Parton Distribution note

ChPT PDF relevant

作者：Thomas Young

组织：IHEP

时间：December 31, 2019

版本：1.00

ElegantLaTeX Program

Stay sleepy, stay tired

目　　录

第 1 章 Light Cone relevant

定义 1.1 (光锥动量) 在光锥坐标中，动量的各分量定义为：

$$
\begin{aligned}
k^{\pm} = k_0 \pm k_3, \quad k_\perp^2 = k_1^2 + k_2^2 \\
k^2 = k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2 = k^+k^- - k_\perp^2, \\
p^+p^- = M^2, \quad p_\perp^2 = 0.
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

$k_\perp$: 垂直方向的动量，在垂直面上可以分解成两个方向的投影，把这个矢量记作 $\vec{k_\perp}$，其模方为 $k_\perp^2$

上式最后一行中我们假设核子在 z 方向快速运动，因此 $p_\perp^2 = 0$

定义 1.2 (光锥动量) 符号约定: 介子和重子传播子因子 $D_\phi(k)$ 和 $D_B(k)$ 定义为：

$$
\begin{aligned}
D_\phi(k) = k^2 - {m_\phi}^2 + i\epsilon = k^+k^- - k_\perp^2 - {m_\phi}^2 + i\epsilon = k^+k^- - \Omega_\phi + i\epsilon, \\
D_B(p-k) = (p-k)^2 - {m_B}^2 + i\epsilon = (p-k)^+(p-k)^- - k_\perp^2 - {m_B}^2 + i\epsilon \\
= (p-k)^+(p-k)^- - \Omega_B + i\epsilon
\end{aligned}
$$

定义 1.3 (光锥动量) 光锥积分：如 (3.33) 式所示，被积函数化简后变为 $\frac{1}{D_\phi^n D_B^m}$(n 和 m 为自然数) 类型的积分。此类积分可通过计算它们的留数求解：

$$
\begin{aligned}
\int dk^- \frac{1}{D_\phi D_B} &= -\frac{2\pi i p^+ \bar{y}}{D_{\phi B}} \\
\int dk^- \frac{1}{D_\phi^2 D_B} &= \frac{\partial}{\partial m_\phi^2} \int dk^- \frac{1}{D_\phi D_B} = \frac{-2\pi i}{D_{\phi B}^2 p^+ \bar{y}} \\
\int dk^- \frac{1}{D_\phi D_B^2} &= \frac{\partial}{\partial M_B^2} \int dk^- \frac{1}{D_\phi D_B} = \frac{-2\pi i y}{D_{\phi B}^2 p^+ \bar{y}^2}
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

作为一个例子，演示第一个积分的计算过程，根据留数定理：

$$
\begin{aligned}
&\int dk^- \frac{1}{D_\phi D_B} = -2\pi i \mathrm{Res}\left[\frac{1}{D_\phi D_B}\right]_{\text{lower half plane}} \\
&= -2\pi i \lim_{k^- \to \frac{\Omega_\phi}{k^+}} \frac{k^- - \frac{\Omega_\phi}{k^+}}{\left(k^+ k^- - \Omega_\phi + i\epsilon\right)\left[\left(p^+ - k^+\right)\left(p^- - k^-\right) - \Omega_B + i\epsilon\right]} \\
&= -2\pi i \lim_{k^- \to \frac{\Omega_\phi}{k^+}} \frac{k^- - \frac{\Omega_\phi}{k^+}}{\left(p^+ - k^+\right) k^+ \left(k^- - \frac{\Omega_\phi}{k^+} + \frac{i\epsilon}{k^+}\right)\left[\left(p^- - k^-\right) - \frac{\Omega_B}{p^+ - k^+} + \frac{i\epsilon}{p^+ - k^+}\right]} \\
&= \frac{-2\pi i}{\left(p^+ - k^+\right) k^+ \left[\left(p^- - \frac{\Omega_\phi}{k^+}\right) - \frac{\Omega_B}{p^+ - k^+}\right]} \\
&= \frac{2\pi i}{p^+ \left[k_\perp^2 + (1-y) m_\phi^2 + y(1-y) M^2 + y M_B^2\right]} \\
&= \frac{-2\pi i}{p^+ D_{\phi B} \bar{y}}
\end{aligned}
$$

δ 函数项的积分：$\frac{1}{D_\phi^n}$ 和 $\frac{K^+ k^-}{D_\phi^n}$(n 为自然数) 类型的积分由下式给出:

$$
\begin{aligned}
\int dk^- \frac{1}{D_\phi} &= 2\pi i \log\left(\frac{\Omega_\phi}{\mu^2}\right) \frac{\delta(y)}{p^+}, \\
\int dk^- \frac{1}{D_\phi^2} &= \frac{\partial}{\partial \Omega_\phi} \int dk^- \frac{1}{D_\phi} = \frac{2\pi i}{p^+ \Omega_\phi} \delta(y) \\
\int dk^- \frac{k^+ k^-}{D_\phi} &= 2\pi i\, \delta(y) \frac{\Omega_\phi}{p^+} \left[\log\left(\frac{\Omega_\phi}{\mu^2}\right) - 1\right] \\
\int dk^- \frac{k^+ k^-}{D_\phi^2} &= \frac{\partial}{\partial \Omega_\phi} \int dk^- \frac{k^+ k^-}{D_\phi} = 2\pi i \log\left(\frac{\Omega_\phi}{\mu^2}\right) \frac{\delta(y)}{p^+}
\end{aligned}
$$

第 2 章 留数定理

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{dz}{z-\alpha}=\begin{cases}0,\alpha isn't included in l\\1,\alpha is included in l\end{cases} \tag{2.1}$$

因为原函数一个是多值函数 $\ln(z-\alpha)$，一个是单值函数 $(z-\alpha)^{n+1}/(n+1)$

柯西定理 (2.2.1) 指出，如被积函数 $f(z)$ 在回路 l 所围比区域上是解析的，则回路积分 $\oint f(z)dz$ 等于 0.

现考虑回路 l 包围 $f(z)$ 的奇点的情形。

先设 l 只包围着 $f(z)$ 的一个孤立奇点 z_0，在以 z_0 为圆心而半径为零的圆环域上将 $f(z)$ 展为洛朗级数

$$f(z)=\sum_{k=-\inf}^{\inf}a_k(z-z-0)^k \tag{2.2}$$

由柯西定理回路任意易形，洛朗级数除去 $k=-1$ 的一项之外全为 0，而 $k=-1$ 的一项的积分等于 $2\pi i$. 于是

$$\oint_l f(z)dz=2\pi i a_{-1} \tag{2.3}$$

洛朗级数的 $(z-z_0)^{-1}$ 项的系数因而具有特别重要的地位，专门起了名字，称为函数 $f(z)$ 在点 z_0 的留数 (或残数), 通常记作 Res $f(z_0)$, 这样,

$$\oint_l f(z)dz=2\pi i\,\mathrm{Res}\ f(z_0) \tag{2.4}$$

如果 l 包围着 $f(z)$ 的 n 个孤立奇点 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 的情形. 做回路 $l_1,l_2,\cdots,l_n$ 分别包围 $b_1,b_2,\cdots,b_n$. 并使每个回路只包围一个奇点, 按照柯西定理,

$$\oint_l f(z)dz=\oint_{l1}f(z)dz+\oint_{l2}f(z)dz+\cdots+\oint_{ln}f(z)dz \tag{2.5}$$

于是得到,

$$\oint_l f(z)dz=2\pi i[\mathrm{Res}\,f(b_1)+\mathrm{Res}\,f(b_2)+\cdots+\mathrm{Res}\,f(b_n)] \tag{2.6}$$

定理 2.1 (留数定理) 设函数 $f(z)$ 在回路 l 所围区域 B 上除有限个孤立奇点 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 外解析,