Computergrafik - Übungsblatt 01

Björn Rathjen,
Patrick Winterstein

24.10.14

1 (0 Punkte)

(a) Berechnen Sie eine Rotation

$$\text{R:} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix},$$

die die beiden Punkte (mit karthesischen Koordinaten) (0,0) und (5,0) auf die Punkte (2,1) und (5,5) abbildet.
Zur Berechnung der Rotation

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

resultierendes Gleichungssystem :
1

$$\begin{aligned} m_{11} \cdot 0 + m_{12} \cdot 0 + m_{13} \cdot 1 &= 2 \\ m_{21} \cdot 0 + m_{22} \cdot 0 + m_{23} \cdot 1 &= 1 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 &= 1 \end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned} m_{13} &= 2 \\ m_{23} &= 1 \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

resultierende Matrix:
3

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & 2 \\ m_{21} & m_{22} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & 2 \\ m_{21} & m_{22} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5

$$\begin{aligned} m_{11} \cdot 5 + m_{12} \cdot 0 + 2 \cdot 1 &= 5 \\ m_{21} \cdot 5 + m_{22} \cdot 0 + 1 \cdot 1 &= 5 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 &= 1 \end{aligned}$$

6

$$\begin{aligned} m_{11} \cdot 5 &= 3 \\ m_{21} \cdot 5 &= 4 \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

7

$$\begin{aligned} m_{11} &= \frac{3}{5} \\ m_{21} &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

8
resultierende Matrix:

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & m_{12} & 2 \\ \frac{4}{5} & m_{22} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9
da Rotation $\rightarrow$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 2 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmten Sie den Punkt z der Ebene mit $z = R(z)$ (den Fixpunkt; den Punkt, um den gedreht wird).

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 2 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

resultierendes Gleichungssystems

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{5}\cdot x + -\frac{4}{5}\cdot y + 2 &= x \\
\frac{4}{5}\cdot x + \frac{3}{5}\cdot y + 1 &= y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
3\cdot x - 4\cdot y + 10 &= 5\cdot x \\
4\cdot x + 3\cdot y + 5 &= 5\cdot y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2\cdot x &= -4\cdot y + 10 \\
4\cdot x + 5 &= 2\cdot y
\end{aligned}
$$

2 - 2 * 1

$$
\begin{aligned}
5 &= 10\cdot y - 20 \\
25 &= 10\cdot y \\
2,5 &= y \\
\\
x &= -2\cdot 2,5 + 5 \\
x &= 0
\end{aligned}
$$

Punkt ist (0 / 2,5).

(c) Um welchen Winkel wird die Ebene dabei gedreht? (in Uhrzeigersinn bzw. gegen den Uhrzeigersinn?)

$$
\cos\alpha = \frac{3}{5}
$$

$$
\alpha = 53,13
$$

2 Freiheitsgrade (0 Punkte)

Wieviele Paare von Urbildpunkten und Bildpunkten muss man im Allgemeinen festlegen (beliebig, fast beliebig, mit Einschränkungen), um die folgenden Abbildungsarten im $\mathbb{R}^{\not\vDash}$ bzw. $\mathbb{R}^3$ eindeutig zu charakterisieren? Geben Sie kurze Begründungen.

(a) Isometrie (starre Bewegung)

(b) Affine Abbildung

Anmerkung: Manche Information kann man auch über ein einzelnes Bit speichern, anstatt ein zusätzliches Punktepaar zu verwenden. Diese Fälle sollen erkannt werden.

3 (0 Punkte)

Schreiben Sie die Transformationsmatrix M , die der Nacheinanderausführung der folgenden Transformationen (in dieser Reihenfolge) entspricht:

(a) Eine Rotation um den Ursprung um 90 Grad nach links.

(b) Eine Streckung der x-Achse um den Faktor 2. (Die y-Achse bleibt unverändert.)

(c) Eine Translation um den Vektor (2, 1).

(d) Eine Rotation um den Ursprung um 90 Grad nach links.

Auf welche Punkte werden die drei Punkte (4, 2), (3, 3), (3, 7) am Ende abgebildet?

4 (0 Punkte)

(a) Welche geometrischen Transformation wird durch die Abbildung

$$\text{A: } x \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x$$

beschrieben?
Spiegelung an der x-Achse, weil :

$$\text{A: } x \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

(b) Sei R eine Rotation um 90 Grad nach rechts um den Ursprung. Wenden Sie folgende drei Transformationen in der folgenden Reihenfolge an:

$$R, A, R^{-1}$$

Bestimmen Sie die Matrix M , welche der Verknüpfung der drei Abbildungen entspricht.

$$R = \begin{pmatrix} \cos 90 & -\sin 90 \\ \sin 90 & \cos 90 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos 90 & -\sin 90 \\ \sin 90 & \cos 90 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos -90 & -\sin -90 \\ \sin -90 & \cos -90 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \cos 90 & -\sin 90 \\ \sin 90 & \cos 90 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos 90 & \sin 90 \\ -\sin 90 & \cos 90 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Bestimmen Sie die Fixpunkte von M (die Punkte x mit $Mx = x$).

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ -x &= x \\ y &= y \end{aligned}$$

(d) Welche geometrische Transformation wird durch M beschrieben?
Spiegelung an der y-Achse.

5 (0 Punkte)

Wenden Sie die projektive Transformation $x \to Mx$ mit

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

auf die Quadrate eines Schachbrettmusters.
$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; \exists\, i, j \in \mathbb{Z}, 0 \le i \le x \le i+1 \le 8, 0 \le j \le y \le j+1 \le 8, i+j \text{ ungerade}\}$ an und zeichnen Sie das Ergebnis.

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

6 (0 Punkte)

(a) Berechnen Sie den Schnittpunkt P der beiden Geraden

$$3x + 4y = 5$$

$$4x + 5y = -6$$

in *homogenen* Koordinaten.

(b) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden g durch P und den Punkt

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(c) Schneiden Sie g mit der Ferngeraden.

7 Rotation um eine beliebige Achse (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Transformationsmatrix für eine Rotation um die Gerade durch den Ursprung in Richtung des Vektors

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

um einen Winkel von 30 Grad gegen den Uhrzeigersinn, wenn man vom Ursprung aus in Richtung von u schaut. Verwenden Sie dazu eine Methode Ihrer Wahl, z.B. die folgende:

1. Drehe den Vektor u in die yz-Ebene (z. B. um die z-Achse).

$$\begin{pmatrix} 3/\sqrt{29} & -\sqrt{20}/\sqrt{29} & 0 \\ \sqrt{20}/\sqrt{29} & 3/\sqrt{29} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Drehe den Vektor weiter in die z-Achse (um die x-Achse).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{20}/\sqrt{29} & -3/\sqrt{29} \\ 0 & 3/\sqrt{29} & \sqrt{20}/\sqrt{29} \end{pmatrix}$$

3. Drehe um 30 Grad um die z-Achse.

$$\begin{pmatrix} \cos 30 & -\sin 30 & 0 \\ \sin 30 & \cos 30 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Führe die Transformationen aus Schritt 2 und 1 rückwärts aus. Kontrollieren Sie, dass der Punkt u auf sich selbst abgebildet wird.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{20}/\sqrt{29} & 3/\sqrt{29} \\ 0 & -3/\sqrt{29} & \sqrt{20}/\sqrt{29} \end{pmatrix}$$

gesamt :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{20}/\sqrt{29} & -3/\sqrt{29} \\ 0 & 3/\sqrt{29} & \sqrt{20}/\sqrt{29} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3/\sqrt{29} & -\sqrt{20}/\sqrt{29} & 0 \\ \sqrt{20}/\sqrt{29} & 3/\sqrt{29} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{29} & -\sqrt{20}/\sqrt{29} & 0 \\ 20/29 & 3 \cdot \sqrt{20}/29 & -3/\sqrt{29} \\ 3 \cdot \sqrt{20}/29 & 9/29 & \sqrt{20}/\sqrt{29} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3/\sqrt{29} & -\sqrt{20}/\sqrt{29} & 0 \\ 20/29 & 3 \cdot \sqrt{20}/29 & -3/\sqrt{29} \\ 3 \cdot \sqrt{20}/29 & 9/29 & \sqrt{20}/\sqrt{29} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{20}/\sqrt{29} & -3/\sqrt{29} \\ 0 & 3/\sqrt{29} & \sqrt{20}/\sqrt{29} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$$

8 Arithmetische Komplexität (10 Punkte)

Betrachten Sie das Verfahren der vorherigen Aufgabe für einen allgemeinen Vektor u und bestimmen Sie die Anzahl der arithmetischen Operationen (Addition und Subtraktion, Multiplikation, Division, Quadratwurzel).
5 mal Multiplitkation von Vektor mit einer Matrix.
das sind 5 mal 3 mal (3 mult 3 add)
um matrix zu berechnen 4 mal (4 divisionen + 2 mal (2add 3mult sqrt) + 2 mal (udd 2mult sqrt)

Additionen / Subtraktionen 45 + 24 = 69

Multiplikationen 45 + 40

Divisionen 16

Quadratwurzeln 16

9 Projektives Bild einer Strecke (10 Punkte)

(a) Zerlegen Sie die Strecke von (-1, 0) bis (0, 1) in 10 gleiche Teile und wenden Sie auf die Zwischenpunkte die projektive Transformation $x \to Mx$ mit
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

aus Aufgabe 5 an. Zeichnen Sie das Ergebnis. Was ist das Bild der ganzen Strecke unter dieser Transformation?

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+4 \\ 1 \\ -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -0,9 \\ 0,1 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2,5 \\ 0,9 \\ -0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25/6 \\ -3/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4,16 \\ -1,5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -0,8 \\ 0,2 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 \\ 0,8 \\ -0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -0,7 \\ 0,3 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3,5 \\ 0,7 \\ 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35/2 \\ 7/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17,5 \\ 3,5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -0,6 \\ 0,4 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 \\ 0,6 \\ 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20/3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,66 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -0,5 \\ 0,5 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4,5 \\ 0,5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 0,5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -0,4 \\ 0,6 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5 \\ 0,4 \\ 1,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25/7 \\ 2/7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,57 \\ 0,285 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -0,3 \\ 0,7 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5,5 \\ 0,3 \\ 1,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55/18 \\ 1/6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,05 \\ 0,16 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -0,2 \\ 0,8 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 \\ 0,2 \\ 2,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30/11 \\ 1/11 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,72 \\ 0,099 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -0,1 \\ 0,9 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6,5 \\ 0,2 \\ 2,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{65}{26} \\ \frac{1}{13} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,05 \\ 0,076 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) Charakterisieren Sie diejenigen Strecken, deren Bild unter einer gegebenen projek-

tiven Transformation wieder eine Strecke ist. (Also nicht ein unendlicher Strahl oder etwas anderes.)
Es existiert keine Strecke zwischen den Punkten 3 und 4 sonst schon.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot x + 3 \cdot y + 4 \\ -x \\ 2 \cdot x + 2 \cdot y + 1 \end{pmatrix}$$

Da y immer $x + 1 \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 2 \cdot x + 2 \cdot (x+1) + 4 \\ -x \\ 2 \cdot x + 2 \cdot (x+1) + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot x + 6 \\ -x \\ 4 \cdot x + 3 \end{pmatrix}$$

da das resultierende z nicht 0 werden darf, ist bei $x = -3/4$ ein Fernpunkt und Punktpaare, zwischen denen dieser Punkt liegt, sind nach der Transformation nicht miteinander verbunden.