三、路径积分量子化

- 与正则量子化平行的量子化方法（1942年Feynman的博士论文）
- 与经典力学对应
    - 正则量子化对应于哈密顿体系（Possion括号）
    - 路径积分量子化对应于拉格朗日体系（最小作用量原理）
- 优点
    - 规范场的量子化
    - 数学上更简单（高斯积分）
    - 欧几里德化后方便用于计算机模拟
    - 在凝聚态物理、统计物理中有广泛应用

格林函数的路径积分形式　（$S[\phi]=\int d^4x\,\mathcal{L}(\phi)$）：

$$\langle\Omega|T\{\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\}|\Omega\rangle=\frac{\int D\phi\;\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)e^{iS[\phi]}}{\int D\phi\,e^{iS[\phi]}}$$

路径积分的微扰形式　（$\mathcal{L}=\mathcal{L}_0+\mathcal{L}_{int}$，$S_0[\phi]=\int d^4x\,\mathcal{L}_0(\phi)$）

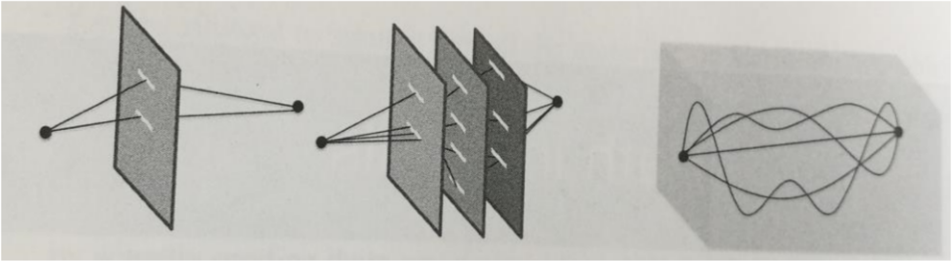
$$\langle\Omega|T\{\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\}|\Omega\rangle=\frac{\int D\phi\,e^{iS_0[\phi]}e^{i\int d^4x\mathcal{L}_{int}(\phi)}\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)}{\int D\phi\,e^{iS_0[\phi]}e^{i\int d^4x\mathcal{L}_{int}(\phi)}}$$

正则量子化中的微扰展开　（相互作用表象）— Gell-Mann-Low 形式

$$\langle\Omega|T\{\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\}|\Omega\rangle$$

$$=\lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)}\frac{\left\langle 0\left|T\{\phi_I(x_1)\cdots\phi_I(x_n)\}e^{-i\int_{-T}^{T}dt\,H_I(t)}\right|0\right\rangle}{\left\langle 0\left|Te^{-i\int_{-T}^{T}dt\,H_I(t)}\right|0\right\rangle}$$

1. 引言



路径积分的思想来自于量子力学中的电子双缝干涉实验：

a) 电子束通过两个狭缝到达后面的计数器（比如显示屏），会出现干涉条纹（电子的波动性）。
b) 这可以理解为电子通过不同的狭缝到达接收屏会有因路程不同引起的相位差（类似光的传播中的光程差）。
c) 这也可以通过量子力学中的态叠加原理来解释：电子源（初态）的波函数经时间演化（不同的路径演化不同）后在接收屏不同态的叠加，叠加的波函数的模方给出电子在接收屏上的分布。
d) 推而广之，我们可以在源和屏之间增加无数的“栅栏”，在每个“栅栏”上开无数的狭缝，….
e) 极限情形下，则对应没有“栅栏”，电子数可以通过所有可能的路径到达接收屏。那么，在接收屏上的分布是电子经过所有路径后的波函数的叠加态的模方。

量子力学中：相位等于作用量除以普朗克常数（量纲分析） $\sim i\frac{S}{\hbar}$

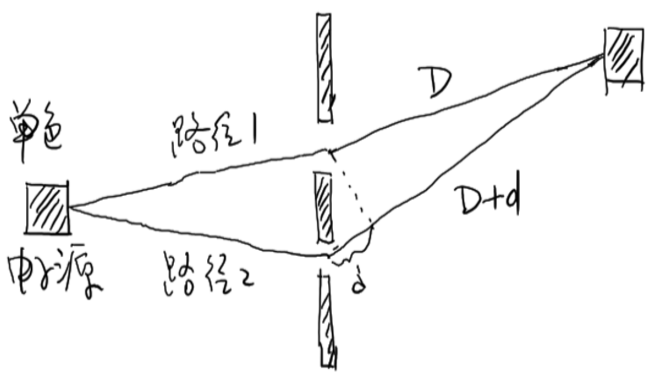
量子情形，所有的路径都有贡献。

经典情形 $\hbar \to 0$，相位由最小作用量决定（经典路径）；

正则量子化： 基于物质的粒子性，哈密顿体系， Lorentz 协变不显然。

路径积分量子化：基于物质的波动性， 拉氏体系，Lorentz 协变。

特点：没有算符，经典场位形就能给出量子效应；量子化简洁。



$$\boxed{\langle x_b, t_f | x_a, t_i \rangle \propto \sum_{all\ path} e^{\frac{i}{\hbar}S(path)}}$$

$$S = \frac{1}{2}mv^2 t, \qquad t = \frac{D}{v_1}, \qquad v_1 = \frac{D}{t}$$

$$Phase(path1) = \frac{S_1}{\hbar} = \frac{mD^2}{2\hbar t}$$

$$Phase(path2) = \frac{S_2}{\hbar} = \frac{m(D+d)^2}{2\hbar t}$$

$$d \ll D, \Delta_{phse} \approx \frac{mDd}{\hbar t} \approx \frac{pd}{\hbar} = \frac{2\pi d}{\lambda}, \qquad \left(p = \frac{h}{\lambda}\right)$$

2. 量子力学中的路径积分

1） 一个自由度的量子力学体系

共轭变量算符 (X,P)，$[X,P]=i$　　哈密顿量　$H=\dfrac{P^2}{2m}+V(X)$

(Q,P) 的本征矢量构成正交完备集：　$X|x\rangle = x|x\rangle,\qquad P|p\rangle = p|p\rangle$

$$\langle x'|x\rangle = \delta(x-x'),\qquad \langle p'|p\rangle = \delta(p-p')$$

$$\langle x|p\rangle = \langle p|x\rangle^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ipx}$$

$$\langle x|P|p\rangle = p\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}p\, e^{ipx} = -i\frac{\partial}{\partial x}\langle q|p\rangle$$

任意的量子态$|\psi\rangle$，其波函数：$\psi(x)\equiv\langle x|\psi\rangle$;　$\tilde{\psi}(p)\equiv\langle p|\psi\rangle$

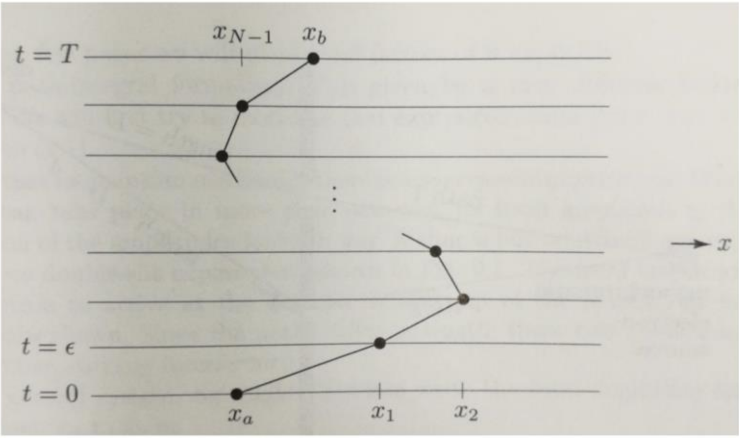
$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle = \int dp\ \langle x|p\rangle\langle p|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int dp\ \tilde{\psi}(p)e^{ipx}$$

$$\tilde{\psi}(p) = \langle p|\psi\rangle = \int dx\ \langle p|x\rangle\langle x|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int dx\ \psi(x)e^{-ipx}$$

一个粒子 $t=0$ 时在 x_a

那么 $t=T$ 时在 x_b 处发现它的几率幅

$$\langle x_b, T | x_a, 0\rangle \equiv \left\langle x_b \middle| e^{-iHT} \middle| x_a \right\rangle$$



将时间段 $[0,T]$ 分成 N 等份 $T=N\epsilon$

$$U(x_b, x_a; T) = \langle x_b, T | x_a, 0\rangle \equiv \left\langle x_b \middle| e^{-iHT} \middle| x_a \right\rangle \equiv \langle x_b | e^{-iH\epsilon} e^{-iH\epsilon} \cdots e^{-iH\epsilon} | x_a \rangle$$

在每个时间点 $t_k = k\epsilon$ 插入中间态： $\int dx_k |x_k\rangle\langle x_k| = 1$

$$\left\langle x_b \middle| e^{-iHT} \middle| x_a \right\rangle = \prod_{i=1}^{N-1} \int dx_i \left\langle x_b \middle| e^{-iH\epsilon} \middle| x_{N-1} \right\rangle \left\langle x_{N-1} \middle| e^{-iH\epsilon} \middle| x_{N-2} \right\rangle \cdots \left\langle x_1 \middle| e^{-iH\epsilon} \middle| x_a \right\rangle$$

$$\left\langle x_{k+1} \middle| e^{-iH\epsilon} \middle| x_k \right\rangle = \left\langle x_{k+1} \middle| \exp\left[-i\epsilon\left(\frac{P^2}{2m} + V(X)\right)\right] \middle| x_k \right\rangle$$

$$\approx \left\langle x_{k+1} \middle| \exp\left[-i\epsilon\left(\frac{P^2}{2m}\right)\right] \exp[-i\epsilon V(x_k)] \middle| x_k \right\rangle$$

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]}$$
$$[A,B] \sim O(\epsilon^2)$$

$$\langle x_{k+1}|f(P)|x_k\rangle = \int \frac{dp_{k+1}dp_k}{2\pi}\langle x_{k+1}|p_{k+1}\rangle\langle p_{k+1}|f(P)|p_k\rangle\langle p_k|x_k\rangle$$

$$= \int \frac{dp_{k+1}dp_k}{2\pi} e^{i(p_{k+1}x_{k+1}-p_kx_k)} f(p_k)\delta(p_{k+1}-p_k)$$

$$= \int \frac{dp_k}{2\pi} e^{ip_k(x_{k+1}-x_k)} f(p_k)$$

$$\left\langle x_{k+1}\left|\exp\left(-i\epsilon\frac{P^2}{2m}\right)exp[-i\epsilon V(x_k)]\right|x_k\right\rangle$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi\, e^{-b\xi^2} = \sqrt{\frac{\pi}{b}}}$$

$$= \int \frac{dp_k}{2\pi} e^{ip_k(x_{k+1}-x_k)}\, exp\left(-i\epsilon\frac{p_k^2}{2m}\right)\exp[-i\epsilon V(x_k)]$$

$$= \sqrt{\frac{-im}{2\pi\epsilon}}\exp\left[i\left(\frac{1}{2}m\frac{(q_{k+1}-q_k)^2}{\epsilon} - \epsilon V(x_k)\right)\right]$$

$$= \sqrt{\frac{-im}{2\pi\epsilon}}\exp\left[i\epsilon\left(\frac{1}{2}m\dot{x}_k^2 - V(x_k)\right)\right] \equiv \sqrt{\frac{-im}{2\pi\epsilon}}e^{i\epsilon L(x_k,\dot{x}_k)}$$

$$\langle x_b|e^{-iHT}|x_a\rangle = \lim_{N\to\infty}\prod_{i=1}^{N-1}\left[\int dx_i\sqrt{\frac{-im}{2\pi\epsilon}}\,e^{i\epsilon L(x_i,\dot{x}_i)}\right]\sqrt{\frac{-im}{2\pi\epsilon}}\,e^{i\epsilon L(x_a,\dot{x}_a)}$$

$$= \lim_{N\to\infty}\sqrt{\frac{-im}{2\pi\epsilon}}\prod_{i=1}^{N-1}\left[\int dx_i\sqrt{\frac{-im}{2\pi\epsilon}}\right]e^{i\int dt\,L(x(t),\dot{x}(t))}$$

$$\equiv \int_{x_a}^{x_b} Dx(t)\,e^{i\int dt\,L(x(t),\dot{x}(t))} = \int_{x_a}^{x_b} Dx(t)\,e^{iS[x(t)]}$$

现在将 $\hbar$ 补回来：$e^{iHt} \to e^{\frac{i}{\hbar}Ht}$　　$\langle x_b, T|x_a, 0\rangle = \int_{x_a}^{x_b} Dx(t)\,e^{\frac{i}{\hbar}S[x(t)]}$

经典情形（$\hbar \to 0$）：　上述路径积分只有作用量最小的路径才有贡献

$\delta S[x(t)] = 0 \quad \Longrightarrow$ 经典路径　$x_{cl}(t)$　$\langle x_b, T|x_a, 0\rangle \xrightarrow{\hbar\to 0} e^{\frac{i}{\hbar}S[x_{cl}(t)]}$

这解释了前面我们对电子双缝干涉实验理论解释的合理性。

2） 多自由度体系的路径积分

多自由度体系 $q = \{q_i, i = 1, 2, \dots, n\}$, $p = \{p_i, i = 1, 2, \dots, n\}$

体系在 $t = 0$ 时刻的正则坐标为 $q(t = 0) = q_a$,

$t = T$ 时刻坐标为 $q(t = T) = q_b$ 的几率幅为

$$U(q_b, q_a; T) = \langle q_b | e^{-iHT} | q_a \rangle, \qquad (\hbar = 1)$$

将时间段 $[0, T]$ 分成 N 等份 $T = N\epsilon$,（ $H(t) \equiv H$ ）

$$U(q_a, q_b; T) = \langle q_b | e^{-iHT} | q_a \rangle = \langle q_b | e^{-iH\epsilon} e^{-iH\epsilon} \dots e^{-iH\epsilon} | q_a \rangle$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{N-1} dq_i \right) \langle q_b | e^{-iH\epsilon} | q_{N-1} \rangle \langle q_{N-1} | e^{-iH\epsilon} | q_{N-2} \rangle \dots$$

$$\times \langle q_{k+1} | e^{-iH\epsilon} | q_k \rangle \dots \langle q_1 | e^{-iH\epsilon} | q_a \rangle$$

对于其中每一项做小 ϵ 展开有

$$\langle q_{k+1} | e^{-iH\epsilon} | q_k \rangle = \langle q_{k+1} | (1 - i\epsilon H + \cdots) | q_k \rangle$$

利用如下公式

$$\langle q_{k+1}|f(\hat{q})|q_k\rangle = f(q_k)\prod_i \delta(q_k^i - q_{k+1}^i)$$

$$= f\left(\frac{q_k + q_{k+1}}{2}\right)\left(\prod_i \int \frac{dp_k^i}{2\pi}\right) e^{i\sum_i p_k^i (q_{k+1}^i - q_k^i)}$$

$$\langle q_{k+1}|f(\hat{p})|q_k\rangle$$

$$= \left(\prod_i \int dp_k^i\right)\left(\prod_i \int dp_{k+1}^i\right)\langle q_{k+1}|p_{k+1}\rangle\langle p_{k+1}|f(p)|p_k\rangle\langle p_k|q_k\rangle$$

$$= \left(\prod_i \int dp_k^i dp_{k+1}^i\right)\prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{iq_{k+1}^i p_{k+1}^i}\prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-iq_k^i p_k^i} f(p_k)\prod_i \delta(p_{k+1}^i - p_k^i)$$

$$= \left(\prod_i \int \frac{dp_k^i}{2\pi}\right) f(p_k)\, e^{i\sum_i p_k^i (q_{k+1}^i - q_k^i)}$$

我们可以得到

$$\langle q_{k+1}|H(q,p)|q_k\rangle = \left(\prod_i \int \frac{dp_k^i}{2\pi}\right) H\left(\frac{q_{k+1}+q_k}{2}, p_k\right) e^{i\sum_i p_k^i (q_{k+1}^i - q_k^i)}$$

这样，我们就有

$$\langle q_{k+1}|e^{-iH\epsilon}|q_k\rangle = \left(\prod_i \int \frac{dp_k^i}{2\pi}\right) \exp\left[-i\epsilon H\left(\frac{q_{k+1}+q_k}{2}, p_k\right)\right] e^{i\sum_i p_k^i (q_{k+1}^i - q_k^i)}$$

从而演化振幅为

定义： $\left(\prod_k \int dq_k^i \int \frac{dp_k^i}{2\pi}\right) \equiv \int D[q^i(t)] D[p^i(t)]$

$$U(q_b, q_a; T)$$

$$= \left(\prod_{i,k} \int dq_k^i \int \frac{dp_k^i}{2\pi}\right) \exp\left[i \sum_k \left(\sum_i p_k^i (q_{k+1}^i - q_k^i) - \epsilon H\left(\frac{q_{k+1}+q_k}{2}, p_k\right)\right)\right]$$

$$= \left(\prod_i \int D[q^i(t)] D[p^i(t)]\right) \exp\left[i \int_0^T dt \left(\sum_i p^i \dot{q}^i - H(q,p)\right)\right]$$

被积函数的指数部分就是体系的作用量

$$S[T,0]=\int_0^T dt\left(\sum_i p^i\dot{q}^i-H(q,p)\right)=\int_0^T dt\,L(q,\dot{q},t)$$

再令

$$\prod_i\int D[q^i(t)]D[p^i(t)]\equiv\int D[q(t)]D[p(t)]$$

我们有

$$\langle q_b;T|q_a;0\rangle=U(q_b,q_a;T)=\int_{\substack{q(0)=q_a\\ q(T)=q_b}}D[q(t)]D[p(t)]\,e^{iS[T,0]}$$

这是给定边条件相空间的路径积分表达形式

如果哈密顿量 $H(q,p)$ 中正则动量 p 只有二次式，则可以将动量积掉，得到位形空间的路径积分形式

$$\langle q_b;T|q_a;0\rangle=U(q_b,q_a;T)=\int_{\substack{q(0)=q_a\\ q(T)=q_b}}D[q(t)]\,e^{i\int_0^T dt\,L(q,\dot{q},t)}$$

3） 矩阵元的路径积分表达式

路径积分的一个重要性质（基于态叠加原理）：$\forall\ t \in (t_i, t_f)$ 远离端点，

$$\int Dq\ e^{iS[t_f,t_i]} = \int dq(t) \int Dq\ e^{iS[t_f,t]} \int Dq\ e^{iS[t,t_i]}$$

类似地，考虑矩阵元

$$\langle q_f, t_f|\hat{\mathcal{O}}(t)|q_i, t_i\rangle = \left\langle q_f \left| e^{-iH(t_f-t)}\hat{\mathcal{O}}e^{-iH(t-t_i)} \right| q_i \right\rangle$$

$$= \int dq'dq'' \left\langle q_f \left| e^{-iH(t_f-t)} \right| q'' \right\rangle \langle q''|\hat{\mathcal{O}}|q'\rangle \left\langle q' \left| e^{-iH(t-t_i)} \right| q_i \right\rangle$$

$$= \int dq'\, dq'' \int Dq\ e^{iS[t_f,t]} \langle q''|\hat{\mathcal{O}}|q'\rangle \int Dq\ e^{iS[t,t_i]}$$

如果算符 $\hat{\mathcal{O}}$ 只是 $\hat{q}$ 的函数，则有 $\langle q''|\hat{\mathcal{O}}|q'\rangle = \mathcal{O}(q')\delta(q' - q'')$

$$\langle q_f, t_f|\hat{\mathcal{O}}(t)|q_i, t_i\rangle = \int dq(t) \int Dq\ e^{iS[t_f,t]} \mathcal{O}[q(t)] \int Dq\ e^{iS[t,t_i]}$$

$$= \int Dq\ e^{iS[t_f,t_i]} \mathcal{O}[q(t)]$$

$$\langle q_f, t_f|T\hat{\mathcal{O}}_1(t_1)\hat{\mathcal{O}}_2(t_2)\cdots\hat{\mathcal{O}}_n(t_n)|q_i, t_i\rangle = \int Dq\ e^{iS[t_f,t_i]} \mathcal{O}_1[q(t_1)]\mathcal{O}_1[q(t_1)]\cdots$$

3. 标量场的路径积分量子化

作为一种快捷方式，我们直接将量子场论和量子力学做类比来得到场论的路径积分量子化形式。

1） 动力学变量：

量子力学： 正则坐标和正则动量 $q_i(t), p_i(t), i = 1, 2, \ldots, N$

量子场论： 正则坐标和正则动量 $\phi(\vec{x}, t),\ \Pi(\vec{x}, t)$

2）正则量子化：

量子力学：正则对易关系

$$[q_i(t), p_j(t)] = i\delta_{ij},\ [q_i(t), q_j(t)] = [p_i(t), p_j(t)] = 0$$

量子场论：正则对易关系

$$[\phi(\vec{x}, t\}, \Pi(\vec{y}, t)] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y})$$

$$[\phi(\vec{x}, t), \phi(\vec{y}, t)] = [\Pi(\vec{x}, t), \Pi(\vec{y}, t)] = 0$$

3）物理观测量：

量子力学： $\mathcal{O}(t) = \langle\hat{\mathcal{O}}(t)\rangle \equiv \int dx\ \psi^*(x, t)\hat{\mathcal{O}}(x)\psi(x, t)$

量子场论： $\mathcal{O}(t) = \langle p, s|\hat{\mathcal{O}}(t)|p, s\rangle$

由以上比较可以看出如下的对应关系：

$$q_i(t) \to \phi_{\vec{x}}(t) \equiv \phi(\vec{x},t); \qquad p_i(t) \to \Pi_{\vec{x}}(t) \equiv \Pi(\vec{x},t)$$

如果将它们看作算符则有如下对应关系：

$$\hat{q}(t)|q,t\rangle = q|q,t\rangle \to \hat{\phi}(\vec{x},t)|\phi(\vec{x}),t\rangle = \phi(\vec{x})|\phi(\vec{x}),t\rangle$$
$$\hat{p}(t)|p,t\rangle = p|p,t\rangle \to \hat{\Pi}(\vec{x},t)|\Pi(\vec{x}),t\rangle = \Pi(\vec{x})|\Pi(\vec{x}),t\rangle$$

注意：这里 $|q,t\rangle$ （$|p,t\rangle$）是 Heisenberg 算符 $\hat{q}(t)$ （$\hat{p}(t)$）的本征态；
$|\phi(\vec{x}),t\rangle$ （$|\Pi(\vec{x}),t\rangle$）是 Heisenberg 算符 $\hat{\phi}(\vec{x},t)$（$\hat{\Pi}(\vec{x},t)$）的本征态；

以 $\hat{\phi}(\vec{x},t)$ 为例，对应的 Schrödinger 算符为 $\hat{\phi}(\vec{x})$，

$$\hat{\phi}(\vec{x},t) = e^{i\hat{H}t}\hat{\phi}(\vec{x})e^{-i\hat{H}t}$$

如果 $\hat{\phi}(\vec{x})$ 的本征态为 $|\phi(\vec{x})\rangle$， 即 $\hat{\phi}(\vec{x})|\phi(\vec{x})\rangle = \phi(\vec{x})|\phi(\vec{x})\rangle$，

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(\vec{x},t)|\phi(\vec{x}),t\rangle &= \boxed{\phi(\vec{x})|\phi(\vec{x}),t\rangle} \\ &= e^{i\hat{H}t}\hat{\phi}(\vec{x})e^{-i\hat{H}t}|\phi(\vec{x}),t\rangle = \boxed{e^{i\hat{H}t}\hat{\phi}(\vec{x})\left(e^{-i\hat{H}t}|\phi(\vec{x}),t\rangle\right)}\end{aligned}$$

所以有 （注意，$\phi(\vec{x})$ 是经典场，是普通的函数而不是算符）

$$\hat{\phi}(\vec{x})\left(e^{-i\hat{H}t}|\phi(\vec{x}),t\rangle\right) = e^{-i\hat{H}t}\phi(\vec{x})|\phi(\vec{x}),t\rangle = \phi(\vec{x})\left(e^{-i\hat{H}t}|\phi(\vec{x}),t\rangle\right)$$

由此可得：

$$e^{-i\hat{H}t}|\phi(\vec{x}),t\rangle = |\phi(\vec{x})\rangle \Longrightarrow \boxed{|\phi(\vec{x}),t\rangle = e^{i\hat{H}t}|\phi(\vec{x})\rangle}$$

$|\phi(\vec{x}),t\rangle$ 和 $|\Pi(\vec{x}),t\rangle$ 分别是海森堡算符 $\hat{\phi}(\vec{x},t)$ 和 $\hat{\Pi}(\vec{x},t)$ 的本征态，不是 $|\phi(\vec{x})\rangle$ 和 $|\Pi(\vec{x})\rangle$ 随时间演化 t 后的态，所以是 $e^{i\hat{H}t}$ 而不是 $e^{-i\hat{H}t}$ 。

态 $|\phi(\vec{x}),t\rangle$ 和 $|\Pi(\vec{x}),t\rangle$ 显然构成 t 时刻的正交完备集，即

$$\langle\phi(\vec{x}),t|\phi'(\vec{x}),t\rangle = \delta\big(\phi(\vec{x}) - \phi'(\vec{x})\big), \qquad \int D\phi(\vec{x})\ |\phi(\vec{x}),t\rangle\langle\phi(\vec{x}),t| = 1$$

$$\langle\Pi(\vec{x}),t|\Pi'(\vec{x}),t\rangle = \delta\big(\Pi(\vec{x}) - \Pi'(\vec{x})\big), \qquad \int D\Pi(\vec{x})\ |\Pi(\vec{x}),t\rangle\langle\Pi(\vec{x}),t| = 1$$

基于前面有限多自由度体系的泛函积分形式，我们可以猜想：

体系在 $t=0$ 时刻的场为 $\phi(\vec{x},t=0)=\phi_a(\vec{x})$，则在 $t=T$ 时刻坐标为 $\phi(\vec{x},t=T)=\phi_b(\vec{x})$ 的几率为

$$\langle\phi_b;T|\phi_a;0\rangle = U(\phi_b,\phi_a;T) = \int_{\substack{\phi(\vec{x},0)=\phi_a(\vec{x})\\ \phi(\vec{x},T)=\phi_b(\vec{x})}} D[\phi(\vec{x})]D[\Pi(\vec{x})]\, e^{iS[T,0]}$$

$$S[T,0] = \int_0^T dt \int d^3\vec{x}\, \left(\Pi(x)\,\dot{\phi}(x) - \mathcal{H}[\phi(x),\Pi(x)]\right)$$

其中 $\mathcal{H}[\phi(x),\Pi(x)]$ 为该场论体系的哈密顿量密度。如果哈密顿量中只包含 $\Pi(x)$ 的二次项，则上面的路径积分可以转化成对 $\Pi(x)$ 的 Gaussian 型积分，将正则动量部分积掉，得到：

$$\langle\phi_b;T|\phi_a;0\rangle = \int_{\substack{\phi(\vec{x},0)=\phi_a(\vec{x})\\ \phi(\vec{x},T)=\phi_b(\vec{x})}} D\phi\ \exp\left[i\int_0^T d^4x\mathcal{L}(x)\right]$$

注：更严格的处理可以在相干态(一组态的集合）表象中讨论，具体见曹昌祺书和 Itzykson & Zuber 的书。这里略去。

1） 实标量场的路径积分量子化

自由实标量场的哈密顿量为（$\Pi = \dot{\phi}$）

$$H = \int d^3\vec{x} \left[\frac{1}{2}\Pi^2(x) + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2(x) + V(\phi)\right]$$

如果取边条件 $\phi(\vec{x},0) = \phi_a(\vec{x})$，$\phi(\vec{x},T) = \phi_b(\vec{x})$，则有

$$\langle\phi_a(\vec{x})\,|e^{-iHT}|\phi_b(\vec{x})\rangle$$

$$= \int_{\substack{\phi(\vec{x},0)=\phi_a(\vec{x})\\ \phi(\vec{x},T)=\phi_b(\vec{x})}} D\phi D\Pi\, e^{i\int_0^T d^4x\left[\Pi\dot{\phi}-\frac{1}{2}\Pi^2(x)-\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2-\frac{1}{2}m^2\phi^2(x)-V(\phi)\right]}$$

对 $\Pi(x)$ 的泛函积分是高斯型的积分，可以直接积掉，最后得到

$$\langle\phi_a(\vec{x})\,|e^{-iHT}|\phi_b(\vec{x})\rangle = \int_{\substack{\phi(\vec{x},0)=\phi_a(\vec{x})\\ \phi(\vec{x},T)=\phi_b(\vec{x})}} D\phi\ \exp\left[i\int_0^T d^4x\mathcal{L}(x)\right]$$

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi(x)\right)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2(x) - V\left(\phi(x)\right)$$

2) 格林函数的路径积分形式

在场论中，我们更关心的是格林函数的计算。

考虑边条件$\phi(\vec{x},-T)=\phi_a(\vec{x})$，$\phi(\vec{x},T)=\phi_b(\vec{x})$ 的路径积分：

$$\int D\phi\ \phi(x_1)\phi(x_2)\exp\left[i\int_{-T}^{T}d^4x\,\mathcal{L}(x)\right]$$

把积分测度 $\int D\phi$ 分解为

$$\int D\phi \to \int D\phi_1(\vec{x})\ \int D\phi_2(\vec{x})\ \int_{\substack{\phi(\vec{x},x_1^0)=\phi_1(\vec{x})\\ \phi(\vec{x},x_2^0)=\phi_2(\vec{x})}} D\phi(x)$$

如果 $x_1^0 < x_2^0$，则

$$\int D\phi\ \phi(x_1)\phi(x_2)\exp\left[i\int_{-T}^{T}d^4x\,\mathcal{L}(x)\right]=\int D\phi_1(\vec{x})\ \int D\phi_2(\vec{x})\ \phi_2(\vec{x}_2)\phi_1(\vec{x}_1)$$

$$\times\left\langle\phi_b\middle|e^{-iH(T-x_2^0)}\middle|\phi_2\right\rangle\left\langle\phi_2\middle|e^{-iH(x_2^0-x_1^0)}\middle|\phi_1\right\rangle\left\langle\phi_1\middle|e^{-iH(x_1^0+T)}\middle|\phi_a\right\rangle \qquad \text{(A)}$$

定义Schrödinger 算符 $\hat{\phi}_S(\vec{x}_1)|\phi_1\rangle = \phi_1(\vec{x}_1)|\phi_1\rangle$, $\hat{\phi}_S(\vec{x}_2)|\phi_2\rangle = \phi_2(\vec{x}_2)|\phi_2\rangle$，则有

$$(A) = \left\langle \phi_b \middle| e^{-iH(T-x_2^0)} \hat{\phi}_S(\vec{x}_2) e^{-iH(x_2^0-x_1^0)} \hat{\phi}_S(\vec{x}_1) e^{-iH(x_1^0+T)} \middle| \phi_a \right\rangle$$

$$= \langle \phi_b | e^{-iHT} \hat{\phi}_H(x_2) \hat{\phi}_H(x_1) e^{-iHT} | \phi_a \rangle$$

同理，当 $x_1^0 > x_2^0$，有

$$\int D\phi\ \phi(x_1)\phi(x_2)\, exp\left[i\int_{-T}^{T} d^4x\, \mathcal{L}(x)\right] = \langle \phi_b | e^{-iHT} \hat{\phi}_H(x_1) \hat{\phi}_H(x_2) e^{-iHT} | \phi_a \rangle$$

综合以上两种情况，我们得到

$$\langle \phi_b | e^{-iHT} T\{\hat{\phi}_H(x_1)\hat{\phi}_H(x_2)\} e^{-iHT} | \phi_a \rangle$$
$$= \int D\phi\ \phi(x_1)\phi(x_2) \exp\left[i\int_{-T}^{T} d^4x\, \mathcal{L}(x)\right]$$

- 路径积分自然地包含了编时的概念。
- 表达式的左边已经和两点格林函数的形式很接近了。但是，这时的边条件是 $\phi(\vec{x},-T) = \phi_a(\vec{x})$, $\phi(\vec{x},T) = \phi_b(\vec{x})$。要得到物理真空态之间算符编时乘积的矩阵元，即格林函数，我们还需要考虑边界态在真空态上的投影。

哈密顿量的正交完备集： $\sum_n |n\rangle\langle n| = 1$， $H|n\rangle = E_n|n\rangle$

$$e^{-iHT}|\phi_a\rangle = \sum_n e^{-iE_nT}|n\rangle\langle n|\phi_a\rangle \xrightarrow[T\to\infty(1-i\epsilon)]{} \langle\Omega|\phi_a\rangle e^{-iE_0\cdot\infty(1-i\epsilon)}|\Omega\rangle$$

取极限 $T \to \infty(1-i\epsilon)$ 是为了增加一个时间方向的衰减因子 $e^{-\epsilon E_n \infty}$。
则真空态能量最低，所以取此极限时，真空态的贡献为主。

$$\langle\phi_b|e^{-iHT}T\{\hat{\phi}_H(x_1)\hat{\phi}_H(x_2)\}e^{-iHT}|\phi_a\rangle$$

$$\xrightarrow[T\to\infty(1-i\epsilon)]{} \langle\phi_b|\Omega\rangle\langle\Omega|\phi_a\rangle e^{-i2E_0\cdot\infty(1-i\epsilon)}\langle\Omega|T\{\hat{\phi}_H(x_1)\hat{\phi}_H(x_2)\}|\Omega\rangle$$

类似地，可以证明

$$\langle\phi_b(\vec{x},T)|\phi_a(\vec{x},-T)\rangle = \langle\phi_b|e^{-i2HT}|\phi_a\rangle$$

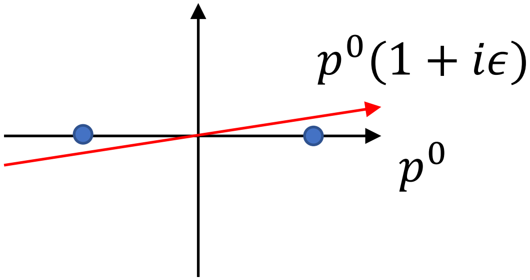
$$= \int D\phi\ \exp\left[i\int_{-T}^{T} d^4x\, \mathcal{L}(x)\right] \xrightarrow[T\to\infty(1-i\epsilon)]{} \langle\phi_b|\Omega\rangle\langle\Omega|\phi_a\rangle e^{-i2E_0\cdot\infty(1-i\epsilon)}$$

两点格林函数的路径积分表达式

$$\langle\Omega|T\{\hat{\phi}_H(x_1)\hat{\phi}_H(x_2)\}|\Omega\rangle = \lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)} \frac{\int D\phi\ \phi(x_1)\phi(x_2)\exp\left[i\int_{-T}^{T} d^4x\, \mathcal{L}(x)\right]}{\int D\phi\ \exp\left[i\int_{-T}^{T} d^4x\, \mathcal{L}(x)\right]}$$

许多 $i\epsilon$ 的说明:

- Feynman 传播子



$$D_F(x-y)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ip\cdot(x-y)}\frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon}$$

$$\Leftrightarrow\int_{-\infty(1+i\epsilon)}^{\infty(1+i\epsilon)}\frac{dp^0}{2\pi}\int\frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{i}{p^2-m^2}$$

- 对时间积分区域的修改，即 $T\to\infty(1-i\epsilon)$ ，相当于引入了时间衰减因子，要求在 $T\to\infty(1-i\epsilon)$ 时，初末态为自由物理真空态的贡献。
- ϕ^4 理论的四点函数的树图阶修正

$$\lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)}\langle 0|T\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)\left(-\frac{i\lambda}{4!}\int_{-T}^{T}dz^0\int d^3\vec{z}\,\phi^4(z)\right)|0\rangle$$

$$=-(i\lambda)\lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)}\int_{-T}^{T}dz^0\int d^3\vec{z}\,D_F(x_1-z)D_F(x_2-z)D_F(x_3-z)D_F(x_4-z)$$

$$=(-i\lambda)\lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)}\int d^3\vec{z}\prod_i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp_i^0}{2\pi}\int_{-T}^{T}dz^0\,e^{i(p_1^0+p_2^0+p_3^0+p_4^0)z^0}\ldots$$

- 积分没有很好的定义：

$$\lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)} \prod_i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_i^0}{2\pi} \int_{-T}^{T} dz^0\, e^{i(p_1^0+p_2^0+p_3^0+p_4^0)z^0} \ldots$$

比如，如果 $P_0 = p_1^0 + p_2^0 + p_3^0 + p_4^0 > 0$ ，取极限 $T \to \infty(1 - i\epsilon)$ 时则上述积分是发散的 （被积函数中 e^{iP_0T} 在取上边极限时会有发散因子 $e^{\epsilon P_0 \infty}$）。

- 除非指数上为纯虚数。要消除这个发散，我们需要将P_0 限修改为 $\pm\infty(1 + i\epsilon)$，

$$\lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)} \prod_i \int_{-\infty(1-i\epsilon)}^{\infty(1+i\epsilon)} \frac{dp_i^0}{2\pi} \int_{-T}^{T} dz^0\, e^{i(p_1^0+p_2^0+p_3^0+p_4^0)z^0} \ldots$$

- 这相当于在做 P_0 积分时，将实轴向一、三象限倾斜，
- 如果修改积分域 $T \to \infty$, $p_i^0 \to \pm\infty$，相当于被积函数中做替换 $p_i^0 \to p_i^0(1 - i\epsilon)$。这样，物理极点将移动到在二、四象限。相应地，传播子就会修改为

$$\frac{1}{p^2 - m^2} \to \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad \text{积分} \to \int d^4z \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}$$

这正是 Feynman 传播子的形式，是因果律和物理边条件的自然要求。

- 在后面我们会看到，这种处理也等价于对拉氏密度引入一个 ϵ 项，

$$\mathcal{L}(x) \to \mathcal{L}(x) + i\epsilon\ \text{项}$$

3) 真空波函数

我们需要深入地理解态$e^{-iHT}|\phi_a\rangle$ 在 $T\to-\infty$ 极限的意义。

- $|\phi_a\rangle$ 实际上是海森堡表象的态。
- 海森堡态和时间无关，但在不同时刻 t 测量则表现形式不同。换句话说，相同的态。
- 在不同的参照系表现不同，根据态的Lorentz变换性质，态 $|\phi_a\rangle$ 在原点为无穷远的过去的坐标系中表现为 $\lim\limits_{T\to-\infty} e^{iHT}|\phi_a\rangle$，记作 $|\phi;-\infty\rangle$。
- 类似地，$\lim\limits_{T\to+\infty} e^{iHT}|\phi_b\rangle = |\phi;+\infty\rangle$。

$$\lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)}\langle\phi_b|\Omega\rangle\langle\Omega|\phi_a\rangle e^{-iE_0\cdot 2T} = \langle\Omega|\phi;+\infty\rangle\langle\phi;-\infty|\Omega\rangle$$

我们将渐近场 $\phi(\vec{x},\mp\infty)$ 做平面波展开

$$\hat{\phi}(\vec{x},\mp\infty) = \lim_{t\to\mp\infty}\int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k}\left(a_{in/out}(k)e^{-ik\cdot x} + a^{+}_{in/out}\,e^{ik\cdot x}\right)$$

$$a_{in/out}(k)|\Omega\rangle_{in/out} = 0, \qquad |\Omega\rangle_{in/out} = |\Omega\rangle$$

考虑到 $\Pi(x)=\dot{\phi}(x)$，我们有

$$a_{in/out}(k)=\lim_{t\to\mp\infty}e^{iEt}\int d^3\vec{x}\,e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\,2E_k\left(\hat{\phi}(x)+\frac{i}{E_k}\hat{\Pi}(x)\right)$$

由 $a_{in/out}(k)|\Omega\rangle_{in/out}=0$ 可知

$$\lim_{t\to\mp\infty}\int d^3\vec{x}\,e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\,2E_k\left(\phi(\vec{x})+\frac{i}{E_k}\Pi_\phi(\vec{x})\right)\langle\phi;\mp\infty|\Omega\rangle=0$$

上式中，我们用到了关系

$$\langle\phi;\mp\infty|\hat{\phi}(x)|\Omega\rangle=\phi(\vec{x})\langle\phi;\mp\infty|\Omega\rangle$$

$$\langle\phi;\mp\infty|\hat{\Pi}(x)|\Omega\rangle=-i\frac{\delta}{\delta\phi(\vec{x})}\langle\phi;\mp\infty|\Omega\rangle\equiv\Pi_\phi(\vec{x})$$

我们知道微分方程 $\left(ax+\frac{d}{dx}\right)f(x)=0$ 的通解形式为 $f(x)=Ce^{-\frac{1}{2}ax^2}$
所以猜测 $\langle\phi;\mp\infty|\Omega\rangle$ 的解的形式为

$$\langle\phi;\mp\infty|\Omega\rangle=N\exp\left(-\frac{1}{2}\int d^3\vec{x}d^3\vec{y}\,\phi(\vec{x})K(\vec{x},\vec{y})\phi(\vec{y})\right)$$

其中 $K(\vec{x},\vec{y})$ 不依赖于 $\phi(\vec{x})$ 的函数。

代入上面方程可以得到

$$0=\int d^3\vec{x}\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\left(\int d^3\vec{y}\ K(\vec{x},\vec{y})\phi(\vec{y})-E_k\phi(\vec{x})\right)$$

即要求

$$\int d^3\vec{x}\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\ K(\vec{x},\vec{y})=e^{-i\vec{k}\cdot\vec{y}}E_k$$

$$K(\vec{x},\vec{y})=\int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\ e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}\ E_k\boxed{=\frac{m}{2\pi^2 r}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}K_{-1}(mr)\right)}$$

$r=|\vec{x}-\vec{y}|\neq 0$ 时

取 $E_{\vec{k}}=E$ 和动量近似无关，就可以得到 $K(\vec{x},\vec{y})=E\delta^3(\vec{x}-\vec{y})$

这样，我们得到

$$\langle\Omega|\phi;+\infty\rangle\langle\phi;-\infty|\Omega\rangle\propto\exp\left(-\frac{1}{2}E\int d^3\vec{x}\ \left[\phi^2(\vec{x},+\infty)+\phi^2(\vec{x},-\infty)\right]\right)$$

利用绝热近似（证明见后） $f(\infty)+f(-\infty)=\lim_{\epsilon\to 0^+}\epsilon\int_{-\infty}^{+\infty}dt\ e^{-\epsilon|t|}f(t)$

再取近似 $e^{-\epsilon|t|}\to 1$ （ $\epsilon\to 0^+$ ），我们就得到了真空波函数的模方

$$\langle\Omega|\phi;+\infty\rangle\langle\phi;-\infty|\Omega\rangle=|N|^2\ \exp\left(-\epsilon\frac{1}{2}\int d^4x\,\phi^2(x)\right),\qquad \epsilon\to 0^+$$

- 这个项的出现是正确的时间边界条件的要求。
- 对照前面关于格林函数的路径积分定义，这相当于在拉氏量中增加一项

$$\mathcal{L}(x)\to\mathcal{L}(x)+i\epsilon\frac{1}{2}\phi^2(x)$$

- 我们会在以后看到，使得传播子为Feynman 传播子

$$\frac{i}{p^2-m^2}\to\frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon},\qquad -\frac{ig_{\mu\nu}}{k^2}\to-\frac{ig_{\mu\nu}}{k^2+i\epsilon}$$

$$\frac{i}{\gamma\cdot p-m}\to\frac{i}{\gamma\cdot p-m+i\epsilon},\cdots$$

$$f(\infty)+f(-\infty)=\lim_{\epsilon\to0^+}\epsilon\int_{-\infty}^{+\infty}dt\ e^{-\epsilon|t|}f(t)$$

证明：当 $\epsilon>0$ 时，

$$\epsilon\int_{-\infty}^{+\infty}dt\ e^{-\epsilon|t|}f(t)=\epsilon\int_{-\infty}^{0}dt\ e^{+\epsilon t}f(t)+\epsilon\int_{0}^{+\infty}dt\ e^{-\epsilon t}f(t)$$

$$=\left[e^{+\epsilon t}f(t)\Big|_{-\infty}^{0}-\int_{-\infty}^{0}dt\ e^{+\epsilon t}f'(t)\right]-\left[e^{-\epsilon t}f(t)\Big|_{0}^{+\infty}-\int_{0}^{+\infty}dt\, e^{-\epsilon t}f'(t)\right]$$

$$=\left[e^{+\epsilon t}f(t)\Big|_{-\infty}^{0}-e^{-\epsilon t}f(t)\Big|_{0}^{+\infty}\right]+\left[\int_{0}^{+\infty}dt\, e^{-\epsilon t}f'^{(t)}-\int_{-\infty}^{0}dt\ e^{+\epsilon t}f'(t)\right]$$

$$=2f(0)+\left[\int_{0}^{+\infty}dt\, e^{-\epsilon t}f'^{(t)}-\int_{-\infty}^{0}dt\ e^{+\epsilon t}f'(t)\right]$$

所以，当取 $\epsilon\to0^+$ 极限时，有

$$\lim_{\epsilon\to0^+}\epsilon\int_{-\infty}^{+\infty}dt\ e^{-\epsilon|t|}f(t)=2f(0)+\lim_{\epsilon\to0^+}\left\{\int_{0}^{+\infty}dt\, f'(t)-\int_{-\infty}^{0}dt\ f'(t)\right\}$$

$$=2f(0)-2f(0)+f(\infty)+f(-\infty)=f(\infty)+f(-\infty)$$

4. 格林函数生成泛函

1）格林函数生成泛函

格林函数的生成泛函 $Z[J]=\int D\phi \exp\left\{i\int d^4x\ [\mathcal{L}(x)+J(x)\phi(x)]\right\}$

其中 $J(x)$ 称作 $\phi(x)$ 的外源函数。将 $Z[J]$ 对外源做泰勒展开，

$$Z[J]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\prod_{i=1}^{n}\int d^4x_i J(x_i)\int D\phi\ \phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_n)e^{i\int d^4x\,\mathcal{L}(x)}$$

$$=Z[0]\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\prod_{i=1}^{n}\int d^4x_i J(x_i)\,\langle\Omega|T\phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_n)|\Omega\rangle$$

$$\equiv Z[0]\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\prod_{i=1}^{n}\int d^4x_i J(x_i)\,G^{(n)}(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

- n-点格林函数 $G^{(n)}(x_1,x_2,\dots,x_n)$ 是生成泛函 $Z[J]$ 对外源 $J(x)$ 做泰勒展开后 $J(x)$ 的 n 次项的系数；生成泛函可以用格林函数来表达。
- 生成泛函是一个基本的量，也包含了该场论体系的所有性质。

n-点格林函数 $G^{(n)}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 的路径积分定义：

$$\langle\Omega|T\phi(x_1)\phi(x_2)\ldots\phi(x_n)|\Omega\rangle = \frac{1}{Z[0]}\int D\phi\ \phi(x_1)\phi(x_2)\ldots\phi(x_n)\, e^{i\int d^4x\,\mathcal{L}(x)}$$

约定：

- 在不引起混乱的情况下，我们都将海森堡算符 $\hat{\phi}_H(x)$ 简写为 $\phi(x)$；
- 当场出现在物理真空的矩阵元中时，都理解为海森堡算符；
- 出现在微扰真空矩阵元中时是相互作用表象中的算符，即自由场算符；
- 出现在路径积分被积函数中时表示经典场，取值是数，而不是算符。

生成泛函的含义：可以通过对生成泛函求若干次泛函偏导数，再取外源为零，就可以得到各种格林函数。

普通偏微商 $\dfrac{\partial}{\partial x_i}x_j=\delta_{ij}$，　$\dfrac{\partial}{\partial x_i}\sum k_j x_j = k_i$

泛函偏微商？？？

公理化假设：

$$\frac{\delta}{\delta J(x)}J(y)=\delta^4(x-y),\qquad \frac{\delta}{\delta J(x)}\int d^4y\,J(y)\phi(y)=\phi(x)$$

$$\frac{\delta}{\delta J(x)}\exp\left[i\int d^4y\,J(y)\phi(y)\right]=i\phi(x)\exp\left[i\int d^4y\,J(y)\phi(y)\right]$$

推论：

$$\frac{\delta}{\delta J(x)}\int d^4y\,\partial_\mu J(y)V^\mu(y)=-\partial_\mu V^\mu(x)$$

证明：

$$\frac{\delta}{\delta J(x)}\int d^4y\,\partial_\mu J(y)V^\mu(y)=-\frac{\delta}{\delta J(x)}\int d^4y\,J(y)\partial_\mu V^\mu(y)=-\partial_\mu V^\mu(x)$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{\delta J(x)}\int d^4y\,\partial_\mu J(y)V^\mu(y)&=\int d^4y\,\partial_\mu\delta^4(x-y)V^\mu(y)\\&=-\int d^4y\,\delta^4(x-y)\partial_\mu V^\mu(y)=-\partial_\mu V^\mu(x)\end{aligned}$$

泛函微商（和积分）运算与普通的时空微商和积分运算是可交换的！

生成泛函：$$Z[J] \equiv Z[0] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \prod_{i=1}^{n} \int d^4x_i\, J(x_i)\, G^{(n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$G^{(n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \langle \Omega | T\phi(x_1)\phi(x_2) \ldots \phi(x_n) | \Omega \rangle$$

$$= \frac{1}{Z[0]} \left(\frac{\delta}{i\delta J(x_1)} \frac{\delta}{i\delta J(x_1)} \cdots \frac{\delta}{i\delta J(x_n)} \right) Z[J] \Big|_{J=0}$$

生成泛函 $Z[J]$ 只是外源 $J(x)$ 的泛函，和场量（积分变量）无关！！！

2） 自由实标量场的格林函数生成泛函

自由场的作用量都可以表示成场量的二次形形式。
自由实标量场的作用量为（根据前面的讨论，我们现在加入 ϵ 项）

$$S_0 = \int d^4x\ \mathcal{L}_0(x) = \int d^4x \left[\frac{1}{2} \left(\partial_\mu \phi(x) \right)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2(x) + i\epsilon \phi^2(x) \right]$$

$$= \int d^4x\, \frac{1}{2} \phi(x) [-\partial^2 - m^2 + i\epsilon] \phi(x)$$

生成泛函

$$Z[J]=\int D\phi\exp\left\{i\int d^4x\left[\frac{1}{2}\phi(x)\left(-\partial^2-m^2+i\epsilon\right)\phi(x)+J(x)\phi(x)\right]\right\}$$

高斯型的泛函积分，可以显式积出。

参照 m–维高斯型积分： $\vec{p}=(p_1,p_2,\dots,p_m)$ 为 m 维空间的矢量

$\vec{J}=(J_1,J_2,\dots,J_m)$ 是一个常矢量

A 是 $m\times m$ 的常数对称矩阵（与 $\vec{p}$ 无关）

$$(\mathrm{A})=\int_{-\infty}^{+\infty}d^m\vec{p}\exp\left[-\frac{1}{2}\vec{p}^{\mathrm{T}}\cdot A\cdot\vec{p}+\vec{J}^{\mathrm{T}}\cdot p\right]=\sqrt{\frac{(2\pi)^m}{\det A}}\exp\left[\frac{1}{2}\vec{J}^{T}\cdot A^{-1}\cdot\vec{J}\right]$$

泛函积分相当于无穷维积分，则有如下对应关系：

$$\vec{p}\to\phi(x),\qquad A\to i\left(\partial^2+m^2-i\epsilon\right),\qquad \vec{J}\to iJ(x)$$

$$-\frac{1}{2}\vec{p}^T\cdot A\cdot\vec{p}+\vec{J}^T\cdot\vec{p}=-\frac{1}{2}\left(\vec{p}-A^{-1}\cdot J\right)^T A\left(\vec{p}-A^{-1}\cdot J\right)+\frac{1}{2}\vec{J}^T\cdot A^{-1}\cdot\vec{J}$$

做变量替换 $\vec{p}'=\vec{p}-A^{-1}\cdot J$

$$(A)=\exp\left[\frac{1}{2}\vec{J}^T\cdot A^{-1}\cdot\vec{J}\right]\int_{-\infty}^{+\infty}d^m\vec{p}'\,exp\left[-\frac{1}{2}\vec{p}'^T\cdot A\cdot\vec{p}'\right]$$

对于实对称矩阵 A, $\exists U,\ UU^T=I,\ det\,U=I,$

$$A=U\,\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m)\,U^T\equiv UDU^T$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi\ e^{-b\xi^2}=\sqrt{\frac{\pi}{b}}}$$

令 $\vec{p}''=U\vec{p}',$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}d^m\vec{p}'\,exp\left[-\frac{1}{2}\vec{p}'^T\cdot A\cdot\vec{p}'\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}d^m\vec{p}''\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(p_i'')^2\right]$$

$$=\prod_{i=1}^{m}\int_{-\infty}^{+\infty}dx\ e^{-\frac{1}{2}\lambda_i x^2}=\prod_{i=1}^{m}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda_i}}=\sqrt{\frac{(2\pi)^m}{\det A}}$$

在具体写出最终表达式之前，我们先看算子 $i\left(\partial^2+m^2-i\epsilon\right)$ 的逆 $\Pi(x-y)$ ：

$$i\left(\partial^2+m^2-i\epsilon\right)\Pi(x-y)=\delta^4(x-y)$$

做 Fourier 变换

$$\Pi(x-y)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ip\cdot(x-y)}\tilde{\Pi}(p),\qquad \delta^4(x-y)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ip\cdot(x-y)}$$

$$i\left(\partial^2+m^2-i\epsilon\right)\Pi(x-y)=i\left(\partial^2+m^2-i\epsilon\right)\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ip\cdot(x-y)}\tilde{\Pi}(p)$$

$$=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ip\cdot(x-y)}\left(-i\left(p^2-m^2+i\epsilon\right)\right)\tilde{\Pi}(p)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ip\cdot(x-y)}$$

$$\left(-i\left(p^2-m^2+i\epsilon\right)\right)\tilde{\Pi}(p)=1\Longrightarrow\tilde{\Pi}(p)=\frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon}$$

$$\Pi(x-y)=\boxed{\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ip\cdot(x-y)}\frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon}\equiv D_F(x-y)}$$

$$(A)=\int_{-\infty}^{+\infty} d^m\vec{p}\, exp\left[-\frac{1}{2}\vec{p}^T\cdot A\cdot\vec{p}+\vec{J}^T\cdot p\right]=\sqrt{\frac{(2\pi)^m}{\det A}}\, exp\left[\frac{1}{2}\vec{J}^T\cdot A^{-1}\cdot\vec{J}\right]$$

$$\vec{p}\to\phi(x),\qquad \vec{J}\to iJ(x),\qquad A\to i\left(\partial^2+m^2-i\epsilon\right),\qquad A^{-1}\to D_F(x-y)$$

$$Z[J]=\int D\phi\exp\left\{i\int d^4x\left[\frac{1}{2}\phi(x)\left(-\partial^2-m^2+i\epsilon\right)\phi(x)+J(x)\phi(x)\right]\right\}$$

$$=Z[0]\, exp\left[-\frac{1}{2}\iint d^4x d^4y\, J(x) D_F(x-y) J(y)\right]$$

其中 $Z[0]=C(\det A)^{-\frac{1}{2}}$ 是一个常数。

a）　两点格林函数

$$G^{(2)}(x,y) = \langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle = \frac{1}{Z[0]}\int D\phi\ \phi(x)\phi(y)e^{iS[\phi]}$$

$$= \frac{1}{Z[0]}\left(\frac{\delta}{i\delta J(x)}\right)\left(\frac{\delta}{i\delta J(y)}\right)Z[J]\Big|_{J=0} = D_F(x-y)$$

b）　四点格林函数

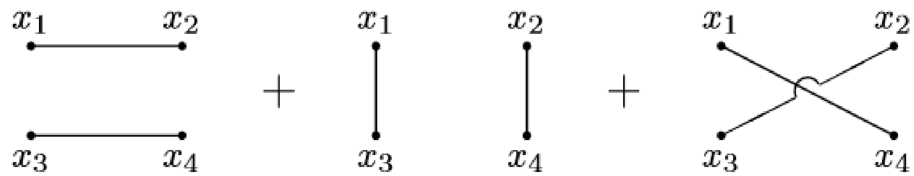
$$G^{(4)}(x_1,x_2,x_3,x_4) = \langle 0|T\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)|0\rangle$$

$$= \frac{1}{Z[0]}\left(\frac{\delta}{i\delta J(x_1)}\right)\left(\frac{\delta}{i\delta J(x_2)}\right)\left(\frac{\delta}{i\delta J(x_3)}\right)\left(\frac{\delta}{i\delta J(x_4)}\right)Z[J]\Big|_{J=0}$$

$$= D_F(x_3-x_4)D_F(x_1-x_2) + D_F(x_2-x_4)D_F(x_1-x_3)$$

$$+D_F(x_1-x_4)D_F(x_2-x_3)$$

=



3) 自由复标量场的格林函数生成泛函

自由复标量场的拉氏量 $\mathcal{L}_0 = \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - \left(m^2 - i\epsilon\right)\phi^*\phi$

将复标量场用两个实标量场来表示 $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\,\phi_2)$，则有

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi_1\right)^2 - \frac{1}{2}\left(m^2 - i\epsilon\right)\phi_1^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi_2\right)^2 - \frac{1}{2}\left(m^2 - i\epsilon\right)\phi_2^2$$

对 $\phi_{1,2}(x)$ 引入外源函数 $J_{1,2}(x)$，并且令 $J(x) = J_1(x) - iJ_2(x)$

$$\begin{aligned}
Z[J,J^*] &= \int D\phi\, D\phi^*\, exp\left\{i\int d^4x\, \left[\phi^*(x)\left(-\partial^2 - m^2 + i\epsilon\right)\phi(x) + J(x)\phi(x) + J^*(x)\phi^*(x)\right]\right\} \\
&= \int D\phi_1 D\phi_2 \exp\left\{i\int d^4x \sum\nolimits_{i=1,2}\left[\frac{1}{2}\phi_i(x)\left(-\partial^2 - m^2 + i\epsilon\right)\phi_i(x) + J_i(x)\phi_i(x)\right]\right\} \\
&= Z[0,0]\exp\left[-\frac{1}{2}\iint d^4x d^4y \sum\nolimits_{i=1,2} J_i(x)D_F(x-y)J_i(y)\right] \\
&= Z[0,0]\ \exp\left[-\iint d^4x d^4y\, J(x)D_F(x-y)J^*(y)\right]
\end{aligned}$$

对比实标量场，复标量场有两个自由度， $\phi(x)$ 和 $\phi^*(x)$ 是独立的场变量。

两点格林函数

$$\langle 0|T[\phi(x)\phi(y)]|0\rangle = \langle 0|T[\phi^*(x)\phi^*(y)]|0\rangle = 0$$

$$\langle 0|T[\phi(x)\phi^*(y)]|0\rangle = \langle 0|T[\phi^*(x)\phi(y)]|0\rangle = D_F(x-y)$$