1 다룰 내용

5주차 강의에서 공부한 내용은 다음과 같다.
스톤-바이에르시트라스 정리(Stone-Weierstraß Theorem), **멱급수와 이중급수의 수렴성**, **아벨 극한 정리**(Abel's limit Theorem), **해석함수**(Analytic Function), **항등정리**(The Identity Theorem)

2 스톤-바이에르시트라스 정리

지난 주 강의에서 바이에르시트라스 근사 정리의 개념을 통해, 임의의 폐구간에서 정의된 연속함수는 다항함수열의 극한으로 표현될 수 있음을 공부하였다. 이 정리의 의미를 조금 재해석한다면, 폐구간에서의 다항함수공간은 연속함수공간에 대해 조밀하다는 것으로 생각할 수 있다.

이번 절에서는 앞에서의 정리를 일반화한 스톤-바이에르시트라스 정리를 공부하게 된다. 옹골집합에서 실수로 대응하는 연속함수공간은 특정한 조건을 만족하는 부분대수(subalgebra)에 의해 조밀하게 채워질 수 있다. 이는 앞의 바이에르시트라스 근사 정리를 자명히 함의하고 있지만, 증명 과정에서 이 정리가 반드시 필요하기 때문에 논리적으로는 동등한 정리라고 생각할 수 있을 것이다.

2.1 연속함수공간과 대수(algebra)

먼저 대수의 개념을 다시 상기하는 차원에서 연속함수공간이 대수가 됨을 간략히 보이고, 다음으로 스톤-바이에르시트라스 정리에서 사용되는 부분대수의 의미가 무엇인지 살펴보기로 한다.

Remark K가 **옹골거리공간**(compact metric space)이고 $\mathscr{C}_{\mathbb{R}}(K) \coloneqq \{f \in \mathbb{R}^K : f$가 K에서 연속함수$\}$라고 하자. 이때 $\mathscr{C}_{\mathbb{R}}(K)$는 실바나하대수(Real Banach Algebra)이다. 먼저, $f, g \in \mathscr{C}_{\mathbb{R}}(K), c \in \mathbb{R}$에 대해, $f+g, fg, cf \in \mathscr{C}_{\mathbb{R}}(K)$이다. 따라서 대수임이 확인된다. 다음으로 공간에 노름을 부여할 수 있는데, 함수의 노름은 옹골공간 내에서 함수의 절댓값의 최댓값으로 잡으면 된다. 함수들은 모두 연속함수이고 정의역이 옹골집합이므로 최대와 최소가 반드시 존재하기 때문이다. 마지막으로 공간에 거리를 부여할 수 있는데 $d(f,g) \coloneqq \|f-g\|$로 정의하면 된다. 그렇다면 이전에 보였던 성질에 의해서 $(\mathscr{C}_{\mathbb{R}}(K), d)$는 완비거리공간이 되므로 바나하대수가 된다.

Definition $\mathscr{A} \in \mathscr{C}_{\mathbb{R}}(K)$가 $\mathscr{C}_{\mathbb{R}}(K)$의 부분대수라는 것은 $f, g \in \mathscr{A}, c \in \mathbb{R}$에 대해 $f+g, fg, cf \in \mathscr{A}$가 되는 것이다.
(ex) $K = [a,b]$일 때 $\mathscr{A} = \{\mathrm{P}_{|[a,b]} : \mathrm{P}$는 실수 계수 다항식$\}$

2.2 스톤-바이에르시트라스 정리의 증명

이 정리를 증명하기 위해서는 약간의 성질들을 증명하는 과정이 필요하다. 먼저 조건을 만족하는 **부분대수의 폐포**가 부분대수가 됨을 보일 것이다. 다음으로 부분대수의 원소인 함수에 **절댓값을 취한 함수**도 부분대수의 원소가 됨을, 이를 통해 부분대수의 원소로 이루어진 **함수족의 최댓값과 최솟값**도 여전히 부분대수의 원소가 됨을 보일 것이다. 마지막으로 위의 성질들을 활용해 본 정리를 증명할 것이다. 그 전에 본 정리를 정확히 기술하고자 한다.

Theorem (스톤-바이에르시트라스 정리) K는 옹골거리공간이고 $\mathscr{A}$는 $\mathscr{A} \in \mathscr{C}_{\mathbb{R}}(K)$의 부분대수라고 하자. 또한 $\mathscr{A}$가 다음의 두 조건

(1) $x_1, x_2 \in K$이고 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$가 되도록 하는 부분대수의 원소 f가 존재한다.

(2) 모든 $x \in K$에 대해 $f(x) \neq 0$이 되도록 하는 부분대수의 원소 f가 각각 존재한다.

을 만족한다고 하자. 그러면 $\overline{\mathscr{A}} = \mathscr{C}_{\mathbb{R}}(K)$가 된다.

Lemma 1 $\mathscr{B} := \overline{\mathscr{A}}$라고 하자. 그러면 $\mathscr{B} = \overline{\mathscr{B}}$이므로 $\overline{\mathscr{B}} = \mathscr{C}_{\mathbb{R}}(K)$임을 보이는 것으로 충분할 것이다. 이 때 $\mathscr{B}$는 부분대수가 된다.

Proof.
$f, g \in \mathscr{B}, c \in \mathbb{R}$을 선택하자. $\epsilon > 0$을 생각하자. 그러면 $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathscr{A}$가 존재하여 $\|f - \tilde{f}\|_\infty, \|g - \tilde{g}\|_\infty < \epsilon$이다. 그러면 $\mathscr{A}$는 부분대수이므로 $\tilde{f} + \tilde{g}, \tilde{f}\tilde{g}, c\tilde{f} \in \mathscr{A}$가 된다. 그러면

$$
\begin{aligned}
&\|(f+g) - (\tilde{f} + \tilde{g})\| \le \|f - \tilde{f}\| + \|g - \tilde{g}\| \\
&\|fg - \tilde{f}\tilde{g}\| = \|fg - f\tilde{g} + f\tilde{g} - \tilde{f}\tilde{g}\| \le \|f\|\|g - \tilde{g}\| + \|g\|\|f - \tilde{f}\| \\
&\|cf - c\tilde{f}\| = |c|\|f - \tilde{f}\|
\end{aligned}
$$

이므로 $\mathscr{B}$는 부분대수가 된다. □

Lemma 2 $x_1 \neq x_2 \in K, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$이라고 하자. 그러면 $f(x_1) = c_1, f(x_2) = c_2$인 함수 $f \in \mathscr{A} \subset \mathscr{B}$가 존재한다.

Proof.
부분대수의 정의에 의해 $g(x_1) \neq g(x_2), h(x_1) \neq 0, k(x_2) \neq 0$인 함수 $g, h, k \in \mathscr{A}$가 존재한다.
이제 $u := gk - g(x_1)k, v := gh - g(x_2)h$라고 하면 $u, v \in \mathscr{A}$이고 $u(x_1) = v(x_2) = 0, u(x_2) \neq 0, v(x_1) \neq 0$이다.
다시 $f := \frac{c_1 v}{v(x_1)} + \frac{c_2 u}{u(x_2)}$라 하면 $f(x_1) = c_1, f(x_2) = c_2$이다. □

Lemma 3 $f \in \mathscr{B}$이면 $|f| \in \mathscr{B}$이다. 또한, $f_1, f_2, ..., f_n \in \mathscr{B}$이면 $\max\{f_1, ..., f_n\}, \min\{f_1, ..., f_n\} \in \mathscr{B}$이다.

Proof.
$f \in \mathscr{B}$에 대해 바이에르시트라스 근사 정리를 사용하자. 그러면 $[-\|f\|, \|f\|]$에서 실수 계수 다항식 $p_1, p_2, ...$가 존재하여 $p_n(y) \rightrightarrows |y|$가 된다. 임의의 $\epsilon > 0$을 생각하자. 그러면 모든 $y \in [-\|f\|, \|f\|]$에 대해 $\left| |y| - \sum_{n=0}^N c_n y^n \right| < \epsilon$인 $c_0, ..., c_N \in \mathbb{R}$이 존재한다. 한편 $f \in \mathscr{B}$이므로 $\sum_{n=0}^N c_n f^n \in \mathscr{B}$이고 앞의 사실에 의해 모든 $x \in K$에 대해 $\left| |f(x)| - \sum_{n=0}^N c_n f(x)^n \right| < \epsilon$이 된다. 이는 곧 $\left\| |f| - \sum_{n=0}^N c_n f^n \right\| < \epsilon$과 동치이므로 $|f| \in \overline{\mathscr{B}} = \mathscr{B}$이다.

한편, 함수족의 최댓값과 최솟값 역시 부분대수의 원소가 됨은

$$
\begin{aligned}
max\{f, g\} &= \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2} \\
min\{f, g\} &= \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}
\end{aligned}
$$

에서 거의 바로 유도된다. 함수가 더 많아지면 귀납적으로 이 과정을 반복하면 된다. □

이제 스톤-바이에르시트라스 정리의 증명을 하기 위한 준비가 갖춰졌다. 본 정리를 증명하자.

Proof.
먼저 임의의 $x \in K$와 $f \in \mathscr{C}_{\mathbb{R}}(K)$에 대해서 $g_x(x) = f(x)$이고 모든 $\epsilon > 0$에 대해 $f(t) - \epsilon < g_x(t)$가 성립하는 g_x를 찾을 것이다.
모든 $y \in K/\{x\}$에 대해 $h_y(x) = f(x), h_y(y) = f(y)$가 되도록 하는 $h_y \in \mathscr{B}$가 Lemma 2에 의해 존재한다. 또한 부분대수 $\mathscr{A}$의 조건에 의해 $h(x) \neq 0$이 되도록 하는 $h \in \mathscr{A}$가 있는데, 이 때 $h_x = \frac{f(x)}{h(x)}h$라고 정의하면 $h_x(x) = x$가 된다. 따라서 함수족 $\{h_y : y \in K\} \in \mathscr{A} \subset \mathscr{B}$는 고정된 x와 모든 $y \in K$에 대해 $h_y(x) = f(x), h_y(y) = f(y)$를 만족한다.
임의의 $y \in K$에 대해 $J_y \coloneqq \{t \in K : h_y(t) > f(t) - \epsilon\}$이라고 정의하자. J_y는 y를 자명한 원소로 가지므로 공집합이 아니고, h_y는 연속함수이므로 J_y는 열린집합이다. 그러면 $\{J_y : y \in K\}$는 옹골집합 K의 열린 덮개이므로 $y_1, ..., y_N \in K$가 존재해서 $K = \bigcup_{i=1}^{N} J_{y_i}$이다. $g_x \coloneqq \max\{h_{y_1}, ..., h_{y_N}\}$이라고 하면 $g_x(x) = x$임은 분명하고, Lemma 3에 의해 부분대수 $\mathscr{B}$의 원소가 된다. 또 모든 $t \in K$에 대해 $t \in J_{y_n}$인 n이 존재하므로 $g_x(t) \geq h_{y_n}(t) > f(t) - \epsilon$이 성립한다.

다음으로, 모든 x에 대해 $|h(x) - f(x)| < \epsilon$이 성립하는 $h \in \mathscr{B}$를 찾을 것이다.
각각의 $x \in K$에 대해 g_x가 존재하는데, $V_x \coloneqq \{t \in K : g_x(t) < f(t) + \epsilon\}$이라고 하자. V_x는 x 자기 자신을 원소로 가지고 있으므로 공집합이 아니다. 또한 마찬가지로 V_x는 열린 집합이므로, $\{V_x : x \in K\}$는 옹골집합 K의 열린 덮개이므로 $x_1, ..., x_M \in K$가 존재하여 $K = \bigcup_{i=1}^{M} V_{x_i}$이다. 이번에는 $h \coloneqq \min\{g_{x_1}, ..., g_{x_M}\}$이라고 하자. 그러면 모든 $t \in K$에 대해 $t \in V_{x_n}$인 n이 존재하므로 $h(t) \leq g_{x_n}(t) < f(t) + \epsilon$이 성립한다. 반대로, $h(t) = g_{x_m}(t) > f(t) - \epsilon$이 성립하므로, 우리가 원하는 결과를 얻게 된다.

이를 종합하면, 임의의 f는 $\overline{\mathscr{B}} = \mathscr{B}$의 원소가 되고, 이는 곧 $\overline{\mathscr{A}} = \mathscr{C}_{\mathbb{R}}(K)$임을 보인 것과 같다. □

스톤-바이에르시트라스 정리는 복소수 대수에서는 그대로 성립하지 않는다. 대신, 자기수반(self-adjoint) 조건이 추가된 경우에는 위와 같은 논의를 진행할 수 있다. 이에 대해서 알아보자.

Definition $\mathscr{A}$가 자기수반인 것은 모든 $f \in \mathscr{A}$에 대해 $\overline{f} \in \mathscr{A}$인 것이다. 이 때 $\overline{f}(x) \coloneqq \overline{f(x)}$로 정의된다.

이제 이 조건이 추가되었을 때 스톤-바이에르시트라스 정리가 그대로 성립함을 보이자.

Theorem (스톤-바이에르시트라스 정리, 복소연속함수공간으로의 일반화) K는 옹골거리공간이고 $\mathscr{A} \in \mathscr{C}_{\mathbb{C}}(K)$는 자기수반대수이다. 또한 $\mathscr{A}$가 다음의 두 조건

(1) $x_1, x_2 \in K$이고 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$가 되도록 하는 부분대수의 원소 f가 존재한다.

(2) 모든 $x \in K$에 대해 $f(x) \neq 0$이 되도록 하는 부분대수의 원소 f가 각각 존재한다.

을 만족한다고 하자. 그러면 $\overline{\mathscr{A}} = \mathscr{C}_{\mathbb{C}}(K)$가 된다.

Proof.
$\mathscr{A}_{\mathbb{R}}$을 부분대수 $\mathscr{A}$에 대해 실수함수만을 모아놓은 또 다른 부분대수라고 하자. $f \in \mathscr{A}$이고 $f = u+iv$(u,v는 실수함수)라고 할 때 $2u = f + \overline{f}$임을 안다. 또한 $\mathscr{A}$가 자기수반이므로 $u \in \mathscr{A}$에서 u가 실수함수이므로 $u \in \mathscr{A}_{\mathbb{R}}$이다. $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) = 1, f(x_2) = 0$인 함수 $f \in \mathscr{A}$가 존재한다. 그러면 $1 = u(x_1) \neq u(x_2) = 0$이고 이는 부분대수 $\mathscr{A}_{\mathbb{R}}$가 K의 점들을 분리하는 함수가 존재함을 확인한다.

한편, $x \in K$이면 $g(x) \neq 0$이 되도록 하는 $g \in \mathscr{A}$가 존재한다. 그렇다면 적당한 $\lambda \in \mathbb{C}$를 g와 곱한 λg에 대해 $u = \mathrm{Re}(\lambda g)$라 하면 $u(x) > 0$이 되게 할 수 있다. 따라서 $\mathscr{A}_{\mathbb{R}}$에는 모든 점들에 대해 각각 그 점에서의 함숫값이 0이 아닌 함수들이 존재함을 확인한다.
그러면 $\mathscr{A}_{\mathbb{R}}$은 실수함수에 대한 스톤-바이에르시트라스 정리의 조건을 모두 만족하므로 모든 $\mathscr{A} \in \mathscr{C}_{\mathbb{C}}(K)$에서 정의된 실수함수는 $\overline{\mathscr{A}_{\mathbb{R}}}$의 원소가 된다. 그러면 $\mathscr{A} \in \mathscr{C}_{\mathbb{C}}(K)$에서 정의된 임의의 복소함수 또한 $\overline{\mathscr{A}}$의 원소가 됨은 거의 분명하다. $\square$

이로써 7단원의 모든 내용을 마쳤다. 바로 다음 절부터는 함수열의 이론과 기법을 통하여 다양한 함수의 성질들에 대해서 보다 자세히 알아볼 예정인데, 멱급수, 삼각함수, 푸리에 급수, 감마함수 등에 대해서 다룬다.

(8단원 내용은 시간이 나는 대로 추가 예정)