9.4 有效作用量的对称性——Slavnov-Taylor 恒等式

- 一般情形下，有效作用量 $\Gamma[\phi]$ 将保持作用量 $S[\phi]$ 的对称性。
- 在证明理论的可重正性时，$\Gamma[\phi]$ 所满足的对称性会起到很重要的作用。

考虑场的对称变换

$$\phi_n(x) \to \phi'_n(x) = \phi_n(x) + \theta^a F_n^a[\phi_{n'}, x]$$

对称性要求 $S[\phi]$ 在此变换下时不变的，如果 $D\phi$ 在此变换下也是不变的

$$\int D\phi_n \exp\left(i\left(S[\phi] + \int d^4x J_n\phi_n\right)\right)\int d^4x J_n(x) F_n^a[\phi_{n'}; x] = 0$$

即

$$\int d^4x\, J_n(x)\langle F_n^a[\phi_{n'}; x]\rangle_J = 0$$

连通格林函数生成泛函 $W[J]$ 和有效作用量 $\Gamma[\phi]$ 之间的勒让德变换关系

$$\Gamma[\phi_c] = W[J] - \int d^4x\, J_n(x)\phi_{c,n}(x), \qquad \phi_c(x) = \langle\phi(x)\rangle_J$$

得到 $$J_n(x) = -\frac{\delta\Gamma[\phi_c]}{\delta\phi_{c,n}(x)}$$

代入到前面的方程，有

$$\int d^4x\,\frac{\delta\Gamma[\phi_c]}{\delta\phi_{c,n}(x)}\langle F_n^a[\phi_{n'};x]\rangle_J = 0$$

这个方程的含义可以理解为，当经典场 $\phi_c(x)$ 在无穷小变换

$$\phi_c(x) \to \phi_c'(x) = \phi_c(x) + \theta^a\langle F_n^a[\phi_{n'},x]\rangle_J$$

时，$\Gamma[\phi_c]$ 是不变的，这个对称性条件称作Slavnov-Taylor恒等式。

对于线性变换，即 $F_n^a[\phi_{n'},x]$ 只包含场的一次项，

$$F_n^a[\phi_{n'};x] = s_n^a(x) + \int d^4y\; it_{nm}^a(x;y)\phi_n(y)$$

多数情形下，$s_n^a(x) = 0$， $t_{nm}^a(x;y)$ 是一个常矩阵

$$t_{nm}^a(x;y) = it_{nm}^a\delta^4(x-y)$$

这时有

$$\langle F_n^a[\phi_{n'},x]\rangle_J = t_{nm}^a\langle\phi_m(x)\rangle_J = t_{nm}^a\phi_{c,m}(x)$$

则 Slavnov-Taylor恒等式可以表示为

$$\delta\Gamma[\phi_c] = \int d^4x\, it_{nm}^a\phi_{c,m}(x)\,\frac{\delta\Gamma[\phi_c]}{\delta\phi_c(x)} = 0$$

注意经典作用量在对称变换下的不变性可以表示为

$$\delta S[\phi_c] = \int d^4x\;it_{nm}^a\phi_{c,m}(x)\frac{\delta S[\phi_c]}{\delta\phi_c(x)} = 0$$

显然有效作用量和经典作用量有相同的对称性。我们通常讨论的对称性都属于这一类，即对称变换是场的线性变换。在考虑理论的可重正性时，在微扰论的每一阶，我们只需要引入和作用量各项相同的抵消项，就能够保证有效作用量的对称性不会改变。

Yang-Mills 理论在经过Faddeev-Popov量子化后，有效拉氏量具有的奇特的 BRST 对称性，场变换是非线性的。Slavnov-Taylor恒等式要复杂些。

9.5 反常 （Anomaly）

在经典理论中成立的对称性(作用量的对称性）会由于量子修正发生破坏，这种因量子修正而发生破坏的对称性称作反常。

1. 标度不变性的反常破坏

能动量张量 $T_{\mu\nu}$ 不一定是对称的，在规范理论中也不一定是规范不变的。

$$\Theta^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \partial_\lambda \Sigma^{\mu\nu\lambda}$$

对称且规范不变的，其中 $\Sigma^{\mu\nu\lambda}$ 对于 $\mu\nu$ 是反对称的。如果 $T^{\mu\nu}$ 是守恒的，则 $\Theta^{\mu\nu}$ 也是守恒的。整体的能量和动量不会改变

$$P^\nu = \int d^3x\, T^{0\nu} = \int d^3x\, \Theta^{0\nu}$$

标度变换

$$\phi(x) \to e^{-D\sigma}\phi(xe^{-\sigma})$$

D是场的正则量纲。如果经典的拉氏量在这个标度变换下不变，则根据诺特定理，会存在一个守恒流 K^μ，称作伸缩流（dilatation current），它和能动量张量 $\Theta^{\mu\nu}$ 的关系为 $D^\mu = \Theta^{\mu\nu}x_\nu$，从而有

$$\partial_\mu K^\mu = \Theta^\mu_\mu$$

QED中

$$\Theta^{\mu\nu}=\frac{1}{4}g^{\mu\nu}(F_{\lambda\sigma})^2-g^{\mu\nu}\bar{\psi}(i\gamma\cdot D-m)\psi$$

$$-F^{\mu\lambda}F^{\nu}_{\lambda}+\frac{1}{2}\bar{\psi}i(\gamma^{\mu}D^{\nu}+\gamma^{\nu}D^{\mu})\psi$$

容易看出，其迹部分（trace）为

$$\Theta^{\mu}_{\mu}=m\bar{\psi}\psi$$

当费米子质量为零时（$m=0$），$\Theta^{\mu\nu}$ 是无迹的，理论确实是标度不变的。

哈密顿量为 （$E^i=-F^{0i},B^i=-\epsilon^{ijk}F^{jk},F^2=-2\left(\vec{E}^2-\vec{B}^2\right)$ ）

$$H=\int d^3x\ \Theta^{00}=\int d^3x\left[\frac{1}{2}\left(E^2+B^2\right)+\bar{\psi}\left(-i\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla}+m\right)\psi\right]$$

在考虑量子修正时，我们知道理论不是标度不变的，比如在相同的理论中，不同的能量标度会给出不同的重正化耦合常数。耦合常数标度的变化为

$$g \to g + \sigma\beta(g)$$

相应地，拉氏量的变化量为

$$\delta_\sigma \mathcal{L} = \sigma\beta(g)\frac{\partial}{\partial g}\mathcal{L}$$

对于QED，我们有

$$\frac{\partial}{\partial e}\mathcal{L} = -\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu = -\frac{1}{e}\partial_\nu F^{\nu\mu} A_\mu = F^{\nu\mu}\partial_\nu A_\mu = \frac{1}{2e}F^2$$

在上式中，我们利用了运动方程 $\partial_\nu F^{\nu\mu} = j^\mu, j^\mu = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$。

我们发现量子修正会贡献 $\Theta^{\mu\nu}$ 的迹部分， $\Theta^\mu_\mu = \dfrac{\beta(e)}{2e}F^2$

2. 手征反常

- 量子场论中最重要的反常之一是涉及零质量费米子的手征对称性由于量子修正而破坏，即手征反常。
- 手征反常又称作 ABJ 反常、轴矢流反常、三角反常等。

1）经典极限下的手征对称性：

以QED为例，其拉氏量为

$$\mathcal{L}_{QED}=-\frac{1}{4}F^2+\bar{\psi}(i\gamma\cdot D-m)\psi$$

将电子场 ψ 分成左手部分和右手部分的和

$$\psi=\psi_L+\psi_R,\qquad \psi_L=\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi,\qquad \psi_R=\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi$$

则有

$$\mathcal{L}_{QED}=-\frac{1}{4}F^2+\bar{\psi}_L i\gamma\cdot D\psi_L+\bar{\psi}_R i\gamma\cdot D\psi_R+m\left(\bar{\psi}_L\psi_R+\bar{\psi}_R\psi_L\right)$$

- 质量 m 可以看作为左手场和右手场的耦合常数。
- 如果 $m=0$，则左右手场退耦，而且满足各自的运动方程。

相位变换： $\psi_R \to e^{i\alpha}\psi_R$, $\psi_L \to e^{i\beta}\psi_L$， $\mathcal{L}_{QED}(m=0)$ 不变；
$U_R(1)\times U_L(1)$ 对称性——手征对称性。

当 $\alpha=\beta$ 时：$\psi=\psi_R+\psi_L\to e^{i\alpha}\psi$ ，矢量型 $U_V(1)$ 对称性，矢量流守恒

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \qquad j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

当 $\alpha=-\beta$ 时：

$$\psi_R+\psi_L\to e^{i\alpha}\psi_R+e^{-i\alpha}\psi_L=(\cos\alpha+i\gamma_5\sin\alpha)\psi=e^{i\alpha\gamma_5}$$

$U_A(1)$ 轴变换： $\psi=e^{i\alpha\gamma_5}\psi$, $\quad\bar{\psi}=\bar{\psi}e^{i\alpha\gamma_5}$

手征极限下（ $m=0$ ），拉氏量在 $U_A(1)$ 变换下是不变的，相应的诺特流为轴矢流 $j_5^\mu(x)$（axial vector current），它是守恒的

$$\partial_\mu j_5^\mu \equiv \partial_\mu\left(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\right)\psi = 0$$

当费米子质量不为零时，轴矢流不守恒（利用运动方程 $(i\gamma\cdot\partial-m)\psi=0$ ），

$$\partial_\mu j_5^\mu \equiv \partial_\mu\left(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\right)\psi = 2im\bar{\psi}\gamma_5\psi$$

2）量子效应——轴矢流反常

- 当考虑**量子修正**时，即使在手征极限，轴矢流也可能不守恒；有反常项。
- 我们在路径积分形式下来讨论轴矢流的反常。
- 电磁场在手征变换下时不变的，我们把电磁场看作外场，只考虑对费米场的路径积分。

在存在外场 $A_\mu(x)$ 的情况下的费米场的生成泛函为

$$Z[A,\eta,\bar{\eta}]=\int D\bar{\psi}D\psi\exp\left(i\int d^4x\ \bar{\psi}(i\gamma\cdot D)\psi\right)$$

无穷小定域轴变换：

$$\psi(x)\to\psi'(x)=\psi(x)+i\alpha(x)\gamma_5\psi(x)$$

$$\bar{\psi}(x)\to\bar{\psi}'(x)=\bar{\psi}(x)+i\alpha(x)\bar{\psi}(x)\gamma_5$$

作用量改变量：

$$S[\psi',\bar{\psi}']=\int d^4x\ \bar{\psi}'(i\gamma\cdot D)\psi'=\int d^4x\left[\bar{\psi}(i\gamma\cdot D)\psi+\alpha(x)\partial_\mu\left(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi\right)\right]$$

$$\delta S[\psi,\bar{\psi}]=\alpha(x)\partial_\mu\left(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi\right)$$

积分测度的变化：

$$D\bar{\psi}'D\psi' = D\bar{\psi}D\psi\,(\det J)^{-2}$$

泛函矩阵 J 来自变量替换 $\psi \to \psi'$

$$J(x,y) = \frac{\delta\psi'(x)}{\delta\psi(y)} = \delta^4(x-y)\exp(i\alpha(x)\gamma_5)$$

$$\det J = \exp(\mathrm{tr}\ln J) = \exp\left[i\int d^4x\ \langle x|\mathrm{Tr}\,\alpha(x)\gamma_5|x\rangle\right]$$

$$= \exp\left[\int d^4x\ \alpha(x)\mathrm{Tr}\big(\delta^4(x-x)\gamma_5\big)\right]$$

在上述表达式中，求迹符号 tr 时对时空坐标和旋量空间进行的，而 Tr 只对旋量空间。注意 $\delta^4(x-x)$ 是无穷大，$\mathrm{Tr}\gamma_5 = 0$，这说明上述指数中的积分没有很好的定义，需要正规化。

规范协变的正规化：

$$\delta^4(x-y)\to\exp\left[\frac{(i\gamma\cdot D)^2}{M^2}\right]\delta^4(x-y),\qquad (M\to\infty)$$

$$=\lim_{M\to\infty}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\exp\left[\frac{(i\gamma\cdot D)^2}{M^2}\right]e^{ik\cdot(x-y)}$$

$$=\lim_{M\to\infty}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{ik\cdot(x-y)}\exp\left[\frac{1}{M^2}(i\gamma\cdot D-\gamma\cdot k)^2\right]$$

$$\boxed{\begin{aligned}&(i\gamma\cdot D)^2e^{ik\cdot(x-y)}=(i\gamma\cdot D)(i\gamma\cdot D)e^{ik\cdot(x-y)}\\&=(i\gamma\cdot D)\left[e^{ik\cdot(x-y)}(\gamma\cdot D-\gamma\cdot k)\right]=e^{ik\cdot(x-y)}(i\gamma\cdot D-\gamma\cdot k)^2\end{aligned}}$$

再利用 $\sigma^{\mu\nu}=\frac{i}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]$

$$(\gamma\cdot D)^2=\gamma_\mu\gamma_\nu D^\mu D^\nu=g_{\mu\nu}D^\mu D^\nu-i\sigma_{\mu\nu}D^\mu D^\nu$$

$$=D^2-\frac{1}{2}i\sigma_{\mu\nu}[D^\mu,D^\nu]=D^2+\frac{e}{2}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

则有

$$(i\gamma\cdot D-\gamma\cdot k)^2=k^2-i2k\cdot D-D^2-\frac{e}{2}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

最后，我们得到

$$\mathrm{Tr}\left[\delta^4(x-x)\gamma_5\right] = \lim_{\substack{y\to x \\ M\to\infty}} \mathrm{Tr}\exp\left(\frac{(i\gamma\cdot D)^2}{M^2}\delta^4(x-y)\gamma_5\right)$$

$$= \lim_{\substack{y\to x \\ M\to\infty}} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik\cdot(x-y)} \mathrm{Tr}\left[\gamma_5 \exp\left(\frac{1}{M^2}\left(k^2 - 2ik\cdot D - D^2 - \frac{e}{2}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)\right)\right]$$

做标度变换 $k \to kM$，利用 γ_5 矩阵求迹性质，将指数函数泰勒展开后很容易看到，有贡献的最低阶项为$O(M^{-4})$项，再取 $x \to y$ 的极限，有

$$\mathrm{Tr}\left[\delta^4(x-x)\gamma_5\right] = \lim_{M\to\infty} M^4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{k^2} \mathrm{Tr}\left(\gamma_5 \frac{e^2}{8M^4} F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}\sigma^{\mu\nu}\sigma^{\alpha\beta} + \cdots\right)$$

$$= \frac{e^2}{8}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{k^2} F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}\mathrm{Tr}\left(\gamma_5\sigma^{\mu\nu}\sigma^{\alpha\beta}\right)$$

Wick 转动，
$k^0 \to ik_E^4$

$$= \frac{ie^2}{8}\int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4} e^{-k_E^2}\left(-4i\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}\right)$$

$$= \frac{e^2}{32\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}$$

$$\boxed{\mathrm{Tr}\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta = 4i\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}}$$

$$(\det J)^{-2} = \exp\left[-2i\int d^4x\ \alpha(x) Tr\left(\gamma_5\delta^4(x-x)\right)\right]$$

$$= \exp\left[-\frac{i}{16\pi^2}\int d^4x\ \ \alpha(x)\ \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}\right]$$

$$Z[A] = \int D\bar{\psi}' D\psi' e^{i\int d^4x\, \bar{\psi}'(i\gamma\cdot D)\psi'}$$

$$= \int D\bar{\psi} D\psi\ \ e^{i\int d^4x\, \bar{\psi}(i\gamma\cdot D)\psi} e^{\left[i\int d^4x\, \alpha(x)\left(\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi) - \frac{e^2}{16\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}\right)\right]}$$

由于 $\alpha(x)$ 的任意性，我们最终有

$$\langle\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi)\rangle = \left\langle\frac{e^2}{16\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}\right\rangle$$

如果再考虑 $m \neq 0$ 的情形，在算符水平上，我们有反常的轴矢流关系

$$\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi) = 2im\bar{\psi}\gamma_5\psi + \frac{e^2}{16\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}$$

9.6 QCD中的手征对称性及其自发破缺

电磁相互作用是矢量理论，没有轴矢流相互作用，所以上面所说的轴矢流和轴矢流反常都没有具体的可观测效应。

1. $N_f = 2$ QCD 的手征对称性

考虑两味夸克 u, d，它们在QCD中的夸克部分的拉氏量为

$$\mathcal{L} = \bar{u} i\gamma \cdot D u + \bar{d} i\gamma \cdot D d - m_u \bar{u} u - m_d \bar{d} d \equiv \bar{\psi} i\gamma \cdot D\psi - \bar{\psi} M \psi$$

其中，

$$\psi = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \bar{\psi} = (\bar{u}, \bar{d}), \qquad M = \begin{pmatrix} m_u & 0 \\ 0 & m_d \end{pmatrix}$$

取近似 $m_u \approx m_d \approx 0$（手征极限），显然有 $SU(2)$ 对称性——同位旋

考虑将夸克场分成左右手部分，即 $u = u_L + u_R, d = d_L + d_R$，则有

$$\psi_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \qquad \psi_R = \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \end{pmatrix}$$

手征极限下，拉氏量表示为（左右手完全分开）

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_R i\gamma \cdot D\psi_R + \bar{\psi}_L i\gamma \cdot D\psi_L$$

左右手场在各自的 $U(2)$ 对称变换

$$\psi_L \to U_L\psi_L \ \ U_L \in U_L(2), \qquad \psi_R \to U_R\psi_R, U_R \in U_R(2)$$

将 $U(2)$ 中的整体相位变换分离出来， $U(2) \to SU(2) \times U(1)$，则包含两味夸克的QCD的整体味道对称性——手征对称性——

$$SU_L(2) \times SU_R(2) \times U_L(1) \times U_R(1)$$

$$\boxed{t^a = \frac{\sigma^a}{2}, a = 1,2,3}$$

诺特流：

$$U_L(1): \quad j_L^\mu = \bar{\psi}_L\gamma^\mu\psi_L; \qquad U_R(1): \quad j_R^\mu = \bar{\psi}_R\gamma^\mu\psi_R;$$

$$SU_L(2): \quad j_L^{a\mu} = \bar{\psi}_L\gamma^\mu t^a\psi_L; \qquad SU_R(2): \quad j_R^{a\mu} = \bar{\psi}_R\gamma^\mu t^a\psi_R$$

诺特荷：

$$Q_{L,R}(t) = \int d^3\vec{x}\ j_{L,R}^0(\vec{x},t) \qquad Q_{L,R}^a(t) = \int d^3\vec{x}\ j_{L,R}^{a,0}(\vec{x},t)$$

如果流是守恒的，则可以证明上述诺特荷是守恒的，和时间无关；但如果诺特流因某种原因而而破坏，则荷可能和时间有关，但我们仍然可以定义和诺特流相关的诺特荷。

可以证明 $Q^a_{L,R}(t)$ 满足对易关系

$$[Q^a_L(t), Q^b_L(t)] = i\epsilon^{abc} Q^c_L(t)$$
$$[Q^a_R(t), Q^b_R(t)] = i\epsilon^{abc} Q^c_R(t) \qquad [Q^a_L(t), Q^b_R(t)] = 0$$

诺特流重新组合

同位旋单态矢量流： $j^\mu = j^\mu_R + j^\mu_L = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi,$

同位旋单态轴矢流： $j^\mu_5 = j^\mu_R - j^\mu_L = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi$

同位旋三重态矢量流： $j^{a\mu}_5 = j^{a\mu}_R - j^{a\mu}_L = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5 t^a\psi$

同位旋三重态矢量流： $j^{a\mu} = j^{a\mu}_R + j^{a\mu}_L = \bar{\psi}\gamma^\mu t^a\psi,$

- 同位旋单态的矢量流对应的荷为 $Q = Q_L + Q_R$，对应于重子数守恒；
- 同位旋单态的轴矢流 j^μ_5 对应的荷称作轴荷 $Q_5 = Q_R - Q_L$。由于同位旋单态的轴矢流存在反常（见后面讨论），所以轴荷不是守恒量。

- 同位旋三重态的矢量荷和轴荷分别为 $Q^a = Q_R^a + Q_L^a$, $Q_5^a = Q_R^a - Q_L^a$, 它们满足如下对易关系

$$
\begin{aligned}
\left[Q^a(t), Q^b(t)\right] &= i\epsilon^{abc} Q^c(t) \\
\left[Q_5^a(t), Q_5^b(t)\right] &= i\epsilon^{abc} Q^c(t) \\
\left[Q^a(t), Q_5^b(t)\right] &= i\epsilon^{abc} Q_5^c(t)
\end{aligned}
$$

- 这是用矢量荷和轴荷表达的 $SU_L(2) \times SU_R(2)$ 手征对称性的李代数关系，显然矢量荷和轴荷的对易关系没有完全分开，即上述对称性不能称作 $SU_V(2) \times SU_A(2)$ 对称性。但是，矢量荷构成一个封闭的子代数，这表明 $SU_V(2)$ 是 $SU_L(2) \times SU_R(2)$ 的子群，实际上它对应强相互作用中的同位旋 $SU(2)$ 对称性。

- 只有矢量流满足的 $SU_V(2) \times U_V(1)$ 对称性是有观测效应的，表现为同位旋对称性和中子数守恒，但剩余的对称性没有可观测效应。比如赝标量介子和标量介子互为宇称伴子，矢量介子和轴矢量介子互为宇称伴子，但实际上它们的质量并不相等。

- 这说明，和轴矢流有关的对称性因为某种原因破缺了，现在我们已经知道手征对称性是自发破缺的。

$SU(2)_A \times U(1)_A$：没有物理的对应

自发对称性破缺：$\langle 0|\bar{Q}Q|0\rangle = \langle 0|\bar{u}u+\bar{d}d|0\rangle \neq 0$ (夸克真空凝聚)

四个 Goldstone 粒子 $m^2 \approx 0$ (Goldstone 定理)

三个接近零质量的 π 介子：$\langle 0|j^{a\mu 5}|\pi^b(p)\rangle = -ip^\mu f_\pi \delta^{ab} e^{-ip\cdot x}$

π 介子质量不为零是因为夸克还有小的质量.

这些讨论可可以很自然地推广到三味夸克 u, d, s 的情形，这时的手征对称称性为 $SU_L(3) \times SU_R(3) \times U_L(1) \times U_R(1)$，在以上表达式中，$a, b$ 的取值变为 $a, b = 1, 2, \ldots, 8$；全反对称张量由 ϵ^{abc} 替换为$SU(3)$ 群的结构常数 f^{abc}。三味夸克时的哈密顿密度中的质量项为

$$\mathcal{H}' = m_u \bar{u}u + m_d \bar{d}d + m_s \bar{s}s \equiv \bar{\psi} M \psi$$

$$M = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{pmatrix}$$

2. 手征对称性自发破缺

历史上关于手征对称性的自发破缺机制是通过流代数（current algebra）推出的。

a）流代数

荷之间的的代数关系推广到诺特流满足的对易关系：

$$\left[Q^a(t), j^{b0}(\vec{x}, t)\right] = if^{abc} j^{c0}(\vec{x}, t)$$

$$\left[j^{a0}(\vec{x}, t), j^{b0}(\vec{y}, t)\right] = if^{abc} j^{c0}(\vec{x}, t)\delta^3(\vec{x} - \vec{y})$$

根据洛伦兹协变性，

$$\left[Q^a(t), j^{b\mu}(\vec{x}, t)\right] = if^{abc} j^{c\mu}(\vec{x}, t)$$

这些关系称作流代数关系。

引入标量流和赝标量流

$$j_S^i = \bar{\psi}\lambda^i\psi, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots 8$$

$$j_P^i = -i\bar{\psi}\gamma_5\lambda^i\psi, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots 8$$

$$\lambda^0 = \sqrt{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

利用费米场的基本对易关系

$$\left\{\psi_i(\vec{x},t),\psi_j^+(\vec{y},t)\right\}=\delta_{ij}\delta^3(\vec{x}-\vec{y})$$

和$SU(3)$生成元的反对易关系

$$\left\{t^a,t^b\right\}=\frac{1}{3}\delta^{ab}+d^{abc}t^c,a,b,c=1,2,\dots,8$$

则有

$$\left[Q_5^a(t),j_S^i(\vec{y},t)\right]=-id^{aik}j_P^k(\vec{y},t),\qquad i,k=0,1,2,\dots,8$$

$$\left[Q_5^a(t),j_P^i(\vec{y},t)\right]=\ id^{aik}j_S^k(\vec{y},t),\qquad i,k=0,1,2,\dots,8$$

$$d^{118}=d^{228}=d^{338}=\frac{1}{\sqrt{3}},d^{448}=d^{558}=d^{668}=d^{778}=-\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$d^{344}=d^{355}=-d^{366}=-d^{377}=d^{146}=d^{157}=-d^{247}=d^{256}=\frac{1}{2}$$

这里，我们补充定义了 $d^{0ab}=\sqrt{\frac{2}{3}}\delta^{ab}$

Q^a 和轴荷 Q_5^a 与 j_S^a, j_P^a 的对易关系的证明：

$$\left[Q_5^a(t), j_s^b(\vec{y},t)\right] = \int d^3\vec{x}\left[\bar{\psi}\gamma^0\gamma_5\frac{\lambda^a}{2}\psi(\vec{x},t), \bar{\psi}\lambda^b\psi(\vec{y},t)\right],$$

$$= \int d^3\vec{x}\ \left[\psi_{i\alpha}^+\psi_{j\beta}(\vec{x},t), \psi_{l\gamma}^+\psi_{m\delta}(\vec{y},t)\right](\gamma_5)_{\alpha\beta}\left(\frac{\lambda^a}{2}\right)_{ij}\left(\gamma^0\right)_{\gamma\delta}\left(\lambda^b\right)_{lm}$$

费米场的对易子可以整理如下：

$$\begin{aligned}
\left[\psi_{i\alpha}^+\psi_{j\beta}(\vec{x},t), \psi_{l\gamma}^+\psi_{m\delta}(\vec{y},t)\right] = & -\psi_{i\alpha}^+(\vec{x},t)\psi_{l\gamma}^+(\vec{y},t)\left\{\psi_{j\beta}(\vec{x},t), \psi_{m\delta}(\vec{y},t)\right\} \\
& +\psi_{i\alpha}^+(\vec{x},t)\left\{\psi_{j\beta}(\vec{x},t), \psi_{l\gamma}^+(\vec{y},t)\right\}\psi_{m\delta}(\vec{y},t) \\
& -\psi_{l\gamma}^+(\vec{y},t)\left\{\psi_{i\alpha}^+(\vec{x},t), \psi_{m\delta}(\vec{y},t)\right\}\psi_{j\beta}(\vec{x},t) \\
& +\left\{\psi_{i\alpha}^+(\vec{x},t), \psi_{l\gamma}^+(\vec{y},t)\right\}\psi_{j\beta}(\vec{x},t)\psi_{m\delta}(\vec{y},t) \\
= & \quad \delta_{jl}\delta_{\beta\gamma}\psi_{i\alpha}^+(\vec{x},t)\psi_{m\delta}(\vec{y},t)\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \\
& -\delta_{im}\delta_{\alpha\delta}\psi_{l\gamma}^+(\vec{y},t)\psi_{j\beta}(\vec{x},t)\delta^3(\vec{x}-\vec{y})
\end{aligned}$$

最终得到

$$\left[Q_5^a(t), j_s^b(\vec{y},t)\right] = \frac{1}{2}\psi^+(\vec{y},t)\left(\gamma_5\gamma^0\lambda^a\lambda^b - \gamma^0\gamma_5\lambda^b\lambda^a\right)\psi(\vec{y},t) = -2\left(\bar{\psi}\gamma_5\left\{t^a, t^b\right\}\psi\right)(\vec{y},t)$$

$$= -\ id^{abc}j_P^c(\vec{y},t)$$

b）σ 项

现实世界中，夸克是以强子的形式存在的，因此为了考察轴矢流的破缺机制，我们引入任意强子态 $|h(p)\rangle$ 的 σ 项

$$
\begin{aligned}
\sigma_h^{ab} &= i\int d^4x\ \delta(x^0)\left\langle h(p)\middle|\left[j_5^{a0}(0), \partial^\mu j_{5\mu}^b(x)\right]\middle|h(p)\right\rangle \\
&= i\int d^3\vec{x}\ \langle h(p)|[j_5^{a0}(\vec{x},0), \partial^0 j_{50}^b(0)]|h(p)\rangle \\
&= -\int d^3\vec{y}\ \left\langle h(p)\middle|\left[Q_5^a,\left[\mathcal{H}(\vec{y},0), A_0^b(0)\right]\right]\middle|h(p)\right\rangle \\
&= -\int d^3\vec{y}\ \left\langle h(p)\middle|\left[Q_5^a,\left[\mathcal{H}(0), A_0^b(\vec{y},0)\right]\right]\middle|h(p)\right\rangle \\
&= \left\langle h(p)\middle|\left[Q_5^a,\left[Q_5^b,\mathcal{H}(0)\right]\right]\middle|h(p)\right\rangle
\end{aligned}
$$

强子矩阵元正比于 $\partial^\mu j_{5\mu}^b(x)$， 其值就反映了轴矢流的破缺程度。

σ 项实际上就是哈密顿密度和两个轴荷双重对易子在强子态之间的矩阵元。如果哈密顿量具有手征对称性，即 $[Q_5^a,\mathcal{H}(0)]=0$，则 σ 项为零；如果哈密顿量包含手征对称性的破缺项，则 σ 项就不为零。

- 真空的 σ 项 $\quad \sigma_0^{ab} = \left\langle \Omega\middle|\left[Q_5^a,\left[Q_5^b,\mathcal{H}(0)\right]\right]\middle|\Omega\right\rangle$

$$M=\begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{pmatrix}=c_0\lambda^0+c_3\lambda^3+c_8\lambda^8$$

$$c_0=\frac{1}{\sqrt{6}}(m_u+m_d+m_s)$$

$$c_8=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{m_u+m_d}{2}-m_s\right)$$

$$c_3=\frac{1}{3}(m_u-m_d)$$

哈密顿密度中的质量项（明显的手征对称性破缺项）为

$$\mathcal{H}'=m_u\bar{u}u+m_d\bar{d}d+m_s\bar{s}s\equiv\bar{\psi}M\psi$$

$$=c_0j_s^0+c_3j_s^3+c_8j_s^8$$

这样，利用流代数关系，我们可以得到强子的 σ 项（具体核子的 σ 项的讨论见 T.P. Cheng & L.F. Li 的 Gauge theory of elementary particle physics的 Chp 5.3–5.5）

c）真空 σ 项和手征对称性自发破缺，GMOR 关系

假如手征对称性存在自发性对称破缺，则同位旋三重态的轴矢流会和赝标量介子有直接的耦合（具体讨论见对称性自发破缺部分）

$$\left\langle \Omega \middle| j_{5\mu}^{a}(x) \middle| P^{a}(p) \right\rangle = i f_{a} \delta^{ab} p_{\mu} e^{-ip\cdot x}$$

其中 f_{π} 称作 π 介子的衰变常数，p 是 π 介子的四动量，$a, b = 1, 2, 3$。

$$\left\langle \Omega \middle| \partial^{\mu} j_{5\mu}^{a}(x) \middle| P^{a}(p) \right\rangle = m_{a}^{2} f_{a} \delta^{ab} e^{-ip\cdot x}$$

如果我们令 $\phi^{a}(x)$ 表示产生一个赝标量介子 P^{a} 的的场量（是时空坐标的光滑函数），并且取如下归一化

$$\langle \Omega | \phi_{\pi}^{a}(x) | \pi^{b}(p) \rangle = \delta^{ab} e^{-ip\cdot x}$$

则我们得到算符方程

$$\partial^{\mu} j_{5\mu}^{a}(x) = m_{a}^{2} f_{\pi} \phi^{a}(x)$$

其含义是，当 f_{a} 不为零时，轴矢流在 $m_{a}^{2} \neq 0$ 时不再守恒。这个关系就是著名的轴矢流部分守恒关系（partially conservation of the axial current，简称PCAC）。

根据LSZ约化公式

$$
\begin{aligned}
m_a^2 f_a &= \left\langle \Omega \middle| \partial^\mu j_{5\mu}^a(0) \middle| P^a(k) \right\rangle \\
&= i\left(m_a^2 - k^2\right) \int d^4x\ e^{-ik\cdot x} \left\langle \Omega \middle| T \partial^\mu j_{5\mu}^a(0) \phi^a(x) \middle| \Omega \right\rangle \\
&= \frac{i\left(m_a^2 - k^2\right)}{f_a m_a^2} \int d^4x\ e^{-ik\cdot x} \left\langle \Omega \middle| T \partial^\mu j_{5\mu}^a(0) \partial^\nu j_{5\nu}^a(x) \middle| \Omega \right\rangle \\
&= \frac{i\left(m_a^2 - k^2\right)}{f_a m_a^2} \int d^4x\ e^{-ik\cdot x} \\
&\quad \times \left\{ i k^\nu \left\langle \Omega \middle| T \partial^\mu j_{5\mu}^a(0) j_{5\nu}^a(x) \middle| \Omega \right\rangle - \left\langle \Omega \middle| \delta\left(x^0\right) [j_{50}^a(x), \partial^\nu j_{5\nu}^a(0)] \middle| \Omega \right\rangle \right\}
\end{aligned}
$$

在低能极限 $k \to 0$ 下，有

$$
m_a^2 f_a^2 = -i \int d^4x\ \langle \Omega | \delta\left(x^0\right) [j_{50}^a(x), \partial^\nu j_{5\nu}^a(0)] | \Omega \rangle = -\sigma_0^{aa}
$$

$$
= -\langle \Omega | \left[Q_5^a, [Q_5^a, \mathcal{H}(0)] \right] | \Omega \rangle
$$

$$\sigma_0^{ab} = \left\langle \Omega \middle| \left[Q_5^a, \left[Q_5^b, \mathcal{H}(0) \right] \right] \middle| \Omega \right\rangle = \left\langle \Omega \middle| \left[Q_5^a, \left[Q_5^b, \mathcal{H}'(0) \right] \right] \middle| \Omega \right\rangle$$

$$= c_0 \left\langle \Omega \middle| \left[Q_5^a, \left[Q_5^b, j_S^0(0) \right] \right] \middle| \Omega \right\rangle + c_3 \left\langle \Omega \middle| \left[Q_5^a, \left[Q_5^b, j_S^3(0) \right] \right] \middle| \Omega \right\rangle + c_8 \left\langle \Omega \middle| \left[Q_5^a, \left[Q_5^b, j_S^8(0) \right] \right] \middle| \Omega \right\rangle$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}} c_0 d^{abc} \langle \Omega | j_S^c(0) | \Omega \rangle + c_3 d^{b3c} d^{acd} \langle \Omega | j_S^d(0) | \Omega \rangle + c_8 d^{b8c} d^{acd} \langle \Omega | j_S^d(0) | \Omega \rangle$$

我们假设同位旋对称性近似成立，即 $c_3 = 0$ 或者 $m_u = m_d$。

a) $a = 1, 2, 3$，对应于三个π介子：

$$\sigma_0^{33} = \left(\sqrt{\frac{2}{3}} c_0 + \frac{1}{\sqrt{3}} c_8 \right) \langle \Omega | \bar{u}u + \bar{d}d | \Omega \rangle + c_3 \langle \Omega | \bar{u}u - \bar{d}d | \Omega \rangle$$

$$= \frac{1}{2} (m_u + m_d) \langle \Omega | \bar{u}u + \bar{d}d | \Omega \rangle$$

$$\boxed{m_\pi^2 f_\pi^2 = -\frac{1}{2} (m_u + m_d) \langle \Omega | \bar{u}u + \bar{d}d | \Omega \rangle}$$

b)　$a = 4, 5, 6, 7$，对应于四个 $K(\bar{K})$ 介子：

$$\sigma_0^{44} = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}c_0 - \frac{1}{2\sqrt{3}}c_8\right)\left\langle \Omega \left| \frac{(\bar{u}u + \bar{d}d)}{2} + \bar{s}s \right| \Omega \right\rangle$$

$$= \frac{1}{2}(m_u + m_s)\left\langle \Omega \left| \frac{(\bar{u}u + \bar{d}d)}{2} + \bar{s}s \right| \Omega \right\rangle$$

$$\boxed{m_K^2 f_K^2 = -\frac{1}{2}(m_u + m_s)\left\langle \Omega \left| \frac{(\bar{u}u + \bar{d}d)}{2} + \bar{s}s \right| \Omega \right\rangle}$$

c)　$a = 8$，对应于 η 介子：

$$\sigma_0^{88} = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}c_0 - \frac{1}{\sqrt{3}}c_8\right)\left\langle \Omega \left| \frac{(\bar{u}u + \bar{d}d)}{3} + \frac{4}{3}\bar{s}s \right| \Omega \right\rangle$$

$$+ \frac{2}{3\sqrt{3}}c_8 \langle \Omega | (\bar{u}u + \bar{d}d) - 2\bar{s}s | \Omega \rangle$$

$$= \frac{m_u + m_d}{6}\langle \Omega | \bar{u}u + \bar{d}d | \Omega \rangle + \frac{4m_s}{3}\langle \Omega | \bar{s}s | \Omega \rangle$$

$$\boxed{m_\eta^2 f_\eta^2 = -\frac{m_u + m_d}{6}\langle\Omega|\bar{u}u + \bar{d}d|\Omega\rangle - \frac{4m_s}{3}\langle\Omega|\bar{s}s|\Omega\rangle}$$

夸克的真空凝聚，

$$\langle\Omega|\bar{u}u|\Omega\rangle = \langle\Omega|\bar{d}d|\Omega\rangle = \langle\Omega|\bar{s}s|\Omega\rangle = -\mu^3 \approx -(250\mathrm{MeV})^3$$

- 显然，赝标量介子的质量平方正比于流夸克质量，也正比于夸克的真空凝聚。这种关系一般称作 Gell-Mann-Okubo 关系 （简称GMOR）；
- 当夸克质量趋于零时（手征极限），拉氏量是有严格的手征对称性的，但是夸克的真空凝聚不为零造成手征对称性的自发破缺，从而产生零质量的Goldstone粒子，所以赝标量介子的质量在手征极限下应该趋于零；
- 夸克凝聚是标志手征对称性破缺与否的一个序参量，当夸克凝聚为零时，手征对称性恢复；
- 根据对称性自发破缺的性质，赝标量介子的衰变常数应该相等，即

$$f_\pi = f_K = f_\eta$$

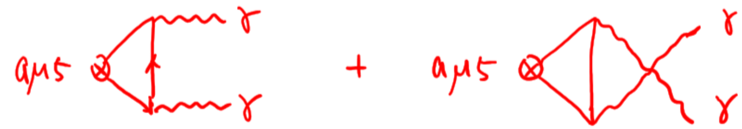
- 一个自然的结论就是

$$4m_K^2 = 3m_\eta^2 + m_\pi^2$$

这个关系也称Gell-Mann-Okubo 质量关系。

9.7 三角反常

考虑三点格林函数. $(q=k_1+k_2)$



$$T_{\mu\nu\lambda}(k_1,k_2,q)=i\int d^4x_1 d^4x_2 \langle 0|T(j_\mu(x_1)\, j_\nu(x_2)\, j^5_\lambda(0))|0\rangle\, e^{ik_1x_1+ik_2x_2}$$

$$T_{\mu\nu}(k_1,k_2,q)=i\int d^4x_1 d^4x_2 \langle 0|T(j_\mu(x_1)\, j_\nu(x_2)\, j^5(0))|0\rangle\, e^{ik_1x_1+ik_2x_2}$$

根据流守恒条件: $\partial_\mu j^\mu=0$, $\partial_\mu j^{\mu5}=2im\, j^5$

我们有Ward恒等式:

$$\langle \partial^{x_1}_\mu j^\mu(x_1)\, j_\nu(x_2)\, j^5_\lambda(0)\rangle = 0 + \text{contact 项}$$

$$\langle j_\mu(x_1)\, \partial^{x_2}_\nu j^\nu(x_2)\, j^5_\lambda(0)\rangle = 0 + \text{contact 项}$$

流代数说明它们的贡献为零

$$\langle j_\mu(x_1)\, j_\nu(x_2)\, (\partial_\lambda j^{5\lambda})(0)\rangle = 2im\,\langle j_\mu(x_1) j_\nu(x_2)\, j^5(0)\rangle + \cdots$$

注意这里 $\langle \partial_\mu \cdots\rangle = \partial_\mu\langle\cdots\rangle = \partial_\mu\langle 0|T(\cdots)|0\rangle$

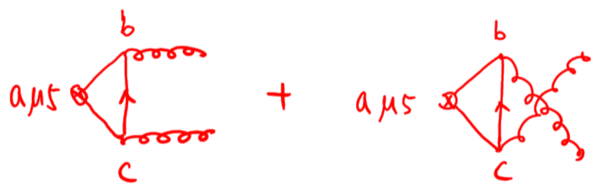
写作地，我们在动量空间的 Ward-Identity

$$k_1^{\mu} T_{\mu\nu\lambda} = k_2^{\nu} T_{\mu\nu\lambda} = 0$$

$$q^{\lambda} T_{\mu\nu\lambda} = 2m T_{\mu\nu}$$

但是，圈图修正会带来一个很严重的问题：上面的三个 WI 不能同时满足。如果我们要保证矢量守恒对应的 WI，则轴矢流就会有反常出现。

(QCD)



$$\left(\mathrm{tr}(\tau^a)\,\mathrm{tr}(t^b t^c) = 0 \right)$$

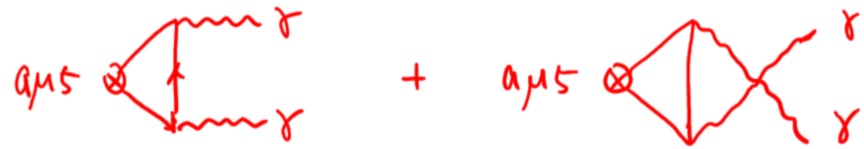
注意：$$\partial_\mu j^{a\mu 5} = \frac{g^2}{16\pi^2} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F^b_{\alpha\beta} F^c_{\mu\nu}\, \mathrm{tr}[\tau^a t^b t^c] = 0$$

同位旋单态：$$\partial_\mu j^{\mu 5} = \frac{g^2}{16\pi^2} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F^b_{\alpha\beta} F^c_{\mu\nu}\, \mathrm{tr}[t^b t^c] = \frac{g^2}{32} n_f\, \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F^a_{\alpha\beta} F^a_{\mu\nu}$$

QCD中，只有味道（同位旋）单态的轴矢流才存在反常。

$\boxed{\pi_0 \to \gamma\gamma}$

(QED)



$$\boxed{j_5^{3\mu} = \bar{u}\gamma^\mu\gamma_5 u - \bar{d}\gamma^\mu\gamma_5 d\,,}$$

$$\partial_\mu j^{a\mu 5} = \frac{e^2}{16\pi^2}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}\,\mathrm{tr}\left[\sigma^a Q^2\right]N_c, \qquad Q = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix}$$

$$\partial_\mu j^{3\mu 5} = \frac{e^2}{16\pi^2}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}\,\mathrm{tr}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4/9 & 0 \\ 0 & 1/9 \end{pmatrix}\right]N_c$$

$$= \frac{e^2}{16\pi^2}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}\cdot\frac{1}{3}\cdot N_c$$

考虑由轴矢流诱导的真空到两个光子的跃迁

$$\int d^4x e^{-iqx}\langle p,k|\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi|0\rangle = (2\pi)^4\delta^{(4)}(p+k-q)\epsilon_\nu^*(p)\epsilon_\lambda^*(k)\mathcal{M}^{\mu\nu\lambda}.$$

微扰计算给出（详细计算见Peskin书Chapt 19.2）

$$
\begin{aligned}
\langle p,k|[\partial_\mu \bar\psi\gamma^\mu\gamma_5\psi](0)|0\rangle &= \frac{g^2}{2\pi^2}\epsilon^{\alpha\nu\beta\lambda}(-ip_\alpha)\epsilon^*_\nu(p)(-ik_\beta)\epsilon^*_\lambda(k) \\
&= \frac{g^2}{16\pi^2}\langle p,k|[\epsilon^{\alpha\nu\beta\lambda}F_{\alpha\nu}F_{\beta\lambda}](0)|0\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\langle\gamma(p),\gamma(k)|[\partial_\mu j_5^{3\mu}](0)|0\rangle = \frac{e^2}{2\pi^2}\left(\frac{N_c}{3}\right)\epsilon^{\alpha\nu\beta\lambda}(-ip_\alpha)\epsilon^*_\nu(p)(-ik_\beta)\epsilon^*_\lambda(k)
$$

低能情况下，这个矩阵元主要由pion介子的极点主导

$$
\begin{aligned}
\langle\gamma\gamma|\partial_\mu j_5^{3\mu}|0\rangle &\simeq \int\frac{d^3\vec q}{(2\pi)^3 2E_{\vec q}}\langle\gamma\gamma|\pi^0(\vec q)\rangle\langle\pi^0(\vec q)|\partial_\mu j_5^{3\mu}|0\rangle \\
&= \int\frac{d^4 q}{(2\pi)^4}\frac{i}{q^2+i\epsilon}\langle\gamma\gamma|\pi^0(\vec q)\rangle\langle\pi^0(\vec q)|\partial_\mu j_5^{3\mu}|0\rangle\,.
\end{aligned}
$$

$$\langle\gamma(p),\gamma(k)|\pi^0(\vec{q})\rangle = i\mathcal{M}(2\pi)^4\delta^{(4)}(q-p-k)\,,$$
$$\langle\pi^0(\vec{q})|j_5^{3\mu}|0\rangle = i\sqrt{2}f_\pi q^\mu\,, \Rightarrow \langle\pi^0(\vec{q})|\partial_\mu j_5^{3\mu}|0\rangle = -\sqrt{2}f_\pi q^2$$

$$i\mathcal{M}(\pi^0\to\gamma\gamma) = i\frac{e^2}{2\pi^2}\frac{N_c}{3}\frac{1}{\sqrt{2}f_\pi}\epsilon^{\alpha\nu\beta\lambda}(-ip_\alpha)\epsilon^*_\nu(p)(-ik_\beta)\epsilon^*_\lambda(k)\,.$$

$$\Gamma(\pi^0\to\gamma\gamma) = \frac{1}{2m_\pi}\frac{1}{8\pi}\frac{1}{2}\sum_{\text{pols.}}\left|\mathcal{M}(\pi^0\to\gamma\gamma)\right|^2 = \frac{\alpha_{\rm em}^2}{32\pi^3}\left(\frac{N_c}{3}\right)^2\frac{m_\pi^3}{f_\pi^2}$$

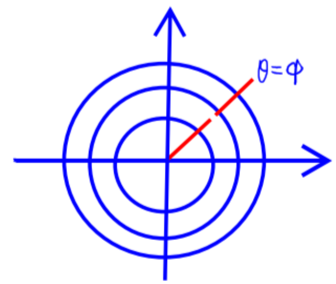
$m_\pi = 130$ MeV, $f_\pi = 130$ MeV, $\alpha_{\rm em} = 1/137$,

$$\Gamma_{\rm theo} \simeq \left(\frac{N_c}{3}\right)^2 \times 1.11\times 10^{16}{\rm s}^{-1}\,,$$

$$\Gamma = (1.19\pm 0.08)\times 10^{16}{\rm s}^{-1}$$

10. 非阿贝尔规范理论的路径积分量子化

10.1 路径积分中规范对称性体积因子的分离



1. 一个二维积分的例子:

$$W=\int dx dy\, e^{iS(x,y)}=\int d\vec{r}\, e^{iS(\vec{r})}$$

如果 $S(\vec{r})$ 满足二维转动不变性: $\vec{r}=(r,\theta)\longrightarrow \vec{r}_\phi=(r,\theta+\phi)$ $S(\vec{r})=S(\vec{r}_\phi)$

$$W=\int d\vec{r}\, e^{iS(\vec{r})}=2\pi\int dr\, e^{iS(r)}$$

这个 2π 就是对称性给出的体积因子:

如果我们只希望对不等价的 $S(\vec{r})$ 求和，我们可以将这个体积因子除去

这等价于我们在所有给出等价 $S(\vec{r})$ 的 $\vec{r}$ 中选一个代表. 比如取图中 $\theta=\phi$ 的线和各同心圆的交点作为每个 $|\vec{r}|=r$ 的点的代表.

$$W'=\int d\vec{r}\, e^{iS(\vec{r})}\delta(\theta-\phi)\equiv W_\phi$$

其实，除了选取直线 $\theta=\varphi$，我们还可以选取任意的曲线 $g(\vec r)=0$，

只要求这条曲线与每个同心圆只相交一次

定义（规范补偿项） $[\Delta_g(\vec r)]^{-1}=\int d\phi\,\delta[g(\vec r_\phi)]$ $\Delta_g(\vec r)=\frac{\partial g(\vec r)}{\partial\theta}\Big|_{g=0}$

可以证明：$\Delta_g(\vec r)$ 在二维转动中是不变的：

$$[\Delta_g(\vec r_{\phi'})]^{-1}=\int d\phi\,\delta[g(\vec r_{\phi+\phi'})]=\int d\phi''\,\delta[g(\vec r_{\phi''})]=[\Delta_g(\vec r)]^{-1}$$

插入单位算符 $\Delta_g(\vec r)\int d\phi\,\delta[g(\vec r_\phi)]=1$

$$W=\int d\phi\int d\vec r\, e^{iS(\vec r)}\Delta_g(\vec r)\,\delta[g(\vec r_\phi)] = 2\pi W' = 2\pi W_\phi.$$

$W_\phi=\int d\vec r\, e^{iS(\vec r)}\Delta_g(\vec r)\,\delta[g(\vec r_\phi)]$ 转动不变.

这就是Faddeev-Popov路径积分量子化方案的基本思想。

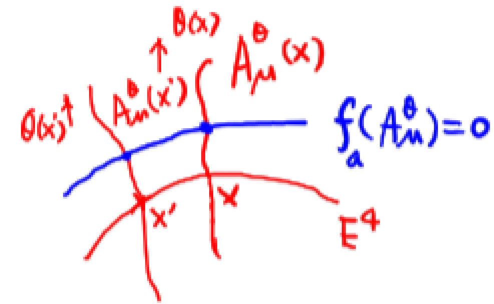
2. 非阿贝尔规范理论路径积分的群体积因子.

$g(\theta)$: $A_\mu \to A_\mu^\theta$，作用量不变 ⇒ 规范对称性

规范固定：由于存在规范变换下，规范场存在不确定性

$$A_\mu \to A_\mu^\theta = U(\theta)\left[A_\mu(x) + \frac{i}{g}\partial_\mu\right]U(\theta)^\dagger$$

$$U(\theta) = \exp\left[i\theta^a(x)t^a\right]$$



这形成一个规范轨道。

我们需要在每条轨道上选一个代表. 即引入条件 $f_a(A_\mu^\theta) = 0$, $a=1,2,\cdots$

这相当于与每条gauge轨道都相交的超平面.(与每条轨道只相交一次)

要求规范轨道只和超平面 $f_a(A_\mu^\theta)=0$ 相交一次. 这等价于要求

对任意给定的 $A_\mu(x)$，$f_a(A_\mu^\theta)$ 存在唯一解 θ_a, $a=1,2,3\cdots$

利用关系：$\int df\,\delta[f(A_\mu^\theta)]=1$ 这里：$d\theta=\prod_{a=1}^{d(G)} d\theta_a$, $df=\prod_{a=1}^{d(G)} df_a$

⇒ $\int d\theta\,\det\left[\frac{df}{d\theta}\right]\delta[f(A_\mu^\theta)]=1$ （积分变量替换）

$$\left[\frac{df}{d\theta}\right]_{ab} = \left(\frac{\delta f_a(A_\mu^\theta)}{\delta\theta_b}\right) = (M_f)_{ab}$$

定义规范补偿因子：$\Delta_f^{-1}[A_\mu]=\int[d\theta(x)]\,\delta[f_a(A_\mu^\theta)]$

$$\Delta_f[A_\mu] = \det M_f$$

在无穷小变换下． $A_\mu^{\theta a} = A_\mu^a + \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a + f^{abc}A_\mu^b\theta^c = A_\mu^a+\frac{1}{g}(D_\mu\theta)^a$

$$f_a[A_\mu^\theta(x)] = f_a[A_\mu(x)] + \int d^4y\,[M_f(x,y)]_{ab}\,\theta_b(y)+\cdots$$

* $f_a[A_\mu^\theta]$ 解的唯一性要求 $\det M_f \neq 0$

反证法：如果存在 $\theta_b(y)$，使得 $\int d^4y\, [M_f(x,y)]_{ab}\, \theta_b(y) = 0$.

如果 $\theta_b(y) \neq 0$，则它是 M_f 的本征值为零的本征矢量，这说明 $\det M_f = 0$

但是在此情形下 $A^{\theta}_{\mu}(x) = A_\mu(x)$ 都满足 $f_a(A_\mu(x))=0$.

也就是说对于给定的 $A_\mu(x)$，存在两个解：$\theta = 0$ 和

$\theta = \{\theta_b(y),\ b=1,2,\cdots\}$，这和解的唯一性矛盾。

- 规范轨道 $\{A^\mu_\Lambda(x)\}$：
  全体规范场构形 $A_\mu(x)$ 包含无穷多物理上等价的场构形；
  规范轨道 $\{A^\mu_\Lambda(x) | \Lambda \in \mathcal{G}\}$ 上所有场构形与给定 $A^\mu(x)$ 规范等价。
- 规范固定：$F[A^\mu] = 0$（场构形空间的一超曲面）
  我们希望方程 $F[A^\mu_\Lambda] = 0$ 对于给定 $A^\mu(x)$ 只有唯一群元解 Λ_0。
  - 路径积分中合理地去掉无穷大的规范群体积 $\int \mathcal{D}[\Lambda] = (2\pi)^{\text{四维时空体积}}$；
  - 去掉非物理态（负模态、纵向极化态）；
  - Gribov 不确定性：满足规范固定条件的不同（非阿贝尔规范场）场构形可能规范等价。微扰场论中可以不考虑。

10.2 电磁场的路径积分量子化

纯电磁场的拉氏量

$$\mathcal{L}_0[A_\mu, \partial_\nu A_\mu] = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$$

基于此拉氏量的生成泛函为

$$Z[J] = \int DA \exp\left\{i\left[S[A] + \int d^4x J_\mu(x)A^\mu(x)\right]\right\}$$

自由电磁场的作用量 $S[A]$ 有如下二次型的形式

$$S[A] = -\int d^4x \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\int d^4x\ A_\mu(\partial^2 g^{\mu\nu} - \partial^\mu\partial^\nu)A_\nu$$

似乎我们可以仿照有质量矢量场情形的做法，求算子 $\partial^2 g^{\mu\nu} - \partial^\mu\partial^\nu$ 的逆，然后求上面的高斯型泛函积分。但遗憾的是，这个算子的逆不存在，即不存在 $D_F^{\nu\rho}(x-y)$， 使得：

$$(\partial^2 g_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu)D_F^{\nu\rho}(x-y) \propto \delta_\mu^\rho\delta^4(x-y)$$

$S[A]$ 在动量空间表达

$$S[A] = \frac{1}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\tilde{A}_\mu(k)\left(-k^2 g^{\mu\nu} + k^{\mu\nu}\right)\tilde{A}_\nu(-k)$$

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\tilde{A}_\mu(k)\, e^{-ik\cdot x}$$

显然，满足 $\tilde{A}_\mu(k) \propto k_\mu \alpha(k)$ （$\alpha(k)$ 为任意）的场都会给出 $S[A]=0$，这类场位型在上述泛函积分中的被积函数为1，从而造成严重的发散问题。

$$\partial^2 g^{\mu\nu} - \partial^\mu\partial^\nu \quad \Longleftrightarrow \quad -k^2 g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu$$

$$\left(-k^2 g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu\right)k_\nu = 0$$

- k_ν 是这个算子的本征值为零的本征矢量，所以该算子是不可逆的；
- $-k^2 g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu$ 正比于横向投影算符 $P_\perp^{\mu\nu}(k)$，$k_\mu P_\perp^{\mu\nu}(k) = 0$， 所以

$$\det P_\perp^{\mu\nu}(k) = 0$$

这个问题的根源来自规范不变性，即 $A_\mu(x)$ 在进行如下变换拉氏量是不变的

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha(x)$$

- 电磁场 $A_\mu(x)$ 的这种不确定性说明它有冗余的自由度，造成泛函积分发散。
- 为了消除冗余的自由度，我们必须进行规范固定，即在所有的规范等价的位形中只选一个作为代表。这种实现方式是Faddeev和Popov提出来的。

假设 $G(A)$ 是电磁场 $A_\mu(x)$ 及其微商的函数，我们可以选择 $G(A)=0$ 作为规范固定条件，比如我们熟悉的洛伦兹规范就是 $G(A)=\partial_\mu A^\mu=0$。这种由所选的规范条件对路径积分中电磁场取值的约束可以通过泛函 δ−函数来实现

$$\int d^n\vec{w}\,\delta^n\left(\vec{F}(\vec{w})\right) = \left|\det\left[\frac{\partial F_i}{\partial w_j}\right]\right|^{-1} \Rightarrow \left|\det\left[\frac{\partial F_i}{\partial w_j}\right]\right| \int d^n\vec{w}\,\delta^n\left(\vec{F}(\vec{w})\right) = 1$$

推广到无穷维，比如泛函积分，我们有

$$1 = \int D\alpha\ \delta\left(G(A^\alpha)\right) \det\left[\frac{\delta G(A^\alpha(y))}{\delta\alpha(x)}\right]$$

$$A_\mu^{(\alpha)}(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x)$$

$$Z[0]=\int DA\int D\alpha\ \delta\left(G(A^{\alpha})\right) det\left[\frac{\delta G(A^{\alpha}(y))}{\delta\alpha(x)}\right]\exp\{i\,[S[A]]\}$$

如果取　$G(A)=\partial_{\mu}A^{\mu}$　（协变规范）

$$\frac{\delta G(A^{\alpha}(y))}{\delta\alpha(x)}=\frac{\delta}{\delta\alpha(x)}\left(\partial_{\mu}A^{\mu}(y)-\frac{1}{e}\partial^{2}\alpha(y)\right)=-\frac{1}{e}\partial^{2}\delta^{4}(x-y)$$

这和 $\alpha(x)$ 无关（对于电磁理论，许多规范条件都满足这种关系）。

$$Z[0]=\det\left[\frac{\delta G(A^{\alpha}(y))}{\delta\alpha(x)}\right]\int DA\int D\alpha\ \delta\left(G(A^{\alpha})\right)\exp\{i\,[S[A]]\}$$

注意 $DA=DA^{\alpha}$（Jacobi行列式为1），　$S[A]=S[A^{\alpha}]$（作用量的规范不变性）

$$Z[0]=\det\left[\frac{\delta G(A^{\alpha}(y))}{\delta\alpha(x)}\right]\int D\alpha\int DA\ \delta\left(G(A)\right)\exp\{i\,[S[A]]\}$$

这样一来，对电磁场的泛函积分由规范条件提供约束，对规范自由度的积分被完全分离出来，只提供一个与电磁场无关的（无穷大）积分因子。

我们进一步定义一个更普遍的的规范固定函数 （$\omega(x)$ 为一个标量函数），

$$G(A)=\partial_\mu A^\mu(x)-\omega(x)$$

不会改变上面的泛函行列式，即这时仍有 $\frac{\delta G(A^\alpha(y))}{\delta\alpha(x)}=\frac{1}{e}\partial^2\delta^4(x-y)$

$$Z^\omega[0]=\det\left[\frac{\delta G(A^\alpha(y))}{\delta\alpha(x)}\right]\int D\alpha\int DA\ \delta\big(G(A)-\omega(x)\big)\exp\{i\,[S[A]]\}$$

由于$\omega(x)$ 的任意性，我们可以对上式按照高斯型的分布对不同的 $\omega(x)$ 的情形加权平均，得到

$$Z[0]=N(\xi)\int D\omega\exp\left[-i\int d^4x\,\frac{\omega^2}{2\xi}\right]\det\left[\frac{\delta G\left(A^{(\alpha)}(y)\right)}{\delta\alpha(x)}\right]$$

$$\times\int D\alpha\int DA\ \delta\big(G(A)-\omega(x)\big)\exp\{i\,[S[A]]\}$$

$$= N(\xi)\det\left[\frac{\delta G\left(A^{(\alpha)}(y)\right)}{\delta\alpha(x)}\right]\int D\alpha\int DA\exp\left[i\left(S[A]-\int d^4x\frac{1}{2\xi}\left(\partial_\mu A^\mu(x)\right)^2\right)\right]$$

可以看出，经过引入规范固定和以上一系列处理，我们相当于在作用量项中多了一项，这可以和原有的作用量共同写成

$$S_{eff}[A] = S[A] - \int d^4x\frac{1}{2\xi}\left(\partial_\mu A^\mu(x)\right)^2 + i\epsilon\ term$$

$$\mathcal{L}_{eff}(x) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}\left(\partial_\mu A^\mu(x)\right)^2 - i\epsilon\ A_\mu A^\mu$$

$$\langle\Omega|T\mathcal{O}[A]|\Omega\rangle = \frac{\int DA\ \mathcal{O}[A]\exp\left[i\int d^4x\ \mathcal{L}_{eff}(x)\right]}{\int DA\ \exp\left[i\int d^4x\ \mathcal{L}_{eff}(x)\right]}$$

最终，忽略无关地常数因子，我们得到自由电磁场的生成泛函

$$Z[J] = \int DA\exp\left[i\int d^4x\ \left(\mathcal{L}_{eff}(x) + J_\mu(x)A^\mu(x)\right)\right]$$

我们把 $S_{eff}[A]$ 写成泛函二次型

$$S_{eff}[A]=\frac{1}{2}\int d^4x\ A_\mu(x)\left(g^{\mu\nu}(\partial^2-i\epsilon)-\left(1-\frac{1}{\xi}\right)\partial^\mu\partial^\nu\right)A_\nu$$

现在算符 $-i\left(g^{\mu\nu}(\partial^2-i\epsilon)-\left(1-\frac{1}{\xi}\right)\partial^\mu\partial^\nu\right)$ 是可逆的，定义其逆为 $G_F^{\mu\nu}(x-y)$，

$$-i\left(g_{\mu\nu}(\partial^2-i\epsilon)-\left(1-\frac{1}{\xi}\right)\partial_\mu\partial_\nu\right)G_F^{\nu\rho}(x-y)=\delta_\mu^\rho\delta^4(x-y)$$

$$G_F^{\mu\nu}(x-y)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ik\cdot(x-y)}\widetilde{G}_F^{\mu\nu}(k)$$

可以得到动量空间的表达式

$$\left(g_{\mu\nu}(-k^2-i\epsilon)+\left(1-\frac{1}{\xi}\right)k_\mu k_\nu\right)\widetilde{G}_F^{\nu\rho}(k)=i\delta_\mu^\rho$$

令 $\widetilde{G}_F^{\mu\nu}(k)=A\left(k^2\right)g^{\mu\nu}+B\left(k^2\right)k^\mu k^\nu$ 并带入到上面方程，得到，

$$
\begin{aligned}
i\delta_\mu^\rho &= A\left(k^2\right)g_\mu^\rho\left(-k^2-i\epsilon\right)+\left(1-\frac{1}{\xi}\right)A\left(k^2\right)k_\mu k^\rho \\
&\quad +B\left(k^2\right)\left(-k^2-i\epsilon\right)k_\mu k^\rho+\left(1-\frac{1}{\xi}\right)B\left(k^2\right)k^2 k_\mu k^\rho \\
&= A\left(k^2\right)g_\mu^\rho\left(-k^2-i\epsilon\right)+\left(\left(1-\frac{1}{\xi}\right)A\left(k^2\right)-\frac{1}{\xi}B\left(k^2\right)k^2\right)k_\mu k^\rho
\end{aligned}
$$

解出 $A\left(k^2\right)$，$B\left(k^2\right)$ 得

$$
A\left(k^2\right)=\frac{-i}{k^2+i\epsilon},\qquad B\left(k^2\right)=A\left(k^2\right)(\xi-1)\frac{1}{k^2}=\frac{i}{k^2+i\epsilon}(1-\xi)\frac{1}{k^2}
$$

$$
\widetilde{G}_F^{\mu\nu}(k)=\frac{-i}{k^2+i\epsilon}\left(g^{\mu\nu}-(1-\xi)\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right)
$$

$$
G_F^{\mu\nu}(x-y)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ik\cdot(x-y)}\frac{-i}{k^2+i\epsilon}\left(g^{\mu\nu}-(1-\xi)\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right)
$$

生成泛函可以表达为

$$Z[J]=Z[0]\exp\left[-\frac{1}{2}\iint d^4x d^4y J_\mu(x) D_F^{\mu\nu}(x-y) J_\nu(y)\right]$$

两点格林函数为（这时是自由场，不区分物理真空和微扰正空）

$$\langle 0|TA^\mu(x)A^\nu(y)|0\rangle=\frac{1}{Z[0]}\left(\frac{\delta}{i\delta J_\mu(x)}\right)\left(\frac{\delta}{i\delta J_\nu(y)}\right)Z[J]\Big|_{J=0}=G_F^{\mu\nu}(x-y)$$

可见我们前面得到的 $G_F^{\mu\nu}(x-y)$ 和 $\widetilde{G}_F^{\mu\nu}(k)$ 就是电磁场（或光子）在 $\xi-$规范下的自由传播子。当取 $\xi=0$ 时，对应于朗道规范；$\xi=1$ 对应于费曼规范。

10.3 非阿贝尔规范理论的Faddeev-Popov量子化

我们开始讨论非阿贝尔规范理论的路径积分量子化。拉氏量为

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{2}Tr\, F^2(x) = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}(x)\, F^{a,\mu\nu}(x)$$

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu(x) = \partial_\mu - igA^a_\mu(x)t^a$$

$$F_{\mu\nu}(x) \equiv F^a_{\mu\nu}t^a = \frac{i}{g}[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\nu - ig[A_\mu, A_\nu]$$

规范变换： $U(x) = e^{i\theta^a(x)t^a} \in G$

$$F_{\mu\nu}(x) \to U(x)F_{\mu\nu}(x)U^+(x),$$

$$A_\mu(x) \to U(x)A_\mu(x)U^+(x) + \frac{i}{g}U(x)\partial_\mu U^+(x)$$

无穷小变换： $U(x) = 1 + i\theta^a(x)t^a + O(\theta^2)$

$$A^\theta_\mu(x) = A_\mu + \frac{1}{g}[D_\mu, \theta], \qquad \theta \equiv \theta^a t^a$$

$$\boxed{A^{\theta,a}_\mu(x) = A^a_\mu(x) + \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a(x) + f^{abc}A^b_\mu(x)\theta^c(x)}$$

规范固定：这种变换形成一个规范轨迹，这个轨迹上的规范场是规范等价的。我们要在每条轨迹上选一个代表，即引入条件

$$f^a\left(A_\mu^\theta\right) = 0, \qquad a = 1, 2, \dots, d_G$$

要求规范轨迹和超平面 $f^a\left(A_\mu^\theta\right) = 0$ 相交一次，这等价于要求对任意给定的 $A_\mu(x)$，$f^a\left(A_\mu^\theta\right)$ 存在唯一解 $\theta^a(x), a = 1, 2, \dots, d_G$。

利用关系

$$\int Df\, \delta\left[f\left(A_\mu^\theta\right)\right] = \int \prod_{a=1}^{d_G} Df^a\ \delta\left[f\left(A_\mu^\theta\right)\right] = 1$$

由于 $\theta(x)$ 是函数，$f[A^\theta]$ 是泛函，所以上面的积分是对函数而言的，所以积分元用 Df 表示（下面的 $D\theta$ 也是同样的含义） 可以利用积分变量替换的关系得到

$$\int D\theta\, \det\left[\frac{df}{d\theta}\right]\ \delta\left[f\left(A_\mu^\theta\right)\right] = 1$$

$$\left[\frac{df}{d\theta}\right]^{ab}(x,y)=\left.\frac{\delta f^a\left(A_\mu^\theta(x)\right)}{\delta\theta^b(y)}\right|_{\theta=0}\equiv M[A_\mu]^{ab}(x,y)$$

取 $\theta=0$ 是因为我们只考虑在单位元附近的无穷小规范变换。

规范补偿因子：

$$\Delta_f^{-1}[A_\mu]=\int D\theta\ \delta[f(A_\mu^\theta)]\Longrightarrow\Delta_f[A_\mu]=\det M[A_\mu]$$

$$\boxed{\int D\theta\det M[A_\mu]\,\delta[f(A_\mu^\theta)]=1}$$

格林函数的泛函积分表示

$$\langle\Omega|T\widehat{\mathcal{O}}(\widehat{A})|\Omega\rangle=\mathcal{N}\int DA\ e^{iS[A]}\mathcal{O}(A)$$

$$\langle\Omega|T\widehat{\mathcal{O}}(\widehat{A})|\Omega\rangle=\mathcal{N}\int DA\,D\theta\ \det M[A_\mu]\ \delta(f[A_\mu^\theta])\ e^{iS[A]}\mathcal{O}(A)$$

泛函行列式 $\det M[A_\mu]$ 是规范不变的

$$\Delta_f^{-1}[A_\mu] = \int D\theta\, \delta(f[A_\mu^\theta(x)]) = \int D\theta''\, \delta(f[A_\mu^{\theta''}(x)])$$

$$= \int D(\theta\theta')\, \delta\left(f\left[A_\mu^{\theta\theta'}(x)\right]\right)$$

$$= \int D\theta\, \delta\left(f\left[A_\mu^{\theta\theta'}(x)\right]\right) = \Delta_f^{-1}\left[A_\mu^{\theta'}\right]$$

群空间积分 $U(\theta)U(\theta') = U(\theta\theta')$

无穷小变换， $U(\theta) = 1 + i\theta^a t^a + \cdots$

$U(\theta') = 1 + i\theta'^a t^a + \cdots$

$U(\theta\theta') = 1 + i(\theta\theta')^a t^a + \cdots$

$= 1 + i(\theta^a + \theta'^a)t^a + \cdots$

所以有： $\int d\theta = \int d(\theta\theta')$

基于上面的处理，规范对称群的积分体积因子可以被单独分离出来：

a） 积分元 DA 在变换 $A_\mu(x) \to A_\mu^\theta(x)$ 下也是不变的：

$$DA^\theta = DA \det\left[\frac{\delta A_\mu^{\theta,a}(x)}{\delta A_\nu^b(y)}\right] = DA \det\left[\left(\delta^{ab} + f^{abc}\theta^c(x)\right)\, \delta_\mu^\nu \delta^4(x-y)\right]$$

$$= DA \det\left[U_{adj}(\theta(x)) \otimes I_V \otimes I_{spacetime}\right]$$

这里 $U_{adj}\big(\theta(x)\big)$ 是定域规范群的自伴表示的表示矩阵，

$$U_{adj}^{ab}\big(\theta(x)\big) = \delta^{ab} + f^{abc}\theta^c(x) = \left(I + i\theta^c T_{adj}^c\right)^{ab} \approx \left(e^{i\theta^c T_{adj}^c}\right)^{ab}$$

$$\left(T_{adj}^c\right)^{ab} = if^{acb} = -if^{abc}$$

基于群的幺正幺模性，有 $\det U_{adj}\big(\theta(x)\big) = 1$，最终 $DA^\theta = DA$ 得证。

b) 如果泛函 $W[A_\mu]$ 是规范不变的，即 $W[A_\mu] = W[A_\mu^\theta]$，

$$\begin{aligned}\int DA_\mu\, W[A_\mu] &= \int DA_\mu\, D\theta\, \Delta_f[A_\mu]\, \delta\big(f[A_\mu^\theta]\big)\, W[A_\mu] \\ &= \int D\theta \int DA^\theta\;\; \Delta_f[A_\mu^\theta]\, \delta\big(f[A_\mu^\theta]\big)\, W[A_\mu^\theta] \\ &= \int DA\;\Delta_f[A_\mu]\, \delta\big(f[A_\mu]\big)\, W[A_\mu] \left(\int D\theta\right)\end{aligned}$$

显然群积分因子 $\int D\theta$ 被成功分离出来了。

c)　取规范固定条件为 $f^a[A_\mu]-\omega^a(x)=0$，$\omega^a(x)$ 为任一标量函数，$\det M[A_\mu]$ 和 $\omega^a(x)$ 无关。可以按照高斯型的分布对不同的 $\omega^a(x)$ 的情形加权平均，有

$$\langle\Omega|T\hat{\mathcal{O}}(\hat{A})|\Omega\rangle=\mathcal{N}\left(\int D\theta\right)\int D\omega\ e^{-i\int d^4x\frac{\omega^a\omega^a}{2\xi}}$$

$$\times\int DA\ \det M[A_\mu]\ \delta\left(f^a[A_\mu]-\omega^a\right)e^{iS[A]}\mathcal{O}(A)$$

$$=\mathcal{N}\left(\int D\theta\right)\int DA\ \det M[A_\mu]\ e^{i\left\{S[A]-\int d^4x\frac{1}{2\xi}f^a[A_\mu]f^a[A_\mu]\right\}}\mathcal{O}(A)$$

这就是采用Faddeev-Popov量子化方案后的非阿贝尔规范场论中的格林函数的路径积分表达式。

规范固定的实现相当于引入一个等效的拉氏量

$$\mathcal{L}_{eff}(x)=\mathcal{L}(x)-\frac{1}{2\xi}f^a[A_\mu(x)]f^a[A_\mu(x)]$$

的同时，再引入一个规范补偿项 $\det M[A_\mu]$。

规范补偿项和鬼场的引入

在阿贝尔规范理论（电磁场情形），由于规范补偿项和规范场（电磁场）无关，因此可以看作一个无关常数因子约掉。但是，对于非阿贝尔规范理论，$\det M[A_\mu]$ 是和规范场有关的，这是和阿贝尔理论很大的不同。由于$\det M[A_\mu]$是复杂的泛函行列式，如果对其进行微扰展开，则会带来规范场之间非定域的相互作用。一个方便的做法是引入辅助场，从而把这个泛函行列式重新表示为辅助场的定域相互作用，然后微扰地处理。

高斯型的Grassmann数积分 $$\int d\xi^* d\xi\, e^{-\xi_i^* A_{ij}\xi_j} = \det A$$

引入取值为 Grassmann 数的实场 $c^a(x)$ 和 $\bar{c}^a(x)$ （无穷维 Grassmann 代数），它们属于规范群的自伴表示，则有

$$\det M[A_\mu] = \int DcD\bar{c}\; e^{i\int d^4x d^4y \bar{c}^a(x)\left(-iM[A_\mu]^{ab}(x,y)\right)c^b(y)}$$

$$\langle \Omega | T\hat{\mathcal{O}}(\hat{A}) | \Omega \rangle = \mathcal{N} \int DA\, Dc D\bar{c}\; e^{i\int d^4x \mathcal{L}_{eff}(x)} \mathcal{O}(A)$$

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FP}$$

$$= \mathcal{L} - \frac{1}{2\xi} f^a[A_\mu] f^a[A_\mu] + \int d^4y\; \bar{c}^a(x) \left(-iM[A_\mu]^{ab}\right)(x,y) c^b(y)$$

我们集中考虑协变规范 $f^a[A_\mu(x)] = \partial_\mu A^\mu(x)$

$$M[A_\mu]^{ab}(x,y) = \left.\frac{\delta f^a[A_\mu^\theta(x)]}{\delta \theta^b(y)}\right|_{\theta=0}$$

$$= \left.\frac{\delta \left[\partial_\mu \left(A_\mu^a + \frac{1}{g}\partial_\mu \theta^a(x) + f^{abc} A_\mu^b(x) \theta^c(x)\right)\right]}{\delta \theta^b(y)}\right|_{\theta=0}$$

$$= \left[\partial_x^2 \delta^{ab} - g f^{abc} \partial_\mu A^{c,\mu}(x)\right] \frac{1}{g}\, \delta^4(x-y)$$

作用量中关于辅助场的部分为

$$\int d^4x\,\mathcal{L}_{FP}(x)$$

$$= -\frac{i}{g}\int d^4x d^4y\left[\bar{c}^a(x)\left(\delta^{ab}\partial_x^2\delta^4(x-y) - gf^{abc}\partial_\mu\left(A^{c,\mu}(x)\delta^4(x-y)\right)\right)\right]$$

$$= \frac{i}{g}\int d^4x\left[\left(\partial^\mu\bar{c}^a(x)\right)\left(\delta^{ab}\partial_\mu - gf^{abc}A_\mu^c(x)\right)c^b(x)\right]$$

重新定义辅助场 $c^a \to -ig\, c^a$， 则有

$$\mathcal{L}_{FP} = (\partial^\mu\bar{c}^a)\left(\delta^{ab}\partial_\mu - gf^{abc}A_\mu^c(x)\right)c^b(x) \equiv (\partial^\mu\bar{c}^a)D_\mu^{ab}c^b$$

注意：

- c^a 和 $\bar{c}^a$ 是相互独立的 Grassmann 变量，
- c^a 是反厄米的，即 $c^{a+} = -c^a$；$\bar{c}^a$ 是厄米的，$\bar{c}^{a+} = \bar{c}^a$。
- 可以证明，$\mathcal{L}_{FP}$ 是厄米的。

最终，考虑费米子也存在时，协变规范下 Faddeev-Popov 有效拉氏量为

$$\mathcal{L}_{eff} = -\frac{1}{4} F^{a}_{\mu\nu} F^{a,\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} \left(\partial_\mu A^{a,\mu}\right)\left(\partial_\nu A^{a,\nu}\right) + \bar{\psi}\left(i\gamma^\mu D_\mu - m\right)\psi$$

$$+\left(\partial_\mu \bar{c}^a\right)\partial^\mu c^a - g f^{abc}\left(\partial_\mu \bar{c}^a\right) c^b A^{c,\mu}$$

性质：

- 洛伦兹不变性：c^a 和 $\bar{c}^a$ 是洛伦兹标量；
- 整体的规范不变性：对于我们使用的协变规范，$f^a\left[A_\mu(x)\right]$ 是 $A_\mu(x)$ 的线性泛函，另外，各种场满足如下整体规范变换

$$\delta\psi_i = i\epsilon^a t^a_{ij}\,\psi_j, \qquad \delta A^a_\mu = f^{abc}\epsilon^c A^b_\mu$$

$$\delta\bar{c}^a = f^{abc}\epsilon^c \bar{c}^b, \qquad \delta c^a = f^{abc}\epsilon^c c^b$$

  等效拉氏量在上述整体变换下不变。
- 反鬼场平移不变性：$\partial_\mu \bar{c}^a = \partial_\mu\left(\bar{c}^a + \lambda^a\right)$，$\lambda^a$ 为任意常数。
- 鬼数守恒（鬼数$U(1)$不变性）：等效作用量在如下相位变换

$$c^a \to e^{i\alpha} c^a, \qquad \bar{c}^a \to e^{-i\alpha} \bar{c}^a$$

  下不变。鬼场的鬼数为 +1， 反鬼场的鬼数为 −1 ，其余场不带鬼数。

10.4 Faddeev-Popov 量子化下的费曼规则

$$\boxed{\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{eff}} = &-\frac{1}{4}G^A_{\mu\nu}G^{A,\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^{A,\mu})(\partial_\nu A^{A,\nu}) \\ &+\partial_\mu\bar{c}^A\partial^\mu c^A - gf^{ABC}(\partial_\mu\bar{c}^A)c^B A^{C,\mu} + \mathcal{L}_M(\psi, D_\mu\psi)\,.\end{aligned}}$$

1. 胶子传播子

在协变规范下，规范场自由部分的作用量和协变规范下的电磁场的自由部分类似，相当于有 d_G 种“光子”（ d_G 是规范群生成元的个数，也是群的自伴表示的维数），

$$S_0[A] = \frac{1}{2}\int d^4x\ A^a_\mu(x)\left(g^{\mu\nu}(\partial^2 - i\epsilon) - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\partial^\mu\partial^\nu\right)A^a_\nu$$

规范玻色子的传播子 $G^{ab}_{\mu\nu}(x-y)$

$$G^{ab}_{\mu\nu}(x-y) = \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ik\cdot(x-y)}\frac{-i\delta^{ab}}{k^2+i\epsilon}\left(g_{\mu\nu} - (1-\xi)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)$$

$$\widetilde{G}^{ab}_{\mu\nu}(k) = \frac{-i\delta^{ab}}{k^2+i\epsilon}\left(g_{\mu\nu} - (1-\xi)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)$$

2. 辅助场传播子

辅助场 c^a 和 $\bar{c}^a$ 的传播子可以通过作用量中的辅助场的二次型部分得到。

$$S_0[c,\bar{c}] = \int d^4x\,\left(\partial_\mu \bar{c}^a(x)\right)\partial^\mu c^a(x) = \int d^4x\ \bar{c}^a(x)\left(-\partial^2 + i\epsilon\right)c^a(x)$$

- 辅助场 c^a 和 $\bar{c}^a$ 的作用量形式和零质量的标量场的作用量形式相同，但辅助场本身又是 Grassmann 数，满足反对易关系——“鬼场”；
- 辅助场的引入只是为了处理由于选定规范条件所带来的泛函行列式，并不是真实的粒子，它们应该只出现在计算过程中（以内线粒子的形式），而不会出现在 S 矩阵元（振幅）中；
- 综合辅助场这两方面的性质，我们通常把鬼场（ghost field），对应的粒子为鬼粒子和反鬼粒子。

引入自由鬼场的生成泛函

$$Z_0[\eta_c^a, \bar{\eta}_c^a] = \mathcal{N}\int Dc D\bar{c}\exp\left[i\int d^4x\left(\bar{c}^a\left(-\partial^2 + i\epsilon\right)c^a + \bar{\eta}_c^a c^a + \bar{c}^a \eta_c^a\right)\right]$$

$$= \mathcal{N}\exp\left[\int d^4x d^4y\,\bar{\eta}_c^a(x) D_{gh}^{ab}(x,y)\eta_c^b(y)\right]$$

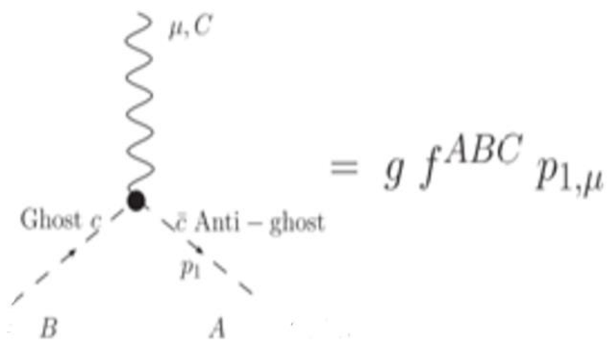
其中 $D_{gh}^{ab}(x,y)$ 是鬼场坐标空间的传播子 （算符 $i(\partial^2-i\epsilon)$ 的逆），

$$D_{gh}^{ab}(x,y)\equiv\langle 0|Tc^a(x)\bar{c}^b(y)|0\rangle=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ik\cdot(x-y)}\frac{i\delta^{ab}}{k^2+i\epsilon}$$

3. 鬼场–规范场耦合顶点

鬼场–规范场相互作用项

$$\mathcal{L}_{gc\bar{c}}=-gf^{abc}(\partial_\mu\bar{c}^a)c^bA^{c,\mu}$$



$$i\Gamma_{\bar{c}c,\mu}^{abc}(x_1,x_2,x_3)$$
$$=-igf^{a'b'c'}\frac{\delta^3}{\delta c^b(x_2)\delta\bar{c}^a(x_1)\delta A^{c,\mu}(x_3)}\int d^4z\left(\partial_\nu^{(z)}\bar{c}^{a'}(z)\right)c^{b'}(z)A^{c',\nu}(z)$$
$$=-igf^{abc}\int d^4z\,\delta^4(x_2-z)\left(\partial_\mu^{(z)}\delta^4(x_1-z)\right)\delta^4(x_3-z)$$

约定动量从相互作用点流出

$$(2\pi)^4\delta(p_1+p_2+p_3)i\widetilde{\Gamma}^{abc}_{\bar{c}c,\mu}(p_1,p_2,p_3)$$

$$=\int d^4x_1d^4x_2d^4x_3\, e^{i(p_1\cdot x_1+p_2\cdot x_2+p_3\cdot x_3)}$$

$$\times\left(-igf^{abc}\int d^4z\ \delta^4(x_2-z)\left(\partial_\mu^{(z)}\delta^4(x_1-z)\right)\delta^4(x_3-z)\right)$$

$$=-igf^{abc}\int d^4z\, e^{i(p_2+p_3)\cdot z}\partial_\mu^{(z)}\int d^4x_1\ e^{ip_1\cdot x_1}\delta^4(x_1-z)$$

$$=gf^{abc}p_{1,\mu}\int d^4z\, e^{i(p_1+p_2+p_3)\cdot z}=(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2+p_3)\ gf^{abc}p_{1,\mu}$$

注意，这里 p_1 是从沿反鬼场流出的动量。