 - y^2\right] dx$, и краевые условия $y(0) = 0$, $y(1) = 2$. Пусть экстремум функционала ищется в классе функций $y(x) = \varphi(x) + C\sin\pi x$, где C — параметр, $\varphi(x) \in C^1_{[0,1]}$.

2a. Подберите $\varphi(x)$ так, чтобы при любых значениях C функция $y(x)$ удовлетворяла бы краевым условиям.

2b. Достигается ли экстремум $V[y]$ на получившимся множестве функций $y(x)$? Если достигается, то при каких значениях C? Максимум или минимум?

3. (1б.) Найдите приближенное решение вариационной задачи

$$V[y] = \int\limits_0^1 \left[y'^2 - y^2 - 2xy\right] dx \to \text{extr}, \quad y(0) = y(1) = 0$$

в виде $y(x) = x(1-x)(C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots + C_nx^n)$, ограничиться случаем $n = 0$.

4. (ДЗ 1б.) Найти приближенное решение предыдущей задачи при $n = 1$ и $n = 2$.

5.* (ДЗ 3б.) Найти приближенное решение вариационной задачи

$$V[z(x,y)] = \iint\limits_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2z\right] dxdy \to \text{extr},$$

где область интегрирования $D = \{(x,y) : -1 \leqslant x \leqslant 1, -1 \leqslant y \leqslant 1\}$ и на границе этой области $z(x,y)$ равна нулю. *Подсказка: можно попробовать искать решение в виде* $z(x,y) = C(x^2-1)(y^2-1)$.

Вариант 8.

1. (1б.) Дан функционал $V[y] = \int\limits_0^1 \left[y'^2 + y^2 2e^x y\right] dx$.

1a. Найти его значение при $y(x) = x$, $y(x) = 1 + x$, $y(x) = 1 - x$.

1b. Достигается ли экстремум $V[y]$ на множестве функций $y(x) = kx + b$? Если достигается, то при каких значениях k и b? Максимум или минимум?

2. (1б.) Дан функционал $V[y] = \int\limits_0^1 \left[y'^2 - y^2\right] dx$, и краевые условия $y(0) = 0$, $y(1) = \dfrac{1}{2}$. Пусть экстремум функционала ищется в классе функций $y(x) = \varphi(x) + C \sin \pi x$, где C — параметр, $\varphi(x) \in C^1_{[0,1]}$.

2a. Подберите $\varphi(x)$ так, чтобы при любых значениях C функция $y(x)$ удовлетворяла бы краевым условиям.

2b. Достигается ли экстремум $V[y]$ на получившимся множестве функций $y(x)$? Если достигается, то при каких значениях C? Максимум или минимум?

3. (1б.) Найдите приближенное решение вариационной задачи

$$V[y] = \int\limits_1^2 \left[xy'^2 - \frac{x^2 - 1}{x} y^2 - 2x^2 y\right] dx \to \text{extr}, \quad y(1) = y(2) = 0.$$

в виде $y(x) = (x-1)(x-2)(C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_n x^n)$, ограничиться случаем $n = 0$.

4. (ДЗ 1б.) Найти приближенное решение предыдущей задачи при $n = 1$ и $n = 2$.

5.* (ДЗ 3б.) Найти приближенное решение вариационной задачи

$$V[z(x,y)] = \iint\limits_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2z\right] dxdy \to \text{extr},$$

где область интегрирования $D = \{(x,y) : -1 \leqslant x \leqslant 1, -1 \leqslant y \leqslant 1\}$ и на границе этой области $z(x,y)$ равна нулю. *Подсказка: можно попробовать искать решение в виде $z(x,y) = C(x^2-1)(y^2-1)$.*

Вариант 9.

1. (1б.) Дан функционал $V[y] = \int\limits_1^2 \left[y'^2 + y^2 + \frac{2y}{x^3} \right] dx$.

1a. Найти его значение при $y(x) = x$, $y(x) = 1 + x$, $y(x) = 1 - x$.

1b. Достигается ли экстремум $V[y]$ на множестве функций $y(x) = kx + b$? Если достигается, то при каких значениях k и b? Максимум или минимум?

2. (1б.) Дан функционал $V[y] = \int\limits_0^1 \left[y'^2 - 2y^2 \right] dx$, и краевые условия $y(0) = 0$, $y(1) = 1$. Пусть экстремум функционала ищется в классе функций $y(x) = \varphi(x) + C \sin \pi x$, где C — параметр, $\varphi(x) \in C^1_{[0,1]}$.

2a. Подберите $\varphi(x)$ так, чтобы при любых значениях C функция $y(x)$ удовлетворяла бы краевым условиям.

2b. Достигается ли экстремум $V[y]$ на получившимся множестве функций $y(x)$? Если достигается, то при каких значениях C? Максимум или минимум?

3. (1б.) Найдите приближенное решение вариационной задачи

$$V[y] = \int\limits_0^2 \left[y'^2 + 2xy + y^2 \right] dx \to \text{extr}, \quad y(0) = y(2) = 0.$$

в виде $y(x) = x(x-2)(C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots + C_n x^n)$, ограничиться случаем $n = 0$.

4. (ДЗ 1б.) Найти приближенное решение предыдущей задачи при $n = 1$ и $n = 2$.

5.* (ДЗ 3б.) Найти приближенное решение вариационной задачи

$$V[z(x,y)] = \iint\limits_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 - 2z \right] dxdy \to \text{extr},$$

где область интегрирования $D = \{(x,y) : -1 \leqslant x \leqslant 1, -1 \leqslant y \leqslant 1\}$ и на границе этой области $z(x,y)$ равна нулю. *Подсказка: можно попробовать искать решение в виде $z(x,y) = C(x^2-1)(y^2-1)$.*

Вариант 10.

1. (1б.) Дан функционал $V[y] = \int\limits_1^2 \left[y'^3 - y^2\right] dx$.

1a. Найти его значение при $y(x) = x$, $y(x) = 1 + x$, $y(x) = 1 - x$.

1b. Достигается ли экстремум $V[y]$ на множестве функций $y(x) = kx + b$? Если достигается, то при каких значениях k и b? Максимум или минимум?

2. (1б.) Дан функционал $V[y] = \int\limits_0^1 \left[y'^2 - 2y^2\right] dx$, и краевые условия $y(0) = 1$, $y(1) = 2$. Пусть экстремум функционала ищется в классе функций $y(x) = \varphi(x) + C \sin \pi x$, где C — параметр, $\varphi(x) \in C^1_{[0,1]}$.

2a. Подберите $\varphi(x)$ так, чтобы при любых значениях C функция $y(x)$ удовлетворяла бы краевым условиям.

2b. Достигается ли экстремум $V[y]$ на получившимся множестве функций $y(x)$? Если достигается, то при каких значениях C? Максимум или минимум?

3. (1б.) Найдите приближенное решение вариационной задачи

$$V[y] = \int\limits_0^1 \left[y'^2 - y^2 - 2xy\right] dx \to \mathrm{extr}, \quad y(0) = y(1) = 0$$

в виде $y(x) = x(1-x)(C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_n x^n)$, ограничиться случаем $n = 0$.

4. (ДЗ 1б.) Найти приближенное решение предыдущей задачи при $n = 1$ и $n = 2$.

5.* (ДЗ 3б.) Найти приближенное решение вариационной задачи

$$V[z(x,y)] = \iint\limits_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2z\right] dx dy \to \mathrm{extr},$$

где область интегрирования $D = \{(x,y) : -1 \leqslant x \leqslant 1, -1 \leqslant y \leqslant 1\}$ и на границе этой области $z(x,y)$ равна нулю. *Подсказка: можно попробовать искать решение в виде $z(x,y) = C(x^2-1)(y^2-1)$.*