马中琪群论(第二版)

p44-45　3，　4，　6，　8，　10

3. 设H_1和H_2是群 G 的两个子群，证明H_1和H_2的公共元素的集合也构成群 G 的子群。

证明： 假设$H = H_1 \cap H_2$, 要证明 H 构成群，即证 H 中元素满足群乘法定义,

(1). 恒元。H_1, H_2均为 G 的子群，故两者均包含单位元 E，即 E∈ H。

(2). 逆元。对于 H 除恒元外任意元素 R，因为 R∈ H_1, H_2,由子群性质可知，必有$R^{-1} \in H_1, H_2$,即有$R^{-1} \in H$.

(3). 封闭性。对于任意$R_1, R_2 \in H$，因$R_1, R_2 \in H_1, H_2$,由子群性质可知，$R_1 R_2 \in H_1, H_2$，即$R_1 R_2 \in H$.

(4).乘法结合律可由由群 G 的性质保证。　　END

4. 证明当群 G 的阶数为 5，6 或 7 时，除恒元外，不可能所有元素的阶都是 2.

证明：

（1）.当群 G 的阶数为 5 或 7 时，因群的阶数必须是群元素阶数的倍数，因此不可能存在有阶数为 2 的元素。

（2）.当群 G 的阶数为 6 时，其除自身阶数外可存在有阶数为 2 或 3 的元素。但重排定理不允许所有元素阶数都为 2.理由如下：假设存在这样的群{a,b,c,d,e,f}，那么有$a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = f^2 = e$。不失普遍性设 ab=c，于是可直接给出 ac=b, cb=a。

由此可填充表格至表 1 的状态：

表 1.

	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	e	c	b		
b	b	c	e	a		
c	c	c	a	e		
d	d				e	
f	f					e

而此时{e,a,b,c}将构成 G 的子群，阶数为 4，得到矛盾。故六阶群不可能每个元素的阶均为 2.　　END

6. 设群 G 的阶数$g = 2n$，n 是大于 2 的素数，准确到同构，证明群 G 只有两种：循环群G_{2n}和正多边形对成群D_n。

证明：由群 G 的阶数为$g = 2n$且 n 为质数可知，群 G 元素的阶只能是 2，n 或 2n. 对此以下进行分类讨论：

(1). 当存在群元素阶为 2n 时，此时 G 为循环群C_{2n}.

(2). 当存在群元素阶为 n 时。将 n 阶循环群写成$\{E, R \dots R^{n-1}\}$,不失普遍性，将其陪集记成$\{S_0, S_1 \dots S_{n-1}\}$,满足$R^m S_j = S_{j+m}$,其中$S_{j+n} = S_j$.由重排定理可知，$S_j^2$不能等于 S_k(可由乘法表得知)。此外，S_j^2不能够等于 R 或者R^2，否则S_j将成为 2n 阶群元。因此只能有$S_j^2 = E$。于是有$R^m = S_{j+m} S_j$和$S_j R^m = S_{j-m}$.由此我们得到了

D_N的乘积规则，即此时 G 为D_N群。

（3）.当群元素除了恒元阶数均为 2 阶时，可发现不可避免会出现四阶子群（正如表 1 所示），而 4 不是 2n 的约数，矛盾。

因此只有两种群：循环群G_{2n}和正 n 边形对称群D_n.　END

8. 证明由$i\sigma_1$和$i\sigma_2$的所有可能乘积和幂次的集合构成群，列出此群的乘法表，指出此群的阶数，各元素的阶数，群包含的各类和不变子群，不变子群的商群和什么群同构。说明该群和D_4不同构。

由$i\sigma_1$和$i\sigma_2$乘积扩充的群有 8 个元素，乘法表如下：

	1	$i\sigma_1$	$i\sigma_2$	$i\sigma_3$	-1	$-i\sigma_1$	$-i\sigma_2$	$-i\sigma_3$
1	1	$i\sigma_1$	$i\sigma_2$	$i\sigma_3$	-1	$-i\sigma_1$	$-i\sigma_2$	$-i\sigma_3$
$i\sigma_1$	$i\sigma_1$	-1	$-i\sigma_3$	$i\sigma_2$	$-i\sigma_1$	1	$i\sigma_3$	$-i\sigma_2$
$i\sigma_2$	$i\sigma_2$	$i\sigma_3$	-1	$-i\sigma_1$	$-i\sigma_2$	$-i\sigma_3$	1	$i\sigma_1$
$i\sigma_3$	$i\sigma_3$	$-i\sigma_2$	$i\sigma_1$	-1	$-i\sigma_3$	$i\sigma_2$	$-i\sigma_1$	1
-1	-1	$-i\sigma_1$	$-i\sigma_2$	$-i\sigma_3$	1	$i\sigma_1$	$i\sigma_2$	$i\sigma_3$
$-i\sigma_1$	$-i\sigma_1$	1	$i\sigma_3$	$-i\sigma_2$	$i\sigma_1$	-1	$-i\sigma_3$	$i\sigma_2$
$-i\sigma_2$	$-i\sigma_2$	$-i\sigma_3$	1	$i\sigma_1$	$i\sigma_2$	$i\sigma_3$	-1	$-i\sigma_1$
$-i\sigma_3$	$-i\sigma_3$	$i\sigma_2$	$-i\sigma_1$	1	$i\sigma_3$	$-i\sigma_2$	$i\sigma_1$	-1

由乘法表可知，这 8 个元素的集合对元素的乘积是封闭的，矩阵的乘积满足结合律，E=1 是这个集合的恒元，-1 是自逆元素，$i\sigma_a$和$-i\sigma_a$（$1 \le a \le 3$）互为逆元。因此这个集合构成群，阶数为 8.恒元 1 的阶数为 1，-1 的阶数为 2， $i\sigma_a$和$-i\sigma_a$的阶数均

为 4. 1 和-1 各自成一类，$i\sigma_a$和$-i\sigma_a$（a=1,2,3）构成一类，共 5 个类。不变子群有{1，-1}，{1，-1，$i\sigma_1$，$-i\sigma_1$}，{1，-1，$i\sigma_2$，$-i\sigma_2$}，{1，-1，$i\sigma_3$，$-i\sigma_3$}.后三个不变子群的商群都是二阶群，与V_2群同构。第一个不变子群的陪集是互差负号的两个矩阵，即{ $i\sigma_a$，$-i\sigma_a$}（a=1,2,3），它们的平方均等于不变子群{1，-1}，故此商群与V_4群同构。因为此群包含 6 个阶数为 4 的元素，故不与D_4群同构。（D_4仅含 4 个阶数为 4 的元素）。

10.准确到同构，证明九阶群 G 只有两种：循环群C_9与直乘群$C_3 \otimes C_3$。

证明：对于九阶群，除恒元外，元素的阶数只能为 3 和 9.若至少存在一个群元素的阶数为 9 阶，那么此群为循环群C_9。

若九阶群中没有九阶元素，即除恒元外的元素都是 3 阶元素。任取一个 3 阶元素，记作 A,由 A 构成的循环子群{E,A,A^2},一个右陪集记作{B,C,D}。

不失普遍性。可设 AB=C, AC=D,AD=B,（1） 其中 B,C,D 均为三阶元素，它们的平方不能等于 E,A 或者A^2，又由重排定理（乘法表）可知，其平方也不能等于 B,C,D,此外它们之间也不能彼此相等（由上面关系式（1）可推知）。因此可将{B^2, C^2, D^2}构成另一个陪集。由重排定理，$AB^2 = CB$不能等于C^2和B^2，只能等于D^2。由以上关系式可填充该群乘法表，可知该群是个阿贝尔群，即证该群为直乘群$C_3 \otimes C_3$。END

课堂布置习题：

1. (1).列举D_3的子群。

   {E,A}, {E,B}, {E,C}, {E,D,F}

   (2).说明 H={E,D,F}是D_3的正规子群。由D_3群元素的乘法规则，可计算得

   AH={A,C,B}=HA, BH={B,A,C}=HB , CH={C,B,A}=HC

   故 H 为D_3的正规子群。

2. a. H_1与H_2是两个群，G 是一个集合，对其元素有 $g=(h_1, h_2)$，则$G=H_1\times H_2$,

   b. H_1和H_2是 G 的两个子群，$H_1\cap H_2=\{e\}$，$\forall h_1\in H_1, h_2\in H_2$，$h_1h_2=h_2h_1$. $\forall g\in G, \exists h_1, h_2, g=h_1h_2$,则 G 为$H_1\times H_2$.

   证明 a 与 b 等价。

证明:

$a\to b$： 由$g=(h_1,h_2)$，因H_1与H_2是两个群，故可保证 G 构成群。取 $h_1=e_1$,此时有$(e_1,h_2)(e_1,h_2')=(e_1,h_2h_2')$,因$H_2$本身构成群，故$(e_1,H_2)$构成 G 的子群。同理，$(H_1,e_2)$也为 G 子群。$H_1$和$H_2$为不同群,故有$(e_1,H_2)\cap(H_1,e_2)=(e_1,e_2)$.对于 $\forall(h_1,e_2)\in(H_1,e_2)$，$(e_1,h_2)\in(e_1,H_2)$，$(h_1,e_2)(e_1,h_2)=(e_1,h_2)(h_1,e_2)$，且 G 中所有元素均由$g=(h_1, h_2)$构成,于是由条件 a 给出了条件 b.

$b\to a$：由于H_1和H_2构成群，显然(e_1,H_2)和(H_1,e_2)也构成群。因$\forall h_1\in H_1, h_2\in H_2$，$h_1h_2=h_2h_1$. $\forall g\in G,\exists h_1,h_2, g=h_1h_2$，故可将所

有 g 写成(h_1，h_2)的形式，可由条件 b 给出条件 a。

综上，两种表述等价。　　　　END

3. 定理： $G'\sim G$, $\varphi^{-1}(e)\subset G$,则$H=\varphi^{-1}(e)$为 G 的正规子群。

试证：（1）. H 构成群

（2）. $\forall g$，$gH=Hg$

证明见马中骐群论 P31 定理二