Computergraphik
Vorlesung

Björn Rathjen

SS14

Contents

1 Vorlesung 23.04.14

1.1 Die projektive Ebene

1.2 homogene Koordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

stellen den selben Punkt in homogenen Koordinaten dar.

vergleiche Geradengleichung : Die Punkte in der projektiven Ebene sind die Äquivalenzklassen von Vektoren $\begin{pmatrix} x \\ y \\ w \end{pmatrix}$ $in\mathbb{R}^3$mit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ w \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ wobei $\vec{a}$ und $\vec{b}$ als äquivalent betrachtet werden, wenn : $\exists \lambda \neq 0 : \vec{a} = \lambda \vec{b}$

1.3 das räumliche Modell der projektiven Ebene

Die Punkte sind Geraden durch den Ursprung in $\mathbb{R}^3$ (Äquivalenzklassen, bis auf den Ursprung $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Zeichnung Koordinatandsystem Ebene Die Punkte mit $w = 0$ heißen Fernpunkte. Ihnen entsprechen kein Punkt mit karthesischen Koordinaten.

Die Punkte der euklidischen Ebene sind alle Punkte außer den Fernpunkten.

Geraden der projektiven Ebene bestehen aus allen Punkten $\begin{pmatrix} x \\ y \\ w \end{pmatrix}$, die eine Geradengleichung

$$ax + by + c = 0$$

mit den Koeffizienten $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ erfüllen.
Für $w = 1$:

$$ax + by + c = 0$$

Geradengleichung : $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ w \end{pmatrix} = 0$

In der projektiven Ebene

a) geht durch je zwei Punkte genau eine Gerade

b) schneiden sich je zwei Geraden in genau einem Punkt

Beweis zu b):

$$ax + by + c = 0$$

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ 3x + 4y + 5 &= 0 \\ 6x + 8yb10 &= 0 \end{aligned} \qquad \left.\begin{matrix} (3, 4, 5) \\ (6, 8, 10) \end{matrix}\right\} \text{ stellen die selben Geradengleichung dar}$$

$$dx + ey + fw = 0$$

homogenes Gleichungssystem in x, y, w

Matrix $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ rg $= 0$ ist ausgeschlossen

Wenn der Rang $= 1$ wäre müsste $(a, b, c) = \lambda(d, e, f)$ sein, dann wären es zwei gleiche Geraden

$\Rightarrow$ Rang $= 2 \Rightarrow$ die Lösung ist eine <u>Gerade</u> durch den Ursprung. (ein projektiver Punkt)

Beweis zu a): $\begin{aligned} ax + by + cw &= 0 \\ au + bv + fz &= 0 \end{aligned}$ mit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ w \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} u \\ v \\ z \end{pmatrix} \forall \lambda$ Gleichungssystem in (a,b,c)

$\begin{pmatrix} x & y & w \\ u & v & z \end{pmatrix}$

Berechnung geht am besten mit dem Kreuzprodukt :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

liefert einen Vektor der senkrecht auf $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ steht.

Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \\ w \end{pmatrix}$ liegt auf Gerade $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ (Inzidenz)

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ w \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Konstruktion

a) Gerade durch zwei Punkte

b) Punkt auf zwei Geraden

gesucht ist ein Vektor, der auf zwei anderen senkrecht steht

$\Rightarrow$ Kreuzprodukt (keine Dimension notwendig, Rechnung ohne Fallunterscheidung parallele Geraden schneiden sich in einem Fernpunkt.

Ausser den Geraden der Euklidischen Ebene enthält die projektive Ebene noch eine zusätzliche Gerade:
die Ferngerade, die alle Fernpunkte enthält.

$$ax + by + cw = 0 \text{ mit } w = 0 \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.4 Kugelmodell

räumliches Modell mit der Einheitssphäre schneiden:

Punkte	$\equiv$	Paare gegenüberliegender Geraden
Geraden	$\equiv$	Großkreise

Zeichnung der Kugel

Dualität Punkte und Geraden werden in der projektiven Geometrie völlig gleich behandelt. Man kann jederzeit überall Punkt durch eine Gerade ersetzen.

Zeichnung Satz von Pappus Projektion : (im Raum)

Projektionszentrum	A
Projektionsebene	π

Zeichnung punkt auf ebene projeziert

Projektion ist eine Abbildung von $\mathbb{R}^3 - (\text{durch})\{A\} \to \pi$

1.) konstruiere die Gerade durch A und $x \in \mathbb{R}^3 \notin \{A\}$

2.) Schneide die Gerade mit π

Zeichnung Baum Spezialfall :

Zeichnung Baum 2

Beispiel: Schatten eines Baumes eventuell als caption

1.5 Der projektive Raum

analog nur mit einer Koordinate mehr

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ Punkte}$$

Dualität zwischen Punkten und Ebenen

1.5.1 Projektionen in der Ebene

Zeichnung Projektionsgerade A(1/0)

Punkte $\begin{pmatrix} x \\ y \\ w \end{pmatrix}$ projezieren

mit A verbinden $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x-w \\ y \end{pmatrix} \leftarrow \text{Verbindungsgerade}$$

Schneiden mit der Geraden

$$x - y = 0 \quad \begin{pmatrix} -y \\ x-w \\ y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ y-x+w \end{pmatrix}$$

1.5.2 Projektionsabbildung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ y \\ y-x+w \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Abbildungsmatrix} \\ \text{dieser projektiven} \\ \text{Abbildung}}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

In karthesischen Koordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{y}{y-x+1} \\ \frac{y}{y-x+1} \end{pmatrix} \quad \text{Fernpunkt bei } y - x + 1 = 0$$

2 Vorlesung 30.04.14

2.1 Die klassische Rendering-Pipeline andere Organisationen sind möglich

Zeichnung der Stationen der Pipeline

$\vec{n}$ gegeben
in der Regel möchte man v ("oben") möglichst senkrecht

Koordinatensystem und Augenkoordinatensystem

$$\vec{u} = -\vec{n} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\vec{v} = \vec{u} \times -\vec{n} \quad (2)$$

$$(3)$$

Zeichnung Sichtbarkeitsstrumpf und Haltepunkt

2.2 normalisierte Gerätekoordinaten (NDC)

Würfelzeichnung

$$\begin{aligned} \text{Strumpf} &\rightarrow \text{"Einheitswürfel"} \\ & \quad [-1,1] \times [-1,1] \times [-1,1] \\ \text{Augpunkt} &\rightarrow \text{Fernpunkt in z-Richtung} \end{aligned}$$

Projektion durch ganz einfach Parallelprojektion durch weglassen dar z-Koordinaton Tiefeninformationen (Welches Opjekt liegt vor einem anderen ?) ist an der z-Koordinaten abzulesen (das Opjekt mit den kleinsten z-Koordinaten)

2.2.1 Spezialfall :

bezogen auf $*^1$ und wenn Zentrum nicht gleich $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x - \frac{\text{l" + r"}}{2} n \\ y - \frac{\text{l" + r"}}{2} n \\ n \end{pmatrix}$$

2.3 Scherungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\text{l" + r"}}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\text{l" + r"}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Transformation zum Spezialfall

1) Alles mit $\frac{1}{\text{nah}}$ skalieren
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\text{nah}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\text{nah}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\text{nah}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\text{nah}} \end{pmatrix}$$

Zeichnung
Öffnungswinkel

2) Bildrechteck auf $2y \times 2$-Rechteck skalieren $\begin{pmatrix} \frac{2}{\text{r' - l'}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\text{t' - b'}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3) Scherung in u und v-Richtung um das Rechteck zu zentrieren. Nun ist r" - l" = 2 und t" - b" = 2 $\rightarrow$ nach Schritt 1 und 2

Zeichnung u,v Koordinaten

nah

$$\begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad M \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda * 1 \quad \lambda = 1$$

fern wähle $\mu = f$

$$\begin{pmatrix} \pm f \\ \pm f \\ -f \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad M \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mu$$

$$M\begin{pmatrix}\pm 1\\ \pm 1\\ -1\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\pm 1\\ \pm 1\\ -1\\ 1\end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & b\\ 0 & 0 & c & d\end{pmatrix}$$

$$M\begin{pmatrix}\pm f\\ \pm f\\ -f\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\pm f\\ \pm f\\ f\\ f\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix} \quad a = \frac{f+1}{f-1} \; b = \frac{-2f}{f-1}$$

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-f\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}f\\ f\end{pmatrix} \quad c = -1 \; d = 0$$

2.3.1 allgemeiner Fall

$$M = \begin{pmatrix}\frac{2nah}{r-l} & 0 & \frac{r+l}{r-l} & 0\\ 0 & \frac{2nah}{t-h} & \frac{t+b}{t-b} & 0\\ 0 & 0 & \frac{-fern+nah}{fern-nah} & -\frac{2fern*nah}{fern-nah}\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix} M^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{r-l}{2nah} & 0 & 0 & \frac{r+l}{2nah}\\ 0 & \frac{t+b}{2nah} & 0 & \frac{t+b}{2nah}\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & \frac{1}{2fern} - \frac{1}{2nah} & \frac{1}{2fern} + \frac{1}{2nah}\end{pmatrix}$$

2.4 Tatsächliche Koordinaten und Rasterung

$res_n \times res_v$ Rechteck von Pixeln
horizontale und vertikale Auflösung
hängt von der Genauigkeit ab.

Zeichnung Raster

$$j = \lfloor (x+1)\frac{res_h}{2} \rfloor = round\left(\frac{(x+1)res_n - 1}{2}\right)$$

$$i = round\left(\frac{(1-y)res_v - 1}{2}\right)$$

3 Vorlenung 02.05.14

Zeichnung Lichtspectrum

Für das Farbsehen gibt es im Auge 3 verschiedene Arten von Zäpfchen, die unterschiedlich auf verschiedene Wellenlängen ansprechen

Zeichnung Stäbchenspektrum

3.1 Intensitätsverteilung I(λ)

Empfindung der S-Zäpfchen wird gegeben

$$\int_{\lambda} S(\lambda) \cdot I(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda$$

analog für M und L-Zapfen.
Diese drei Werde bestimmen den Farbeindruck.

3.2 Prinzib der Additiven Farbmischung

3.3 Prinzip der subtraktiven Farbmischung

Jede durchlässige Folie lässt Licht verschiedener Wellenlängen in unterschiedlicher Intensität durch Wenn man zwei unterschiedliche Lichtquellen A und A' mit dem selben Farbeindruck mit einer dritten Lichtquelle B additiv mischt, dann erzeugen A+B und A'+B den selben Farbeindruck.
Wenn die Intensität proportional gesteigert wird, ändert sich nur die Helligkeit, nicht (der Farbton) die Farbe. Der Schnitt mit einer Ebene gibt schon alle Informationen über die möglichen Farbwahrnehmungen. Farbdreieck

Es gibt Licht in jeder beliebigen Wellenlänge
412 nm
414 nm
stetiger Übergang
Wellenlänge bestimmt die Farbwahrnehmung

natürliches Licht besteht aus verschiedenen Wellenlängen
Zeichnung Sonnenlicht besitzt alle Anteile gefiltert durch Atmossphäre
Zeichnug + monochromatisches Licht

Prisma Zeichnung

Der Raum der wahrnehmbaren Farben ist dreidimensional. Wir können nicht alle verschiedenen Mischungen von Spektralfarben unterscheiden

Koordinatensystem

verschiedene Scheinwerfer leuchten übereinander

Zeichnung Scheinwerfer

- Bildschirm
- Projektor

R	+	G	=	Yellow
R	+	B	=	Magenta
B	+	G	=	Cyan

y lässt R+G durch
absorbiert B

Zeichnung graph

Farbe von einer Oberfläche zurückgeworfen und genügt gleichen Gesetzen

$$I^{aus}(\lambda) = I^{ein}(\lambda) \cdot C(\lambda)$$

Zeichnung Licht

4 Vorlesung 14.05.14

4.1 Rasterung, Zeichnungen von Geraden und Kreisen der Bresenham-Algorithmus

gegeben: zwei Endpunkte
$A, B \in \mathbb{Z}^2$ (Gitterebene)
welche Bildpunkte $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ soll man zeichnen / einschalten?

Gitterzeichnung

Grundoperation
SetPixel(i,j,Farbe)
Farbe konstant weil vorgegeben
→ weglassen

1.) Annahme: A=(0,0) (Translation)
B=(x,y)

2.) o.B.d.A $x, y \geq 0 \Rightarrow$ B im ersten Quadranten

Halbkreiszeichnung

3.) o.B.d.A $y \leq x \Rightarrow$ B im ersten Qktanten weil Vertauschung von x und y möglich

Steigung $m = \dfrac{y}{x} \quad 0 \leq \dfrac{y}{x} \leq$

gitterliniennetz

Festlegung : wir zeichnen für jede vertikale Gitterlinie $i = 0, 1, \ldots, x$ genau ein Pixel(i,j)

for $i = 0, 1, 2, ..., x$
    SetPixel($i, round\frac{y}{x}$)