과제 1 해석개론 2

공과대학 산업공학과 산업공학전공
2020-10007 **김형윤**

2021.9.16

Problem 1 $n = 1, 2, ...$와 $x \in \mathbb{R}$에 대해,

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2}$$

라고 하자. $\{f_n\}$이 어떤 함수 f로 고르게 수렴함을 보이고,

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

는 $x = 0$이 아닌 모든 실수 x에 대해 성립함을 보여라.

Proof.
$x \neq 0$이면 $f_n(x) = \frac{x}{n}/(x^2 + \frac{1}{n})$에서 $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$이고, $x = 0$이면 $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$임은 자명하다.
따라서 f_n은 0으로 점별수렴한다.
한편 $x = 0$일 때에는 $\frac{x}{1+nx^2} = 0$이고 $x \neq 0$일 때 이 값보다 항상 키울 수 있으므로, $x \neq 0$에 대해 상한 노름을 구하면, $\|f_n(x) - 0\|_\infty = \|\frac{x}{1+nx^2}\|_\infty = \|\frac{1}{x^{-1}+nx}\|_\infty \leq \|\frac{1}{2\sqrt{n}}\|_\infty$이므로 $\lim_n \|f_n(x)\|_\infty = 0$, 따라서 $f_n \rightrightarrows 0$을 얻는다.
한편, $f_n'(x) = \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}$에서 $\lim_n f_n'(x) = 0 = f'(x)$이 $x \neq 0$에서 성립하고,
그러나 $x = 0$에서는 $\lim_n f_n'(x) = 1 \neq 0 = f'(x)$이므로 성립하지 않는다. □

Comment. ($x \neq 0$에서 $f_n' \rightrightarrows f'$의 sketch)
만일 $\hat{x} \neq 0$이면 일반성을 잃지 않고 $\hat{x} > 0$이라고 하자. 그리고 정의역을 $[\frac{1}{2}\hat{x}, \frac{3}{2}\hat{x}]$으로 제한하자.
$\|f_n'(x) - 0\|_\infty = \|\frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}\|_\infty$이고, nx^2을 a로 치환한 뒤($a \geq 0$) 극값을 구하면 극값은 $a = 1, 3$에서 발생한다. 이때 이 함숫값은 $a = 1$에서 최솟값 0을, $a = 3$에서 극댓값을, a가 0으로 가까워짐에 따라 양의 무한대로 발산하고 a가 무한대로 커짐에 따라 0으로 수렴한다.
다시 원래의 함수로 돌아가면, 극값은 $x = \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}}$에서 발생하므로 n이 충분히 커지면 제한된 정의역에서의 최댓값은 $x = \frac{1}{2}\hat{x}$일 때이며 그렇다면 결국 상한 노름의 값이 0으로 수렴한다. 따라서 고르게 수렴하는 미분가능함수열의 성질에 의해 제한된 정의역에서 f_n'이 f'으로 고르게 수렴한다.
그러나, $\hat{x} = 0$이면 어떠한 0을 포함하는 구간을 잡아도 구간 내에서 상한 노름의 값이 $x = 0$일 때에서 발생하므로 n에 무관하게 $\|f_n'\|_\infty = 1$이다. 즉, 고르게 수렴하는 미분가능함수열의 성질을 사용할 수 없다.

Problem 2 $\{f_n\}$이 거리공간 E에서 f로 고르게 수렴하는 복소연속함수열이라고 하자.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$$

이 $x_n \to x$가 되는 모든 $\{x_n\} \in E$에 대해 성립함을 증명하여라.

Proof.
$\{f_n\}$이 연속함수열이고 $f_n \rightrightarrows f$이므로 고른 수렴의 성질에 의해 f는 연속함수이다.
$x_n \to x$에서 $\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{J} \quad s.t. \quad \forall n \geq N\ \to |f(x_n) - f(x)| < \epsilon$
$\therefore\ \forall n \geq N \quad |f_n(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| < \|f_n - f\|_\infty + \epsilon$
n을 무한히 크게 하면
$\forall \epsilon > 0 \quad 0 \leq \limsup_n |f_n(x_n) - f(x)| \leq \epsilon$이다. 따라서, $\limsup_n |f_n(x_n) - f(x)| = 0$이고,
이는 $\lim_n |f_n(x_n) - f(x)| = 0$이다. 즉, $\lim_n f_n(x_n) = f(x)$이 성립한다. $\square$