4. 重整化群方程和跑动耦合常数

4.1 非Abel规范理论的跑动耦合常数

非阿贝尔规范理论中物质成和规范场的相互作用项为

$$\mathcal{L}_{int} = g_0 \bar{\psi}_{0i} \gamma^\mu t^a_{ij} \psi_{0j} A^a_{0,\mu}$$
$$\equiv \tilde{\mu}^\epsilon g \bar{\psi}_i \gamma^\mu t^a_{ij} \psi_j A^a_\mu + \tilde{\mu}^\epsilon g \delta_1 Z_2^{-1} \bar{\psi}_i \gamma^\mu t^a_{ij} \psi_j A^a_\mu$$
$$\equiv \tilde{\mu}^\epsilon g Z_1 \bar{\psi}_i \gamma^\mu t^a_{ij} \psi_j A^a_\mu = \tilde{\mu}^\epsilon g Z_1 Z_2^{-1} Z_3^{-1/2} \bar{\psi}_{0i} \gamma^\mu t^a_{ij} \psi_{0j} A^a_{0,\mu}$$

注意在维数正规化中，时空维数延拓到 d 维，作用量也定义在 d 维时空

$$S = \int d^d x \, \mathcal{L} \Longrightarrow [\mathcal{L}] = d$$

$$[\partial_\mu] = 1, \quad [m] = 1, \quad [A^a_\mu] = (d-2)/2, \quad [\psi] = (d-1)/2$$

这样，
$$[g_0] = d - [A^a_\mu] - 2[\psi] = 2 - d/2 = \epsilon$$

如果要保持重正化的耦合常数 g 是无量纲的，则需要乘以标度参量 $\tilde{\mu}^\epsilon$

$$\boxed{g_0 = \tilde{\mu}^\epsilon g Z_1 Z_2^{-1} Z_3^{-1/2} \equiv \tilde{\mu}^\epsilon Z_g g, \qquad Z_g = Z_1 Z_2^{-1} Z_3^{-1/2}}$$

由于裸耦合常数 g_0 和标度参量无关

$$0=\mu\frac{d}{d\mu}g_0=\mu\frac{d}{d\mu}\left(\tilde{\mu}^{\epsilon}gZ_1Z_2^{-1}Z_3^{-1/2}\right)=\mu\frac{d}{d\mu}\left(\tilde{\mu}^{\epsilon}Z_g g\right)$$

$$=\epsilon g_0+\tilde{\mu}^{\epsilon}\left(\mu\frac{d}{d\mu}Z_g\right)g+\tilde{\mu}^{\epsilon}Z_g\left(\mu\frac{d}{d\mu}g\right)$$

定义 β 函数（耦合常数 g 随能标 $\ln\mu$ 的变化率）： $\boxed{\beta(g)=\mu\frac{d}{d\mu}g}$

$$\beta(g)=-\epsilon g-\left(\mu\frac{d}{d\mu}\ln Z_g\right)g=-\epsilon g-\left(\mu\frac{d}{d\mu}g\right)\left(\frac{d}{dg}\ln Z_g\right)g$$

$$=-\epsilon g-\beta(g)\left(\frac{d}{dg}\ln Z_g\right)g$$

在上面的推导中，我们用到了这样一个事实：重正化常数对能量标度的依赖是通过耦合常数的能标依赖实现的。

$$\boxed{\mu\frac{d}{d\mu}\ln Z_g=\mu\frac{d}{d\mu}g\frac{d}{dg}\ln Z_g}$$

反解出

$$\beta(g) = -\epsilon g + \epsilon g^2 \frac{d}{dg} \ln Z_g$$

单圈水平上

$$Z_g = Z_1 Z_2^{-1} Z_3^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{11}{6} C_2(G) - \frac{2}{3} n_f C(F) \right)$$

$$\beta(g) \equiv \mu \frac{d}{d\mu} g = -\epsilon g - \frac{g^3}{(4\pi)^2} \left(\frac{11}{3} C_2(G) - \frac{4}{3} n_f C(F) \right)$$

对于$SU(3)$ 理论（QCD），有 $C_2(G) = 3, C(F) = \frac{1}{2}$。当 $d = 4$ 时 （$\epsilon \to 0$）

$$\beta(g) \equiv \mu \frac{d}{d\mu} g = -\frac{g^3}{(4\pi)^2} \left(11 - \frac{2}{3} n_f \right)$$

$$\boxed{\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi}}$$

$$\beta(\alpha_s) \equiv \mu \frac{d}{d\mu} \alpha_s = -\frac{\alpha_s^2}{2\pi} \left(11 - \frac{2}{3} n_f \right) \equiv -\frac{\alpha_s^2}{2\pi} b_0$$

$$b_0 = 11 - \frac{2}{3} n_f$$

$$0 = \mu\frac{d}{d\mu}\left(\mu^{\epsilon} Z_g\, g\right) = \epsilon g_0 + \mu^{\epsilon}\left(\mu\frac{d}{d\mu}Z_g\right)g + \mu^{\epsilon} Z_g\left(\mu\frac{d}{d\mu}g\right)$$

$$\Rightarrow \quad \mu^{\epsilon} Z_g\, \beta(g) = -\epsilon g_0 - \mu^{\epsilon}\left(\mu\frac{d}{d\mu}Z_g\right)g$$

$$\begin{aligned}\beta(g) &= -\epsilon g - \mu\frac{d}{d\mu}\ln Z_g \cdot g \\ &= -\epsilon g - \mu\frac{dg}{d\mu}\frac{d}{dg}\ln Z_g \cdot g \\ &= -\epsilon g - \beta(g)\frac{d}{dg}\ln Z_g \cdot g\end{aligned}$$

Z_g 对μ的依赖只通过g对μ的依赖，所以

$$\mu\frac{d}{d\mu}\ln Z_g = \mu\frac{dg}{d\mu}\frac{d}{dg}\ln Z_g$$

$$\Rightarrow \quad \beta(g) = -\epsilon g \cdot \frac{1}{1+g\frac{d}{dg}\ln Z_g} = -\epsilon g + \epsilon g^2\frac{d}{dg}\ln Z_g + \cdots$$

$$\epsilon g^2\frac{d}{dg}\ln Z_g = -\frac{g^3}{16\pi^2}\left(\frac{11}{3}C_2(G) - \frac{4}{3}n_f C(r)\right)$$

$$Z_g = 1 - \frac{g^2}{16\pi^2}\frac{1}{\epsilon}\left(\frac{11}{6}C_2(G) - \frac{2}{3}n_f C(r)\right)$$

对于QCD，SU(3)规范理论. $C_2(G)=3$，$C(r)=\frac{1}{2}$.

求解 $\boldsymbol{\beta}$ 函数对应的微分方程

$$\beta(\alpha_s) \equiv \mu \frac{d}{d\mu}\alpha_s = -\frac{\alpha_s^2}{2\pi}\left(11 - \frac{2}{3}n_f\right) \equiv -\frac{\alpha_s^2}{2\pi} b_0$$

得到跑动耦合常数 $\alpha(\mu)$：

$$\alpha_s(\mu) = \frac{2\pi}{b_0 \ln \frac{\mu}{\Lambda_{QCD}}}$$

$$\mu \frac{d}{d\mu}\alpha_s = \frac{d\alpha_s}{d(\ln \mu)}$$

$$\frac{d\alpha_s}{\alpha_s^2} = -\frac{b_0}{2\pi} d(\ln \mu)$$

$$\frac{1}{\alpha_s(\mu)} - \frac{1}{\alpha_s(\Lambda_{QCD})} = \frac{b_0}{2\pi} \ln \frac{\mu}{\Lambda_{QCD}}$$

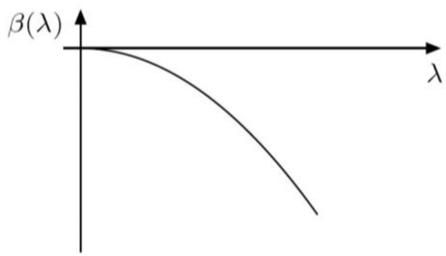
$$\alpha_s(\Lambda_{QCD}) \to \infty$$

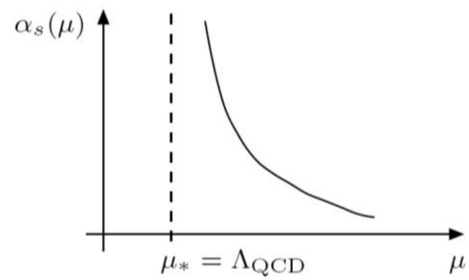
渐近自由：当夸克味道数 $n_f < 17$ 时，$b_0 > 0$，这时强耦合常数 α_s 会随着能量标度的增大而减小，这种行为称作“渐近自由”，是QCD在高能区的特性。只有非阿贝尔规范理论才有渐近自由。

Λ_{QCD} 是积分常数，一般取值为 $\Lambda_{QCD} \approx 200 - 300\ MeV$，它的物理意义是：只有当能量标度 $\mu \gg \Lambda_{QCD}$ 时，耦合常数才比较小，微扰论成立。

当 $\mu \to \Lambda_{QCD}$ 时，即能标在几百个MeV时，强耦合常数会很大，微扰论已经不成立，这是QCD 的非微扰能区。

- 渐近自由：





- 在非阿贝尔规范作用里，高能散射可以用微扰展开，例如：

$$\alpha_s(M_Z) \simeq 0.119 \pm 0.003\,.$$

- 色禁闭(Confinement)：耦合在$\mu \to \Lambda_{\rm QCD}$时发散，在现实中$\Lambda_{\rm QCD} \sim 200$MeV，当作用过程特征标度在几百个兆电子伏特时，我们无法进行微扰计算；且在这个能标附近，体系自由度不再是夸克、胶子，而可能是一些强子束缚态；

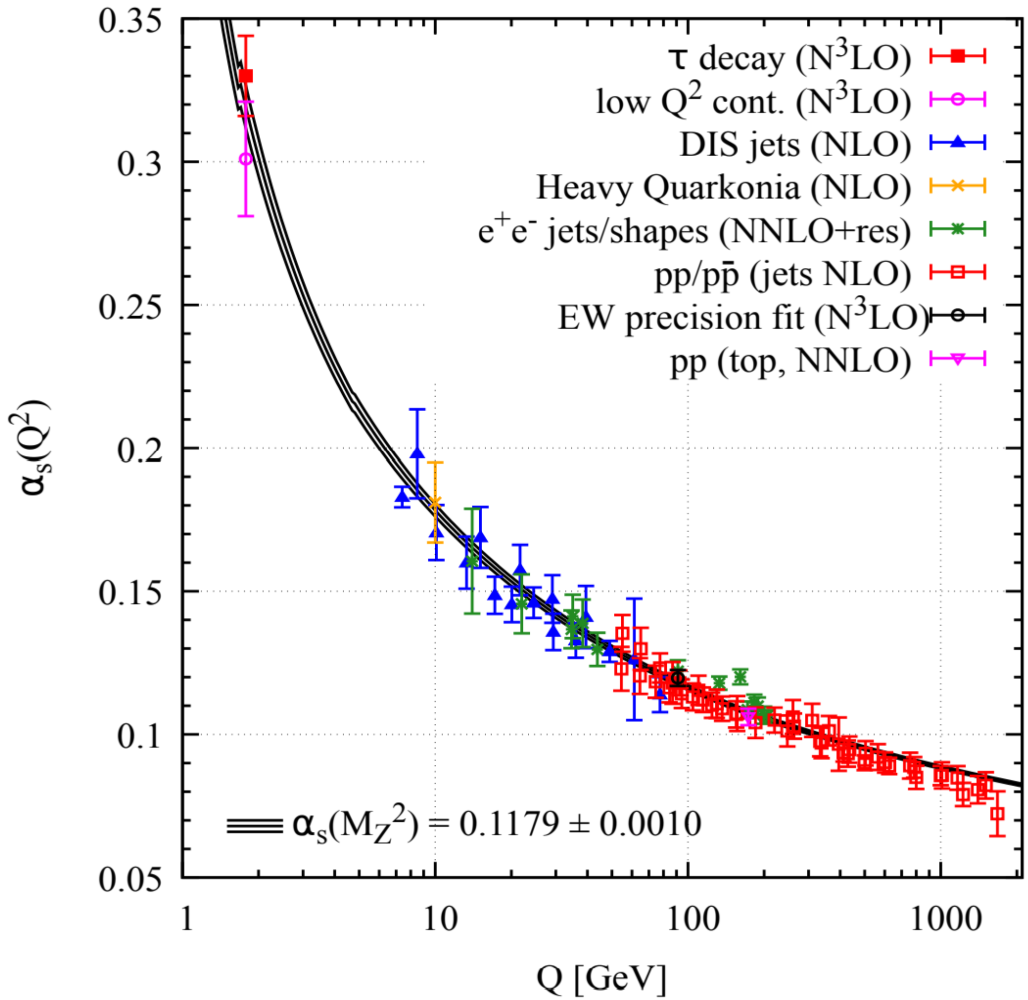


Figure 9.3: Summary of measurements of α_s as a function of the energy scale Q. The respective degree of QCD perturbation theory used in the extraction of α_s is indicated in brackets (NLO: next-to-leading order; NNLO: next-to-next-to-leading order; NNLO+res.: NNLO matched to a resummed calculation; N^{3}LO: next-to-NNLO).

4.2 QED的跑动耦合常数

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4}\left(F_{0,\mu\nu}\right)^2 + \bar{\psi}_0(i\gamma\cdot\partial - m_0)\psi_0 - e_0\bar{\psi}_0\gamma^\mu\psi_0 A_{0,\mu}$$
$$= -\frac{1}{4}Z_3\left(F_{\mu\nu}\right)^2 + Z_2\bar{\psi}i\gamma\cdot\partial\psi - mZ_2Z_m\bar{\psi}\psi - \tilde{\mu}^\epsilon Z_e Z_2 Z_3^{\frac{1}{2}} e\,\bar{\psi}\gamma\cdot A\psi$$

其中，

$$A_{0,\mu} = Z_3^{1/2}A_\mu, \qquad \psi_0 = Z_2^{1/2}\psi,$$

$$m_0 = Z_m m, \qquad e_0 = Z_e\mu^\epsilon e, \qquad Z_1 = Z_e Z_2 Z_3^{1/2},$$

$$Z_1 = 1+\delta_1, \qquad Z_2 = 1+\delta_2, \qquad Z_3 = 1+\delta_3$$

$$Z_m = 1+\delta_m, \qquad Z_e = Z_3^{-\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2}\delta_3$$

单圈水平上，

$$\delta_1 = \delta_2 = -\frac{e^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}, \qquad \delta_3 = -\frac{e^2}{(4\pi)^2}\frac{4}{3\epsilon}, \qquad \delta_m = -\frac{e^2}{(4\pi)^2}\frac{3}{\epsilon}$$

由裸电荷的标度无关性有

$$0=\mu\frac{d}{d\mu}e_0=\mu\frac{d}{d\mu}\left(\tilde{\mu}^{\epsilon}eZ_1Z_2^{-1}Z_3^{-1/2}\right)=\mu\frac{d}{d\mu}(\tilde{\mu}^{\epsilon}Z_e e)$$

$$\beta(e)=\mu\frac{d}{d\mu}e=-\epsilon e+\epsilon e^2\,\frac{d}{de}ln\,Z_e=-\epsilon e+\frac{e^3}{12\pi^2}$$

或者精细结构常数 $\alpha=\frac{e^2}{4\pi}$ 的 β 函数

$$\beta(\alpha)\equiv\mu\frac{d}{d\mu}\alpha=-2\epsilon\alpha+\frac{2\alpha^2}{3\pi}\equiv-2\epsilon\alpha-\frac{b_0}{2\pi}\alpha^2,\qquad b_0=-\frac{4}{3}$$

四维情形，并积分得到

$$\boxed{\alpha(\mu)=\frac{2\pi}{b_0\ln\frac{\mu}{\Lambda_{\mathrm{QED}}}}=\frac{\alpha(m_e)}{1-\frac{\alpha(m_e)}{3\pi}\ln\frac{\mu^2}{m_e^2}}}$$

- 定义 $\alpha(m_e = 0.511\ MeV) = \frac{1}{137}$，推出 $\Lambda_{QED} \sim 10^{283}$ MeV （朗道极点）。
- 无量纲的耦合常数由一个有量纲的参数 Λ_{QED} 唯一确定，这就是所谓的“维数嬗变”（dimension transmutation），
- 即QED不是由电荷定义的，而是由 Λ_{QED} 定义的。

4.3 跑动质量和质量的反常量纲（anomalous dimension）γ_m

裸质量的能标无关性要求

$$0 = \mu\frac{d}{d\mu}m_0 = \mu\frac{d}{d\mu}(Z_m m) = Z_m m\left(\frac{\mu}{m}\frac{dm}{d\mu} + \mu\frac{d}{d\mu}\ln Z_m\right)$$

引入质量的反常量纲 $$\gamma_m(g) = \frac{1}{m}\mu\frac{dm}{d\mu}$$

或者 $$\mu\frac{d}{d\mu}m(\mu) = \gamma_m(g)m(\mu)$$

$$\gamma_m = -\beta(g)\frac{d}{dg}\ln Z_m = \epsilon g\frac{d}{dg}\delta_m$$

这里用到
$\beta(g) = -\epsilon g + O(g^2) \approx -\epsilon g$

重正化常数 $Z_m = 1 + \delta_m$ 对能量标度的依赖是通过耦合常数的能标依赖实现的。

具体要得到质量随能标的跑动关系，我们进行如下处理：

$$\mu\frac{d}{d\mu}m(\mu) = \gamma_m(g)m(\mu)$$

$$\frac{dm}{m} = \frac{d\mu}{\mu}\gamma_m(g) = dg\frac{\gamma_m(g)}{\beta(g)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \beta(g) &= \mu\frac{d}{d\mu}g \\ \frac{d\mu}{\mu} &= \frac{dg}{\beta(g)} \end{aligned}}$$

两边积分

$$\ln\frac{m(\mu_2)}{m(\mu_1)} = \int_{g(\mu_1)}^{g(\mu_2)} dg\frac{\gamma_m(g)}{\beta(g)}$$

$$m(\mu_2) = m(\mu_1)\exp\left(\int_{g(\mu_1)}^{g(\mu_2)} dg\frac{\gamma_m(g)}{\beta(g)}\right)$$

电子质量的反常量纲 （QED）：

$$\gamma_m = \epsilon e \frac{d}{de}\delta_m = \epsilon e \left(-\frac{3}{\epsilon}\right)\frac{d}{de}\left(\frac{e^2}{(4\pi)^2}\right) = -\frac{3e^2}{8\pi^2}$$

$$\beta(e) = \mu\frac{d}{d\mu}e = \frac{e^3}{12\pi^2}$$

$$\exp\left(\int_{e(\mu_1)}^{e(\mu_2)} de \frac{\gamma_m(e)}{\beta(e)}\right) = \exp\left(\int_{e(\mu_1)}^{e(\mu_2)} de \left(-\frac{9}{2e}\right)\right)$$

$$= \left(\frac{e(\mu_2)}{e(\mu_1)}\right)^{-9/2} = \left(\frac{\alpha(\mu_2)}{\alpha(\mu_1)}\right)^{-9/4}$$

$$\boxed{m(\mu_2) = m(\mu_1)\left(\frac{\alpha(\mu_2)}{\alpha(\mu_1)}\right)^{-9/4}}$$

也就是说，对于QED，能标越高，耦合常数越大，电子质量越小。

夸克的跑动质量 （QCD）： $\frac{dm}{m}=\frac{d\mu}{\mu}\gamma_m(\alpha_s)=d\alpha_s\frac{\gamma_m(\alpha_s)}{\beta(\alpha_s)}$,

$$\ln\frac{m(\mu_2)}{m(\mu_1)}=\int_{\alpha_s(\mu_1)}^{\alpha_s(\mu_2)}d\alpha_s\frac{\gamma_m(\alpha_s)}{\beta(\alpha_s)}$$

单圈水平上， $\gamma_m(\alpha_s)=-\frac{3\alpha_s}{2\pi}C_2(F)\equiv-\gamma_0\frac{\alpha_s}{2\pi}+\cdots,\qquad \gamma_0=4$

$$\beta(\alpha_s)=-\left(11-\frac{2}{3}n_f\right)\frac{\alpha_s^2}{2\pi}=-b_0\frac{\alpha_s^2}{2\pi},\qquad b_0=\left(11-\frac{2}{3}n_f\right)$$

则有

$$m(\mu_2)=m(\mu_1)\exp\left(\int_{\alpha_s(\mu_1)}^{\alpha_s(\mu_2)}d\alpha_s\frac{\gamma_m(\alpha_s)}{\beta(\alpha_s)}\right)$$

$$=m(\mu_1)\left(\frac{\alpha_s(\mu_2)}{\alpha_s(\mu_1)}\right)^{\frac{\gamma_0}{b_0}}+O(\alpha_s)$$

对于QCD（$N_f<17$），能标越高，耦合常数越小，夸克质量越小。比如底夸克质量在底夸克能标的值为 $\bar{m}_b(\bar{m}_b)=4.2\ \mathrm{GeV}$，但在Z玻色子质量能标的值为 $\bar{m}_b(m_Z)=2.8\ \mathrm{GeV}$。

4.4 重整化群的一般性讨论

重正化群方程：物理观测量不依赖于其计算过程，即物理观测量不依赖于紫外截断，则可以给出物理观测量满足的对紫外截断的重整化群方程；裸的拉氏量和格林函数与重整化方案无关，则可以得到相应的格林函数满足的关于重正化能标的重正化群方程

由裸量的重正化方案无关性，即对两种不同的重正化方案 R 和 R' 有

$$\phi_0 = Z^{1/2}\phi = Z'^{1/2}\phi' \quad \Longrightarrow \quad \phi' = \frac{Z^{1/2}}{Z'^{1/2}}\phi \equiv Z(R',R)\phi$$

这可以看作是从方案 R 到 R' 的重正化群变换。

类似地

$$\lambda_0 = Z_1^{-1}Z^2\lambda = Z_1'^{-1}Z'^2\lambda'$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda' = \left(\frac{Z_1}{Z_1'}\right)^{-1} Z^2(R',R)\lambda = Z_1^{-1}(R',R)Z^2(R',R)\lambda$$

$$m_0^2 = m^2 - \delta m^2 = m'^2 - \delta m'^2 \implies m'^2 = m^2 + \delta m^2(R',R)$$

Wilson 重正化群：对于一个含紫外截断 Λ 的有限理论（物理观测量是有限的），当物理能标 $E \ll \Lambda$ 时，物理课观测量与紫外截断的具体值无关。改变 Λ 只是改变理论中的耦合参数，但不改变物理观测量的值。

连续的重正化群：物理观测量与重正化条件无关，即与我们定义重正化参数 $(m, \lambda, \cdots)$ 的能标无关。这种不变性成立的前提是理论经过重正化，发散已经被消除。

紫外截断正规化：发散体现在对紫外截断参数 Λ 的依赖性；重正化参数取决于重正化点 p_0，物理观测量与 p_0 选取无关。

维数正规化：发散表现为$1/\epsilon$ 项（在$\epsilon \to 0$ 时）；$\overline{MS}$ 方案下消除发散项 $1/\epsilon$ 会引入一个标度参量 μ ，重正化参数依赖于μ，物理观测量与 μ 选取无关。

重正化群方程：基于这种重正化参量、重正化点无关性等，我们可以得到微分方程

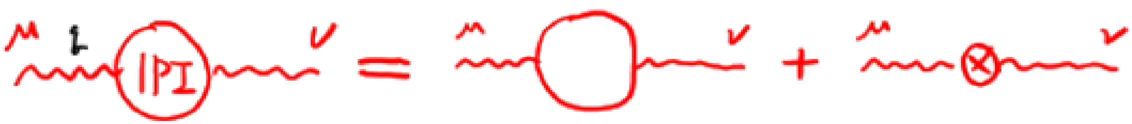
$$\frac{d}{d\Lambda}X = 0, \qquad \frac{d}{dp_0}X = 0, \qquad \frac{d}{d\mu}X = 0$$

X 可以是参数、算符、或者格林函数等，这些微分方程就是重正化群方程。求解重正化群方程可以得到理论的参数空间的轨迹——重正化群流动。

1. 微扰展开中的大对数项和重求和

重正化群方程及其解的更深入的意义在于，我们可以通过低阶的圈图贡献的重求和，得到部分高阶圈图的贡献，也就是说，重正化群的解等价于对对数项的级数的求和到微扰论的无穷阶。

QED 的光子真空极化的单圈贡献

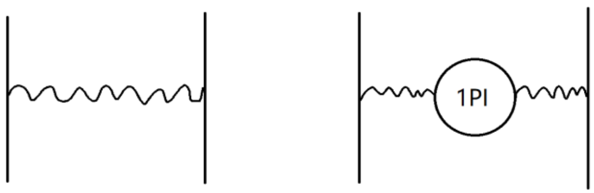


$$i\Pi^{\mu\nu}(q) \equiv= i\left(e^2\Pi_2(q^2) - \delta_3\right)\left(g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu\right)$$

$$\Pi_2(q^2) = -\frac{1}{2\pi^2}\int_0^1 dx\, x(1-x)\left[\frac{1}{\epsilon} + \ln\frac{\mu^2}{m^2 - x(1-x)q^2}\right]$$

对于t–道交换光子的电磁散射过程，定义动量空间的有效的库仑势

$$\tilde{V}(q^2)=e^2\frac{1-e^2\tilde{\Pi}_2(q^2)}{q^2},\qquad e^2\tilde{\Pi}_2(q^2)=e^2\Pi_2(q^2)-\delta_3$$



在动量 $q=q_0$ 处定义重正化电荷 e： $\tilde{V}(q_0^2)=e^2/q_0^2,\qquad e^2\tilde{\Pi}_2(q^2)=0$

则可以确定抵消项系数 δ_3，以及重正化的有效势

$$\delta_3=-\frac{e^2}{2\pi^2}\int_0^1 dx\,x(1-x)\left[\frac{1}{\epsilon}+ln\frac{\mu^2}{m^2-x(1-x)q_0^2}\right]$$

$$\tilde{V}(q^2)=\frac{e^2}{q^2}\left[1+\frac{e^2}{2\pi^2}\int_0^1 dx\,x(1-x)\ln\frac{m^2-x(1-x)q^2}{m^2-x(1-x)q_0^2}\right]$$

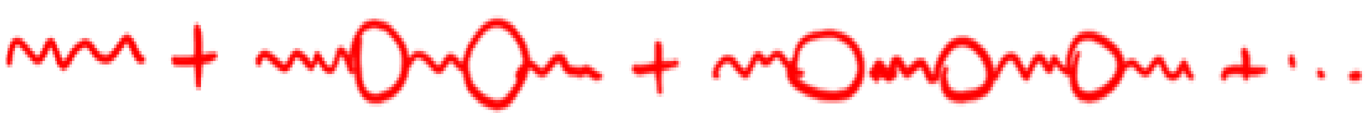
$\tilde{V}(q^2)$与维数正规化的参量 μ,ϵ 都无关，而且是有限的。

当 $-q^2 \gg m^2$ 时，上式可以简化为

$$\widetilde{V}(q^2) = \frac{e^2}{q^2}\left[1 + \frac{e^2}{12\pi^2}\ln\frac{q^2}{q_0^2}\right] = \frac{4\pi\alpha}{q^2}\left[1 + \frac{\alpha}{3\pi}\ln\frac{q^2}{q_0^2}\right]$$

“大对数项”问题：

- 微扰展开的高阶项时以$\left(\alpha\ln\frac{q^2}{q_0^2}\right)^n$的形式出现的；
- $\frac{e^2}{12\pi^2} = \frac{\alpha}{3\pi} \sim 10^{-3}$，那么当 $\ln\frac{q^2}{q_0^2} \sim 10^3$ 时， 有 $\frac{\alpha}{3\pi}\ln\frac{q^2}{q_0^2} \sim O(1)$，显然微扰级数时不收敛的。



$$\widetilde{V}(q^2) = \frac{e^2}{q^2}\left[1 + \frac{e^2}{12\pi^2}\ln\frac{q^2}{q_0^2} + \left(\frac{e^2}{12\pi^2}\ln\frac{q^2}{q_0^2}\right)^2 + \cdots\right]$$

$$=\frac{1}{q^2}\left[\frac{e^2}{1-\frac{e^2}{12\pi^2}\ln\frac{q^2}{q_0^2}}\right]\equiv\frac{e_{ff}^2(q^2)}{q^2}$$

有效电荷：

$$e_{\text{eff}}^2(p^2)=\frac{e^2}{1-\frac{e^2}{12\pi^2}\ln\frac{q^2}{q_0^2}},\quad \text{或者}\quad \alpha(p^2)=\frac{\alpha}{1-\frac{\alpha}{3\pi}\ln\frac{q^2}{q_0^2}}$$

$$e^2(q_0^2)=e^2,\quad \alpha(q_0^2)=\alpha$$

有效耦合常数：它是对所有领头阶大对数项的重求和（resummation）的结果。这个结果和我们前面通过求解耦合常数满足的重正化群方程得到的结果是相同的。通过在 $q_0^2\approx q^2$ 附近定义有效的耦合常数，就能保证大对数项不出现，从而改变微扰展开的收敛性。

2．不同正规化方案下大对数项的表现形式

- 大对数项来自一个能量标度远大于或远小于另一个有关的标度。比如QED的真空极化图，在$-q^2 \gg m^2$时，

$$\Pi(q^2) = -\frac{e^2}{12\pi^2}\left[\frac{1}{\epsilon} + \ln\frac{\mu^2}{-q^2} + \cdots\right] - \delta_3 \qquad (DR)$$

$$= -\frac{e^2}{12\pi^2}\left[\ln\frac{\Lambda^2}{-q^2} + \cdots\right] - \delta_3 \qquad (PV)$$

- 对外线动量的对数依赖（或非解析行为）是圈积分或者说是量子效应的特征，重正化群就是在特定极限下对这些效应的处理。

- 如果物理标度只有外线动量 q^2，其对数行为需要被其它非物理的标度（维数正规化中的 μ，Pauli-Villars正规化中的 Λ）来补偿。

$$\delta_3 = \frac{e^2}{12\pi^2}\left(-\frac{1}{\epsilon}\right) \quad \Rightarrow \quad \Pi(q^2) = -\frac{e^2}{12\pi^2}\left[\ln\frac{\mu^2}{-q^2} + \cdots\right]$$

$$\delta_3 = -\frac{e^2}{12\pi^2}\ln\frac{\Lambda^2}{-q_0^2} \quad \Rightarrow \quad \Pi(q^2) = -\frac{e^2}{12\pi^2}\left[\ln\frac{-q_0^2}{-q^2} + \cdots\right]$$

显然，对非物理的标度参数 μ 或者 Λ 的对数依赖完全决定了对物理标度 $-q^2$ 的依赖。

- 在维数正规化中，紫外发散表现为 $\frac{1}{\epsilon}$ 项，消除紫外发散采用最小减除方案，重正化的振幅和参量定义在能标 μ 处（注意，这里的μ 和 PV 中的紫外截断参数 Λ 是不一样的概念），在物理观测量中，μ 会消失。

- 维数正规化中的 μ ：如果我们选取抵消项为 $\delta_3 = \frac{e^2}{12\pi^2}\left(-\frac{1}{\epsilon} - \ln\frac{\mu^2}{-q_0^2}\right)$，我们会得到和 PV 中重正化点取在 $-q_0^2$ 相同的结果，而在 $\overline{MS}$ 方案中，相当于 $-q_0^2 \approx \mu^2$，所以我们通常可以将 μ 看作一个物理的标度，称作重正化标度。

- 尽管 μ 可以看作是一个物理的能量的标度，但是振幅对 μ 的依赖总是和对 $\frac{1}{\epsilon}$ 的依赖密切联系在一起的。它们是不可分割的，也就是说，维数正规化中的对 $-q^2$ 的大对数依赖也是和紫外发散直接相关的。

4.3 格林函数重正化和重正化群方程

QED中，裸场的格林函数（动量空间）

$$G^{(0)}_{n,n'} = \langle\Omega|TA_{0,\mu_1}A_{0,\mu_2}\cdots A_{0,\mu_n}\psi_{01}\bar{\psi}_{02}\cdots\bar{\psi}_{0n'}|\Omega\rangle = Z_3^{n/2}Z_2^{n'/2}G_{n,n'}$$

$G_{n,n'}$ 是重正化后的参数 e, m 、重正化能标 μ 和外动量 p 的函数

$$G_{n,n'}(p,m,e,\mu) = \langle\Omega|TA_{\mu_1}A_{\mu_2}\cdots A_{\mu_n}\psi_1\bar{\psi}_2\cdots\bar{\psi}_{n'}|\Omega\rangle$$

裸的格林函数 $G^{(0)}_{n,n'}$ 和重正化能标 μ 无关，其对 μ 的导数为零，

$$\begin{aligned}0 &= \mu\frac{d}{d\mu}G^{(0)}_{n,n'}\\ &= Z_3^{n/2}Z_2^{n'/2}\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \frac{n}{2}\frac{1}{Z_3}\mu\frac{dZ_3}{d\mu} + \frac{n'}{2}\frac{1}{Z_2}\mu\frac{dZ_2}{d\mu} + \mu\frac{de}{d\mu}\frac{\partial}{\partial e} + \mu\frac{dm}{d\mu}\frac{\partial}{\partial m}\right)G_{n,n'}\end{aligned}$$

定义
$$\gamma_3=\frac{1}{2}\mu\frac{d}{d\mu}\ln Z_3,\qquad \gamma_2=\frac{1}{2}\mu\frac{d}{d\mu}\ln Z_2$$

$$\beta=\mu\frac{de}{d\mu},\qquad \gamma_m=\mu\frac{d}{d\mu}\ln m$$

$G_{n,n'}$满足的重正化群方程（ Callan-Symanzik 方程、Gell-Mann-Low 方程）

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta\frac{\partial}{\partial e}+\gamma_m m\frac{\partial}{\partial m}+n\gamma_3+n'\gamma_2\right)G_{n,n'}=0$$

截腿格林函数和正规顶点 $\Gamma^{(0)}_{n,n'}$ 的重正化

$$\Gamma^{(0)}_{n,n'}(p;m_0,e_0)=Z_3^{-\frac{n}{2}}Z_2^{-\frac{n'}{2}}\Gamma_{n,n'}(p;m,e,\mu)$$

$\Gamma^{(0)}_{n,n'}$ 的重正化能标的无关性可以得到相应的重正化群方程

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta\frac{\partial}{\partial e}+\gamma_m m\frac{\partial}{\partial m}-n\gamma_3-n'\gamma_2\right)\Gamma_{n,n'}=0$$

4.4 关于格林函数渐近关系的Weinberg定理

非例外动量构型（nonexceptional momentum configuration）：

如果$\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ 是所有外线动量的集合，如果除了唯一的表示能动量守恒的条件 $\sum_{i=1}^{n} p_i = 0$ 之外，不存在动量和为零的动量集合的子集，即不存在$\{p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_k}\} \subset \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ 满足 $\sum_{j=1}^{k} p_{i_j} = 0$，这这个动量集合是非例外动量构型。

Weinberg定理:

如果外线动量是非例外动量构型，在进行标度变换 $p_i \to \sigma p_i$ 时，单粒子不可约格林函数 $\Gamma_R^{(n)}$ 在深度Euclidean 区域的行为可以表示为

$$\Gamma_R^{(n)}(\sigma p_i; \lambda, \mu) \xrightarrow{\sigma\to\infty} \sigma^{4-n}\left[a_0(\ln\sigma)^{b_0} + a_1(\ln\sigma)^{b_1}\lambda + \cdots\right]$$

也就是说，其标度行为可以表示成 σ 的正规量纲幂次乘以 $\ln\sigma$ 和耦合常数的多项式（在任意有限的微扰阶）。利用重正化群方程，这些幂级数可以重求和给出因子 σ^{γ}， 从而使格林函数 $\Gamma_R^{(n)}(\sigma p_i; \lambda, \mu)$ 的正则行为有 σ^{4-n} 变成 $\sigma^{4-n+\gamma}$，γ 称作该格林函数的反常量纲。

在最小减除方案 $\overline{MS}$ 中，抵消项减除发散积分中的 $\left(\frac{1}{\epsilon}\right)^n$ 发散项。

对于一个关于 ϕ 场的场论，质量为 m，耦合常数为 λ，微扰展开的结果为

$$\lambda_0 = \mu^{2\epsilon}\left[\lambda + \sum_{r=1}^{\infty} a_r(\lambda)\frac{1}{\epsilon^r}\right]$$

$$m_0 = m\left[1 + \sum_{r=1}^{\infty} b_r(\lambda)\frac{1}{\epsilon^r}\right] = Z_m m$$

$$\phi_0 = \phi\left[1 + \sum_{r=1}^{\infty} c_r(\lambda)\frac{1}{\epsilon^r}\right] = Z_\phi^{1/2}\phi$$

其中的系数与标度参量 μ 和质量 m 都没有关系 （对标度参量的依赖是通过 λ 对 μ 的依赖而体现的），所以最小减除方案又称作质量无关重正化方案。

$$\mu\frac{d}{d\mu}\lambda_0=0 \Rightarrow \varepsilon\lambda+\left(a_1+\mu\frac{d\lambda}{d\mu}\right)+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{\epsilon^r}\left[\frac{\partial a_r}{\partial\lambda}\mu\frac{\partial\lambda}{\partial\mu}+a_{r+1}\right]=0$$

$$\beta(\lambda)\equiv\mu\frac{d\lambda}{d\mu}=d_0+d_1\epsilon+d_2\epsilon^2+\cdots \quad (\beta(\lambda)\text{在 }\epsilon\to0\text{ 处解析})$$

所以有（ε幂次项逐项对比）当 $r>1$ 时，$d_r=0$

$$\varepsilon(\lambda+d_1)+\left(a_1+d_0+d_1\frac{da_1}{d\lambda}\right)+\sum_r\frac{1}{\epsilon^r}\left[a_{r+1}+d_0\frac{da_r}{d\lambda}+d_1\frac{da_{r+1}}{d\lambda}\right]=0$$

$$\Rightarrow\quad \lambda+d_1=0,\quad a_1+d_1\frac{da_1}{d\lambda}=-d_0,\quad \left(1+d_1\frac{da_1}{d\lambda}\right)a_{r+1}=-d_0\frac{da_r}{d\lambda}$$

$$\Rightarrow\quad \mu\frac{d}{d\mu}\lambda=-\lambda\epsilon-a_1+\lambda\frac{da_1}{d\lambda} \qquad \left(\beta(\lambda)=-a_1+\lambda\frac{da_1}{d\lambda}\right)$$

$$\left(1-\lambda\frac{d}{d\lambda}\right)\left[a_{r+1}(\lambda)-a_1(\lambda)\right]=\frac{d}{d\lambda}a_r(\lambda)$$

类似地，我们有：

$$\gamma_m\equiv\mu\frac{d}{d\mu}\ln m=\lambda\frac{db_1}{d\lambda}$$

$$\lambda\frac{db_{r+1}}{d\lambda}=b_r\lambda\frac{db_1}{d\lambda}-\frac{db_r}{d\lambda}\left(1-\lambda\frac{d}{d\lambda}\right)a_1(\lambda)$$

$$\gamma\equiv\frac{1}{2}\mu\frac{d}{d\mu}\ln Z_\phi=\lambda\frac{dc_1}{d\lambda}$$

$$\lambda\frac{dc_{r+1}}{d\lambda}=c_r\lambda\frac{dc_1}{d\lambda}-\frac{dc_r}{d\lambda}\left(1-\lambda\frac{d}{d\lambda}\right)a_1(\lambda)$$

从上面的结果看出：

- $\beta(\lambda)$, γ_m, γ 由单极点的残数 a_1, b_1, c_1 决定（leading logs）；
- 高阶奇点的残数之间满足特定的递推关系，这说明高阶奇点的残数可以通过单极点的残数进行计算；
- 利用重正化群方程，我们可以通过计算一些低阶的项，就可以得到领头阶对数项（LO）、次领头阶对数项（NLO）到所有阶。

4.5 重整化方程的解

正规顶点的重正化群方程

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta\frac{\partial}{\partial\lambda}+\gamma_m m\frac{\partial}{\partial m}-n\gamma\right)\Gamma_R^{(n)}(p_i;m,\lambda;\mu)=0$$

含义:

在深度的欧几里德区域，能量标度 μ 的小的变动引起格林函数的变化会被重正化参数（耦合常数和质量）的相应变化和对场的适当的rescaling（体现在 $-n\gamma$）所补偿。

1. 无质量的理论

在 ϕ^4 理论中，n 点正规顶点的正则量纲为 $4-n$，这样我们定义

$$\Gamma_R^{(n)}(p_i;\lambda;\mu)=\mu^{4-n}\bar{\Gamma}_R\left(\frac{p_i}{\mu};\lambda\right)$$

$$\left[G^{(n)}(p)\right]=n-4n+4$$

$$\left[G_{amp}^{(n)}(p)\right]=n-4n+2n+4$$

$\bar{\Gamma}_R\left(\frac{p_i}{\mu},\lambda\right)$ 的正则量纲为0，似乎是无量纲的，但实际上它的标度变换行为并不是那么简单，是标度依赖的。

$\bar{\Gamma}_R\left(\frac{p_i}{\mu},\lambda\right)$ 在标度变换 $p_i\to\sigma p_i$下满足方程

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\sigma\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)\bar{\Gamma}_R\left(\frac{\sigma p_i}{\mu},\lambda\right)=0$$

$$\Longrightarrow\quad\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\sigma\frac{\partial}{\partial\sigma}+n-4\right)\Gamma_R\left(\frac{\sigma p_i}{\mu},\lambda\right)=0$$

Callan-Symanzik方程可以写为

$$\left(\sigma\frac{\partial}{\partial\sigma}-\beta\frac{\partial}{\partial\lambda}+n\gamma+n-4\right)\Gamma_R^{(n)}(\sigma p_i,\lambda,\mu)=0$$

满足上述微分方程的解的形式为

$$\Gamma_R^{(n)}(\sigma p_i,\lambda,\mu)=\sigma^{4-n}\exp\left[n\int_0^{\lambda}dx\,\frac{\gamma(x)}{\beta(x)}\right]F^{(n)}(\sigma p_i,\lambda,\mu)$$

$F^{(n)}(\sigma p_i,\lambda,\mu)$ 满足微分方程

$$\left(\sigma\frac{\partial}{\partial\sigma}-\beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)F^{(n)}(\sigma p_i,\lambda,\mu)=0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)F^{(n)}(e^t p_i,\lambda,\mu)=0 \qquad t=\ln\sigma$$

如果 $F^{(n)}$ 对 t 和 λ 的依赖是通过对 $\bar{\lambda}(t,\lambda)$ 的依赖实现，则必然满足上述微分方程。

引入有效的、或者“跑动的”耦合常数 $\bar{\lambda}(t,\lambda)$

$$\frac{d\bar{\lambda}(t,\lambda)}{dt} = \beta(\bar{\lambda}), \qquad t = \ln\sigma$$

取边界条件为 $\bar{\lambda}(t=0,\lambda) = \lambda$,

$$t = \int_{\lambda}^{\bar{\lambda}(t,\lambda)} \frac{dx}{\beta(x)}$$

两边对 λ 求导数得到 $$0 = \frac{1}{\beta(\bar{\lambda})}\frac{d\bar{\lambda}}{d\lambda} - \frac{1}{\beta(\lambda)}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{d}{dt} - \beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\bar{\lambda}(t,\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \quad F^{(n)}(e^t p_i, \lambda, \mu) = F^{(n)}\left(p_i, \bar{\lambda}(t,\lambda), \mu\right)$$

$$\Gamma_R^{(n)}(\sigma p_i,\lambda,\mu)=\sigma^{4-n}\exp\left[n\int_0^{\lambda}dx\,\frac{\gamma(x)}{\beta(x)}\right]F^{(n)}\left(p_i,\bar{\lambda}(t,\lambda),\mu\right)$$

另外，

$$\exp\left[n\int_0^{\lambda}dx\,\frac{\gamma(x)}{\beta(x)}\right]\sim\exp\left[n\int_0^{\bar{\lambda}}dx\,\frac{\gamma(x)}{\beta(x)}+n\int_{\bar{\lambda}}^{\lambda}dx\,\frac{\gamma(x)}{\beta(x)}\right]$$

$$=H\left(\bar{\lambda}\right)\exp\left[-n\int_{\lambda}^{\bar{\lambda}}dx\,\frac{\gamma(x)}{\beta(x)}\right]=H\left(\bar{\lambda}\right)\exp\left[-n\int_0^{t}dt'\,\gamma\left(\bar{\lambda}(t',\lambda)\right)\right]$$

$$H\left(\bar{\lambda}\right)=\exp\left[n\int_0^{\bar{\lambda}}dx\,\frac{\gamma(x)}{\beta(x)}\right]$$

这样（$\Gamma_R^{(n)}(p_i,\lambda,\mu)=H(\lambda)F^{(n)}(p_i,\lambda,\mu)$）

$$\boxed{\Gamma_R^{(n)}(\sigma p_i,\lambda,\mu)=\sigma^{4-n}\exp\left[-n\int_0^{t}dt'\,\gamma\left(\bar{\lambda}(t',\lambda)\right)\right]\Gamma_R^{(n)}\left(p_i,\bar{\lambda}(t,\lambda),\mu\right)}$$

- 对 p_i 的标度变换 $p_i \to \sigma p_i$ 所得到的格林函数 $\Gamma_R^{(n)}(\sigma p_i, \lambda, \mu)$， 相当于将原来的格林函数 $\Gamma_R^{(n)}(p_i, \lambda, \mu)$ 中的耦合常数 λ 替换为有效耦合常数 $\bar{\lambda}(t, \lambda)$，并乘以一个匹配因子（matching factor）

$$\sigma^{4-n} \exp\left[-n \int_0^t dt' \, \gamma\left(\bar{\lambda}(t', \lambda)\right)\right]$$

其中 σ^{4-n} 由格林函数的正则量纲贡献，而指数因子是反常量纲项，依赖于场的反常量纲，这个因子是对微扰论的领头阶对数项的重求和的结果。

- 也就是说，当考虑格林函数的大动量行为时，即使质量可以忽略，理论也不是标度不变的。对于一个可重正的理论，在我们规定重正化条件时都会引入一个重正化能标，从而破坏理论的标度不变性；理论对重正化能标的依赖通过重正化群方程的形式表现出来，重正化方程的解会有一个反常量纲。

2. 有质量的理论

当 $m \neq 0$ 时，可以证明，对外线动量做一个小的标度变换造成的格林函数的变化，相当于将原来格林函数中的 λ, m 换成等效（跑动）的值 $\bar{\lambda}(t,\lambda)$, $\bar{m}(t,\lambda)$, 并乘以相应匹配因子（其中的指数因子仍是上面的反常量纲项）：

$$\Gamma_R^{(n)}(p_i; m, \lambda, \mu) = \mu^{4-n}\bar{\Gamma}_R\left(\frac{p_i}{\mu}; \frac{m}{\mu}, \lambda\right)$$

其中$\bar{\Gamma}_R\left(\frac{p_i}{\mu}; \frac{m}{\mu}, \lambda\right)$ 在标度变换 $p_i \to \sigma p_i$下满足

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \sigma\frac{\partial}{\partial\sigma} + m\frac{\partial}{\partial m}\right)\bar{\Gamma}_R\left(\frac{\sigma p_i}{\mu}; \frac{m}{\mu}, \lambda\right) = 0$$

$\Gamma_R^{(n)}(\sigma p_i; m, \lambda, \mu)$ 满足的重正化群方程

$$\left(\sigma\frac{\partial}{\partial\sigma} - \beta\frac{\partial}{\partial\lambda} - (\gamma_m - 1)m\frac{\partial}{\partial m} + n\gamma + n - 4\right)\Gamma_R^{(n)}(\sigma p_i; m, \lambda, \mu) = 0$$

首先分离非齐次项部分

$$\Gamma_R^{(n)}(\sigma p_i; m, \lambda, \mu) = \sigma^{4-n} \exp\left[n \int_0^{\lambda} dx \, \frac{\gamma(x)}{\beta(x)}\right] F^{(n)}(\sigma p_i; m, \lambda, \mu)$$

再引入跑动耦合常数和跑动质量 $\bar{\lambda}(t)$, $\bar{m}(t)$,

$$\frac{d\bar{\lambda}(t,\lambda)}{dt} = \beta(\bar{\lambda})$$

$$\frac{d\bar{m}(t)}{dt} = \left(\gamma_m(\bar{\lambda}) - 1\right)\bar{m}(t)$$

初始条件为 $\bar{\lambda}(t=0) = \lambda$, $\bar{m}(t=0) = m$

$$\Gamma_R^{(n)}(\sigma p_i; m, \lambda, \mu) = \sigma^{4-n} \exp\left[-n \int_0^t dt' \, \gamma\left(\bar{\lambda}(t')\right)\right] \Gamma_R^{(n)}\left(p_i; \bar{m}(t), \bar{\lambda}(t), \mu\right)$$

如果一个场论中有不止一种场，则具体做法就是将 $\bar{\lambda}(t)$, $\bar{m}(t)$ 换成相应的耦合常数和质量的同时，做替换 $n\gamma \to \sum_i n_i \gamma_i$, $\sum_i n_i = n$

其中 γ_i 代表不同场的反常维数 $\gamma_i = \frac{1}{2}\mu\frac{d}{d\mu}\ln Z_i$，$n_i$ 代表正规顶点中不同场的外线数。

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d\bar\lambda(t,\lambda)}{dt}=\beta(\bar\lambda)\\[2ex] \bar\lambda(t=0,\lambda)=\lambda\end{array}\right\}\Rightarrow t=\int_\lambda^{\bar\lambda(t,\lambda)}\frac{d\lambda'}{\beta(\lambda')}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\beta(\bar\lambda)}\frac{d\bar\lambda(t)}{dt}-\frac{1}{\beta(\lambda)}=0 \qquad \left(\frac{\partial}{\partial t}-\beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\bar\lambda(t,\lambda)=0$$

$$\frac{d\bar m(t)}{dt}=[\gamma_m(\bar\lambda)-1]\,\bar m(t)\Rightarrow\frac{d\bar m(t)}{\bar m(t)}=[\gamma_m(\bar\lambda)-1]\,dt$$

$$\Rightarrow \bar m(t)=m\exp\left(\int_\lambda^{\bar\lambda(t,\lambda)}\frac{\gamma_m(\bar\lambda(t')-1)}{\beta(\bar\lambda(t',\lambda))}d\lambda(t')\right)$$

这就证明当 $F^{(n)}$ 对 (t,λ) 的依赖是通过 $\bar m(t,\lambda)$, $\bar\lambda(t,\lambda)$

的方式实现时 $F^{(n)}$ 满足前述方程

这里 $\bar{m}(t)$ 除了反常量纲之外还有一个标度变换因子

$$\bar{m}(t) = m \exp\left[\int_{\lambda}^{\bar{\lambda}(t)} dx \, \frac{\gamma_m(x) - 1}{\beta(x)}\right]$$
$$= m e^{-t} \exp\left[\int_{\lambda}^{\bar{\lambda}(t)} dx \, \frac{\gamma_m(x)}{\beta(x)}\right] = \frac{m}{\sigma} \exp\left[\int_{\lambda}^{\bar{\lambda}(t)} dx \, \frac{\gamma_m(x)}{\beta(x)}\right]$$

重正化群方程的根本在于重正化假设，即物理观测量与重正化方案的选取无关。如果重正化方案中含有连续的参数（紫外截断中的Λ、离壳重正化条件中的离壳度、或者 $\overline{MS}$ 方案中的重正化标度 μ 等等），我们都可以建立相应的重正化群方程。事实上，重正化群方程的最初导出也不是基于 $\overline{MS}$ 方案的，而是基于各种与动量相关的重正化方案给出的。这些不同形式的重正化群方程都会给出相同的高能渐近行为。

3. 例子：传播子的反常量纲

ϕ^4 理论中的重正化全传播子 $\widetilde{G}_c^{(2)}(p;m,\lambda;\mu)$

$$\widetilde{G}_c^{(2)}(p;m,\lambda;\mu) = -i\Gamma_R^{(2),-1}(p;m,\lambda;\mu)$$

如果令 $\sigma^2 = p^2/p_0^2$

$$\widetilde{G}_c^{(2)}(p;m,\lambda;\mu) = \frac{p_0^2}{p^2}\exp\left[2\int_0^t dt'\,\gamma\left(\bar{\lambda}(t')\right)\right]\widetilde{G}_c^{(2)}(p_0;\bar{m}(t),\bar{\lambda}(t);\mu)$$

如果已经在微扰论的某阶得到了场的反常维数

$$\gamma(\lambda) = \gamma_0\lambda + \cdots,\quad \beta(\lambda) = \beta_0\lambda^2 + \cdots,$$

$$\exp\left[2\int_0^t dt'\,\gamma\left(\bar{\lambda}(t')\right)\right] = \exp\left[2\int_\lambda^{\bar{\lambda}} dx\,\frac{\gamma(x)}{\beta(x)}\right] \approx \exp\left[\int_\lambda^{\bar{\lambda}} dx\,\frac{2\gamma_0}{\beta_0 x}\right]$$

$$= \exp\left[\frac{\gamma_0}{\beta_0}\ln\frac{\lambda(\sigma\mu)}{\lambda(\mu)}\right] = \left(\frac{\lambda(\sigma\mu)}{\lambda(\mu)}\right)^{\frac{2\gamma_0}{\beta_0}}$$

$$\widetilde{G}_c^{(2)}(p;m,\lambda;\mu) \propto \frac{1}{p^2}\left(\frac{\lambda(\sigma\mu)}{\lambda(\mu)}\right)^{\frac{2\gamma_0}{\beta_0}}\left(1+O(\lambda)\right)$$

其中的幂因子是普通的量纲分析得不到的。

考虑到体系有非平庸的紫外不动点的情况，即当 $\sigma\to\infty$ 时， $\lambda\to\lambda^*$，则

$$\exp\left[2\int_0^t dt'\,\gamma\left(\bar{\lambda}(t')\right)\right] \approx \exp\left[2\gamma(\lambda^*)\int_0^t dt'\right]$$
$$= \exp\left[\gamma(\lambda^*)\ln\frac{p^2}{p_0^2}\right] = \left(\frac{p^2}{p_0^2}\right)^{\gamma(\lambda^*)}$$

也就是说，当 $p^2\to\infty$ 时，传播子的渐近行为为

$$\widetilde{G}_c^{(2)}(p;m,\lambda;\mu) \propto \frac{(1+\cdots)}{(p^2)^{1-\gamma(\lambda^*)}}$$

它的大动量行为不完全由正则量纲描述，而是有“反常量纲”。

4.6 组合算符的重整化

- 在前面的讨论中，我们考虑了只包含基本场算符的格林函数的重正化。
- 许多情形，我们会计算由组合算符构成的格林函数并考虑它们的重正化问题。
- 所谓组合算符，是指由基本场算符及其时空导数构成的定域的多项式形式的算符，如 $\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi$、$\phi^2$、$\phi\partial^2\phi$ 等。
- 在重正化化微扰论中，组合算符都是由重正化的场及其时空导数构成的定域算符。
- 当考虑包含组合算符的格林函数时，这种组合算符可能给出新的紫外发散。
- 我们需要选择合适的归一化条件，并引入相应的抵消项来抵消发散（这相当于与定域算符的rescaling）。
- 我们一般选取的归一化条件是，在某一能量标度 μ 满足树图阶的矩阵元的算符为重正化算符 $\mathcal{O}(\mu)$，也就是说，重正化的定域算符是能量标度依赖的。
- 组合算符的重正化常数 （这里的重正化算符 $\mathcal{O}(x,\mu)$ 是满足重正化条件的算符，给出有限格林函数的算符）

$$\mathcal{O}_0(x) = Z_{\mathcal{O}}(\mu)\,\mathcal{O}(x,\mu)$$

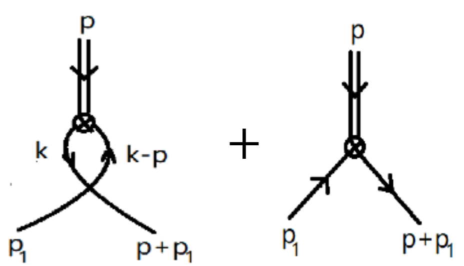
1. ϕ^4 理论中考虑组合算符 $\mathcal{O}(x)=\frac{1}{2}\phi^2(x)$ 的重正化

$$G_{\mathcal{O}}^{(n)}(x;x_1,x_2,\ldots,x_n)=\langle\Omega|T\mathcal{O}(x)\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)|\Omega\rangle$$

$$(2\pi)^4\delta^4(p+p_1+\cdots+p_n)\tilde{G}_{\mathcal{O}}^{(n)}(p;p_1,p_2,\ldots,p_n)$$

$$=\int d^4x\,e^{-ip\cdot x}\int\prod_{i=1}^{n}d^4x_i\,e^{-ip_i\cdot x_i}\,G_{\mathcal{O}}^{(n)}(x;x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

考虑两点函数 $G_{\mathcal{O}}^{(2)}(x;x_1,x_2)$ 对应的截腿格林函数，单圈水平上



$$\tilde{\Gamma}_{\mathcal{O},R}^{(2)}(p;p_1,-p-p_1)$$

$$=-\frac{i\lambda}{2}\int\frac{d^4k}{(4\pi)^4}\frac{i}{k^2-m^2+i\epsilon}\frac{i}{(k-p)^2-m^2+i\epsilon}$$

$$+\delta_{\phi^2}$$

抵消项：$\frac{1}{2}\delta_{\phi^2}\phi^2(x)$　（显然有额外的发散，所以要引入新的抵消项）

重正化条件： $\tilde{\Gamma}^{(2)}_{\mathcal{O},R}(0;0,0)=0$ $\Rightarrow$ $\delta_{\phi^2}=\frac{\lambda}{32\pi^2}\frac{1}{\epsilon}$

重正化算符： $\mathcal{O}(\mu)=\left(1+\delta_{\phi^2}\right)\frac{1}{2}\phi^2(x)=\left(1+\delta_{\phi^2}\right)Z_\phi^{-1}\frac{1}{2}\phi_0^2(x)$

$$\phi_0^2=\left(1+\delta_{\phi^2}\right)^{-1}Z_\phi\mathcal{O}(\mu)$$

$$\Rightarrow\quad Z_{\phi^2}=\left(1+\delta_{\phi^2}\right)^{-1}Z_\phi$$

$$G^{(n)}_{\mathcal{O},0}(x;x_1,x_2,\dots,x_n)=\langle\Omega|T\mathcal{O}_0(x)\phi_0(x_1)\phi_0(x_2)\cdots\phi_0(x_n)|\Omega\rangle$$
$$=Z_{\phi^2}Z_\phi^{n/2}\,G^{(n)}_{\mathcal{O},R}(x;x_1,x_2,\dots,x_n)$$

动量空间格林函数满足的 Callan-Symanzik 重正化群方程：

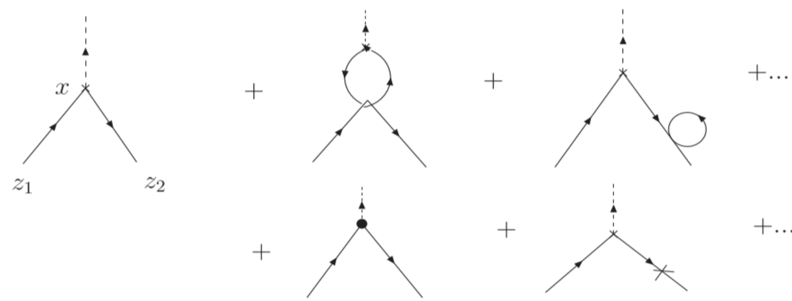
$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta\frac{\partial}{\partial\lambda}+\gamma_m m\frac{\partial}{\partial m}+n\gamma_\phi+\gamma_{\phi^2}\right)G^{(n)}_{\mathcal{O},R}=0$$

$$\gamma_\phi = \frac{1}{2}\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln Z_\phi\,, \qquad \gamma_{\phi^2} = \mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln Z_{\phi^2}$$

- 重整化理论中计算

$$\langle\Omega|T(\phi^2(x)\phi(z_1)\phi(z_2))|\Omega\rangle$$

$=$



- $\overline{\mathrm{MS}}$重整化方案：

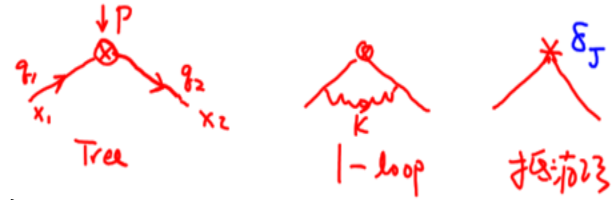
$$\delta_{\phi^2} = Z_{\phi^2}^{-1} - 1$$

$$= -\frac{1}{2}\left[i\lambda\tilde{\mu}^{2\varepsilon}\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{[k^2-M^2][(p+k)^2-M^2]}\right]\text{发散部分}$$

$$= -i\frac{\lambda}{2}\times[I(p^2)\text{发散部分}] = \frac{\lambda}{2(4\pi)^2}\frac{1}{\varepsilon}\,.$$

2. 守恒流算符不需要重正

比如矢量流算符 $J^\mu(x) = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi(x)$



考虑 QED 中有电流 $J^\mu(x)$ 插入的格林函数，

$$\langle\Omega|TJ^\mu(x)\,\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)|\Omega\rangle$$

$$= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{d^4q_1}{(2\pi)^4}\frac{d^4q_2}{(2\pi)^4}e^{-ip\cdot x}e^{-iq_1\cdot x_1}e^{iq_2\cdot x_2}$$

$$\times \mathcal{M}^\mu(p,q_1,q_2)(2\pi)^4\delta^4(p+q_1-q_2)$$

单圈水平上，会有如图的新的圈图发散，因此，需要引入新的抵消项 $\delta_J J^\mu(x)$ ，来消除该发散。相应的单粒子不可约图：

$$\Gamma_R^\mu(p,q_1,q_2) = \delta_J\gamma^\mu$$

$$+(-ie)^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\gamma^\nu\frac{i}{\gamma\cdot(q_2-k)-m}\gamma^\mu\frac{i}{\gamma\cdot(q_1-k)-m}\gamma_\nu\frac{-i}{k^2}$$

$$\xrightarrow[q_{1,2}\to 0,m\to 0]{}\left(\frac{e^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}+\delta_J+\text{有限部分}\right)\gamma^\mu$$

$$\delta_J = -\frac{e^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon} = \delta_2$$

所以，重正化的矢量流算符（发散被抵消）为

$$J^\mu(x,\mu) = \left(1+\delta_J\right)\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \equiv Z_J^{-1}J_0^\mu(x)$$

$$J_0^\mu(x) = \bar{\psi}_0(x)\gamma^\mu\psi_0(x) = Z_2\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$$

$$= Z_2\left(1-\delta_J\right)J^\mu(x,\mu) \equiv Z_J(\mu)J^\mu(x,\mu)$$

$$Z_J(\mu) = Z_2\left(1-\delta_J\right) = Z_2(1-\delta_2) = 1$$

矢量流是重正化不变的，定域流算符带来的发散正好被场的自能发散所抵消。

根据反常量纲的定义

$$\boxed{\delta_J = \mu\frac{d}{d\mu}\ln Z_J = 0}$$

这说明算符 $J^\mu(x)$ 不随能标跑动。

- Ward 恒等式在重正化群中的表达：守恒流的反常量纲为 0。
- 守恒流在任一能标完成归一化后，在其它能标也同样归一化了。

- 守恒流是整体连续对称性的反映——诺特流，由守恒流可以定义守恒荷。
- 守恒荷（“裸”的荷） Q_0^a， a 为对称性群的生成元指标。

裸场的对称变换：

$$\phi_0 \to e^{i\theta^a Q_0^a}\phi_0 e^{-i\theta^a Q_0^a} = e^{i\theta^a t^a}\phi_0$$

$$[Q_0^a, Q_0^b] = iC^{abc}Q_0^c$$

无穷小变换下，有： $[Q_0^a, \phi_0] = t^a\phi_0$

如果 $Q_0^a = Z_Q(\mu)Q^a(\mu),\ Z_Q(\mu) \neq 1$ ，则上面两式都会出现不自洽：
- 诺特荷满足的群生成元的的正则对易关系就不再满足；
- $[Q_0^a, \phi_0] = t^a\phi_0 \Longrightarrow Z_Q(\mu)[Q^a, \phi] = t^a\phi$，对称关系不再成立。

上面的讨论可以推广到更一般的情形。如果一个定域算符由 m 个费米场和 n 个玻色场构成（在QED 中费米场比如电子场，玻色场是光子场），则裸算符和重正化的算符之间的关系为

$$
\begin{aligned}
\mathcal{O}_0(x) &= Z_{\mathcal{O}}(\mu)\mathcal{O}(x;\mu) \\
&= Z_{\mathcal{O}}(\mu)(1+\delta_{\mathcal{O}})\mathcal{O}(x) = Z_{\mathcal{O}}(\mu)(1+\delta_{\mathcal{O}})Z_2^{-\frac{m}{2}}Z_3^{-\frac{n}{2}}\mathcal{O}_0(x)
\end{aligned}
$$

所以

$$
Z_{\mathcal{O}}(\mu) = (1-\delta_{\mathcal{O}})Z_2^{\frac{m}{2}}Z_3^{\frac{n}{2}} \approx \left(1-\delta_{\mathcal{O}}+\frac{m}{2}\delta_2+\frac{n}{2}\delta_3\right)
$$

则组合算符的反常量纲为

$$
\gamma_{\mathcal{O}} = \mu\frac{d}{d\mu}\ln Z_{\mathcal{O}}(\mu) = \mu\frac{d}{d\mu}\left(-\delta_{\mathcal{O}}+\frac{m}{2}\delta_2+\frac{n}{2}\delta_3\right)
$$

* 有算符混合情形的重正化

- 一个量子场论中可以包含多个具有相同量子数的算符，
  比如QED中，算符 $F^{\mu\lambda}F_{\lambda}^{\nu}$ 和算符 $\bar{\psi}[\gamma^{\mu}D^{\nu}+\gamma^{\nu}D^{\mu}]\psi$ 都是全对称性的张量算符，电荷为零，量纲为相同。
- 这样的算符由于量子修正会发生混合。
- 对于一个算符集合 $\{\mathcal{O}^{i}\}$，裸算符和重正化的算符之间的关系为

$$\mathcal{O}_0^i = Z_{\mathcal{O}}^{ij}(\mu)\mathcal{O}^j(\mu) \quad \longrightarrow \quad \mathcal{O}^i(\mu) = \left(Z_{\mathcal{O}}^{-1}\right)^{ij} O_0^j$$

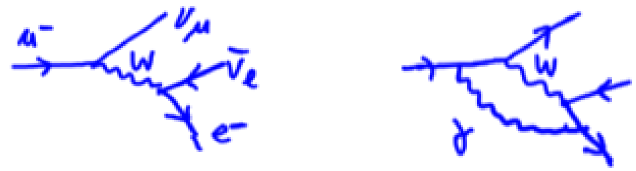
反常维数为一个矩阵

$$\gamma_{\mathcal{O}}^{ij} = \left[Z_{\mathcal{O}}^{-1}(\mu)\right]^{ik}\mu\frac{d}{d\mu}Z_{\mathcal{O}}^{kj}(\mu)$$

4. 有效理论的重正化群方程

四费米子有效理论，考虑 μ^- 轻子的弱衰变过程 $\mu^- \to e^- \overline{\nu_e} \nu_\mu$

由于初末态都有带电轻子，考虑它们的领头
阶电磁相互作用



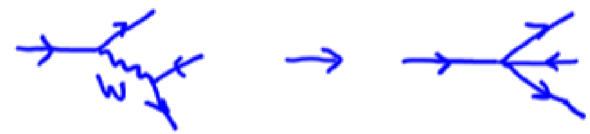
$$\Gamma(\mu^- \to e^- \overline{\nu}_e \nu_\mu) = \frac{1}{2m_\mu} \int d\Phi_3 \ |\mathcal{M}|^2$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}\, g}{8m_W^2} \right)^2 \frac{m_\mu^5}{192\pi^2} \left(1 + A\frac{\alpha}{4\pi} \ln \frac{m_W}{m_\mu} + \cdots \right)$$

QED的高阶贡献还有 $\left(\frac{A\alpha}{4\pi} \ln \frac{m_W}{m_\mu} \right)^n$ 的贡献，计算很复杂，而且显然是大对数项（$m_W \gg m_\mu$），但可以利用重正化群方程对这些大对数项进行重求和。

考虑到 m_W 远大于这个过程的典型能量标度，对 W^- 的传播子采用近似

$$\frac{i}{p^2 - m_W^2} \rightarrow \frac{i}{m_W^2}$$



有效拉氏量为

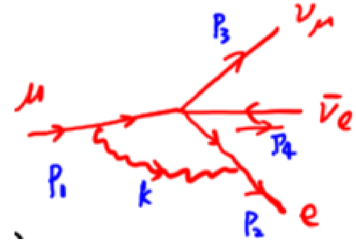
$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}\left(\bar{\psi}_\mu \gamma_\mu P_L \psi_{\nu_\mu}\right)\left(\bar{\psi}_{\nu_e} \gamma^\mu P_L \psi_e\right) + h.c.$$

$$G_F = \frac{\sqrt{2}\,g^2}{8m_W^2} = 1.166 \times 10^{-5}\,GeV^{-2}$$

不过，现在这种V-A的四费米子相互作用形式，实际上是没有电磁相互作用引起的能标跑动的，即上面式子中的大对数项的系数 $A = 0$ （如果是夸克的相关弱衰变，则会有QCD的辐射修正，而且因为夸克流不是QCD的守恒流，所以会有QCD的跑动行为）。

纯粹作为示例，将V-A流相互作用的形式换成标量流相互作用的形式（非物理的）

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \left(\bar{\psi}_\mu \psi_{\nu_\mu}\right)\left(\bar{\psi}_{\nu_e} \psi_e\right) + h.c.$$



在考虑领头阶的的QED修正时，$\mu^- \to e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$ 的衰变振幅

$$i\mathcal{M} = \frac{iG_F}{\sqrt{2}} e^2 \tilde{\mu}^{2\epsilon} \bar{u}(p_3) v(p_4)$$

$$\times \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\bar{u}(p_2)\gamma^\mu(\gamma \cdot (p_2 - k) + m_e)(\gamma \cdot (p_1 - k) + m_\mu)\gamma_\mu u(p_1)}{[(p_2 - k)^2 - m_e^2][(p_1 - k)^2 - m_\mu^2]k^2}$$

为了抽取上述振幅中的发散部分，我们取外线动量和粒子质量为零

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \left(-ie^2 \tilde{\mu}^{2\epsilon} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{d}{k^4}\right) + \cdots = \mathcal{M}_0 \left(\frac{e^2}{4\pi^2} \frac{1}{\epsilon} + \cdots\right) + \cdots$$

$$\mathcal{M}_0 = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{u}(p_2) u(p_1) \bar{u}(p_3) v(p_4)$$

要消除这个发散，我们需要对有效耦合常数 G_F 进行重正化：

$$G_F = Z_G G_R, \qquad Z_G = 1 + \delta_G$$

则在 $\overline{MS}$ 方案下， 抵消项 δ_G 可以确定为 $$\delta_G = -\frac{e^2}{(4\pi)^2}\frac{4}{\epsilon}$$

根据我们的定义，$\mathcal{L}_{eff}$ 中的场是重正化的场，考虑到四种费米场的波函数重正化，有

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{G_R}{\sqrt{2}} Z_G \left(\bar{\psi}_\mu \psi_{\nu_\mu}\right)\left(\bar{\psi}_{\nu_e}\psi_e\right)$$

$$= \frac{G_R}{\sqrt{2}} \frac{Z_G}{\left(Z_{2\mu}Z_{2e}Z_{2\nu_\mu}Z_{2\nu_e}\right)^{1/2}} \left(\bar{\psi}^0_\mu \psi^0_{\nu_\mu}\right)\left(\bar{\psi}^0_{\nu_e}\psi^0_e\right)$$

- 中微子不参与电磁相互作用，可以设 $Z_{2\nu_\mu} = Z_{2\nu_e} = 1$;
- μ 和 e 电磁相互作用性质相同，在 $\overline{MS}$ 方案下有 $Z_{2\mu} = Z_{2e} = Z_2$

有效拉氏量和 μ 无关（因为我们利用有效拉氏量来计算低能散射或衰变振幅），而且裸算符 $\left(\bar{\psi}_\mu^0 \psi_{\nu_\mu}^0\right)\left(\bar{\psi}_{\nu_e}^0 \psi_e^0\right)$ 是和重正化能标 μ 无关的，所以其系数也应该和 μ 无关，则给出重正化群方程

$$0 = \mu \frac{d}{d\mu}\left(\frac{G_R Z_G}{Z_2}\right) = \frac{G_R Z_G}{Z_2}\left(\frac{1}{G_R}\mu \frac{dG_R}{d\mu} + \frac{1}{Z_G}\frac{\partial Z_G}{\partial e}\mu \frac{de}{d\mu} - \frac{1}{Z_2}\frac{\partial Z_2}{\partial e}\mu \frac{de}{d\mu}\right)$$

这里用到了 Z_G 和 Z_2 对 μ 的依赖是通过 e 对 μ 的依赖而实现的。由

$$Z_G = 1 + \delta_G = 1 - \frac{e^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}, \qquad Z_2 = 1 - \frac{e^2}{(4\pi)^2}, \qquad \beta(e) = -e\epsilon + \frac{e^3}{12\pi^2}$$

我们得到

$$\gamma_G = \frac{1}{G_R}\mu \frac{d}{d\mu} G_R = \left(-\frac{\partial \ln Z_G}{\partial e} + \frac{\partial \ln Z_2}{\partial e}\right)\beta(e) = -\frac{3e^2}{8\pi^2} = -\frac{3\alpha}{2\pi}$$

另外， $\gamma_G = \mu \frac{d}{d\mu} \ln G_R = \mu \frac{d\alpha}{d\mu} \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln G_R = \beta(\alpha) \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln G_R$

$$\int_{\mu_0}^{\mu} d(\ln G_R(\mu)) = \int_{\alpha(\mu_0)}^{\alpha(\mu)} \frac{\gamma_G(\alpha)}{\beta(\alpha)} d\alpha$$

$$G_R(\mu) = G_R(\mu_0) \exp\left[\int_{\alpha(\mu_0)}^{\alpha(\mu)} \frac{\gamma_G(\alpha)}{\beta(\alpha)} d\alpha\right]$$

利用 $\gamma_G = -\frac{3\alpha}{2\pi}$， $\beta(\alpha) = -\frac{\alpha^2}{2\pi}\beta_0$， $\beta_0 = -4/3$ 得到

$$G_R(\mu) = G_R(\mu_0) \exp\left[-\frac{9}{4}\int_{\alpha(\mu_0)}^{\alpha(\mu)} \frac{d\alpha}{\alpha}\right] = G_R(\mu_0)\left(\frac{\alpha(\mu)}{\alpha(\mu_0)}\right)^{-9/4}$$

这就是等效耦合常数随能表 μ 的QED跑动行为，我们可以利用 $G_R(\mu_0)$ 的值得到 $G_R(\mu)$ 的值。

谢谢！