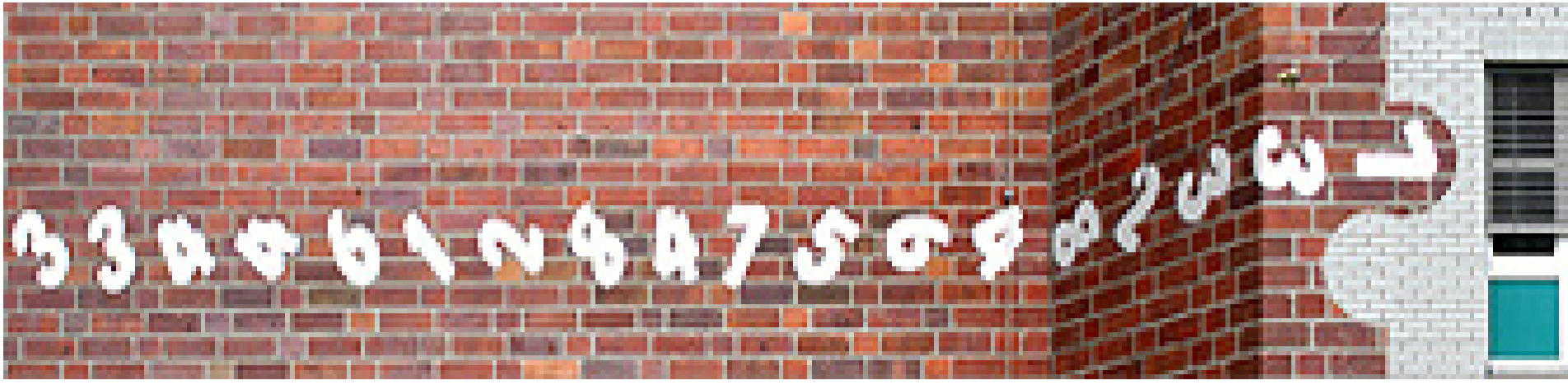
Freie Universität Berlin



Paralleles Sortierung

Björn Rathjen Patrick Winterstein
Freie Universität Berlin

Proseminar Algorithmen, SS14

Inhalt

Motivation

Grundlage des Sortierens

Sortiernetzwerk

Laufzeit

Gegenüberstellung

Zusammenfassung

Ausblick

Motivation : Allgemein

Sortieren
ist Grundlage für :

- Suche
- (Sortierung)
  - Listen
  - Wörterbücher
  - ...
- Ist dies auch in Hardware möglich ?

Motivation

Grundlage des Sortierens
- Komparator

Sortiernetzwerk

Laufzeit

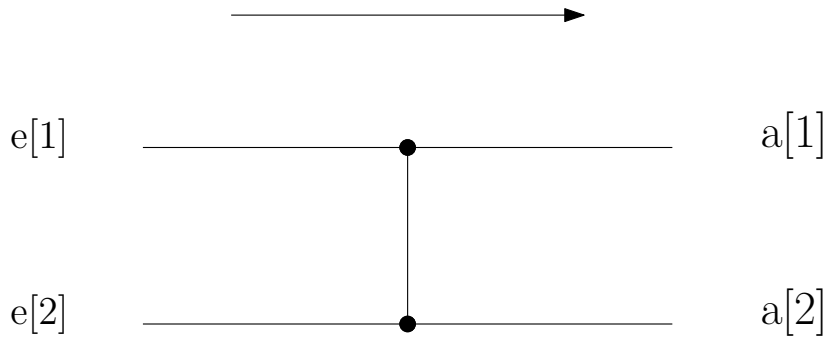
Gegenüberstellung

Zusammenfassung

Ausblick

Aufbau

- 2 Eingänge
- vergleichender Baustein
- 2 Ausgänge



Vergleichender Baustein (ii)

```
void comp(chan in1, in2, out1, out2){
    a = <— in1;
    b = <— in2;

    if (a < b){
        out1 <— a;
        out2 <— b;
        return void;
    }
    out1 <— b;
    out2 <— a;
    return void;
}
```

Motivation

Grundlage des Sortierens

Sortiernetzwerk
- Aufbau
- Korrektheit

Laufzeit

Gegenüberstellung

Zusammenfassung

Ausblick

Erweiterung : Aufbau

- mehrere Eingabeleitungen (gleiche Anzahl an Ausgabeleitungen)
- mehrere vergleichende Schritte
- Ausgabe soll sortiert sein

naiv : Aufgabe

Aufgabe :

- Resultat soll sortierte Ausgabe sein

naiv : Aufgabe

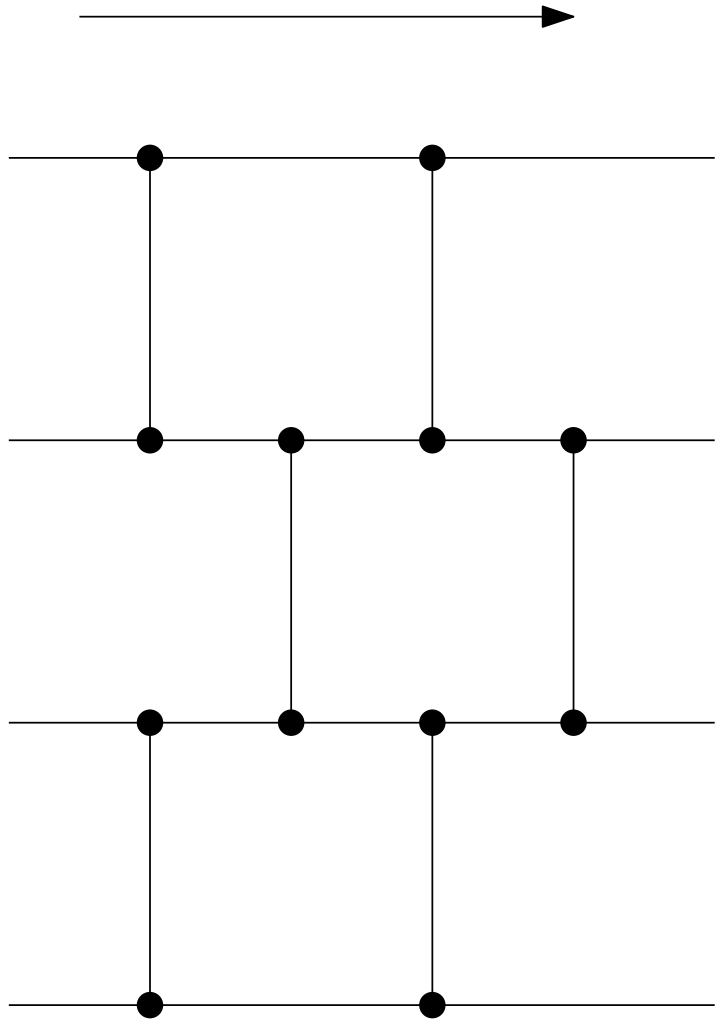
Aufgabe :

- Resultat soll sortierte Ausgabe sein

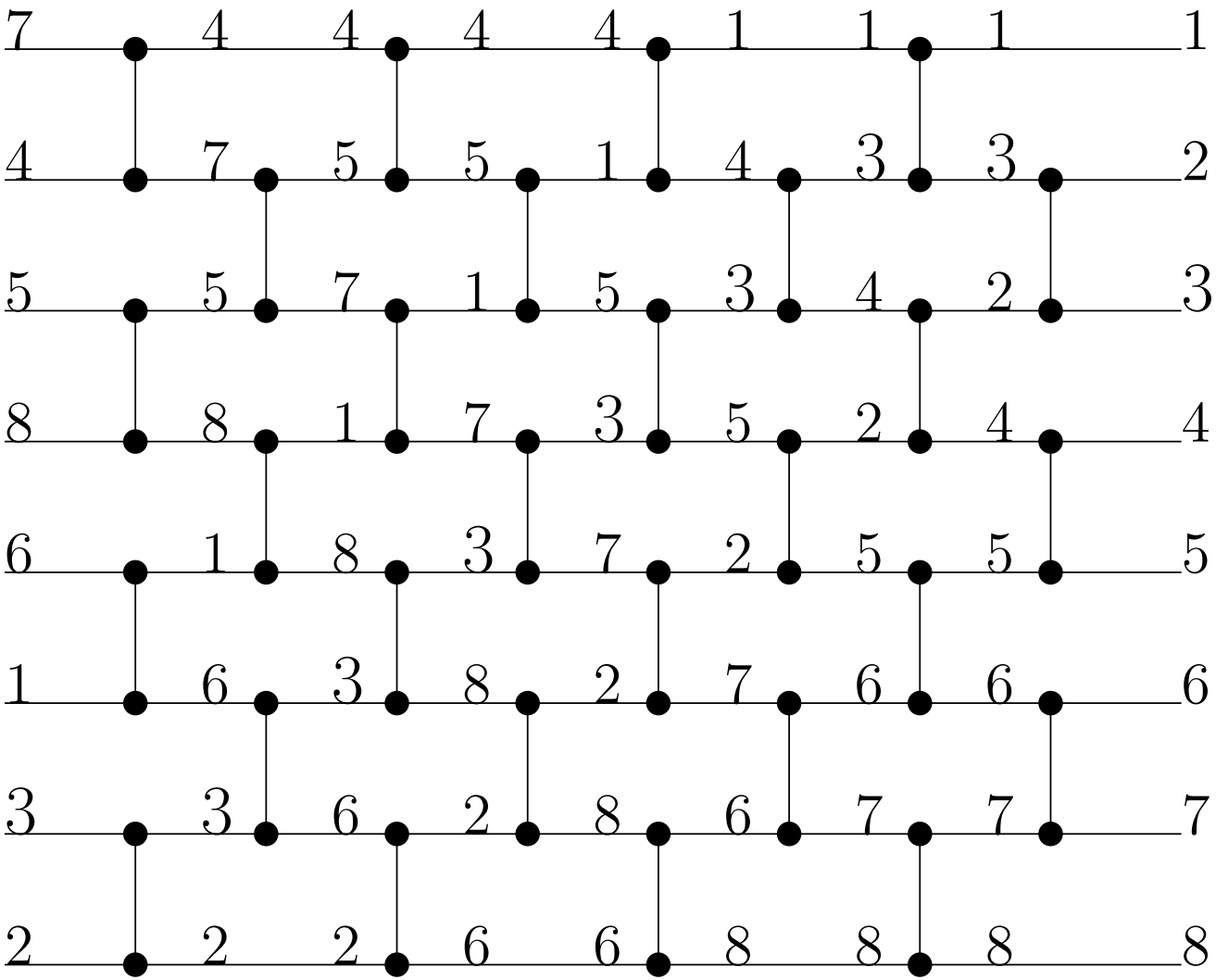
grundlegendes Prinzip :

- intuitiver Einsatz von Vergleichen
- Schrittweises sortieren

naiv : grundlegendes Prinzip



Demonstration



0,1-Prinzip

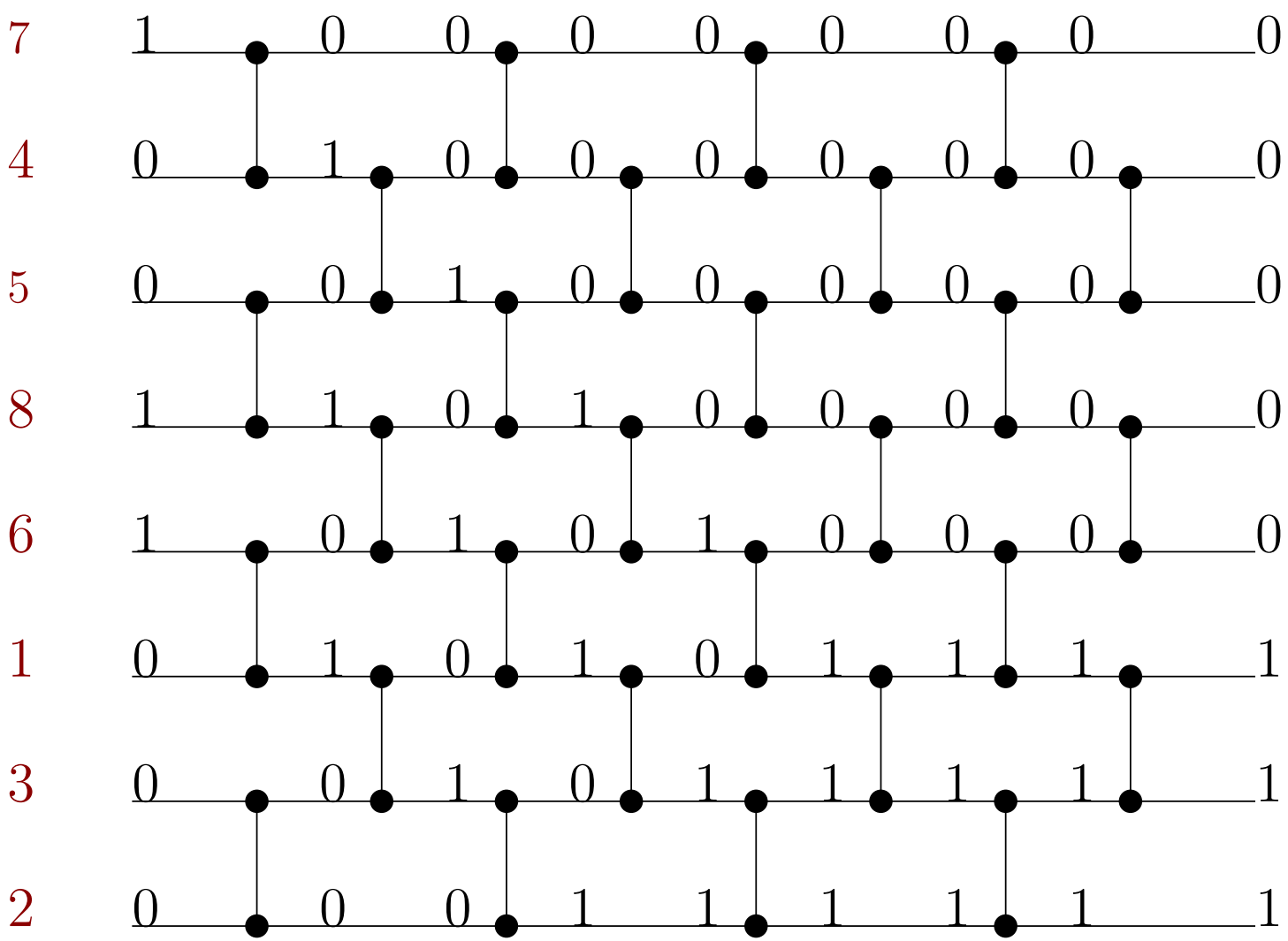
Wenn es eine Folge A gibt, die ein Sortiernetzwerk nicht sortiert, so existiert auch eine 0,1-Folge, die von diesem Netzwerk nicht sortiert wird.

Ansatz

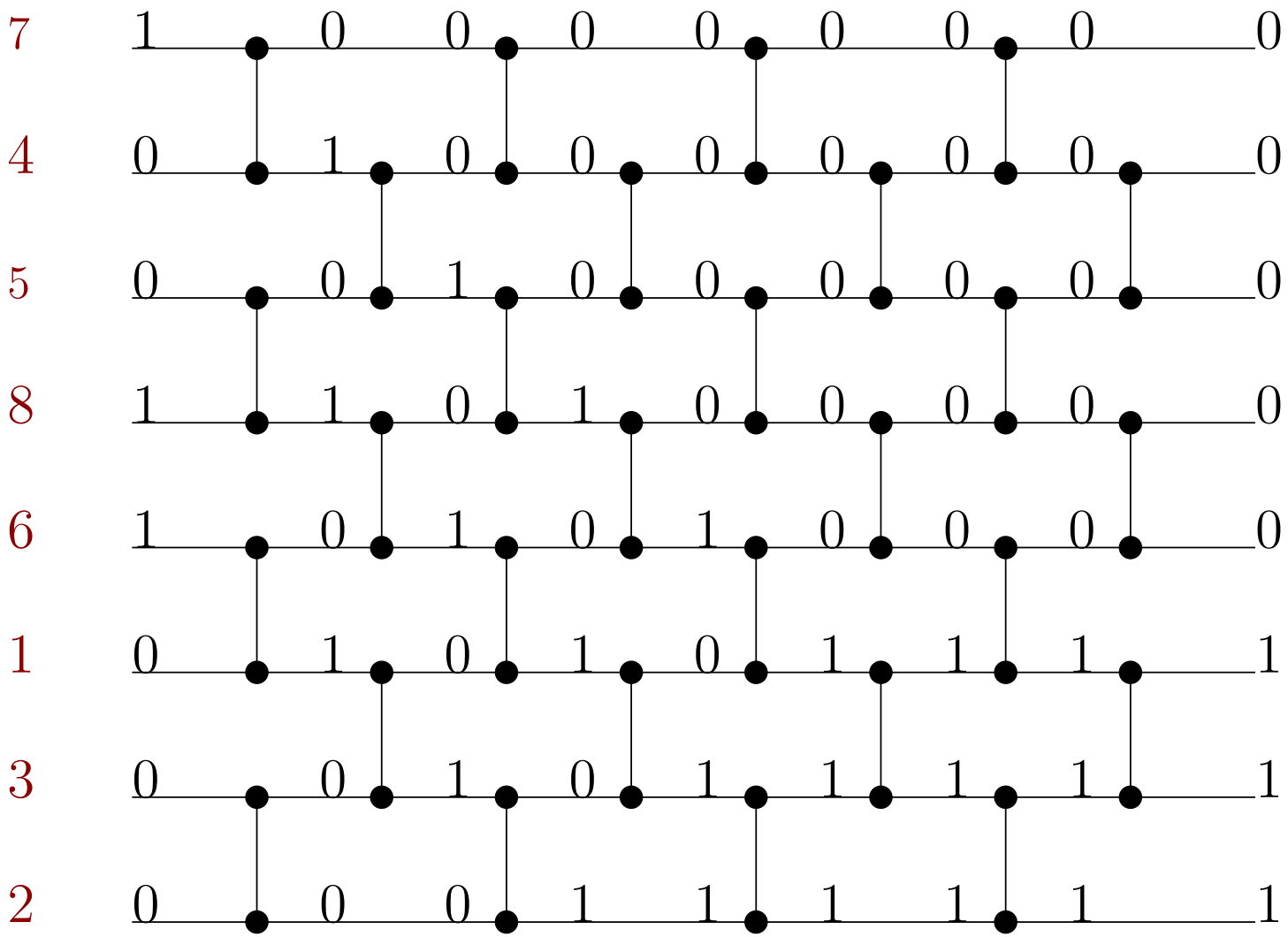
man kann jede Zahlenfolge durch eine 0,1 Folge repräsentieren
Konstante k und Zahlenfolge A mit den Elementen a_i

$$f(a_i) = \begin{cases} 0, & if \ \ a_i < k \\ 1, & if \ \ a_i \geq k \end{cases}$$

0,1- Beispiel


7 1 0 0 0 0 0 0 0 0
4 0 1 0 0 0 0 0 0 0
5 0 0 1 0 0 0 0 0 0
8 1 1 0 1 0 0 0 0 0
6 1 0 1 0 1 0 0 0 0
1 0 1 0 1 0 1 1 1 1
3 0 0 1 0 1 1 1 1 1
2 0 0 0 1 1 1 1 1 1

0,1- Beispiel



Beispiel an der Tafel ?

effektiveres Netzwerk

effektiveres Netzwerk

Aufgabe :

- Resultat soll sortierte Ausgabe sein
- soll effizient sein

effektiveres Netzwerk

Aufgabe :

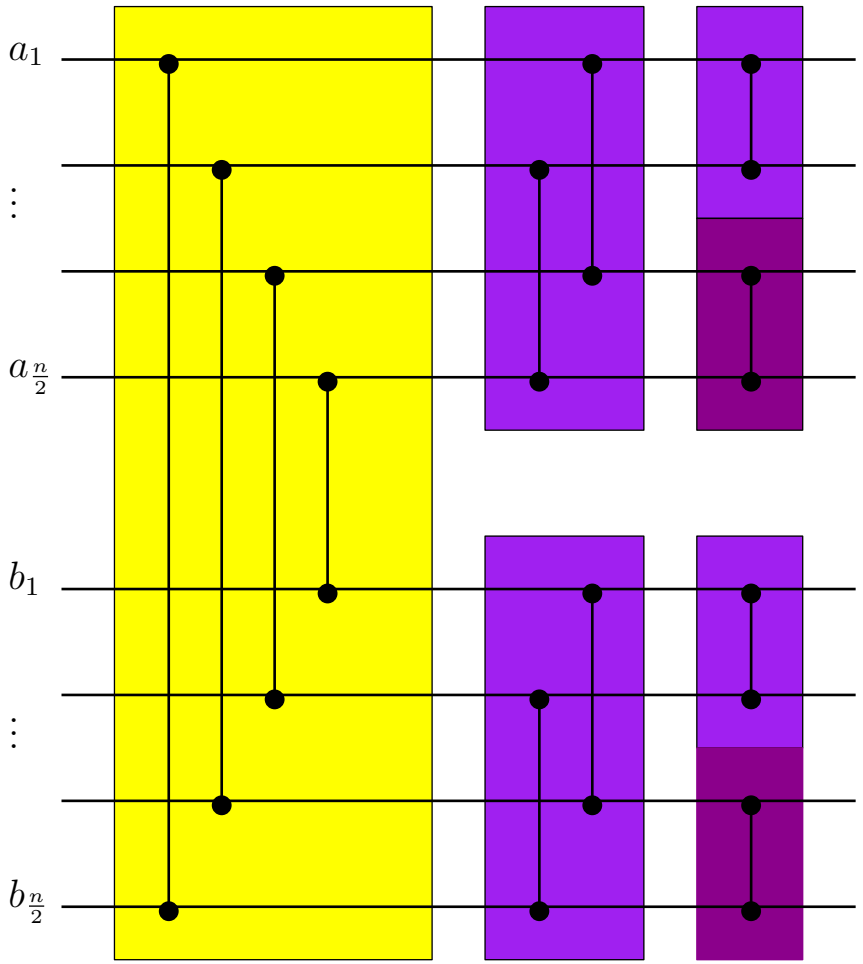
- Resultat soll sortierte Ausgabe sein
- soll effizient sein

grundlegendes Prinzip :

- intuitiver Einsatz von Vergleichen

  + Einbezug von Teile und Herrscher

Aufteilung



Bitonmischer

Ablauf :

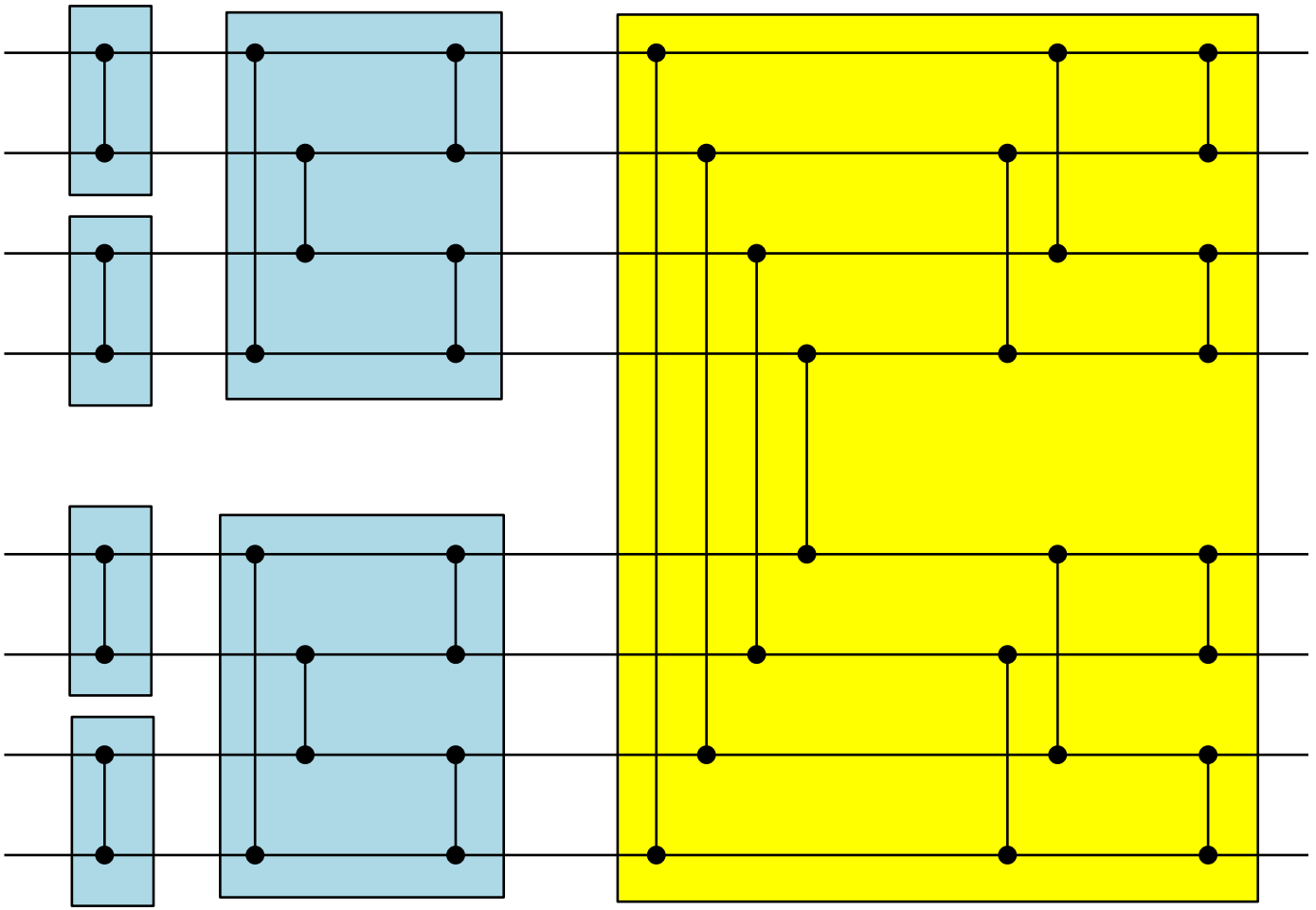
- sortiert / mischt Eingabelisten
  - untere Hälfte alle größer als in oberer
- rekursiv die kleineren Listen
- Resultat eine Sortierte Liste

odd even sort

Ablauf :

- bekommen zwei sortierte Listen
- trennen in geraden und ungeraden Index
- fassen a(even) b(odd) = c und a(odd) b(even) = d zusammen (Resultat muss sortiert sein)
- c und d werden indexweise verschachtelt
- aufeinander folgende paare werden verglichen und in richtige Reihenfolge gebracht

Biton -Sortierer : Aufbau



Demonstration

Bild kleiner Zahlenfolge 4-8-16
Beispiel

Motivation

Grundlage des Sortierens

Sortiernetzwerk

Laufzeit
- Herleitung
- Vergleich mit Software sortieren

Gegenüberstellung

Zusammenfassung

Ausblick

Herleitung der Laufzeit

N	Anzahl der Schritte
2^1	

Herleitung der Laufzeit

N	Anzahl der Schritte
2^1	1

Herleitung der Laufzeit

N	Anzahl der Schritte
2^1	1
2^2	

Herleitung der Laufzeit

N	Anzahl der Schritte
2^1	1
2^2	$1 + 2$

Herleitung der Laufzeit

N	Anzahl der Schritte
2^1	1
2^2	$1+2$
2^k	

Herleitung der Laufzeit

N	Anzahl der Schritte
2^1	1
2^2	$1+2$
2^k	$1+2+3+\ldots+k-1+k=\sum_{i=1}^{k} i$

Herleitung der Laufzeit

N	Anzahl der Schritte
2^1	1
2^2	$1+2$
2^k	$1+2+3+\ldots+k-1+k=\sum_{i=1}^{k} i$
(kleiner Gauss)	

Herleitung der Laufzeit

N	Anzahl der Schritte
2^1	1
2^2	$1+2$
2^k	$1+2+3+\ldots+k-1+k = \sum_{i=1}^{k} i$
(kleiner Gauss)	$= \frac{k \cdot (k+1)}{2}$

Herleitung der Laufzeit

N	Anzahl der Schritte
2^1	1
2^2	$1+2$
2^k	$1+2+3+\ldots+k-1+k = \sum_{i=1}^{k} i$
(kleiner Gauss)	$= \frac{k \cdot (k+1)}{2}$
$(k = log_2 n)$	

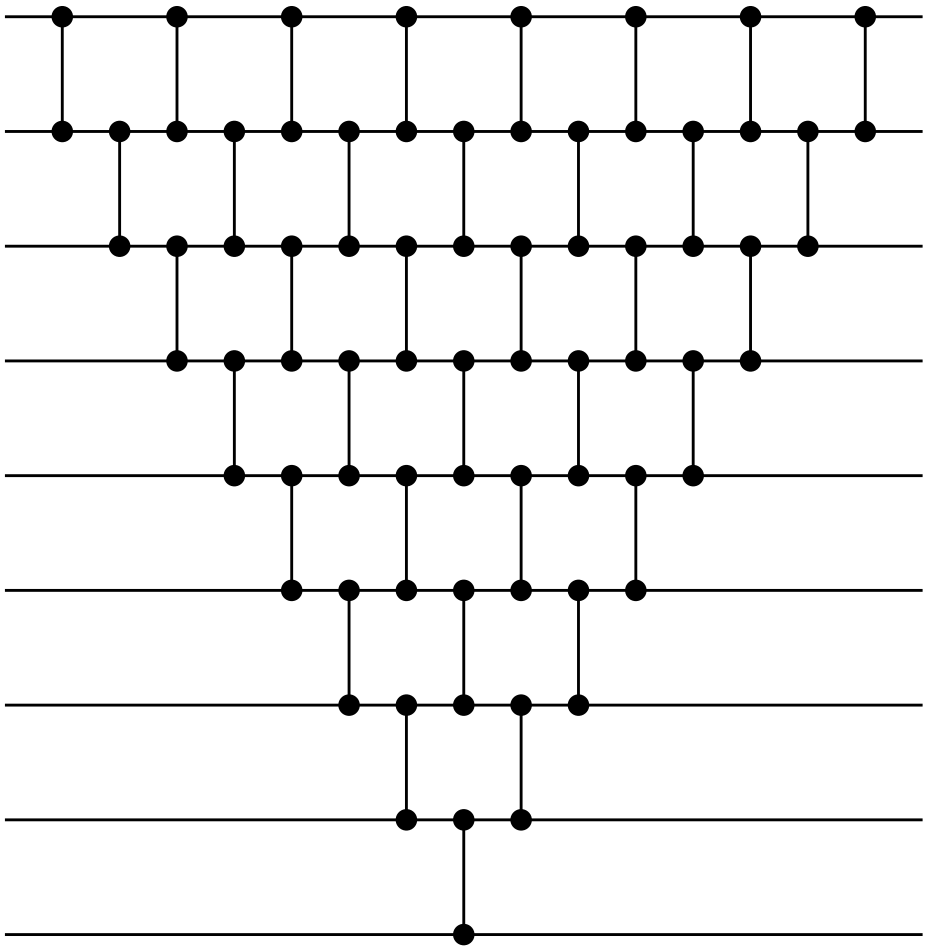
Herleitung der Laufzeit

N	Anzahl der Schritte
2^1	1
2^2	$1+2$
2^k	$1+2+3+\ldots+k-1+k=\sum_{i=1}^{k} i$
(kleiner Gauss)	$=\frac{k\cdot(k+1)}{2}$
$(k=log_2 n)$	$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot \log_2 n\ (\log_2 n\ +\ 1)$

Vergleich zu Softwareansätzen

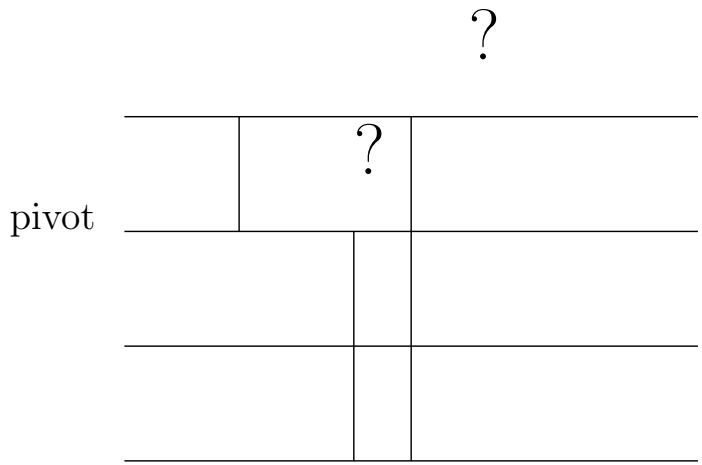
- Schritte gegen Vergleiche
- Abhängigkeit von der Eingabe
- Bezug zum vorherigen Vergleich

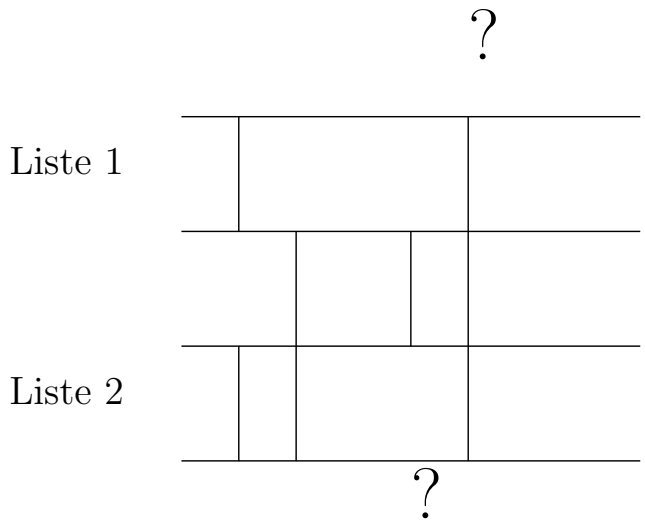
Bubblesort im Hardwarenetz



Mergesort Quicksort

Mergesort Quicksort





Quicksort : wo ist das Pivot Element ?
Mit welchem Element müssen wir nun vergleichen?

Mergesort Quicksort

Quicksort : wo ist das Pivot Element ?
Mit welchem Element müssen wir nun vergleichen?
Mergesort : Wo ist nun das größte Element ?
welcher Vergleich kommt nun?)

Gegenüberstellung

- Geschwindigkeit vs Variabilität
  - hohe Geschwindigkeit durch direkte Hardware Implementriegung
  - starre Struktur , bildet Rahmen der Möglichkeiten
  - stark typisierte Eingabe
- Hardwareaufwand vs Softwareaufwand
  - Software zur Auswertung keine zum sortieren
  - geringe Skalierbarkeit
  - hoher Aufwand wenn Eingabelimit überschritten wird
  - nur lokal
  - Hardware Konzeption eventuell aufwendiger

Motivation

Grundlage des Sortierens

Sortiernetzwerk

Laufzeit

Gegenüberstellung

Zusammenfassung

Ausblick

Zusammenfassung

- paralleles sortieren ist schnell und effizient
- problemabhängige Lösung
- starr, nicht universell

Ausblick

- andere Arten von Netzwerken
- Hypercubes
- Simulation von Maschinenmodellen
- . . .

For Further Reading I

Taschenbuch der Algorithmen.
Springer Verlag , 2008.

Tom Leighton.
Einführung in Parallele Algorithmen und Architekturen
Gitter, Bäume und Hypercubes.
Thomsom Publisching , 1997.
3-8266-0248-X

zum 0,1-Prinzip
http://www.iti.fh-flensburg.de/lang/algorithmen/sortieren/networks/nulleins.htm

Ende

Fragen, Anregungen?
(keine Liederwünsche)