1 다룰 내용

4주차 강의에서 공부한 내용은 다음과 같다.
합성곱(Convolution), **근사 항등원**(Approximate Identity), **바이에르시트라스 근사 정리**(Weierstraß Approximation Theorem)

2 바이에르시트라스 근사 정리

바이에르시트라스 근사 정리는 폐구간에서 정의된 연속함수를 다항함수열의 극한으로 표현할 수 있다는 것이다. 특별히, 다항함수열이 주어진 연속함수로 고르게 수렴함을 보여준다. 즉, 연속함수는 다항함수를 통해 충분히 부드럽게 근사시킬 수 있음을 의미한다. 여기에서 연속함수의 정의역은 실수에서 정의된 폐구간이지만, 공역은 복소수여도 무방한데 이에 대해서는 후술한다.

이 정리의 증명을 위해서는 합성곱 이론과 근사 항등원의 개념을 알고 있는 것이 도움이 된다. 따라서, 먼저 위의 두 개념을 알아보고 본 정리를 증명하기로 한다.

2.1 합성곱

합성곱은 두 함수를 적절히 곱하여 이를 적분하는 연산으로, 두 함수 중 하나의 함수만이 가진 성질을 합성곱 또한 가지고 있다는 좋은 성질들이 여럿 있다. 이러한 성질에 대해서 알아보고자 한다.

Assumptions 이 절에서 사용하는 함수 f, g에 대해서는 항상 다음의 두 성질을 만족하는 것으로 생각한다.
(1) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$은 임의의 $-\infty < a < b < \infty$에 대해 $[a, b]$에서 리만적분가능하다.
(2) $[-1, 1]$의 외부에서 언제나 $g = 0$이다.

Definition 함수 f, g의 **합성곱**(convolution) $f * g$는 다음과 같이 정의한다.

$$(f * g)(x) = (g * f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y)g(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x - y)\, dy$$

실질적으로 g가 0이 아닌 구간은 $[-1, 1]$ 뿐이므로, 각각의 정적분에서 구간을 $[-1, 1]$, $[x-1, x+1]$로 바꾸어도 좋다.

Proposition 1 f 또는 g가 $\mathbb{R}$에서 연속함수이면 $f * g$ 또한 연속함수이다. 또한 연속함수 대신 고른연속함수이면 또한 고른연속함수이다.

Proof.
f가 $\mathbb{R}$에서 연속함수라고 하고, $a \in \mathbb{R}$을 잡고 $\epsilon > 0$을 생각하자. 그러면 f는 폐구간 $[a - 2, a + 2]$에서 고르게 연속이다. 따라서 적당한 $\delta \in (0, 1)$이 존재하여 모든 $s, t \in [a - 2, a + 2]$에 대해

$$|s - t| < \delta \Rightarrow |f(s) - f(t)| < \frac{\epsilon}{\int_{-1}^{1} |g(x)|\, dx + 1}$$

이제 $|a-b|<\delta$를 가정하자. 그러면

$$\begin{aligned} |(f*g)(a)-(f*g)(b)| &= \left|\int_{\mathbb{R}} f(a-y)g(y)\,dy - \int_{\mathbb{R}} f(b-y)g(y)\,dy\right| \\ &\le \int_{-1}^{1} |f(a-y)-f(b-y)|\,|g(y)|\;dy \\ &\le \frac{\epsilon}{\int_{-1}^{1}|g(x)|\;dx+1}\int_{-1}^{1}|g(y)|\;dy \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

가 성립한다. 따라서, $f*g$는 $\mathbb{R}$에서 연속이다.

고른연속에 대해서 증명할 때에는, 앞에서 f가 $[a-2,a+2]$에서 고르게 연속하기 때문에 적당한 δ를 잡을 수 있어 그 안에서 함숫값의 차이를 원하는 만큼 좁힐 수 있다는 것 대신, $\mathbb{R}$에서의 모든 숫자들에 대해 적당한 δ를 잡을 수 있어 그 안에서 함숫값의 차이를 원하는 만큼 좁힐 수 있다는 것을 이용하면 된다. □

Proposition 2 함수 f (혹은 g)가 $\mathbb{R}$에서 일급함수라고 하자. 그러면 $f*g$도 $\mathbb{R}$에서 일급이고, $(f*g)'=f'*g$ (혹은 $(f*g)'=f*g'$)가 성립한다.

Proof.
g가 $\mathbb{R}$에서 일급함수라고 가정하자. $a\in\mathbb{R}$과 $\epsilon>0$을 선택하자. 그러면 g'은 $\mathbb{R}$에서 고르게 연속이고, 따라서 모든 $s,t\in\mathbb{R}$에 대해

$$|s-t|<\delta \Rightarrow |g'(s)-g'(t)|<\epsilon$$

이 성립하도록 하는 $\delta>0$이 존재한다. 이제 $0<|h|<\delta$라고 하자. 그러면

$$\begin{aligned} &\left|\frac{1}{h}((f*g)(a+h)-(f*g)(a))-(f*g'(a))\right| \\ =&\left|\frac{1}{h}(\int f(y)(g(a+h-y)-g(a-y))\,dy)-\int f(y)g'(a-y)\,dy\right| \\ =&\left|\int f(y)(\frac{g(a+h-y)-g(a-y)}{h}-g'(a-y))\,dy\right| \\ =&\left|\int f(y)(g'(a+\theta h-y)-g'(a-y))\,dy\right| \;(\because\ \text{평균값 정리}, \theta\in(0,1)) \\ \le&\ \epsilon\int_{a-1-\delta}^{a+1+\delta}|f(y)|\;dy \;(\because\ |(a+\theta h-y)-(a-y)|=\theta h<\delta, g'\text{이 정의되는 구간에 의해}) \\ \le&\ \epsilon\int_{a-2}^{a+2}|f(y)|\;dy \end{aligned}$$

이므로, $(f*g)'=f*g'$가 성립한다. 여기서 g'가 연속함수이므로 **Proposition 1**에 의해 $f*g'$도 연속함수이고, 따라서 $f*g$는 일급이다. □

Proposition 3 다항식 P에 대해 $g(x) = P(x)$가 $-1 \leq x \leq 1$에서 성립하고, $[0,1]$ 외부에서 $f = 0$이 성립한다고 하자. 그러면 $f * g$는 $[0,1]$에서 다항식이다.

Proof.
합성곱은 각각의 함수에 대한 선형사상으로 생각할 수 있으므로, $\mathrm{P}(x) = x^n$에 대해서만 생각해도 충분하다.
$0 \leq x \leq 1$에서,

$$\begin{aligned}(f * g)(x) &= \int_0^1 f(y)g(x-y)\,dy \\ &= \int_0^1 f(y)(x-y)^n\,dy \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \int_0^1 f(y)(-y)^{n-k}\,dy\end{aligned}$$

이므로 $f * g$는 다항식이다. □

2.2 근사 항등원

다음으로 근사 항등원(Approximate Identity), 혹은 디락 함수열(Dirac Sequence)이라 불리는 함수열에 대해서 알아보자. 근사 항등원은 궁극적으로 디락 델타 함수를 수학적으로 보다 더 엄밀하게 정의하기 위해 탄생하였으며, 여기에서는 근사 항등원과 합성곱이 가진 관계에 집중하고자 한다.

Definition 함수열 $\langle Q_n \rangle \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$이 **근사 항등원**이라는 것은 다음의 다섯 가지 조건을 만족하는 것이다.
(1) $Q_n \geq 0$이다.
(2) Q_n은 $[-1,1]$에서 리만적분가능하다.
(3) $[-1,1]$ 외부에서 $Q_n = 0$이다.
(4) $\int_{-1}^{1} Q_n(x)\,dx = 1$이다.
(5) 모든 $\delta \in (0,1)$에 대해 $\lim_{n\to\infty}(\int_{\delta}^{1} Q_n(x)\,dx + \int_{-1}^{-\delta} Q_n(x)\,dx) = 0$이다.

이렇게 정의된 근사 항등원은 리만적분가능한 함수에 대한 고른 수렴성을 제공하는 성질이 있는데, 이에 대해서 알아보자.

Proposition 근사항등원 $\langle Q_n \rangle$에 대해 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$이 임의의 $-\infty < a < b < \infty$에 대해 $[a,b]$에서 리만적분가능하다고 하자. 이러한 f와 $\langle Q_n \rangle$ 사이에 다음과 같은 관계가 성립한다.
(1) f가 $c \in \mathbb{R}$에서 연속이면 $\lim_{n\to\infty}(f * Q_n)(c) = f(c)$이다.
(2) f가 $\mathbb{R}$에서 연속이고 $-\infty < a < b < \infty$이면 $[a,b]$에서 $f * Q_n \rightrightarrows f$이다.

Proof.
(1) 임의의 $\epsilon > 0$을 생각하자. 그러면 f가 c에서 연속이므로 모든 $x \in [c-\delta, c+\delta]$에 대해 $|\,f(x) - f(c)\,| < \frac{1}{2}\epsilon$인 $\delta \in (0,1)$이 존재한다. 또한 $\sup\{|\,f(x)\,| \,:\, c-1 \leq x \leq c+1\} \leq M$인 양수 M을 선택하자. (f가 리만적분가능하므로

유계이다.) 그러면 모든 $n \geq N$에 대해 $\int_\delta^1 Q_n(x)\,dx + \int_{-1}^{-\delta} Q_n(x)\,dx < \frac{\epsilon}{4M}$인 자연수 N이 존재한다. 그러면

$$\begin{aligned}
|\, f * Q_n(c) - f(c)\,| &= \left| \int_{-1}^{1} f(c-y)Q_n(y)\,dy - f(c) \right| \\
&\leq \int_{-1}^{1} |\, f(c-y) - f(c)\,|\; Q_n(y)\,dy \\
&\leq \int_{-\delta}^{\delta} |\, f(c-y) - f(c)\,|\; Q_n(y)\,dy + \int_{\delta}^{1} |\, f(c-y) - f(c)\,|\; Q_n(y)\,dy \\
&\quad + \int_{-1}^{-\delta} |\, f(c-y) - f(c)\,|\; Q_n(y)\,dy \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + 2M(\int_{\delta}^{1} Q_n(x)\,dx + \int_{-1}^{-\delta} Q_n(x)\,dx) \\
&< \epsilon
\end{aligned}$$

이므로 증명이 완료된다. □

(2) f가 $\mathbb{R}$에서 연속이고 $-\infty < a < b < \infty$이라고 하자. 그러면 f는 $[a-1, b+1]$에서 고르게 연속이다.
이제 (1)의 증명과 거의 같은 방식으로 해주면 되는데, 바뀐 점은 f가 고르게 연속하므로 $[a,b]$ 내에서 x의 값에 무관하게 $|\,x-y\,| < \delta$이면 $|\,f(x) - f(y)\,| < \frac{\epsilon}{2}$가 성립하는 양수 $\delta \in (0,1)$를 잡으면 된다. (이 때 y는 $[a-1, b+1]$ 내의 원소이기만 하면 된다.) 그러면 위의 증명을 수정하자.
$x \in [a,b]$에 대해 $-\delta < y < \delta$의 범위 내에서는 $|\,(x-y) - x\,| < \delta$이 성립하므로 고른 연속의 성질을 사용할 수 있다. 나머지는 위의 증명과 동등하다. □

2.3 본 정리의 증명

지금까지 밝힌 사실을 통해 우리가 목표로 하는 바이에르시트라스 근사 정리를 증명할 수 있다. 핵심적인 아이디어는 다항식만으로 이루어진 근사 항등원을 찾는 것인데, 이러한 근사 항등원이 만약 존재한다면 2.1.3과 2.2.1(2)에 의해 바로 유도된다.

Lemma 다항식만으로 이루어진 근사 항등원은 존재한다. 그 중 하나는 다음과 같다.

$$c_n = (\int_{-1}^{1} (1-x^2)^n\,dx)^{-1} \text{ 일 때,}$$

$$Q_n(x) = \begin{cases} c_n(1-x^2)^n & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

Proof.
위와 같이 정의된 $Q_n(x)$는 당연히 (1), (2), (3), (4)를 만족한다. 따라서 우리는 (5)에 대해서만 보이는 것으로 충분하다. 먼저 $[0,1]$에서 $1-x^2 \geq 1-x$이므로 $c_n^{-1} = \int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,dx \geq \int_{-1}^{1}(1-x)^n\,dx = \frac{2}{n+1}$이다. 따라서 $c_n \leq \frac{n+1}{2}$이고, 이 때 임의의 $\delta \in (0,1)$에 대하여 $0 < \delta \leq |x| \leq 1$을 생각하면 $Q_n(x) \leq Q_n(\delta) \leq \frac{n+1}{2}(1-\delta^2)^n$이고, 이를 통해 $\delta \leq |x| \leq 1$에서 $Q_n \rightrightarrows 0$임을 쉽게 확인한다. 따라서 고른 수렴의 성질에 의해

$$\lim_{n\to\infty} (\int_{\delta}^{1} Q_n(x)\,dx + \int_{-1}^{-\delta} Q_n(x)\,dx) = \int_{\delta}^{1} \lim_{n\to\infty} Q_n(x)\,dx + \int_{-1}^{-\delta} \lim_{n\to\infty} Q_n(x)\,dx = 0$$

이므로 $\langle Q_n \rangle$은 다항식만으로 이루어진 근사항등원이다. □

Theorem (바이에르시트라스 근사 정리) $-\infty < a < b < \infty$를 만족하는 a, b에 대해 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$이 연속함수라고 하자. 그렇다면 실계수 다항식열 $\{P_n\}$이 존재하여 $[a, b]$에서 $P_n \rightrightarrows f$이다. 즉, $\lim_{n\to\infty} \|P_n - f\|_\infty = 0$이다.

Proof.
$[a, b] = [0, 1]$이라고 가정하자. 또, $f(0) = f(1) = 0$이라 하고, f가 $[0, 1]$ 이외에서는 항등적으로 0이라고 하자. 이러한 모든 가정은 단순히 x축과 y축의 평행 및 확대/축소 이동에 불과하므로 문제가 되지 않는다. 이제 f와 위의 Lemma에서 얻은 $\langle Q_n \rangle$을 생각하면 $f * Q_n$은 다항식이면서 $f * Q_n \rightrightarrows f$를 만족한다.

□

Corollary 위에서 f의 공역이 $\mathbb{R}$ 대신 $\mathbb{C}$일 때에도 위의 정리는 여전히 성립한다. 대신 이 때에는 복소계수 다항식열 $\{P_n\}$이 존재한다.

Proof.
$f = u + iv \quad (u, v$의 공역은 실수)라고 하면 $\{S_n\}, \{T_n\}$이 존재하여 $S_n \rightrightarrows u, T_n \rightrightarrows v$이다.
그러면 $P_n \rightrightarrows f$임은 자명하다.

□