第四章 置换群

（黄飞，中国科学院大学，2017 年秋）

置换群在物理和数学上的重要意义：

- 置换群描写全同粒子体系的置换对称性
- 所有有限群都同构于置换群的子群
- 杨算符能明确描写张量指标间的复杂对称性

§1 置换群的一般性质

置换、轮换、对换；轮换结构，置换群的类；置换宇称，交变子群；置换群的生成元；Cayley 定理

§2 杨图、杨表和杨算符

杨图，正则杨图；杨表，正则杨表，维数定理，钩形法则；横向置换、纵向置换，横算符、纵算符，杨算符

§3 置换群的不可约标准表示

不可约标准表示的构造方法及具体形式

§4 置换群的不可约正交表示

不可约表示按子群链的分解；不可约正交表示的具体形式；不可约表示基的具体形式

§5 置换群不可约表示的内积和外积

置换群不可约表示的内积，CG 级数；置换群不可约表示的外积，**Littlewood-Richardson** 规则；分导表示的约化

§1 置换群的一般性质

1. 置换

- n 个客体排列次序的变换称为置换；n 个客体共有 $n!$ 个不同的置换
- 设原来排在第 j 位置的客体，经过置换 R 后排到了第 r_j 位置，用 $2\times n$ 矩阵来描写这一置换 R

$$R=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & j & \cdots & n \\ r_1 & r_2 & r_3 & \cdots & r_j & \cdots & r_n \end{pmatrix}$$

另一种定义：第 j 位置的客体经置换后变成了第 r_j 位置的客体

与我们的定义互逆

- 例如： $\psi=\begin{pmatrix}\varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3\end{pmatrix}$， $R=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$R\psi=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi_3 & \varphi_1 & \varphi_2\end{pmatrix}$$

- 对一给定的置换，各列的排列次序无关紧要，重要的是每一列上下两个数字间的对应关系

- 两个置换的乘积定义为相继做两次置换

  考虑 S 和 R 的乘积 SR：重新排列 R 或 S 的各列，使 R 的第二行和 S 的第一行排列一样，由 R 的第一行和 S 的第二行组成的 $2\times n$ 矩阵即为 SR

$$S=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$R=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$SR=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$SR=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

  SR 可以理解为把 R 置换的第二行数字作 S 置换，或者把 S 置换的第一行数字作 R^{-1} 置换

- 置换用矩阵来描写，但置换的乘积不服从矩阵乘积规则

- n 个客体的 $n!$ 个置换的集合满足群的四个条件，构成群，称为 **n 个客体置换群**，记作 S_n

❶ 封闭性：两置换的乘积仍是一个新的置换

❷ 结合律：置换乘积满足结合律（不满足交换律）

❸ 恒元：所有客体位置都不变的置换是恒等变换

恒等变换上下两行数组完全相同

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix} \qquad ER=RE=R$$

❹ 逆元：把置换的上下两行交换得到的置换是逆置换

$$R=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ r_1 & r_2 & r_3 & \cdots & r_n \end{pmatrix} \qquad R^{-1}=\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & \cdots & r_n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

$$RR^{-1}=R^{-1}R=E$$

- n 个客体中 m 个客体的所有置换变换构成置换群 S_m，显然 S_m 是 S_n 的子群 $(m\le n)$

置换群的子群链：$S_n\supset S_{n-1}\supset S_{n-2}\cdots\supset S_1=E$

2. 轮换和对换

- 轮换是一类特殊的置换：$n-l$ 个客体保持不变，余下的 l 个客体顺序变换，形成一个循环；l 称为轮换长度

$$(a_1\ a_2\ \cdots\ a_l)=\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_{l-1} & a_l & b_1 & \cdots & b_{n-l} \\ a_2 & \cdots & a_l & a_1 & b_1 & \cdots & b_{n-l} \end{pmatrix}$$

- 用行矩阵描写轮换时，数字的排列次序不能改变，但可以顺序变换

$$(a\ b\ c\ \cdots\ p\ q)=(b\ c\ \cdots\ p\ q\ a)=(c\ \cdots\ p\ q\ a\ b)$$

例如：
$$\begin{aligned}(1\ 2\ 3)&=(2\ 3\ 1)=(3\ 1\ 2)\\ &\neq(2\ 1\ 3)=(1\ 3\ 2)=(3\ 2\ 1)=(1\ 2\ 3)^{-1}\end{aligned}$$

- 长度为 1 的轮换是恒等变换，长度为 2 的轮换称为对换，对换满足

$$(a\ b)=(b\ a),\qquad (a\ b)(a\ b)=E$$

- 长度为 l 的轮换，它的 l 次自乘等于恒元，即它的阶数为 l

$$R=(a_1\ a_2\ \cdots\ a_l)$$
$$R^l=E$$

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{a_1\xrightarrow{R}a_2\xrightarrow{R}a_3}_{R^2}\cdots\xrightarrow{R}a_l}_{R^{l-1}}\xrightarrow{R}a_1}_{R^l}$$

- 两个没有公共客体的轮换，乘积次序可以交换

$$(a_1\ a_2\ \cdots\ a_l)(b_1\ b_2\ \cdots\ b_m)=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_l & b_1 & b_2 & \cdots & b_m \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_m & a_1 & a_2 & \cdots & a_l \\ b_2 & b_3 & \cdots & b_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$$

$$=(b_1\ b_2\ \cdots\ b_m)(a_1\ a_2\ \cdots\ a_l)$$

- 轮换的逆

$$(a_1\ a_2\ a_3\ \cdots\ a_{l-1}\ a_l)^{-1}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{l-1} & a_l \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_l & a_1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix} a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_l & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{l-1} & a_l \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_l & a_{l-1} & \cdots & a_3 & a_2 & a_1 \\ a_{l-1} & a_{l-2} & \cdots & a_2 & a_1 & a_l \end{pmatrix}$$

$$=(a_l\ a_{l-1}\ \cdots\ a_3\ a_2\ a_1)$$

- 任何一个置换，都可以唯一地分解为没有公共客体的轮换乘积
  - 对任一给定的置换 R，任选一数 a_1，经过 R 置换后，a_1 变为 a_2，a_2 变为 a_3，以此类推，总会有某个数如 a_l 会变为 a_1，这样就形成了一个循环，即置换 R 中存在一个包含 a_1 的长度为 l 的轮换
  - 在余下的数字中，任选一 b_1，用与上面同样的办法，可以找到一个包含 b_1 的循环，即置换 R 中存在一个包含 b_1 的轮换，它与包含 a_1 的轮换无公共客体，乘积次序可交换
  - 把这做法继续下去，总能穷尽全部 n 个数，从而把置换 R 分解为若干没有公共客体的轮换的乘积，这些轮换的乘积次序可以互相交换
  - 在分解中出现的长度为 1 的轮换（恒元）可以略去

例：

$$R=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&4&5&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&5\end{pmatrix}$$

$$S=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&2&4&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&2\end{pmatrix}$$

- 把一置换分解为没有公共客体的轮换乘积时，各轮换长度的集合，称为该轮换的轮换结构

  表达一个置换的轮换结构时，轮换长度的排列顺序可以任意

  例： $R=(1\ \ 3\ \ 5)(2\ \ 4)=(2\ \ 4)(1\ \ 3\ \ 5)$ 轮换结构为 $(3,2)$

  $S=(1\ \ 3\ \ 2)(4)(5)=(1\ \ 3\ \ 2)$ 轮换结构为 $(3,1,1)=(3,1^2)$

- 把一个正整数 n 分解为若干个正整数 l_i 之和，这样的正整数的集合称为 n 的一组配分数

  例：$n=2$，可能的配分数：(2)，(1^2)

  $n=3$，可能的配分数：(3)，$(2, 1)$，(1^3)

  $n=4$，可能的配分数：(4)，$(3, 1)$，$(2, 2)$，$(2, 1^2)$，(1^4)

  $n=5$，可能的配分数：(5)，$(4, 1)$，$(3, 2)$，$(3, 1^2)$，$(2, 2, 1)$，$(2, 1^3)$，(1^5)

- n 个客体的任一置换 R 的轮换结构为 $(l_1, l_2, \cdots)$，$\sum_i l_i = n$

  即：置换的轮换结构由一组配分数来描写

- 两轮换有一个公共客体时乘积的计算方法

$$(a\ b\ c\ d)(d\ e\ f)=\begin{pmatrix} a & b & c & e & f & d \\ b & c & d & e & f & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ a & b & c & e & f & d \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ b & c & d & e & f & a \end{pmatrix}$$

$$=(a\ b\ c\ d\ e\ f)$$

推广： $(a\ b\ \cdots\ c\ d)(d\ e\ \cdots\ f)=(a\ b\ \cdots\ c\ d\ e\ \cdots\ f)$

有一个公共客体的两个轮换的乘积：在每个轮换内部，把公共客体顺序移到最右或最左，然后按上式把两个轮换接起来

把一个轮换分解为有一个公共客体的两个轮换乘积：在轮换中任意客体的位置，例如 d 处，把轮换切断成两个轮换的乘积，并让 d 同时出现在两个轮换的最右或最左位置

例：(1 2 3)(4 2 5 6) = (3 1 2)(2 5 6 4) = (3 1 2 5 6 4)

(1 2 3 4 5) = (1 2)(2 3 4 5) = (1 2 3)(3 4 5) = (1 2 3 4)(4 5)

- 两轮换有两个或多个公共客体时乘积的计算方法

$$(a_1\ \cdots\ a_i\ c\ a_{i+1}\ \cdots\ a_j\ d)(d\ b_1\ \cdots\ b_r\ c\ b_{r+1}\ \cdots\ b_s)$$
$$=(a_1\ \cdots\ a_i\ c)(c\ a_{i+1}\ \cdots\ a_j\ d)(d\ b_1\ \cdots\ b_r\ c)(c\ b_{r+1}\ \cdots\ b_s)$$
$$=(a_1\ \cdots\ a_i\ c)(a_{i+1}\ \cdots\ a_j\ d\ c)(c\ d\ b_1\ \cdots\ b_r)(c\ b_{r+1}\ \cdots\ b_s)$$
$$=(a_1\ \cdots\ a_i\ c)(a_{i+1}\ \cdots\ a_j\ d)(d\ c)(c\ d)(d\ b_1\ \cdots\ b_r)(c\ b_{r+1}\ \cdots\ b_s)$$
$$=(a_1\ \cdots\ a_i\ c)(a_{i+1}\ \cdots\ a_j\ d)(d\ b_1\ \cdots\ b_r)(c\ b_{r+1}\ \cdots\ b_s)$$
$$=(a_1\ \cdots\ a_i\ c)(a_{i+1}\ \cdots\ a_j\ d\ b_1\ \cdots\ b_r)(c\ b_{r+1}\ \cdots\ b_s)$$
$$=(a_1\ \cdots\ a_i\ c)(c\ b_{r+1}\ \cdots\ b_s)(a_{i+1}\ \cdots\ a_j\ d\ b_1\ \cdots\ b_r)$$
$$=(a_1\ \cdots\ a_i\ c\ b_{r+1}\ \cdots\ b_s)(a_{i+1}\ \cdots\ a_j\ d\ b_1\ \cdots\ b_r)$$

基本思想：把轮换切断，化为每对轮换乘积只包含一个公共客体的形式后再相乘

例：
$$\begin{aligned}(5\ 1\ 2\ 4)(4\ 3\ 2\ 6)&=(5\ 1\ 2)(2\ 4)(4\ 3\ 2)(2\ 6)\\&=(5\ 1\ 2)(2\ 4)(2\ 4)(4\ 3)(2\ 6)\\&=(5\ 1\ 2)(2\ 6)(4\ 3)\\&=(5\ 1\ 2\ 6)(4\ 3)\end{aligned}$$

3. 置换群的类

- R 的共轭元素：SRS^{-1}

  把 R 置换的上下两行数字同时做 S 置换即得 R 置换的共轭元素 SRS^{-1}

- 当 R 是轮换时， $S(a\ \ b\ \ c\ \ \cdots\ \ d)S^{-1} = (s_a\ \ s_b\ \ s_c\ \ \cdots\ \ s_d)$

  这表明，共轭变换不改变轮换的长度，只改变轮换涉及的客体编号

  即：互相共轭的两置换有相同的轮换结构

- 设 $R = (a_1\ \ a_2\ \ a_3)(b_1\ \ b_2)\cdots(c_1\ \ c_2\ \ \cdots\ \ c_l)$

  $R' = (d_1\ \ d_2\ \ d_3)(e_1\ \ e_2)\cdots(f_1\ \ f_2\ \ \cdots\ \ f_l)$

  存在 $S = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 & \cdots & c_1 & c_2 & \cdots & c_l \\ d_1 & d_2 & d_3 & e_1 & e_2 & \cdots & f_1 & f_2 & \cdots & f_l \end{pmatrix} \in S_n$

  使得 $SRS^{-1} = R'$

  即：有相同轮换结构的两置换必定互相共轭

- 置换群的类由置换的轮换结构来描写，置换的轮换结构由一组配分数来描写，故置换群的类数等于整数 n 分解为不同配分数的数目

- 如果群 S_n 的类含 ν_1 个 1 循环，ν_2 个 2 循环，…，ν_n 个 n 循环，即它的轮换结构为

$$(l)=\left(1^{\nu_1},\ 2^{\nu_2},\ \cdots,\ n^{\nu_n}\right),\qquad \nu_1+2\nu_2+\cdots+n\nu_n=n$$

则该类所包含的元素的个数为

$$C_l=\frac{n!}{1^{\nu_1}2^{\nu_2}\cdots n^{\nu_n}\nu_1!\nu_2!\cdots\nu_n!}$$

证：将 n 个数字按 ν_1 个 1 循环，ν_2 个 2 循环，…，ν_n 个 n 循环顺序排列，所有可能排列数为 $n!$

对一个确定的轮换结构，独立循环是可交换的，如

$$(1)(2)\cdots=(2)(1)\cdots,\qquad (1\ 2)(3\ 4)\cdots=(3\ 4)(1\ 2)\cdots$$

为去掉重复排列，须除以因子 $\nu_1!\nu_2!\cdots\nu_n!$

由于循环不变性，如 $(1\ 2)=(2\ 1),\quad (1\ 2\ 3)=(2\ 3\ 1)=(3\ 1\ 2),\quad \cdots$

每个 2 循环重复计算了 2 次，ν_2 个 2 循环重复计算了 2^{ν_2} 次，…，每个 n 循环重复计算了 n 次，ν_n 个 n 循环重复计算了 n^{ν_n} 次，为去掉重复排列，须再除以因子 $1^{\nu_1}2^{\nu_2}\cdots n^{\nu_n}$

4. 交变子群

- 在轮换每一客体处切断，则轮换会分解为对换的乘积，如

$$(1\ 2\ 3) = (1\ 2)(2\ 3)$$
$$(1\ 2\ 3\ 4) = (1\ 2)(2\ 3)(3\ 4)$$
$$(1\ 2\ 3\ 4\ 5) = (1\ 2)(2\ 3)(3\ 4)(4\ 5)$$

- 一般地，长度为 l 的轮换可分解为 $l-1$ 个对换的乘积，即

$$(a\ \ b\ \ c\ \ \cdots\ \ t\ \ p\ \ q) = (a\ \ b)(b\ \ c)\cdots(t\ \ p)(p\ \ q)$$

- 将轮换分解为对换乘积时，这些对换有公共客体，并且分解方式也不唯一，例如

$$\begin{aligned}(1\ 2\ 3) &= (1\ 2)(2\ 3) = (1\ 3)(1\ 2) = (2\ 3)(1\ 3)\\ &= (1\ 2)(1\ 3)(1\ 2)(1\ 3)\\ &= (1\ 2)(1\ 3)(1\ 2)(2\ 3)(1\ 2)(2\ 3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1\ 2\ 3\ 4) &= (1\ 2)(2\ 3)(3\ 4) = (2\ 3)(3\ 4)(1\ 4) = (3\ 4)(1\ 4)(1\ 2) = (1\ 4)(1\ 2)(2\ 3)\\ &= (1\ 2)(1\ 3)(1\ 2)(1\ 3)(3\ 4)\\ &= (1\ 2)(1\ 3)(1\ 2)(1\ 3)(1\ 4)(1\ 3)(1\ 4)\end{aligned}$$

- 任何置换都可分解为若干个对换的乘积，分解方式虽不唯一，但它包含对换个数的奇偶性是确定的：长度为奇数的轮换可分解为偶数个对换的乘积，长度为偶数的轮换可分解为奇数个对换的乘积

- 置换分解为对换乘积时，对换数目是偶数的置换称为偶置换，对换数目是奇数的置换称为奇置换

- 长度为奇数的轮换是偶置换，长度为偶数的轮换是奇置换

- 两个偶置换或两个奇置换的乘积是偶置换，一个偶置换和一个奇置换的乘积是奇置换；恒元是偶置换

- 置换群中所有偶置换的集合构成指数为 2 的不变子群，称为交变子群，奇置换的集合是它的陪集，商群是 C_2 群

- $n>1$ 时，除恒等表示外，S_n 至少还有一个一维非恒等表示，称为反对称表示，置换 R 在该表示中的值称为它的置换宇称，记作 $\delta(R)$：

$$\delta(R)=\begin{cases}1 & \text{当}\,R\,\text{是偶置换}\\ -1 & \text{当}\,R\,\text{是奇置换}\end{cases}$$

5. 置换群的生成元

- 相邻客体的对换：$P_a=(a\ \ a+1)$
- 任何置换都可写为无公共客体的轮换的乘积，任何轮换都可分解为若干对换的乘积

  任何对换都可表示为相邻客体的对换乘积

  例：
  $$(a\ \ a+k)=(a+1\ \ a+k)\,(a\ \ a+1)\,(a+1\ \ a+k)$$
  $$(a+1\ \ a+k)=(a+2\ \ a+k)\,(a+1\ \ a+2)\,(a+2\ \ a+k)$$
  $$(a+2\ \ a+k)=(a+3\ \ a+k)\,(a+2\ \ a+3)\,(a+3\ \ a+k)$$
  $$\cdots$$
  $$(a+k-2\ \ a+k)=(a+k-1\ \ a+k)\,(a+k-2\ \ a+k-1)\,(a+k-1\ \ a+k)$$

  故：任何置换都可表示为相邻客体的对换之乘积

- 引入长度为 n 的轮换 $W=(1\ \ 2\ \ \cdots\ \ n)$

  则：$P_a=WP_{a-1}W^{-1}=W^2P_{a-2}W^{-2}=\cdots=W^{a-1}P_1W^{-(a-1)}$

  即：任何相邻客体的对换都可由 W 和 P_1 生成

- 综上，置换群的生成元是 W 和 P_1，置换群的秩为 2

有限群生成元的数目称为有限群的秩

Cayley 定理：任何一个 n 阶有限群都与置换群 S_n 的一个子群同构

证：设 $G=\{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$，则 $g_iG=\{g_ig_1, g_ig_2, \cdots, g_ig_n\}=G$

排列顺序的改变相当于一个置换 $P_{g_i}=\begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ g_ig_1 & g_ig_2 & \cdots & g_ig_n \end{pmatrix}$

因 $P_{g_i}P_{g_j}=\begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ g_ig_1 & g_ig_2 & \cdots & g_ig_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ g_jg_1 & g_jg_2 & \cdots & g_jg_n \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} (g_jg_1) & (g_jg_2) & \cdots & (g_jg_n) \\ g_i(g_jg_1) & g_i(g_jg_2) & \cdots & g_i(g_jg_n) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ g_jg_1 & g_jg_2 & \cdots & g_jg_n \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ g_ig_jg_1 & g_ig_jg_2 & \cdots & g_ig_jg_n \end{pmatrix}=P_{g_ig_j}$$

这表明 $\left\{\begin{array}{ccc} g_i & g_j & g_ig_j \\ \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow \\ P_{g_i} & P_{g_j} & P_{g_ig_j}=P_{g_i}P_{g_j} \end{array}\right.$

$\{P_{g_1}, P_{g_2}, \cdots, P_{g_n}\}$ 构成与群 $G=\{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$ 同构的群，该群是 S_n 的子群，即群 G 与 S_n 的子群同构

补充说明：若置换群 S_n 的子群与 n 阶有限群 G 同构，则该子群中的元素除恒等置换外，任一置换所包含的无公共客体的轮换的轮换长度相等

- $G=\{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$ 经过除恒元外的任一元素 g_i 作用后，所有元素的顺序都必定发生变化
- 由于 g_i 与 P_{g_i} 是一一对应的，这等价于，除了恒等置换外，P_{g_i} 重排了群 G 中的所有元素
- 若 P_{g_i} 由一个长度为 l_1 的轮换和一个长度为 l_2 的轮换的乘积构成，假设 $l_1 \neq l_2$，则 P_{g_i} 的 l_1 次幂仍属 S_n 的与 n 阶有限群 G 同构的同一子群，经该置换作用后，G 中有 l_1 个元素不动，有 l_2 个元素发生了重排，这是不可能的
- 故除恒等置换外，P_{g_i} 包含的无公共客体的轮换的轮换长度必定相等

S_n 的子群数目是有限的，满足上述性质的不同构的子群的数目更加有限

→ 不同构的 n 阶有限群的数目是有限的

例：与四阶群同构的 S_4 的子群可能包含的置换为：恒元（4 个长度为 1 的轮换的乘积），1 个长度为 4 的轮换，2 个对换的乘积

若该子群包含长度为 4 的轮换，如 (1 2 3 4)，则连续取该轮换的自乘幂得 S_4 的一个四阶子群

$$\{(1\ 2\ 3\ 4),\ (1\ 2\ 3\ 4)^2=(1\ 3)(2\ 4),\ (1\ 2\ 3\ 4)^3=(4\ 3\ 2\ 1),\ (1\ 2\ 3\ 4)^4=e\}$$

该子群与 C_4 同构

若该子群不包含长度为 4 的轮换，则除恒元外，其它三个元素都只能由 2 个对换的乘积组成，可能的 2 个对换的乘积为

$$(1\ 2)(3\ 4),\quad (1\ 3)(2\ 4),\quad (1\ 4)(2\ 3)$$

它们的平方都等于恒等置换，任意两个相乘得第三个，这三个置换加上恒等置换构成的子群与 V_4 同构

故：准确到同构，四阶群只有两种，C_4 和 V_4

§2 杨图、杨表和杨算符

1. 杨图

- 置换群 S_n 的类的个数等于 n 分解为不同组配分数的数目，故置换群不等价不可约表示的个数也等于 n 分解为不同组配分数的数目
- 置换群 S_n 的类由 n 的配分数 $(\lambda) = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ 描写，不等价不可约表示也可以用配分数来描写，记作 $[\lambda] = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m]$，其中

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_m > 0, \quad \sum_{j=1}^{m} \lambda_j = n$$

不过，由相同配分数描写的类和不等价不可约表示并无任何关系

- 对配分数 $[\lambda] = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m]$，画 m 行方格图，左边对齐，第一行含 λ_1 格，第二行含 λ_2 格，以此类推，这样的方格图称为配分数 $[\lambda]$ 对应的**杨图**，简称杨图 $[\lambda]$

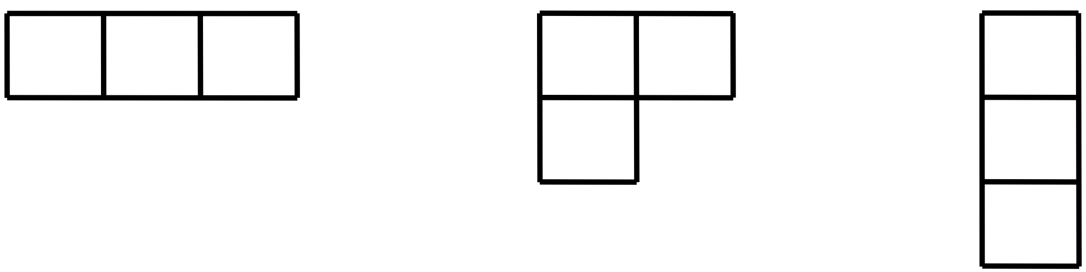
- 杨图中，上面行的格子数不少于下面行的格子数，左边列的格子数不少于右边列的格子数，为强调这一规则，称它为正则杨图

  我们不讨论不满足此规则的杨图，即我们所说的杨图都是指正则杨图

- 每个杨图都唯一地对应于置换群 S_n 的一个不可约表示，不同杨图对应的不可约表示不等价

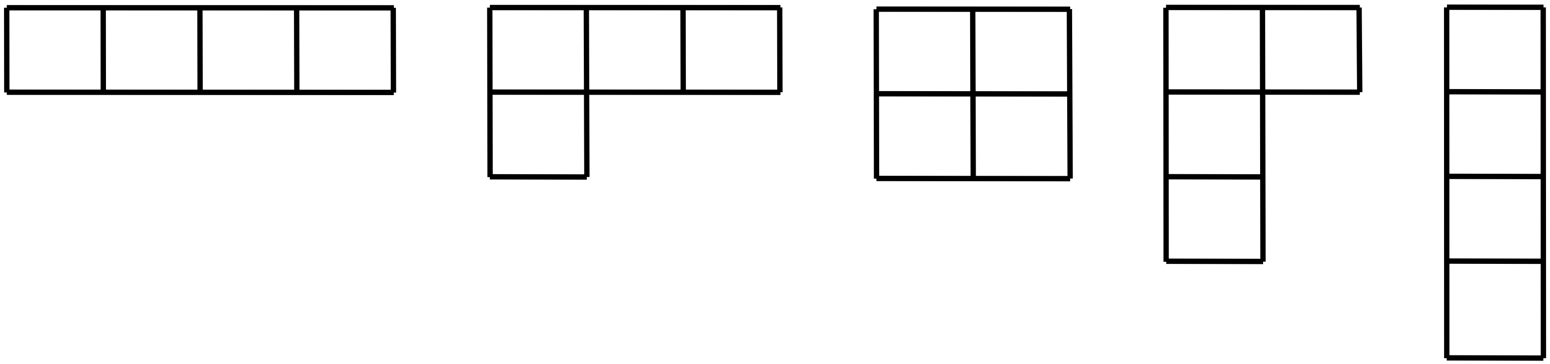
- 杨图的大小：对两个杨图 $[\lambda]$ 和 $[\lambda']$，从第一行开始逐行比较它们格子数的多少，第一次出现格子数不同时，格子数多的杨图大

- 例：S_3 群的杨图从大到小排列为



$[3]$ $[2, 1]$ $[1^3]$

- 例：S_4 群的杨图从大到小排列为



$[4]$ $[3,1]$ $[2,2]$ $[2,1^2]$ $[1^4]$

- 把杨图 $[\lambda]$ 的行和列互换得到的杨图 $[\tilde{\lambda}]$ 称为杨图 $[\lambda]$ 的对偶杨图，对应的不可约表示称为对偶表示

  例：S_3 群的杨图 $[3]$ 和 $[1^3]$ 互为对偶杨图

  S_4 群的杨图 $[4]$ 和 $[1^4]$ 以及 $[3,1]$ 和 $[2,1^2]$ 分别互为对偶杨图

- 若杨图 $[\lambda]=[\tilde{\lambda}]$ 则称为自偶杨图

  例：S_3 群的杨图 $[2,1]$ 为自偶杨图

  S_4 群的杨图 $[2,2]$ 为自偶杨图

2. 杨表

- 对于给定的杨图 $[\lambda]$，把 1 到 n 的 n 个自然数分别填入杨图的 n 个格子中，就得到一个杨表（杨盘）

- n 格的杨图有 $n!$ 个不同的杨表

- 如果在杨表的每一行中，左面的填数小于右面的填数，在每一列中，上面的填数小于下面的填数，则此杨表称为正则杨表

- 正则杨表的大小：同一杨图对应的正则杨表，从第一行开始逐行从左到右比较它们的填数，第一次出现填数不同时，填数大的正则杨表大

- 例如，杨图 $[3,2]$ 对应的全部正则杨表从小到大排列为

1	2	3
4	5	

1	2	4
3	5	

1	2	5
3	4	

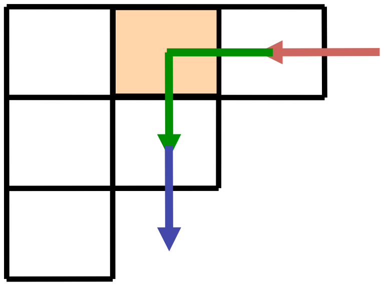
1	3	4
2	5	

1	3	5
2	4	

- **维数定理**：**置换群 S_n 的不可约表示 $[\lambda]$ 的维数，等于杨图 $[\lambda]$ 对应的正则杨表的个数**

- 杨图 $[\lambda]$ 对应的不可约表示的维数或正则杨表的个数由**钩形规则**给出
  - ➢ 对杨图的第 i 行第 j 列格子，定义钩形数 h_{ij}，它等于一条钩形路径在杨图中经过的格子数，这条路径从杨图第 i 行最右面的格子处进入杨图，向左走到第 i 行第 j 列格子处向下转弯，从第 j 列最下面的格子处离开杨图
  - ➢ 杨图 $[\lambda]$ 对应的不可约表示的维数为

$$d_{[\lambda]}(S_n) = \frac{n!}{\prod_{ij} h_{ij}}$$



  - ➢ 实际上，杨图中任一格子的钩形数，等于该格子所在行右面的格子数加上该格子所在列下面的格子数再加 1
  - ➢ **钩形数杨表**：将杨图 $[\lambda]$ 中每格的钩形数 h_{ij} 填入该杨图，得到的杨表称为该杨图的钩形数杨表

- 例：S_3 群各不可约表示的维数

不可约表示	钩形数杨表	不可约表示的维数
$[3]$：	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline 3 & 2 & 1 \\ \hline\end{array}$	$d_{[3]}(S_3)=\dfrac{3!}{3\times2\times1}=\dfrac{3\times2\times1}{3\times2\times1}=1$
$[2,1]$：	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 3 & 1 \\ \hline 1 & \\ \cline{1-1}\end{array}$	$d_{[2,1]}(S_3)=\dfrac{3!}{3\times1\times1}=\dfrac{3\times2\times1}{3\times1\times1}=2$
$[1^3]$：	$\begin{array}{\|c\|}\hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline\end{array}$	$d_{[1^3]}(S_3)=\dfrac{3!}{3\times2\times1}=\dfrac{3\times2\times1}{3\times2\times1}=1$

维数验证： $1^2+2^2+1^2=6=3!$

- 例：S_4 群各不可约表示的维数

不可约表示	钩形数杨表	不可约表示的维数
$[4]$:	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline\end{array}$	$d_{[4]}(S_4)=\dfrac{4!}{4\times3\times2\times1}=\dfrac{4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1}=1$
$[3,1]$:	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline 4 & 2 & 1 \\ \hline 1 \\ \cline{1-1}\end{array}$	$d_{[3,1]}(S_4)=\dfrac{4!}{4\times2\times1\times1}=\dfrac{4\times3\times2\times1}{4\times2\times1\times1}=3$
$[2,2]$:	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 3 & 2 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline\end{array}$	$d_{[2,2]}(S_4)=\dfrac{4!}{3\times2\times2\times1}=\dfrac{4\times3\times2\times1}{3\times2\times2\times1}=2$
$[2,1^2]$:	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 4 & 1 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} 1 \\ \cline{1-1}\end{array}$	$d_{[2,1^2]}(S_4)=\dfrac{4!}{4\times1\times2\times1}=\dfrac{4\times3\times2\times1}{4\times1\times2\times1}=3$
$[1^4]$:	$\begin{array}{\|c\|}\hline 4 \\ \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline\end{array}$	$d_{[1^4]}(S_4)=\dfrac{4!}{4\times3\times2\times1}=\dfrac{4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1}=1$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{维数验证：}\\ 1^2+3^2+2^2+3^2+1^2=24=4!\end{array}}$$

3. 杨算符

对给定的杨图 $[\lambda]=[\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m]$，其对偶杨图记为 $[\tilde{\lambda}]=[\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_{\lambda_1}]$；考虑杨图 $[\lambda]$ 对应的某一正则杨表

$\boxed{\tau_1=m}$

- 保持杨表中同一行的数字只在这一行中变动的置换称为**横向置换**，记作 p，所有横向置换的集合记作 $R(\lambda)=\{p\mid p\in S_n\}$
  - 第 i 行 λ_i 个数字间的 $\lambda_i!$ 个横向置换的集合构成 S_n 群的子群 P_i
  - m 行的正则杨表共有 m 个这样的子群，它们的直乘构成 S_n 群 $\lambda_1!\lambda_2!\ldots\lambda_m!$ 阶的子群，记为 $R(\lambda)=P_1\otimes P_2\otimes\cdots\otimes P_m$

恒元为唯一公共元素
分属不同子群的元素可对易

- 保持杨表中同一列的数字只在这一列中变动的置换称为**纵向置换**，记作 q，所有纵向置换的集合记作 $C(\lambda)=\{q\mid q\in S_n\}$
  - 第 j 列 τ_j 个数字间的 $\tau_j!$ 个纵向置换的集合构成 S_n 群的子群 Q_j
  - λ_1 列的正则杨表共有 λ_1 个这样的子群，它们的直乘构成 S_n 群 $\tau_1!\tau_2!\ldots\tau_{\lambda_1}!$ 阶的子群，记为 $C(\lambda)=Q_1\otimes Q_2\otimes\cdots\otimes Q_{\lambda_1}$

- 所有横向置换之和称为给定杨表的横算符

$$\mathcal{P} = \sum_{p \in R(\lambda)} p = \prod_i P_i$$

- 所有纵向置换乘以置换宇称后相加，称为给定杨表的纵算符

$$\mathcal{Q} = \sum_{q \in C(\lambda)} \delta(q) q$$

- 横算符和纵算符之乘积称为给定杨表的杨算符，正则杨表对应的杨算符称为正则杨算符

$$\mathcal{Y} = \mathcal{P}\mathcal{Q} = \sum_{p \in R(\lambda)} \sum_{q \in C(\lambda)} \delta(q) p q$$

- 横向置换、纵向置换、横算符、纵算符、杨算符均为群代数中的矢量
- 横向置换的集合 $R(\lambda)$ 与纵向置换的集合 $C(\lambda)$ 只有一个公共元素恒元，故杨算符 $\mathcal{Y}$ 展开式中每一项 pq 都是 S_n 群的不同元素，因此 $\mathcal{Y} \neq 0$

  证：设 $p, p' \in R(\lambda)$, $q, q' \in C(\lambda)$, 若 $pq = p'q'$，则 $p'^{-1}p = q'q^{-1}$，有 $p' = p$, $q' = q$
- 只有在杨图和杨表给定时，才能写出杨算符 $\mathcal{Y}$，故通常把杨算符 $\mathcal{Y}$ 对应的杨图和杨表，称为杨图 $\mathcal{Y}$ 和杨表 $\mathcal{Y}$；若单独说 $\mathcal{Y}$，则指杨算符本身

- 给定杨表**横算符的写法**：先把每一行的横向置换加起来，再把不同行的横向置换之和乘起来

  给定杨表**纵算符的写法**：先把每一列的所有纵向置换乘上各自的置换宇称后加起来，再把不同列的纵向置换之代数和乘起来

只有一格的行或列对应恒元，相乘时可略去

- 例：S_3 群各不可约表示杨图对应的正则杨表的杨算符

1	2	3

$$\mathcal{Y}^{[3]} = E + (1\ 2) + (1\ 3) + (2\ 3) + (1\ 2\ 3) + (1\ 3\ 2)$$

1	2
3	

$$\mathcal{Y}_1^{[2,1]} = \{E + (1\ 2)\}\{E - (1\ 3)\}$$
$$= E + (1\ 2) - (1\ 3) - (1\ 3\ 2)$$

1	3
2	

$$\mathcal{Y}_2^{[2,1]} = \{E + (1\ 3)\}\{E - (1\ 2)\}$$
$$= E + (1\ 3) - (1\ 2) - (1\ 2\ 3)$$

1
2
3

$$\mathcal{Y}^{[1^3]} = E - (1\ 2) - (1\ 3) - (2\ 3) + (1\ 2\ 3) + (1\ 3\ 2)$$

- 例：S_4 群下列正则杨表的杨算符

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array} \qquad \mathcal{Y}_1^{[2,2]} = \{E+(1\ 2)\}\{E+(3\ 4)\}\{E-(1\ 3)\}\{E-(2\ 4)\}$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array} \qquad \mathcal{Y}_2^{[2,2]} = \{E+(1\ 3)\}\{E+(2\ 4)\}\{E-(1\ 2)\}\{E-(3\ 4)\}$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} 4 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad \mathcal{Y}_1^{[3,1]} = \{E+(1\ 2)\}\{E-(1\ 3)-(1\ 4)-(3\ 4)+(1\ 3\ 4)+(1\ 4\ 3)\}$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} 4 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad \mathcal{Y}_2^{[3,1]} = \{E+(1\ 3)\}\{E-(1\ 2)-(1\ 4)-(2\ 4)+(1\ 2\ 4)+(1\ 4\ 2)\}$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 4 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad \mathcal{Y}_3^{[3,1]} = \{E+(1\ 4)\}\{E-(1\ 2)-(1\ 3)-(2\ 3)+(1\ 2\ 3)+(1\ 3\ 2)\}$$

§3 置换群的不可约标准表示

定理：杨算符 $\mathcal{Y}$ 是置换群群代数 $\mathcal{L}(S_n)$ 本质的原始幂等元，最小左理想 $\mathcal{L}(S_n)\mathcal{Y}$ 给出 S_n 群的一个不可约表示；由同一杨图的不同正则杨表给出的表示是等价的，不同杨图给出的表示是不等价的

- 例：S_n 群的杨图 $[n]$ 确定的不可约表示

该杨图只有一个正则杨表

1	2	⋯	n

该杨表的杨算符为 $\mathcal{Y}^{[n]}=\sum_i p_i,\quad p_i\in S_n$

由重排定理，对任意 $t\in S_n$，有

$$t\mathcal{Y}^{[n]}=t\sum_i p_i=\sum_i p_i=\mathcal{Y}^{[n]}$$

故杨图 $[n]$ 对应 S_n 群的一维恒等表示

$(f/n!)\,\mathcal{Y}$ 是置换群的原始幂等元（f 是不可约表示的维数）

等价的原始幂等元不一定正交；不等价的原始幂等元一定正交

$n\geq 5$ 时会出现同一杨图的不同正则杨表对应的杨算符可能不正交的情况

一行的杨图对应一维恒等表示

● 例：S_n 群的杨图 $[1^n]$ 确定的不可约表示

该杨图只有一个正则杨表

$$\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \cdots \\ \hline n \\ \hline \end{array}$$

该杨表的杨算符为

$$\mathcal{Y}^{[n]} = \sum_i \delta(q_i) q_i, \quad q_i \in S_n$$

对任意 $t \in S_n$，有

$$t\mathcal{Y}^{[n]} = t\sum_i \delta(q_i) q_i = \sum_i \delta(q_i) t q_i$$

$$= \delta(t) \sum_i \delta(t q_i) t q_i = \delta(t) \mathcal{Y}^{[n]}$$

故杨图 $[1^n]$ 对应 S_n 群的一维全反对称表示

一列的杨图对应一维全反对称表示

为什么称为全反对称表示？

- 例：S_3 群的不可约标准表示

杨图 [3] 对应一维恒等表示；杨图 $[1^3]$ 对应一维全反对称表示；杨图 [2,1] 有两个正则杨表，它们给出两个等价的二维不可约表示

以杨图 [2,1] 的其中一个正则杨表为例：

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$$

$$\mathcal{Y}_1^{[2,1]} = \{E + (1\ 2)\}\{E - (1\ 3)\} = E + (1\ 2) - (1\ 3) - (1\ 3\ 2)$$

$$E\mathcal{Y}_1^{[2,1]} = \mathcal{Y}_1^{[2,1]}$$

$$(1\ 2)\mathcal{Y}_1^{[2,1]} = (1\ 2) + E - (1\ 3\ 2) - (1\ 3) = \mathcal{Y}_1^{[2,1]}$$

$$(1\ 3)\mathcal{Y}_1^{[2,1]} = (1\ 3) + (1\ 2\ 3) - E - (2\ 3)$$

$$(2\ 3)\mathcal{Y}_1^{[2,1]} = (2\ 3) + (1\ 3\ 2) - (1\ 2\ 3) - (1\ 2) = -\mathcal{Y}_1^{[2,1]} - (1\ 3)\mathcal{Y}_1^{[2,1]}$$

$$(1\ 2\ 3)\mathcal{Y}_1^{[2,1]} = (1\ 2\ 3) + (1\ 3) - (2\ 3) - E = (1\ 3)\mathcal{Y}_1^{[2,1]}$$

$$(1\ 3\ 2)\mathcal{Y}_1^{[2,1]} = (1\ 3\ 2) + (2\ 3) - (1\ 2) - (1\ 2\ 3) = -\mathcal{Y}_1^{[2,1]} - (1\ 3)\mathcal{Y}_1^{[2,1]}$$

这表明，$\mathcal{L}(S_3)\mathcal{Y}_1^{[2,1]}$ 确实是二维的

令 $$\begin{cases} \psi_1 = \mathcal{Y}_1^{[2,1]} \\ \psi_2 = (1\ 3)\mathcal{Y}_1^{[2,1]} \end{cases}$$

则有

$$\begin{cases} (1\ 2)\psi_1 = \psi_1 \\ (1\ 2)\psi_2 = (1\ 3\ 2)\mathcal{Y}_1^{[2,1]} = -\psi_1 - \psi_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1\ 2\ 3)\psi_1 = \psi_2 \\ (1\ 2\ 3)\psi_2 = (2\ 3)\mathcal{Y}_1^{[2,1]} = -\psi_1 - \psi_2 \end{cases}$$

杨图 $[\lambda]$ 的任一正则杨表的杨算符是本质的原始幂等元，它将群代数投影到一个最小左理想，该左理想荷载不可约表示 $[\lambda]$，任选一组线性独立的矢量为基，可得不可约表示 $[\lambda]$ 的表示矩阵

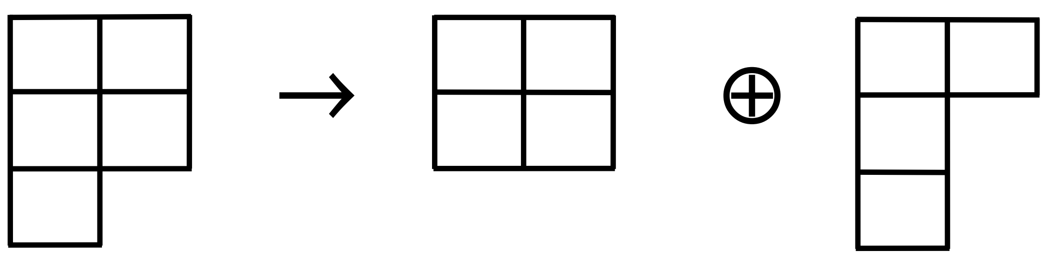
由此得 S_3 群的生成元在二维不可约标准表示中的表示矩阵

$$D^{[2,1]}(1\ 2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad D^{[2,1]}(1\ 2\ 3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

§4 置换群的不可约正交表示

1. 不可约表示按子群链的分解

- 分支律：S_n 群的不可约表示 $[\lambda]$ 对它的子群 $S_{n\text{-}1}$ 来说，一般是可约的，从杨图 $[\lambda]$ 中按所有可能的方式去掉一个方格后所剩下的如果仍是正则杨图 $[\lambda']$，则 $[\lambda']$ 就是 $[\lambda]$ 作为 $S_{n\text{-}1}$ 群的表示进行约化时可能出现的不可约表示，且每个 $[\lambda']$ 只出现一次
- 例如，S_5 群的不可约表示 $[2^2,1]$ 中包含 S_4 群的不可约表示 $[2^2]$ 和 $[2,1^2]$ 各一次

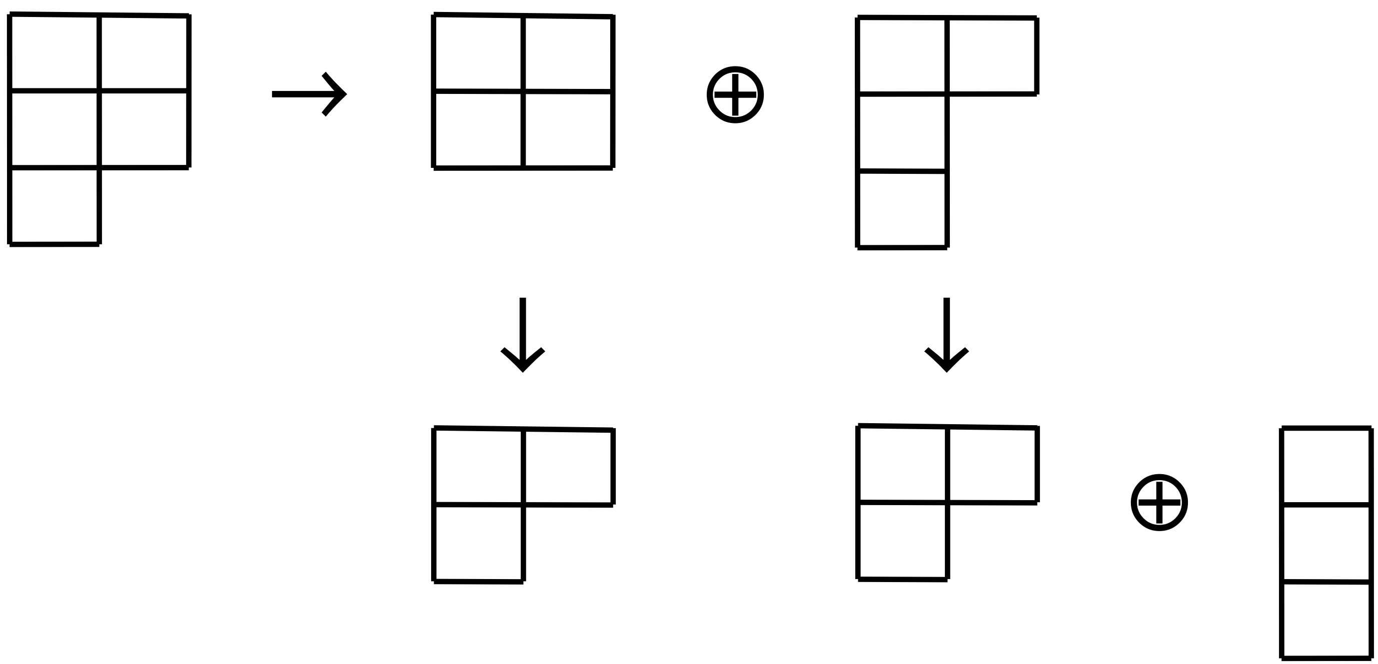


维数　　$5 = 2 + 3$

若 $R\in S_4$，则选择适当的一组基后，它在 S_5 群的不可约表示 $[2^2,1]$ 中的表示矩阵可记为

$$D^{[2^2,1]}(R)=\begin{pmatrix} D^{[2^2]}(R) & 0 \\ 0 & D^{[2,1^2]}(R) \end{pmatrix}$$

- 以上关于 $S_n\to S_{n-1}$ 群的讨论自然也适用于 $S_{n-1}\to S_{n-2}$，例如



维数 $5 = 2 + 2 + 1$

若 $R\in S_3$，则适当选择基后，它在 S_5 群的不可约表示 $[2^2,1]$ 中的表示矩阵可记为

$$D^{[2^2,1]}(R)=\begin{pmatrix} D^{[2,1]}(R) & 0 & 0 \\ 0 & D^{[2,1]}(R) & 0 \\ 0 & 0 & D^{[1^3]}(R) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} D^{[2^2,1]}(R) &= D^{[2^2]}(R)\oplus D^{[2,1^2]}(R) \\ &= D^{[2,1]}(R)\oplus D^{[2,1]}(R)\oplus D^{[1^3]}(R) \end{aligned}$$

- 以上讨论可继续下去，对子群链 $S_n\supset S_{n-1}\supset S_{n-2}\supset\cdots\supset S_{n-i}$ 中的置换，适当选择基后，前一个群的不可约表示矩阵依次是后一个子群的不可约表示矩阵的直和
- 荷载子群链 $S_n\supset S_{n-1}\supset S_{n-2}\supset\cdots\supset S_2$ 中所有子群的不可约表示的基互相正交，由它们得到的表示称为置换群的实正交表示

- 用正则杨表标记正交基：从 S_n 的正则杨表中去掉填 n 的格子，仍是正则杨表，标识 S_{n-1} 不可约表示的基；依次分解下去，杨表逐步缩小的过程反映出置换群表示逐步按子群表示分解的过程，也确定了基函数按子群链的分类

- 例：

$$\ytableaushort{12,34,5} \rightarrow \ytableaushort{12,34} \rightarrow \ytableaushort{12,3} \rightarrow \ytableaushort{12} \rightarrow \ytableaushort{1}$$

$$\ytableaushort{13,24,5} \rightarrow \ytableaushort{13,24} \rightarrow \ytableaushort{13,2} \rightarrow \ytableaushort{1,2} \rightarrow \ytableaushort{1}$$

$$\ytableaushort{12,35,4} \rightarrow \ytableaushort{12,3,4} \rightarrow \ytableaushort{12,3} \rightarrow \ytableaushort{12} \rightarrow \ytableaushort{1}$$

$$\ytableaushort{13,25,4} \rightarrow \ytableaushort{13,2,4} \rightarrow \ytableaushort{13,2} \rightarrow \ytableaushort{1,2} \rightarrow \ytableaushort{1}$$

$$\ytableaushort{14,25,3} \rightarrow \ytableaushort{14,2,3} \rightarrow \ytableaushort{1,2,3} \rightarrow \ytableaushort{1,2} \rightarrow \ytableaushort{1}$$

2. 不可约正交表示的具体形式

- 任一置换都可以分解为无公共客体的轮换的乘积，任一轮换都可以分解为对换的乘积，任一对换都可以分解为相邻客体的对换的乘积
- 只要知道了相邻客体的对换 $(k-1\ k)$ 的表示矩阵，就可以由乘法求得 S_n 群的任意元素的表示矩阵
- 用 $\mathcal{Y}_r^{[\lambda]}$ 表示不可约表示 $[\lambda]$ 的第 r 个正则杨表，$\left|\mathcal{Y}_r^{[\lambda]}\right\rangle$ 表示荷载正交表示 $[\lambda]$ 的基
- **$k-1$ 到 k 的轴距**：正则杨表 $\mathcal{Y}_r^{[\lambda]}$ 中，从填 $k-1$ 的格子到填 k 的格子，向左或向下数一个方格为 $+1$，向右或向上数一个方格为 -1，这样数出的代数和 μ 称为数字 $k-1$ 到 k 的轴距
- 若 $k-1$ 和 k 不在正则杨表 $\mathcal{Y}_r^{[\lambda]}$ 的同一行或同一列，则 $(k-1\ k)$ 把正则杨表 $\mathcal{Y}_r^{[\lambda]}$ 变为正则杨表 $\mathcal{Y}_s^{[\lambda]}$

$$\mathcal{Y}_s^{[\lambda]} = (k-1\ \ k)\,\mathcal{Y}_r^{[\lambda]}$$

- 对换 $(k-1\ k)$ 在正交表示中的表示矩阵

① 当 $k-1$ 和 k 在杨表 $\mathcal{Y}_r^{[\lambda]}$ 的同一行或同一列

$$(k-1\ \ k)\left|\mathcal{Y}_r^{[\lambda]}\right\rangle = -\mu\left|\mathcal{Y}_r^{[\lambda]}\right\rangle$$

相邻客体在同一行对称，在同一列反对称

② 当 $k-1$ 和 k 不在杨表 $\mathcal{Y}_r^{[\lambda]}$ 的同一行或同一列

$$(k-1\ \ k)\left|\mathcal{Y}_r^{[\lambda]}\right\rangle = -\frac{1}{\mu}\left|\mathcal{Y}_r^{[\lambda]}\right\rangle + \frac{\sqrt{\mu^2-1}}{|\mu|}\left|\mathcal{Y}_s^{[\lambda]}\right\rangle$$

- 例：S_3 群的实正交表示

$$(1\ \ 2)\left|\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline\end{array}\right\rangle = \left|\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline\end{array}\right\rangle \qquad (1\ \ 2)\left|\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3&\\\cline{1-1}\end{array}\right\rangle = \left|\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3&\\\cline{1-1}\end{array}\right\rangle$$

$$(1\ \ 2)\left|\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline 3\\\hline\end{array}\right\rangle = -\left|\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline 3\\\hline\end{array}\right\rangle \qquad (1\ \ 2)\left|\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2&\\\cline{1-1}\end{array}\right\rangle = -\left|\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2&\\\cline{1-1}\end{array}\right\rangle$$

$$D^{[3]}(1\ 2) = -D^{[1^3]}(1\ 2) = 1 \qquad D^{[2,1]}(1\ 2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(2\ \ 3)\left|\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline\end{array}\right\rangle = \left|\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline\end{array}\right\rangle$$

$$(2\ \ 3)\left|\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}\right\rangle = -\frac{1}{2}\left|\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}\right\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}\left|\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}\right\rangle$$

$$(2\ \ 3)\left|\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}\right\rangle = \frac{1}{2}\left|\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}\right\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}\left|\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}\right\rangle$$

$$(2\ \ 3)\left|\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline\end{array}\right\rangle = -\left|\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline\end{array}\right\rangle$$

$$D^{[3]}(2\ 3) = -D^{[1^3]}(2\ 3) = 1$$

$$D^{[2,1]}(2\ 3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

其它元素的表示矩阵可由乘法给出：

$$D(1\ 3)=D(1\ 2)D(2\ 3)D(1\ 2)$$

$$D(1\ 2\ 3)=D(1\ 2)D(2\ 3)$$

$$D(1\ 3\ 2)=D(1\ 2)D(1\ 3)$$

于是有：

$$D^{[3]}(1\ 3)=-D^{[1^3]}(1\ 3)=1 \qquad D^{[2,1]}(1\ 3)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -\sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$$

$$D^{[3]}(1\ 2\ 3)=D^{[1^3]}(1\ 2\ 3)=1 \qquad D^{[2,1]}(1\ 2\ 3)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & -1\end{pmatrix}$$

$$D^{[3]}(1\ 3\ 2)=D^{[1^3]}(1\ 3\ 2)=1 \qquad D^{[2,1]}(1\ 3\ 2)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{pmatrix}$$

3. 不可约表示的基函数

正则杨表标记正交基只是作为抽象符号使用，尚不涉及基的具体形式

- 有了不可约正交表示的表示矩阵，可得投影算符

$$\mathcal{P}_{rs}^{[\lambda]} = \frac{d_{[\lambda]}}{n!} \sum_{R \in S_n} D_{rs}^{[\lambda]}(R) R$$

它作用在有置换变量的函数上，可得具有指定对称性 $[\lambda]$ 的波函数

- 设 n 粒子系统的波函数为 $\phi(1,2,\cdots,n)$，其中 $1, 2, \cdots, n$ 为粒子的坐标，则具有对称性 $[\lambda]$ 的 $d_{[\lambda]}$ 个波函数为（s 固定）

$$\psi_{rs}^{[\lambda]} = \mathcal{P}_{rs}^{[\lambda]} \phi(1,2,\cdots,n) = \frac{d_{[\lambda]}}{n!} \sum_{R \in S_n} D_{rs}^{[\lambda]}(R) R\, \phi(1,2,\cdots,n)$$

- 例：由组态 $\phi = uds$ 构造 S_3 群 $[3]$ 表示的基

$$\mathcal{P}_{11}^{[3]} = \frac{1}{6}\left[E + (132) + (123) + (12) + (23) + (13)\right]$$

$$\psi^{[3]} = \mathcal{P}_{11}^{[3]} \phi = \frac{1}{6}\left[uds + dsu + sud + dus + usd + sdu\right]$$

Σ^* 味道波函数

- 例：由组态 $\phi=uds$ 构造 S_3 群 $[2,1]$ 表示的基

$$
\begin{cases}
\mathcal{P}_{11}^{[2,1]} = \frac{1}{6}[2E-(132)-(123)+2(12)-(23)-(13)] \\
\mathcal{P}_{21}^{[2,1]} = \frac{\sqrt{3}}{6}[(132)-(123)+(23)-(13)] \\
\mathcal{P}_{12}^{[2,1]} = \frac{\sqrt{3}}{6}[-(132)+(123)+(23)-(13)] \\
\mathcal{P}_{22}^{[2,1]} = \frac{1}{6}[2E-(132)-(123)-2(12)+(23)+(13)]
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\left.\begin{array}{l}
\psi_{11}^{[2,1]} = \mathcal{P}_{11}^{[2,1]}\phi = \frac{1}{6}[2uds-dsu-sud+2dus-usd-sdu] \\
\psi_{21}^{[2,1]} = \mathcal{P}_{21}^{[2,1]}\phi = \frac{\sqrt{3}}{6}[dsu-sud+usd-sdu]
\end{array}\right\} \Sigma^0\text{味道波函数} \\
\left.\begin{array}{l}
\psi_{12}^{[2,1]} = \mathcal{P}_{12}^{[2,1]}\phi = \frac{\sqrt{3}}{6}[-dsu+sud+usd-sdu] \\
\psi_{22}^{[2,1]} = \mathcal{P}_{22}^{[2,1]}\phi = \frac{1}{6}[2uds-dsu-sud-2dus+usd+sdu]
\end{array}\right\} \Lambda\text{味道波函数}
\end{cases}
$$

附：重子八重态和十重态的自旋波函数和味道波函数

$$\chi^{\rho}_{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow)$$

$$\chi^{\lambda}_{1/2} = -\frac{1}{\sqrt{6}}(\uparrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\uparrow - 2\uparrow\uparrow\downarrow)$$

$$\chi^{\rho}_{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow)$$

$$\chi^{\lambda}_{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\uparrow\downarrow\downarrow + \downarrow\uparrow\downarrow - 2\downarrow\downarrow\uparrow)$$

$$\chi^{s}_{3/2} = \uparrow\uparrow\uparrow$$

$$\chi^{s}_{1/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\uparrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\uparrow)$$

$$\chi^{s}_{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\downarrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\downarrow)$$

$$\chi^{s}_{-3/2} = \downarrow\downarrow\downarrow$$

Baryon	$\phi^{\lambda} = \begin{array}{\|c\|c\|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline\end{array}$	$\phi^{\rho} = \begin{array}{\|c\|c\|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline\end{array}$	Weyl tableau
p	$-\frac{1}{\sqrt{6}}(udu + duu - 2uud)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(udu - duu)$	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline u & u \\ \hline d & \\ \hline\end{array}$
n	$\frac{1}{\sqrt{6}}(udd + dud - 2ddu)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(udd - dud)$	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline u & d \\ \hline d & \\ \hline\end{array}$
Σ^+	$\frac{1}{\sqrt{6}}(usu + suu - 2uus)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}(usu - suu)$	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline u & u \\ \hline s & \\ \hline\end{array}$
Σ^0	$-\frac{1}{\sqrt{12}}(2uds + 2dus - sdu - sud - usd - dsu)$	$-\frac{1}{2}(usd + dsu - sdu - sud)$	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline u & d \\ \hline s & \\ \hline\end{array}$
Σ^-	$\frac{1}{\sqrt{6}}(dsd + sdd - 2dds)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}(dsd - sdd)$	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline d & d \\ \hline s & \\ \hline\end{array}$
Λ^0	$\frac{1}{2}(sud - sdu + usd - dsu)$	$\frac{1}{\sqrt{12}}(2uds - 2dus + sdu - sud + usd - dsu)$	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline u & s \\ \hline d & \\ \hline\end{array}$
Ξ^0	$-\frac{1}{\sqrt{6}}(uss + sus - 2ssu)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}(uss - sus)$	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline u & s \\ \hline s & \\ \hline\end{array}$
Ξ^-	$-\frac{1}{\sqrt{6}}(dss + sds - 2ssd)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}(dss - sds)$	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline d & s \\ \hline s & \\ \hline\end{array}$

Baryon	ϕ^S	Weyl tableau
Δ^{++}	uuu	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline u & u & u \\ \hline\end{array}$
Δ^+	$\frac{1}{\sqrt{3}}(uud + udu + duu)$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline u & u & d \\ \hline\end{array}$
Δ^0	$\frac{1}{\sqrt{3}}(udd + dud + ddu)$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline u & d & d \\ \hline\end{array}$
Δ^-	ddd	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline d & d & d \\ \hline\end{array}$
Σ^{*+}	$\frac{1}{\sqrt{3}}(uus + usu + suu)$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline u & u & s \\ \hline\end{array}$
Σ^{*0}	$\frac{1}{\sqrt{6}}(uds + dus + usd + sud + sdu + dsu)$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline u & d & s \\ \hline\end{array}$
Σ^{*-}	$\frac{1}{\sqrt{3}}(sdd + dsd + dds)$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline d & d & s \\ \hline\end{array}$
Ξ^{*0}	$\frac{1}{\sqrt{3}}(uss + sus + ssu)$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline u & s & s \\ \hline\end{array}$
Ξ^{*-}	$\frac{1}{\sqrt{3}}(dss + sds + ssd)$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline d & s & s \\ \hline\end{array}$
Ω^-	sss	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline s & s & s \\ \hline\end{array}$

§5 置换群不可约表示的内积和外积

1. 置换群不可约表示的直乘分解

- 置换群不可约表示的直乘称为内积；直乘分解的 CG 级数可以按特征标方法计算

- 考虑到置换群的不可约表示是实表示，特征标是实数，有

$$\chi^{[\lambda]}(R)\chi^{[\mu]}(R)=\sum_{\nu}a_{\lambda\mu\nu}\chi^{[\nu]}(R)$$

$$a_{\lambda\mu\nu}=\frac{1}{n!}\sum_{R\in S_n}\chi^{[\lambda]}(R)\chi^{[\mu]}(R)\chi^{[\nu]}(R)$$

容易看出 $a_{\lambda\mu\nu}$ 对三个指标完全对称

- 一行的杨图对应恒等表示；一列的杨图对应反对称表示，每个元素在该表示中的表示矩阵即为该元素的置换宇称

- 可以证明，互相对偶的杨图对应的表示维数相等，每个类在这两个表示中的特征标只相差类中元素的置换宇称
- 任一杨图对应的表示与反对称表示的直乘等价于该杨图的对偶杨图对应的表示

$$[\lambda]\otimes[1^n]\simeq[\tilde{\lambda}]$$

- 考虑到 $a_{\lambda\mu\nu}$ 对三个指标对称，可得

$$[n]\otimes[\lambda]=[\lambda],\quad [\lambda]\otimes[\tilde{\mu}]\simeq[\tilde{\lambda}]\otimes[\mu]$$

$$[\lambda]\otimes[\mu]\simeq[\tilde{\lambda}]\otimes[\tilde{\mu}]\simeq[\mu]\otimes[\lambda]$$

- 在 $[\lambda]\otimes[\mu]$ 的分解中，出现恒等表示的充要条件是 $[\lambda]\simeq[\mu]$，出现反对称表示的充要条件是 $[\lambda]\simeq[\tilde{\mu}]$，且在此条件下，恒等表示或反对称表示只出现一次
- 例：S_3 群不可约表示直乘分解的CG级数为

$$[3]\otimes[3]\simeq[1^3]\otimes[1^3]\simeq[3],\quad [3]\otimes[1^3]\simeq[1^3]$$

$$[3]\otimes[2,1]\simeq[1^3]\otimes[2,1]\simeq[2,1]$$

$$[2,1]\otimes[2,1]\simeq[3]\oplus[2,1]\oplus[1^3]$$

附：S_3群的CG系数

$[f']p'[f'']p''$ \ $[f]p$	$[3]1$
$[3]1\ [3]1$	1

	$[3]1$
$[1^3]3\ [1^3]3$	1

	$[1^3]3$
$[3]1\ [1^3]3$	1

	$[21]1$
$[3]1\ [21]1$	1

	$[21]2$
$[3]1\ [21]2$	1

	$[21]1$
$[1^3]3\ [21]2$	-1

	$[21]2$
$[1^3]3\ [21]1$	1

	$[3]1$	$[21]1$	$[21]2$	$[1^3]3$
$[21]2[21]2$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
$[21]2[21]1$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$[21]1[21]2$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
$[21]1[21]1$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0

基态重子的自旋－味道波函数：

八重态：$\psi=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\chi^{\rho}\phi^{\rho}+\chi^{\lambda}\phi^{\lambda}\right)$

十重态：$\Psi=\chi^{s}\phi^{s}$

2. 置换群不可约表示的外积

- 在 $n+m$ 个客体的置换群 S_{n+m} 中，前 n 个客体的置换群记为 S_n，后 m 个客体的置换群记为 S_m
- 两子群 S_n 和 S_m 只有恒元这一个公共元素；分属这两子群的元素涉及不同的客体，可互相对易
- 两子群 $S_n \otimes S_m$ 的直乘是群 S_{n+m} 的子群，子群指数 N 为

$$N = g/h = \begin{pmatrix} n+m \\ n \end{pmatrix} = \frac{(n+m)!}{n!m!}$$

- 子群的左陪集记为 $T_\alpha(S_n \otimes S_m)$，其中置换 $T_a \in S_{n+m}$ 把前 n 个客体移到 $n+m$ 个位置中的 n 个新位置
- 置换群 S_{n+m} 的群代数记为 $\mathcal{L}$，维数为 $(n+m)!$；子群的群代数记为 $\mathcal{L}^{nm}$，维数为 $n!m!$；子群的左陪集对应的子空间为 $T_a\mathcal{L}^{nm}$，于是

$$\mathcal{L} = \bigoplus_{a=1}^{N} T_a \mathcal{L}^{nm}, \quad T_1 = E$$

- 设杨图 $[\lambda]$，$[\mu]$ 和 $[\omega]$ 分别是 n 格，m 格和 $n+m$ 格的，它们分别标记 S_n 群，S_m 群和 S_{n+m} 群的不可约表示
- 群 S_{n+m} 的群代数 $\mathcal{L}$ 中的原始幂等元记为 $e^{[\omega]}$，它生成的最小左理想是 $\mathcal{L}^{[\omega]}=\mathcal{L}e^{[\omega]}$，对应的不可约表示 $D^{[\omega]}(S_{n+m})\equiv[\omega]$ 维数为 $d_{[\omega]}$
- 直乘群 $S_n\otimes S_m$ 的群代数 $\mathcal{L}^{nm}$ 中的原始幂等元记为 $e^{[\lambda][\mu]}$，它生成的关于 $\mathcal{L}^{nm}$ 的最小左理想是 $\mathcal{L}^{[\lambda][\mu]}=\mathcal{L}^{nm}e^{[\lambda][\mu]}$，对应直乘群 $S_n\otimes S_m$ 的不可约表示为 $D^{[\lambda]}(S_n)\otimes D^{[\mu]}(S_m)\equiv D^{[\lambda]\otimes[\mu]}(S_n\otimes S_m)$，维数是 $d_{[\lambda]}d_{[\mu]}$
- 对于 S_{n+m} 群的群代数 $\mathcal{L}$，$e^{[\lambda][\mu]}$ 是幂等元，但一般不是原始幂等元，$\mathcal{L}^{[\lambda][\mu]}$ 是子代数，但不是左理想
- 用 $\mathcal{L}$ 左乘幂等元 $e^{[\lambda][\mu]}$，把子代数 $\mathcal{L}^{[\lambda][\mu]}$ 扩充成 $\mathcal{L}$ 的左理想，对应关于群 S_{n+m} 的诱导表示，记为 $D^{[\lambda]\odot[\mu]}(S_{n+m})\equiv[\lambda]\odot[\mu]$

$$\mathcal{L}_{\lambda\mu}\equiv\mathcal{L}e^{[\lambda][\mu]}=\bigoplus_{a=1}^{N}T_a\mathcal{L}^{nm}e^{[\lambda][\mu]}=\bigoplus_{a=1}^{N}T_a\mathcal{L}^{[\lambda][\mu]}$$

求和中的每一项 $T_a\mathcal{L}^{[\lambda][\mu]}$ 都是 $d_{[\lambda]}d_{[\mu]}$ 维的，且不同项不包含公共矢量，故诱导表示的维数为

$$d_{[\lambda]\odot[\mu]}=\frac{(n+m)!}{n!m!}d_{[\lambda]}d_{[\mu]}$$

- 子群 $S_n \otimes S_m$ 的不可约表示 $D^{[\lambda]\otimes[\mu]}(S_n \otimes S_m)$，关于群 S_{n+m} 的诱导表示 $[\lambda] \odot [\mu]$，称为两表示的外积

- 左理想 $\mathcal{L}_{\lambda\mu}$ 一般不是 $\mathcal{L}$ 的最小左理想，对应的诱导表示 $[\lambda] \odot [\mu]$ 一般是群 S_{n+m} 的可约表示，可以按群 S_{n+m} 的不可约表示 $[\omega]$ 分解

$$[\lambda]\odot[\mu] \simeq \bigoplus_{[\omega]} a_{\lambda\mu}^{\omega}[\omega]$$

表示的重数可由特征标公式计算

$$a_{\lambda\mu}^{\omega} = \frac{1}{(n+m)!}\sum_{R\in S_{n+m}} \chi^{[\lambda]\odot[\mu]}(R)\chi^{[\omega]}(R)$$

维数关系

$$\frac{(n+m)!}{n!m!} d_{[\lambda]} d_{[\mu]} = \sum_{[\omega]} a_{\lambda\mu}^{\omega} d_{[\omega]}$$

- 外积应用举例：两孤立原子，分别含 n 和 m 个电子，在每个原子内部，电子可交换，故两原子中的电子的状态波函数分别按 S_n 和 S_m 群的不可约表示分类，当两原子靠近形成分子时，所有 $n+m$ 个电子都可交换，分子中电子的状态波函数按 S_{n+m} 群的不可约表示分类

例：子群 $S_2\otimes S_1$ 的最小左理想扩充为原群 S_3 的左理想

- $S_3=\{E,(123),(132),(12),(13),(23)\}$

  $S_2=\{E,(12)\}$

  $S_2\otimes S_1=\{E,(12)\}\ \subset\ S_3$

- S_3 的群代数记为 $\mathcal{L}=\{E,(123),(132),(12),(13),(23)\}$

  $S_2\otimes S_1$ 的群代数记为 $\mathcal{L}^{21}=\{E,(12)\}$

- S_3 的群代数 $\mathcal{L}$ 分解为 $S_2\otimes S_1$ 的群代数 $\mathcal{L}^{21}$ 及 $S_2\otimes S_1$ 的左陪集对应的子空间 $T_a\mathcal{L}^{21}$ 的直和

$$\begin{array}{ccccc}
\underline{E\{E,(12)\}} & \oplus & \underline{(123)\{E,(12)\}} & \oplus & \underline{(132)\{E,(12)\}} \\
\| & & \| & & \| \\
\{E,(12)\} & & \{(123),(13)\} & & \{(132),(23)\} \\
\mathcal{L}^{21} & & T_2\mathcal{L}^{21} & & T_3\mathcal{L}^{21}
\end{array}
\qquad
\begin{cases} T_1=E \\ T_2=(123) \\ T_3=(132) \end{cases}$$

即 $\qquad \mathcal{L}=T_1\mathcal{L}^{21}\oplus T_2\mathcal{L}^{21}\oplus T_3\mathcal{L}^{21}$

- $S_2 \otimes S_1$ 的群代数 $\mathcal{L}^{21}$ 中的原始幂等元 $e^{[2][1]} = [E+(12)]/2$，它生成的关于 $\mathcal{L}^{21}$ 的最小左理想 $\mathcal{L}^{[2][1]} = \mathcal{L}^{21} e^{[2][1]} = \{[E+(12)]/2\}$，对应 $S_2 \otimes S_1$ 的不可约表示为 $D^{[2]}(S_2) \otimes D^{[1]}(S_1) \equiv D^{[2]\otimes[1]}(S_2 \otimes S_1)$，维数是 $d_{[2]}d_{[1]} = 1$

- 对 S_3 的群代数 $\mathcal{L}$，$e^{[2][1]}$ 是幂等元，但不是原始幂等元，$\mathcal{L}^{[2][1]}$ 是子代数，但不是左理想

- 用 $\mathcal{L}$ 左乘幂等元 $e^{[2][1]}$，将 $\mathcal{L}^{[2][1]}$ 扩充成 $\mathcal{L}$ 的左理想 $\mathcal{L}_{21}$

$$\mathcal{L}_{21} \equiv \mathcal{L}e^{[2][1]} = \bigoplus_{a=1}^{3} T_a \mathcal{L}^{21} e^{[2][1]} = \bigoplus_{a=1}^{3} T_a \mathcal{L}^{[2][1]}$$

$$= \left\{\frac{E+(12)}{2}\right\} \oplus (123)\left\{\frac{E+(12)}{2}\right\} \oplus (132)\left\{\frac{E+(12)}{2}\right\}$$

$$= \left\{\frac{E+(12)}{2}\right\} \oplus \left\{\frac{(123)+(13)}{2}\right\} \oplus \left\{\frac{(132)+(23)}{2}\right\}$$

- $\mathcal{L}_{21}$ 荷载的表示，称为 $S_2 \otimes S_1$ 的不可约表示 $D^{[2]\otimes[1]}(S_2 \otimes S_1)$ 关于 S_3 的诱导表示，也称为 S_2 的不可约表示 [2] 与 S_1 的不可约表示 [1] 的外积表示，记为 $[2] \odot [1]$，它是可约表示，维数为 $d_{[2]\odot[1]} = \frac{(3)!}{2!1!} d_{[2]} d_{[1]} = 3$

- 置换群两不可约表示外积约化的图形方法：**Littlewood-Richardson 规则**

对表示 $[\lambda]\odot[\mu]$，任取其中一个杨图，通常取格数较多的杨图，如 $[\lambda]$，作为基础，将另一个杨图 $[\mu]$ 的各行格子分别填以行数，即第 j 行的格子填以数 j

自第一行开始，自上而下逐行把杨图 $[\mu]$ 的格子补到杨图 $[\lambda]$ 上，每补完一行格子，都要求满足如下条件：

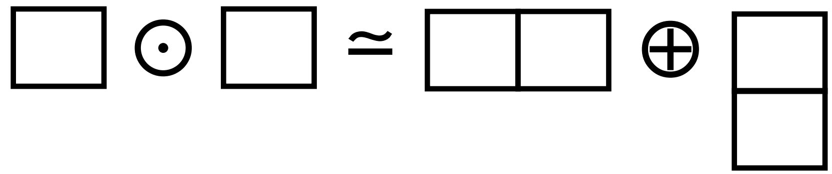
① 每行补完后的杨图是正则杨图

② 填相同数的格子不能补在同一列

③ 自第一行开始，逐行地自右向左读杨图中补上的格子，在读的过程中的每一步，始终保持填数大的格子数目不大于填数小的格子数目

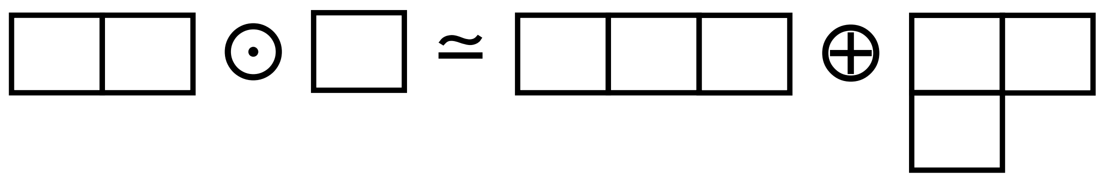
这样补得的全部可能的杨图 $[\omega]$，就是在表示外积 $[\lambda]\odot[\mu]$ 的约化中可能出现的群 S_{n+m} 的不可约表示，同一杨图 $[\omega]$ 出现的次数，就是该表示在约化中出现的重数 $a_{\lambda\mu}^{\omega}$

- 例：[1] ⊙ [1] 的约化



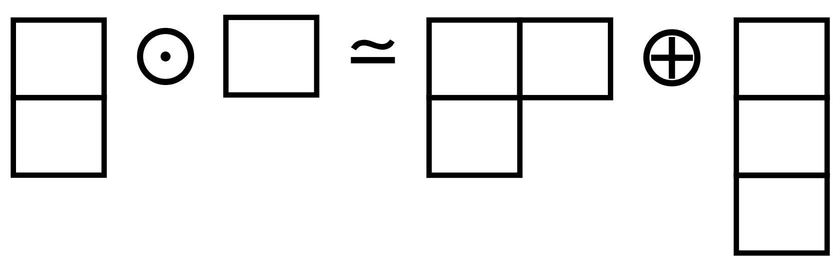
维数验证：$2 \times 1 \times 1 = 1 + 1$

- 例：[2] ⊙ [1] 的约化



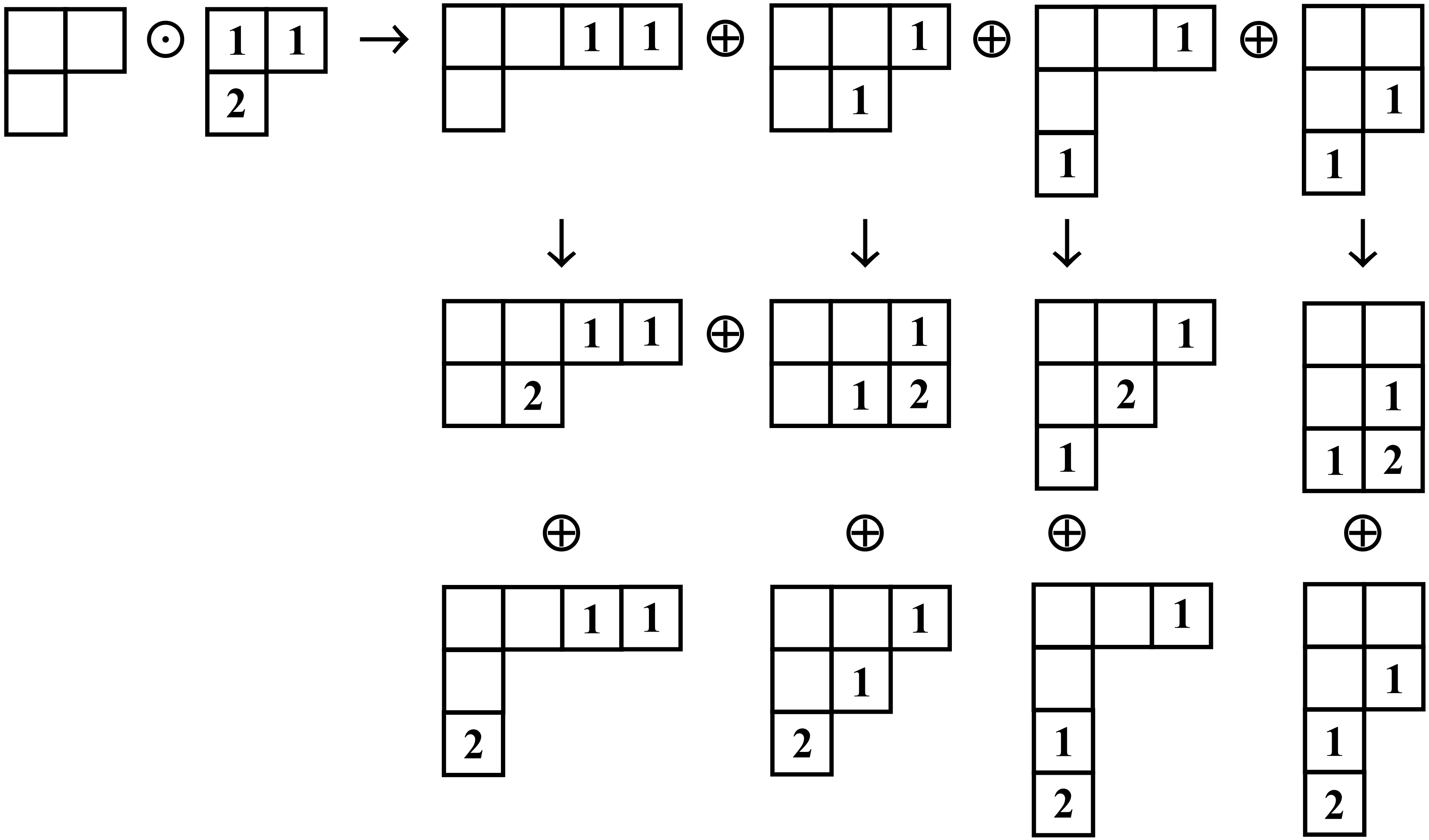
维数验证：$3 \times 1 \times 1 = 1 + 2$

- 例：[1^2] ⊙ [1] 的约化



维数验证：$3 \times 1 \times 1 = 2 + 1$

- 例：$[2,1] \odot [2,1]$ 的约化



维数验证：$20 \times 2 \times 2 = 9 + 10 + 5 + 16 + 16 + 10 + 5 + 9$

3. 置换群 S_{n+m} 的分导表示

- 置换群 S_{n+m} 的不可约表示 $[\omega]$，关于子群 $S_n \otimes S_m$ 的分导表示，按子群的不可约表示 $[\lambda]\otimes[\mu]$ 约化

$$D^{[\omega]}(S_n \otimes S_m) \simeq \bigoplus_{\lambda\mu} b^{\omega}_{\lambda\mu} D^{[\lambda]\otimes[\mu]}(S_n \otimes S_m)$$

$$b^{\omega}_{\lambda\mu} = \frac{1}{n!m!} \sum_{P\in S_n \otimes S_n} \chi^{[\lambda]\otimes[\mu]}(P)\chi^{[\omega]}(P)$$

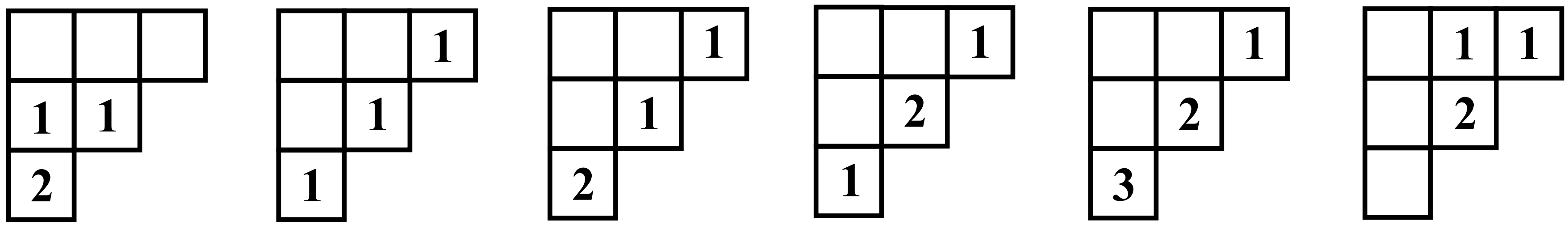
维数验证：
$$d_{[\omega]} = \sum_{\lambda\mu} b^{\omega}_{\lambda\mu} d_{[\lambda]} d_{[\mu]}$$

- Frobenius 定理：有限群 G 的不可约表示关于子群 H 的分导表示中包含子群 H 的不可约表示的重数，等于子群 H 的不可约表示关于群 G 的诱导表示中包含群 G 的不可约表示的重数

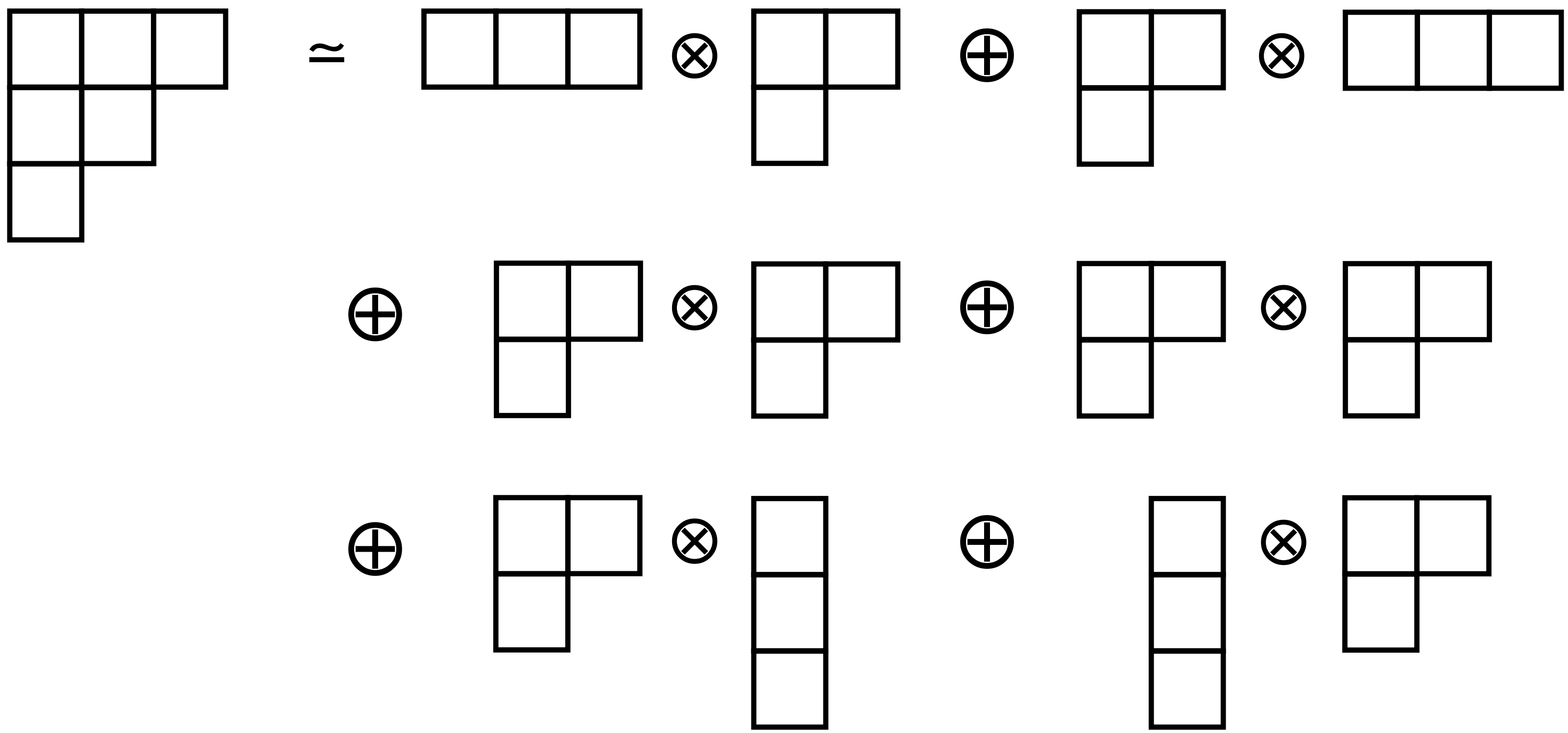
- 由 Frobenius 定理，$b^{\omega}_{\lambda\mu} = a^{\omega}_{\lambda\mu}$

- 逆向运用 Littlewood-Richardson 规则，可求出分导表示的约化

- 例：S_6 群的不可约表示 $[3,2,1]$，作为子群 $S_3\otimes S_3$ 的分导表示，按子群不可约表示的约化



即



维数验证：$16 = 1\times2 + 2\times1 + 2\times2\times2 + 2\times1 + 1\times2$

本章作业

物理学中的群论（第二版），马中骐，科学出版社，2006：

第247页：第1题(2)(5)小题，第3题

第248页：第7题(由最小杨表出发得到标准表示即可)

第11题，第12题，第13题

或：

物理学中的群论—有限群篇（第三版），马中骐，科学出版社，2015：

第32页：第6题(2)(5)小题

第108页：第1题，第8题(由最小杨表出发得到标准表示即可)

第109页：第10题，第11题，第12题