Problem 1 (7.5) 함수열 $\{f_n\}$에 대해

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x < \frac{1}{n+1} \\ \sin^2 \frac{\pi}{x} & \frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n} \\ 0 & x > \frac{1}{n} \end{cases}$$

이라고 하자. $\{f_n\}$이 어떤 연속함수로 점별수렴하지만 고르게 수렴하지는 않음을 보여라.

Proof.

$x \le 0$이면 모든 n에 대해 $f_n(x) = 0$이므로 $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$이다.

$x > 0$이면 아르키메데스 성질에 의해 $\frac{1}{N} < x$인 $N \in \mathbb{J}$이 존재한다. 따라서 모든 $n \ge N$에 대해서 $f_n(x) = 0$이므로 $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$이다. 그러므로 $\{f_n\}$은 $\mathbb{R}$에서 0으로 점별수렴한다.

그러나 모든 n에 대해 $x = \frac{1}{n+0.5}$를 대입하면 $1 = \sin^2(n+\frac{1}{2})\pi \le \|f_n(x) - 0\|_\infty \le 1$이므로,

$\lim_{n\to\infty}\|f_n(x) - 0\|_\infty = 1 \ne 0$이다. 따라서 $\{f_n\}$은 $\mathbb{R}$에서 0으로 고르게 수렴하지 않는다. □

Problem 2 (7.11) $\{f_n\}, \{g_n\}$이 각각 거리공간 E에서 정의된 복소함수열과 실함수열이라고 하자. 그리고

(1) $\sum f_n$의 부분합 수열은 고르게 유계이다.
(2) E에서 $g_n \rightrightarrows 0$
(3) 모든 $x \in E$에 대해 $g_1(x) \ge g_2(x) \ge ...$

이라 하자. 그러면 $\sum f_n g_n$은 E에서 고르게 수렴함을 증명하여라.

Proof.

$\sum f_n$의 부분합 수열이 고르게 유계이므로, $A_n(x) \coloneqq \sum_{k=1}^n f_k(x)$라 하면 $|A_n(x)| < M$이 모든 n, x에 대해 성립하는 $M \in \mathbb{R}^+$가 존재한다. 또, $g_n \rightrightarrows 0$이므로 모든 $n \ge N$에 대해 $|g_n(x)| < \frac{\epsilon}{2M}$가 모든 $x \in E$에 대해 성립하도록 하는 $N \in \mathbb{J}$가 존재한다. 한편 조건 (3)에 의해 $g_n(x) \ge 0$임이 쉽게 확인된다.

이제 임의의 $p \ge q \ge N$에 대하여

$$\begin{aligned} |\sum_{k=q}^{p} f_k g_k(x)| &= |\sum_{k=q}^{p-1} A_k(x)(g_k(x) - g_{k+1}(x)) + A_p(x)g_p(x) - A_{q-1}(x)g_q(x)| \\ &\le M\,|\sum_{k=q}^{p-1}(g_k(x) - g_{k+1}(x)) + g_p(x) - g_q(x)| \\ &\le 2Mg_q(x) \le\ 2Mg_N(x) < \epsilon \end{aligned}$$

이므로, $\sum f_n g_n$의 부분합 수열이 고르게 Cauchy이다. 따라서 $\sum f_n g_n$은 E에서 고르게 수렴한다. □