A.Zee.note.1.nb

initial 1

In[1]:=
```
If[
 (* if $ScriptCommandLine==={}, the environment is frontend*)
 SameQ[$ScriptCommandLine, {}],
 (*if execute in the frontend mode, refresh the title name*)
 CompoundExpression[
  (*文件绝对路径*)
  filename = NotebookFileName[],
  (*单元对象,第一个单元*)
  cell`title = First[Cells[],"please Open the frontend"],
  (*刷新第一个单元的名字*)
  NotebookWrite[cell`title, Cell[Last[FileNameSplit[filename]], "Title"]],
  (*if execute in commandline mode, print a ready message*)
  git`root`dir = First[StringCases[NotebookDirectory[], StartOfString ~~
  ((WordCharacter | ":" | "\\") ..) ~~ "octet.formfactor"],
  "please adjust the string pattern"]
  (*add the base git root dir*)
  ],
 CompoundExpression[
  Print["Ready to execute this script"]
  ]
 ]
```

Out[1]= please adjust the string pattern

********************************** notebook 备忘录

记录 A.Zee 书上的公式

print

打印笔记本

In[2]:=
```
Export[NotebookDirectory[] <> FileBaseName[filename] <> ".pdf", EvaluationNotebook[]]
```
导出　当前笔记本的目录　文件基本名　运行的笔记本

Out[ ]= C:\note\qft\A.Zee.note.1.pdf

笔记本字体设置

In[ ]:=
```
AbsoluteOptions[EvaluationNotebook[], StyleDefinitions];
```
绝对设置　运行的笔记本　样式定义

```
In[•]:= style`my = Notebook[{
                   笔记本
          Cell[StyleData[StyleDefinitions →
          单元  样式数据    样式定义
              FrontEnd`FileName[{"Book"}, "Textbook.nb", CharacterEncoding → "UTF-8"]]],
                                                        字符编码
          Cell[StyleData["Section"], FontFamily → "Noto Sans CJK SC Bold",
          单元  样式数据               字体系列                    粗体
            FontSize → 16, FontWeight → "Bold", FontSlant → "Plain",
            字体大小        字体粗细       粗体    字体倾斜       普通字体
            FontVariations → {"StrikeThrough" → False, "Underline" → False}],
            字体变化                             假                  假
          Cell[StyleData["Subsection"], FontFamily → "Noto Sans CJK SC Black",
          单元  样式数据                  字体系列                    黑色
            FontSize → 13, FontWeight → "Heavy", FontSlant → "Plain",
            字体大小        字体粗细                字体倾斜       普通字体
            FontVariations → {"StrikeThrough" → False, "Underline" → False}],
            字体变化                             假                  假
          Cell[StyleData["Subsubsection"], FontFamily → "Noto Sans CJK SC Bold",
          单元  样式数据                     字体系列                    粗体
            FontSize → 11, FontWeight → "Bold", FontSlant → "Plain",
            字体大小        字体粗细       粗体    字体倾斜       普通字体
            FontVariations → {"StrikeThrough" → False, "Underline" → False}],
            字体变化                             假                  假
          Cell[StyleData["Text"], FontFamily → "Noto Sans CJK SC Regular",
          单元  样式数据   文本     字体系列
            FontSize → 12, FontWeight → "Plain", FontSlant → "Plain",
            字体大小        字体粗细       普通字体 字体倾斜       普通字体
            FontVariations → {"StrikeThrough" → False, "Underline" → False}]
            字体变化                             假                  假
         },
         Visible → False,
         可见否     假
         StyleDefinitions → "PrivateStylesheetFormatting.nb"
         样式定义
        ];
       SetOptions[EvaluationNotebook[], StyleDefinitions → style`my];
       设置选项    运行的笔记本            样式定义
```

1.1 谁需要这本书

1.2 量子力学的路径积分形式

将时间T分成长为$\delta t = T/N$的N段，上面的表达式可以写成

$$\langle qF|\ \mathrm{Exp}[-I\,H\,T]\ |qI\rangle = \langle qf|\ \mathrm{Exp}[-I\,H\,\delta t]\ \mathrm{Exp}[-I\,H\,\delta t]\ \ldots \mathrm{Exp}[-I\,H\,\delta t]\ |qI\rangle \tag{0.1}$$

通过高斯积分，最后得到

$$\langle qF|\ \mathrm{Exp}[-I\,H\,T]\ |qI\rangle = \int \mathbb{D}q[t]\ \mathrm{Exp}\left[I * \int_0^T \mathbb{d}t\, L[\dot{q}, q]\right] = \int \mathbb{D}q[t]\ \mathrm{Exp}\left[I * \int_0^T \mathbb{d}t\, \frac{1}{2} m * \dot{q}^2 - V[q]\right] \tag{0.2}$$

$$S = \int_0^T \mathbb{d}t\, L[\dot{q}, q] \cdot \text{被称为作用量 } S[q]\text{，它是函数 } q[t] \text{ 的泛函。} \tag{0.3}$$

一般来说，比起粒子的位置qI和qF，我们更喜欢确定粒子的初始态I和最终态F。

$$\langle F|\ \mathrm{Exp}[-I\,H\,T]\ |I\rangle = \int \mathbb{d}qF \int \mathbb{d}qI\ \langle F|qF\rangle\ \langle qF|\ \mathrm{Exp}[-I\,H\,T]\ |qI\rangle\ \langle qI|I\rangle \tag{0.4}$$

$$= \int dqF \int dqI\, \Psi F[qF]^* \langle qF |\, Exp[-I\, H\, T]\, | qI \rangle\, \Psi I[qI] \tag{0.5}$$

$$= \int dqF \int dqI\, \Psi F[qF]^* * \Psi I[qI] * \int \mathbb{D}q[t]\, Exp\left[I * \int_0^T dt\, L[\dot{q}, q]\right] \tag{0.6}$$

为方便起见，将振幅⟨0 | Exp[$-I\,H\,T$] | 0⟩记作Z。

****

想知道⟨q_F | Exp[$-I\,H\,T$] | q_I⟩,只需要对所有满足 $q[0] = q_I$ 和 $q[T] = q_F$ 的路径$q[t]$积分即可

****

通过威克旋转，做替换 $t \to -I * t$ 使积分变成

$$Z = \int \mathbb{D}\, q[t]\, Exp\left[-\int_0^T dt\, \frac{1}{2} m * \dot{q}^2 + V[q]\right] \tag{0.7}$$

这一表达式被称为欧几里得路径积分，可以看出收敛性。

附录1

$$\delta[x] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} * Exp[I\, k\, x] \tag{0.8}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx * \delta[f[x]] * s[x] = \sum_i \frac{s[xi]}{Abs[f'[xi]]}\text{, Xi 是f}[x]\text{ 的零点。} \tag{0.9}$$

****

还有一个非常有用的恒等式（$\varepsilon \to 0$）

$$\frac{1}{x + I\,\varepsilon} = \mathcal{P}\left[\frac{1}{x}\right] - I\,\pi\,\delta[x] \tag{0.10}$$

$$\frac{1}{x + I\,\varepsilon} = \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2} - I\,\frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \tag{0.11}$$

$$\frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}\text{, 是一个 }\delta\text{ 函数，从 }-\infty\text{到 }+\infty\text{的积分值为 }\pi\text{，因此} \tag{0.12}$$

$$\delta[x] = \frac{1}{\pi} * \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \tag{0.13}$$

同时，可定义主值积分

$$\int dx\, \mathcal{P}\left[\frac{1}{x}\right] * f[x] = \lim_{\varepsilon \to 0} \int dx * \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2} * f[x] \tag{0.14}$$

****

附录2

高斯积分 $G \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, Exp\left[-\frac{1}{2} x^2\right]$。将积分平方，转到极坐标

$$G^2 = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, Exp[-\omega] = 2\pi\text{, so} \tag{0.15}$$

****

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, Exp\left[-\frac{1}{2} x^2\right] = \sqrt{2\pi} \tag{0.16}$$

****

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, Exp\left[-\frac{1}{2} a\, x^2\right] = \left(\frac{2\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{0.17}$$

****

对上式反复求导 $-2(\mathrm{d}/\mathrm{d}a)$,

$$\left\langle x^{2n}\right\rangle \equiv \frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\,\mathrm{Exp}\left[-\frac{1}{2}x^2\right]x^{2n}}{\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\,\mathrm{Exp}\left[-\frac{1}{2}x^2\right]} = \frac{1}{a^n}(2n-1)(2n-3)\ldots 5*3*1 \tag{0.18}$$

2n 个点两两配对，第一个可以与剩下的(2n-1)个配对，第二个可以与剩下的(2n-3) 个配对。

****

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\,\mathrm{Exp}\left[-\frac{1}{2}a x^2+J x\right]=\left(\frac{2\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}}*\mathrm{Exp}\left[\frac{J^2}{2a}\right] \tag{0.19}$$

配平方

$$-a x^2/2+J x=-\frac{a}{2}\left(x^2-2Jx/a\right)=-\frac{a}{2}\left(x-\frac{J}{a}\right)^2+\frac{J^2}{2a} \tag{0.20}$$

另一个重要的变式是将上面的J改为IJ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\,\mathrm{Exp}\left[-\frac{1}{2}a x^2+IJx\right]=\left(\frac{2\pi}{a}\right)^{1/2}\mathrm{Exp}\left[-\frac{J^2}{2a}\right] \tag{0.21}$$

****

进一步 $a\to -Ia$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\,\mathrm{Exp}\left[I\left(\frac{1}{2}a x^2+Jx\right)\right]=\left(\frac{2\pi I}{a}\right)^{1/2}\mathrm{Exp}\left[-\frac{IJ^2}{2a}\right] \tag{0.22}$$

****

现在把a推广为一个 $N\times N$ 的是对称矩阵 A_{ij},并把x替换成矢量 x_i

$$\int_i \mathrm{d}x_i\,\mathrm{Exp}\left[\frac{-1}{2}x.A.x+J.x\right]=\left(\frac{(2\pi)^N}{\mathrm{Det}[A]}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{Exp}\left[\frac{1}{2}J.A^{-1}.J\right] \tag{0.23}$$

proof,

$$A=O^{-1}.D.O, \tag{0.24}$$

$$x=O^{-1}.y, \tag{0.25}$$

$$x^{\mathsf{T}}=y^{\mathsf{T}}.O^{-1\mathsf{T}}=y^{\mathsf{T}}.O, \tag{0.26}$$

$$O.x=y \tag{0.27}$$

$$y^{\mathsf{T}}=x^{\mathsf{T}}.O^{-1} \tag{0.28}$$

D is diagonal,

O is orthogonal transformation

$$\frac{-1}{2}x.D.x+J.x==\frac{-1}{2}x.D.x+J.x==\frac{-1}{2}(x.D.x-2J.x) \tag{0.29}$$

$$x.D.x-2J.x=x.D.x-J.x-x^{\mathsf{T}}.J \tag{0.30}$$

$$==y.D.y-J.O^{-1}.y-y^{\mathsf{T}}.O.J \tag{0.31}$$

$$==y.D.y-J.O^{\mathsf{T}}.y-y^{\mathsf{T}}.O.J \tag{0.32}$$

$$\left(y^{\mathsf{T}}-J.O^{\mathsf{T}}.D^{-1}\right).D.\left(y-D^{-1}.O.J\right)=y^{\mathsf{T}}.D.y-y^{\mathsf{T}}.D.D^{-1}.O.J-J.O^{\mathsf{T}}.D^{-1}.D.y+J.O^{\mathsf{T}}.D^{-1}.O.J \tag{0.33}$$

$$=y^{\mathsf{T}}.D.y-y^{\mathsf{T}}.O.J-J.O^{\mathsf{T}}.y+J.O^{\mathsf{T}}.D^{-1}.O.J \tag{0.34}$$

*********************************so,

$$\frac{-1}{2}x.D.x+J.x == \left(y^{\intercal}-J.O^{\intercal}.D^{-1}\right).D.\left(y-D^{-1}.O.J\right)-J.O^{\intercal}.D^{-1}.O.J \quad (0.35)$$

$$== \left(y^{\intercal}-J.O^{\intercal}.D^{-1}\right).D.\left(y-D^{-1}.O.J\right)-J.A^{-1}.J \quad (0.36)$$

Det[D] = Det[A]

****

after $A \to -I A$, $J \to I J$,

$\prod_i \int_i dI\, x_i$简写为Pint_i

$$\prod_i \int_i dI\, x_i \,\text{Exp}\left[\frac{I}{2}(x.A.x+J.x)\right] = \left(\frac{(2\pi I)^N}{\text{Det}[A]}\right)^{\frac{1}{2}} \text{Exp}\left[\frac{-I}{2}J.A^{-1}.J\right] \quad (0.37)$$

****

$\left\langle x^{2n}\right\rangle \equiv \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\text{Exp}\left[-\frac{1}{2}x^2\right]x^{2n}}{\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\text{Exp}\left[-\frac{1}{2}x^2\right]} = \frac{1}{a^n}(2n-1)(2n-3)\ldots5*3*1$的推广同样可以得到，

对$\text{Pint}_i\left[\text{Exp}\left[\frac{I}{2}(x.A.x+J.x)\right]\right]$用$J_i, J_j, \ldots J_k$和$J_l$求导$p$次，并最后令$J=0$.

例如，对$p=1$，式（0.37）的被积函数变成$\text{Exp}\left[\frac{-1}{2}x.A.x\right]x_i$.由于是$x_i$的奇函数，积分值为0.

对于$p=2$，被积函数变成$\text{Exp}\left[\frac{-1}{2}x.A.x(x_i\, x_j)\right]$，对式子右方求导消源得到$A_{ij}^{-1}$.

整理下表达式，消掉Det[A]，最后结果为

$$\left\langle x_i\, x_j\right\rangle = \frac{\prod_{i=1}^N \int_i dI\, x_i \,\text{Exp}\left[-\frac{1}{2}x.A.x\right]x_i\, x_j}{\prod_{i=1}^N \int_i dI\, x_i\,\text{Exp}\left[-\frac{1}{2}x.A.x\right]} = A_{ij}^{-1}$$

这个结论很容易推广，当指标$i, j, \ldots, k, l$一共有奇数个时，$\langle x_i\, x_j \ldots x_k\, x_l\rangle$为0.

当指标$i, j, \ldots, k, l$一共有偶数个时，我们有

$$\left\langle x_i\, x_j \ldots x_k\, x_l\right\rangle = \sum_{\text{Wick}} \left(A^{-1}\right)_{ab} \cdots \left(A^{-1}\right)_{cd} \quad (0.38)$$

其中我们定义

$$\left\langle x_i\, x_j \ldots x_k\, x_l\right\rangle = \frac{\prod_{i=1}^N \int_i dI\, x_i\,\text{Exp}\left[-\frac{1}{2}x.A.x\right]x_i\, x_j \ldots x_k\, x_l}{\prod_{i=1}^N \int_i dI\, x_i\,\text{Exp}\left[-\frac{1}{2}x.A.x\right]} \quad (0.39)$$

式子等号右端的求和，包括了所有的威克收缩方式。

举个例子：

$$\left\langle x_i\, x_j\, x_k\, x_l\right\rangle = \left(A^{-1}\right)_{ij}\left(A^{-1}\right)_{kl} + \left(A^{-1}\right)_{il}\left(A^{-1}\right)_{jk} + \left(A^{-1}\right)_{ik}\left(A^{-1}\right)_{jl}$$

其中A, A^{-1}是对称矩阵。总之就是指标两两配对.

由于$\langle x_i\, x_j\rangle = \left(A^{-1}\right)_{ij}$，也可以把（I.2.35）右端改成$\langle x_i\, x_j\rangle$乘积的形式，例如

$$\left\langle x_i\, x_j\, x_k\, x_l\right\rangle = \left\langle x_i\, x_j\right\rangle\left\langle x_k\, x_l\right\rangle + \left\langle x_i\, x_l\right\rangle\left\langle x_j\, x_k\right\rangle + \left\langle x_i\, x_k\right\rangle\left\langle x_j\, x_l\right\rangle$$

附录3

p28

最速下降近似法

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dI\, q\,\text{Exp}\left[\frac{-1}{\hbar}f[q]\right]$$

当$\hbar$很小时，积分值主要由$f[q]$的最小值决定。将其展开为$f[q] = f[a] + \frac{1}{2} f''[a] (q - a)^2 + O[(q - a)^3]$

并应用$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \mathrm{Exp}\left[-\frac{1}{2} a x^2\right] = \left(\frac{2\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$，可得

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dq \, \mathrm{Exp}\left[\frac{-1}{\hbar}\left(f[a] + \frac{1}{2} f''[a] (q-a)^2\right)\right] == \mathrm{Exp}\left[\frac{-1}{\hbar} f[a]\right] \int_{-\infty}^{+\infty} dq \, \mathrm{Exp}\left[-\frac{1}{2} * \frac{f''[a]}{\hbar} (q-a)^2\right]$$

$$= \mathrm{Exp}\left[\frac{-1}{\hbar} f[a]\right] \left(\frac{2\pi\hbar}{f''[a]}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{Exp}\left[-O\left[\hbar^{1/2}\right]\right]$$

****

如果$f[q]$是多变量$q_1, \ldots, q_N$的函数，且函数在$q_j = a_j$时取最小值，我们可以将上面的结果推广为

$$I = \mathrm{Exp}\left[\frac{-1}{\hbar} f[a]\right] \left(\frac{(2\pi\hbar)^N}{\mathrm{Det}[f''[a]]}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{Exp}\left[-O\left[\hbar^{1/2}\right]\right]$$

此处$f''[a]$为$N \times N$的矩阵，其元素为$[f''[a]]_{i j} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial q_j}[q = a]$.

****

$$\int_i d x_i \, \mathrm{Exp}\left[\frac{I}{2} (x.A.x + J.x)\right] = \left(\frac{(2\pi I)^N}{\mathrm{Det}[A]}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{Exp}\left[\frac{-I}{2} J.A^{-1}.J\right]$$

$$\int_i d x_i \, \mathrm{Exp}\left[\frac{I}{2} (x.A.x)\right] = \left(\frac{(2\pi I)^N}{\mathrm{Det}[A]}\right)^{\frac{1}{2}}$$

****

1.3 从床垫到床

标量场理论的路径积分

p21

替换表

$$\begin{aligned} q &\to \varphi \\ a &\to \vec{x} \\ q_a[t] &\to \varphi\left[t, \vec{x}\right] = \varphi[x] \\ \sum_a &\to \int d^D x \end{aligned}$$

在 $d = (D + 1)$维时空下定义了一个标量场的路径积分：

$$Z = \int \mathbb{D}\varphi \, \mathrm{Exp}\left[I \int d^d x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi . \partial^\mu \varphi - V[\varphi]\right]\right.$$

$$Z = \int \mathbb{D}\varphi \, \mathrm{Exp}\left[I \int d^d x \, \mathcal{L}[\varphi]\right]$$

当1远远小于问题所考虑的作用量时，用稳相法来估算路径积分的值，其他的快速震荡相互抵消掉了。

根据通常的欧拉-拉格朗日 变分法，其极值在满足下式时得到：

$$\partial_\mu * \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \varphi)} - \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\varphi} = 0$$

真空扰动

你可以在某个时间点在空间的某处创造一个粒子，看着它传播一会儿，然后让它在空间的另一处湮灭。

换句话说，我们可以构造创造粒子和湮灭粒子的源和汇（为了统一名称，有时候把两者都称为源）

为了说明这一点是如何实现的，让我们回到床垫的比方上。

在床垫上按几下来给它提供点能量：很显然，你压在质点a上的动作，

可以等同于为势能$V[q_1, q_2, \ldots, q_N]$增加一项$J_a[t]\, q[a]$. 更一般地说，是增加一些项$\Sigma_a\, J_a[t]\, q_a$.

在场论中对应的是$\int d^D x\, J[x] * \varphi[x]$，出现在拉格朗日量中。

$J[t, \vec{x}]$被称之为源函数，用来描述这块床垫被扰动的程度。这个函数的形式可以任选，如同我们可以随意地，在任何时间或者位置按床垫。

特别地，$J[x]$可以被设置为仅在某些区域不为0.

被反复挤压后，床垫的一些位置上就会产生波包，这正对应了粒子的源和汇，由此我们需要研究一下形式的路径积分：

$$Z = \int \mathbb{D}\varphi \,\mathrm{Exp}\left[I \int d^4 x \left(\frac{1}{2} (\partial\varphi)^2 - V[\varphi] + J[x] * \varphi[x]\right)\right]$$

自由场论

对于自由场论或者高斯理论

$$\mathcal{L}[\varphi] = \frac{1}{2}\left[(\partial\varphi)^2 - m^2 \varphi^2\right]$$

$$Z = \int \mathbb{D}\varphi \,\mathrm{Exp}\left[I \int d^4 x \left(\frac{1}{2} (\partial\varphi)^2 - m^2 \varphi^2 + J[x] * \varphi[x]\right)\right]$$

在$\int d^4 x$里做一次分部积分，假设被积分的场随距离衰减的足够快，可以得到：

$$Z = \int \mathbb{D}\varphi \,\mathrm{Exp}\left[I \int d^4 x \left(-\frac{1}{2} \varphi\left(\partial^2 + m^2\right) \varphi + J * \varphi\right)\right]$$

利用之前的公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty} dq_1\, dq_2 \ldots dq_N \,\mathrm{Exp}\left[\frac{I}{2} q.A.q + I * J.q\right] = \left(\frac{(2\pi I)^N}{\mathrm{Det}[A]}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{Exp}\left[\frac{-I}{2} J.A^{-1}.J\right]$$

这里微分算符$-(\partial^2 + m^2)$相当于A.

逆矩阵的定义$A.A^{-1} = I$, or, $A_{ij}\, A^{-1}_{jk} = \delta_{i,k}$现在取连续极限：

$$-\left(\partial^2 + m^2\right) D[x - y] = \delta^{(4)}[x - y]$$

我们把$A^{-1}_{j,k}$的连续极限称为$D[x - y]$，它一定是$x - y$的函数而非x和y的函数，因为时空中没有点是特殊的。

注意从离散的格点到连续极限时 克罗内克符号变成了狄拉克函数。

最后得到的结果是:

$$Z[j] = C * \mathrm{Exp}\left[\frac{-I}{2}\right] \iint d^4 x\, d^4 y\, J[x].D[x - y].J[y] = C * \mathrm{Exp}[I * W[J]]$$

C来自那个带行列式的系数，它与J无关，大部分情况我们对它没有兴趣，可以省略。

从上式开出$C = Z[J = 0]$，因此，

$$\mathrm{Exp}[I * W[J]] = \frac{Z[J]}{Z[J = 0]}$$

$$W[J] = \frac{-1}{2} \iint d^4 x\, d^4 y\, J[x].D[x - y].J[y]$$

是一个关于J的二次泛函。比较之下，$Z[J]$可以包含J的任意高次幂。

************************ discuss

$$\int d^4 x \left(-\frac{1}{2} \varphi\left(\partial^2 + m^2\right) \varphi + J * \varphi\right) == \int d^4 x \int d^4 y \left(-\frac{1}{2} \varphi[x].\delta[x - y].\left(\partial_y{}^2 + m^2\right).\varphi[y] + J[x] * \delta[x - y] * \varphi[y]\right)$$

$$\int d^4x \left(-\frac{1}{2}\varphi(\partial^2+m^2)\varphi + J*\varphi\right) == \int d^4x \int d^4y \left(-\frac{1}{2}\varphi[x].\left(\left(\partial_y{}^2+m^2\right).\delta[x-y]\right).\varphi[y] + J[x]*\delta[x-y]*\varphi[y]\right)$$

$$\int d^4x \int d^4y \left(-\left(\partial_y{}^2+m^2\right).\delta[x-y]\right) D[x-y] == I$$

$$\int d^4x \int d^4y\, \delta[x-y].\left(-\left(\partial_y{}^2+m^2\right)\right).D[x-y] == I$$

$$\int d^4x \int d^4y\, \delta[x-y].\left(-\left(\partial_y{}^2+m^2\right)\right).D[x-y] == \int d^4x \int d^4y\, \delta[x-y]*\delta[x-y]$$

$$-\left(\partial_y{}^2+m^2\right).D[x-y] == \delta[x-y]$$

****

自由传播函数

函数$D(x)$被称为传播函数，在量子场论中具有举足轻重的作用。作为一个微分算符的逆，它和你在电磁学课上碰到的格林函数显然有很近的联系。

虽然物理学家们对数学严谨性总显得很随意，但这时候他们最好暂时提高一下警惕，确保他们的操作确实是让人信服的：

为了让积分$Z = \int \mathbb{D}\varphi \,\mathrm{Exp}\left[I* \int d^4 x\left(\frac{-1}{2}\varphi(\partial^2+m^2)\varphi + J\varphi\right)\right]$对很大的$\varphi$收敛，令$m^2 \to m^2 - I*\epsilon$,

这样积分会包含一项$\mathrm{Exp}\left[-\varepsilon \int d^4 x\, \varphi^2\right]$其中$\varepsilon$为一个趋近于零的正无穷小数.

通过变换到动量空间：

$$\delta^{(4)}[x-y] = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \mathrm{Exp}[I\, k.(x-y)]$$

可以容易地解出方程，解为：

$$D[x-y] = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} * \frac{\mathrm{Exp}[I*k.(x-y)]}{k^2-m^2+I*\varepsilon}$$

这里加入的$I\varepsilon$非常重要，否则给出$D[x]$的积分，就会碰上一个极点。ε具体的值并不重要，但需要为一正数。

同时，这里指数中的k的正负号是无所谓的，因为存在对称性$k \to -k$

****

经过环路积分，极点分别位于2, 4象限，$\omega_k - I\varepsilon$, and, $-\omega_k + I\varepsilon$,

这样在实轴上不会遇到极点。

$$D[x] = -I \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3\, 2\,\omega_k} \left(\mathrm{Exp}\left[-I\left(\omega_k t - \vec{k}.\vec{x}\right)\theta\left[x^0\right]\right] + \mathrm{Exp}\left[I\left(\omega_k t - \vec{k}.\vec{x}\right)\theta\left[-x^0\right]\right]\right)$$

$$\omega_k = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$$

物理上说，$D[x]$描述了场的扰动从原点传播到X点的振幅。

洛伦兹不变性告诉我们它是X^2和X^0符号的函数（这两者都是洛伦兹不变的）

因此，取决于是否在光锥内外，传播函数的表现会有差异。

****

在未来光锥中，假设$x = (t, 0)$, and, $t > 0$，应有

$$D[x] = -I \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3\, 2\,\omega_k} \mathrm{Exp}[-I\,\omega_k\, t]$$

这是许多平面波的叠加，所以$D[x]$表现出震荡。

****

在过去光锥中，设$x=(t,0)$, and, $t<0$，有

$$D[x]=-I\int\frac{\mathbb{d}^3 k}{(2\pi)^3\,2\,\omega_k}\,\mathrm{Exp}[+I\,\omega_k\,t]$$

也为一振荡，但相位相反

若x是类空的，比如，设$x^0=0$, $\theta[0]=\frac{1}{2}$，则

$$D[x]=-I\int\frac{\mathbb{d}^3 k}{(2\pi)^3\,2\,\sqrt{\vec{k}^2+m^2}}\,\mathrm{Exp}\left[-I*\vec{k}.\vec{x}\right]$$

****

转到极坐标系

$$D[x]=-I\int\frac{|k|^2\,\mathbb{d}|k|\,\mathbb{d}\Omega}{(2\pi)^3\,2\,\sqrt{(|k|+I\,m)\,(|k|-I\,m)}}\,\mathrm{Exp}\left[-I*\vec{k}.\vec{x}\right]$$

$$=-I\int\frac{k^2\,\mathbb{d}k\,\mathbb{d}\Omega}{(2\pi)^3\,2\,\sqrt{(k+I\,m)\,(k-I\,m)}}\,\mathrm{Exp}[-I*k*x*J[\Theta,\varphi]]$$

$$=(-2\pi I)\,(-I)\int\mathbb{d}\Omega\,\frac{(-I\,m)^2\,\mathrm{Exp}[-I*(-I\,m)\,x*J[\Theta,\varphi]]}{(2\pi)^3\,2\,\sqrt{(-2\,I\,m)}}$$

$$=\int\mathbb{d}\Omega\,\frac{m^2\,\mathrm{Exp}[-m*x*J[\Theta,\varphi]]}{(2\pi)^2\,2\,\sqrt{(-2\,I\,m)}}$$

****

波矢是$m*\mathrm{Norm}[\vec{x}]$，随着$\mathrm{Norm}[\vec{k}]$增大，被积函数的模不断变小，所以函数值主要集中在$0\sim 1/m*\mathrm{Norm}[\vec{x}]$

其中分母中平方根于$\pm I\,m$截断，告诉我们积分中$|\vec{k}|$的典型值在m量级。

因此传播函数会存在一指数衰减$\sim\mathrm{Exp}[-m\,|\vec{x}|]$.

在经典物理中，例子不可能传播到他的光锥之外；

但根据海森堡不确定原理，一个量子场则可以“漏出”光锥大约m^{-1}量级的距离。

****

在1 + 1维的情况下，

$$\mathrm{Integrate}\left[\frac{\mathrm{Exp}[-I*(k1*x1)]}{2\sqrt{k1^2+m^2}},\{k1,-\infty,+\infty\},\mathrm{Assumptions}\to\{x1>0,m>0\}\right]$$

结果是一个BesselK[0, m x1]函数，

贝塞尔函数BesselK[0, x]在无穷远点展开，含有一个 Exp[$-x$] 因子。

```
Series[BesselK[0, x], {x, Infinity, 2}] // Normal
```

$$e^{-x}\left(-\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{8\,x^{3/2}}+\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{x}}\right)$$

1.4 从场到粒子再到力

p41

在自由理论中

$$W[J]=-\frac{1}{2}\int\int\mathbb{d}^4x\,\mathbb{d}^4y\,J[x]*D[x-y]*J[y]$$

$$D[x-y] = \int \frac{\mathbb{d}^4 k}{(2\pi)^4} * \frac{\mathrm{Exp}[I * k.(x-y)]}{k^2 - m^2 + I\varepsilon}$$

现在用傅里叶变换$J[k] \equiv \int d^4 x \, \mathrm{Exp}[-I\,k\,x]\, J[x]$将其改写为

$$W[J] = -\frac{1}{2}\int \frac{\mathbb{d}^4 k}{(2\pi)^4} J[k]^* * \frac{1}{k^2 - m^2 + I\varepsilon} J[k]$$

对于实函数 J[x] 应有 J[k]*=J[-k]

从粒子到力

比如令$J[x] = J_1[x] + J_2[x], J_1 = \delta^{(3)}[\vec{x} - \vec{x}_1], J_2 = \delta^{(3)}[\vec{x} - \vec{x}_2]$

将$J[x]$代入$W[J] = -\frac{1}{2}\int\int d^4 x \, d^4 y \, J[x] * \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} * \frac{\mathrm{Exp}[I * k.(x-y)]}{k^2 - m^2 + I\varepsilon} * J[y]$，省略$J_1 J_1$和$J_2 J_2$项，得到，

$$W[J] = -\int\int \mathbb{d}x^0 \, \mathbb{d}y^0 \frac{\mathbb{d}k^0}{2\pi} \mathrm{Exp}\left[I\,k^0 (x-y)^0\right] \int \frac{\mathbb{d}^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\mathrm{Exp}\left[I\,\vec{k}.\left(\vec{x}_1 - \vec{x}_2\right)\right]}{k^2 - m^2 + I\varepsilon}$$

再对y_0积分得到关于k^0的δ函数，令其只能取0值。式子剩下的部分为

$$W[J] = \int \mathbb{d}x^0 \int \frac{\mathbb{d}^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\mathrm{Exp}\left[I\,\vec{k}.\left(\vec{x}_1 - \vec{x}_2\right)\right]}{\vec{k}^2 + m^2}$$

因为分母$\vec{k}^2 + m^2$始终是正的，所以无限小$I\varepsilon$此时可以被省略。

因子$\int d\,x^0$对应于时间T

$Z = C\,\mathrm{Exp}[I\,W[J]]$对应于 ,其中$E$是两个源相互作用产生的能量。

$$I\,W = -I\,E\,T$$

$$E = -\int \frac{\mathbb{d}^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\mathrm{Exp}\left[I\,\vec{k}.\left(\vec{x}_1 - \vec{x}_2\right)\right]}{\vec{k}^2 + m^2}$$

附录中实际计算的该积分最后给出：

$$E = -\frac{1}{4\pi r}\mathrm{Exp}[-m\,r]$$

超过距离$1/m$后，势能呈指数快速衰减。同时显然有$d\,E/d\,r > 0$，这两个质量块在床垫上靠得越近，系统的能量就越低。

两个相似的物体通过和φ耦合而相互吸引。我们得到了量子场论路上第一个具有物理意义的结果！

如果场φ所描述的粒子的质量为m，那么由此场产生的吸引力的作用距离就由其质量倒数$1/m$决定。

作用力的来源

力是通过交换粒子产生的。

势能形式对距离r次数的依赖性可以由量纲分析直接得出：

$$\int \mathbb{d}^3 k * \frac{\mathrm{Exp}\left[I\,\vec{k}.\vec{x}\right]}{k^2} \sim \frac{1}{r}$$

连通与不连通

p44

附录

令$\vec{x} \equiv (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)$, $u \equiv \mathrm{Cos}[\theta]$,其中$\theta$是$\vec{k}$和$\vec{x}$之间的夹角，在球坐标下计算积分可得（令$k = |\vec{k}|$, $r = |\vec{x}|$）

$$I \equiv \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty \mathbb{d}k\,k^2 \int_{-1}^{+1} \mathbb{d}u * \frac{\mathrm{Exp}[I\,k\,r\,u]}{k^2 + m^2} = \frac{2\,I}{(2\pi)^2\,I\,r}\int_0^\infty \mathbb{d}k\,k \frac{\mathrm{Sin}[k\,r]}{k^2 + m^2}$$

被积函数是偶函数，拓展到全实轴，得到：

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \mathbb{d}k\, k\,\frac{\mathrm{Sin}[k\, r]}{k^2+m^2}=\frac{1}{2\,I}\int_0^\infty \mathbb{d}k\, k\,\frac{\mathrm{Sin}[k\, r]}{k^2+m^2}\,\mathrm{Exp}[I\,k\,r]$$

由于r为正数，我们用复平面的上半围道完成积分，包含的极点位于$+I\,m$处。

由此有$\frac{1}{2\,I}(2\,\pi\,I)*\frac{I\,m}{2\,I\,m}\,\mathrm{Exp}[-m\,r]=\frac{\pi}{2}\,\mathrm{Exp}[-m\,r]$，原积分为$I=\frac{1}{4\,\pi\,r}\,\mathrm{Exp}[-m\,r]$

1.5 库仑和牛顿：排斥与吸引

p35

麦克斯韦电磁场理论的拉格朗日量为$\mathcal{L}=\frac{-1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$，其中$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$，$A_\mu[x]$是磁矢势。

这一拉格朗日量携带的负号非常重要，因为这保证了$(\partial_0 A_i)^2$这一项的系数为正，

就像标量场拉格朗日量中$(\partial_0\,\varphi)^2$这一项的系数为正一样。

也就是说，量子场随时间的变化给作用量的贡献应该是正的。

现在我将拉格朗日量修改为$\mathcal{L}=\frac{-1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu+A_\mu J^\mu$，给光子赋上一个很小的质量。

（这里的质量项是通过类比标量场拉格朗日量中的质量项$m^2\,\varphi^2$出的；

稍后就会看出这一项的符号是正确的，并且确实给光子带来了质量。

拉格朗日量中同时也加入了源项$J_\mu[x]$，在这里就意味着一个电流。

我们假设电流守恒，也即$\partial_\mu J^\mu=0$。

1.6 平方反比律和漂浮的 3 膜

p46

普朗克质量

为了进行一些定量的讨论，我们将牛顿引力定律改写为$V[r]=\frac{G_N\,m_1\,m_2}{r}=\frac{m_1\,m_2}{M_{\mathrm{Pl}}^2\,r}$来定义普朗克质量$M_{\mathrm{Pl}}$。

数值上，$M_{\mathrm{Pl}}\approx 10^{19}$ GeV。如此巨大的数值清楚地体现了引力之微弱。

****

与实际观测到的引力定律$V[r]=\frac{m_1\,m_2}{M_{\mathrm{Pl}}^2}*\frac{1}{r}$相比，有

$$M_{\mathrm{TG}}^2=\frac{M_{\mathrm{Pl}}^2}{[M_{\mathrm{TG}}\,R]^n}$$

如果 $M_{\mathrm{TG}}\,R$足够大，我们就能得到一个有趣的可能性：M_{TG}的基本尺度可能比我们一直所认为的要低得多。

加速器（例如大型强子对撞机 LHC）可以为这种有趣的可能性提供令人兴奋的验证。

如果引力的真实尺度 M_{TG} 处于加速器可达到的能量范围内，就可能会有大量引力子逃逸到更高维度的宇宙中。

那样实验者将会看到极高的能量损失。

1.7 费曼图

场论中的非谐性

前几章研究的自由场论很容易求解，因为定义的路径积分$Z=\int\mathbb{D}\varphi\,\mathrm{Exp}\left[I\int d^4x\left(\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2-m^2\varphi^2+J\varphi\right)\right]$是高斯型积分，

所以可以简单的应用

$$\langle\mathrm{qF}|\,\mathrm{Exp}[-I\,H\,T]\,|\mathrm{qI}\rangle=\int\mathbb{D}q[t]\,\mathrm{Exp}\left[I*\int_0^T\mathbb{d}t\,L[\dot{q},q]\right]$$

在简谐近似下，床垫上的振动模式可以线性叠加，因此它们相遇时只会简单地互相穿过。

由这些模式构成的波包代表的粒子没有相互作用：这就是为何它被称为自由场理论。为了让这些模式彼此散射，拉格朗日量中必须包含非谐项，使运动方程不再是线性的。

简单起见，添加一个非谐项：$\frac{-\lambda}{4!}\varphi^4$，尝试计算

$$Z[J] = \int \mathbb{D}\varphi \, \text{Exp}\left[I \int d^4 x \left(\frac{1}{2} (\partial\varphi)^2 - m^2 \varphi^2\right) - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 + J\varphi\right]$$

我们略去了Z对λ的依赖。

****

在路径积分的表达式中加入J外源，即描述了一个有外源的场论体系，J可以用来激发出耦合的场φ的粒子，也可以用来湮灭φ的粒子。

为了统一源和汇，将它们都写作J.也就是J可以表示为$J = J_1 + J_2$.通过加入适当的Dirac δ函数，可以把外源local化。

对外源求偏导，可以得到格林函数。

这在物理上也是可以理解的：由于外源是我们指定的，所以它的形式可以随意变化，跟耦合场的体系结构没关系，

我们插入的外源项是和φ线性耦合的，通过求偏导，并令$J = 0$，可以得到场φ本身的传播特性，也就是格林函数。

我们认为外源间的相互作用是通过交换粒子传播的，也就是通过场φ的量子相互传播的。

也就是说，外源的微小变化对路径积分（也就是量子力学期望值）的影响，正比于传播相互作用的场φ的格林函数，

这个物理图像是很容易接受的。

变容易的费曼图

p53

小学生问题

计算普通积分

$$Z[J] = \int_{-\infty}^{+\infty} dq \, \text{Exp}\left[\frac{-1}{2} m^2 q^2 - \frac{\lambda}{4!} q^4 + J q\right]$$

若$\lambda = 0$，则积分退化为高斯积分的情形。

将$Z[J]$作为λ的级数进行计算很容易，并利用求导恒等式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dq \, \text{Exp}\left[\frac{-1}{2} m^2 q^2 + J q\right] q^{4n} == \left(\frac{d}{dJ}\right)^{4n} \int_{-\infty}^{+\infty} dq \, \text{Exp}\left[\frac{-1}{2} m^2 q^2 + J q\right]$$

we have

$$Z[J] = \left(1 - \frac{\lambda}{4!}\left(\frac{d}{dJ}\right)^4 + \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{4!}\right)^2 \left(\frac{d}{dJ}\right)^8 + \ldots\right) \int_{-\infty}^{+\infty} dq \, \text{Exp}\left[\frac{-1}{2} m^2 q^2 + J q\right]$$

$$== \text{Exp}\left[-\frac{\lambda}{4!}\left(\frac{d}{dJ}\right)^4\right] \int_{-\infty}^{+\infty} dq \, \text{Exp}\left[\frac{-1}{2} m^2 q^2 + J q\right]$$

$$== \left(\frac{2\pi}{m^2}\right)^{\frac{1}{2}} \text{Exp}\left[-\frac{\lambda}{4!}\left(\frac{d}{dJ}\right)^4\right] * \text{Exp}\left[\frac{J^2}{2 m^2}\right]$$

展开这两个指数函数，我们就可以得到$Z[J]$对λ和J的双重级数展开中的任意一项。

我们常常略去系数$\left(\frac{2\pi}{m^2}\right)^{1/2} = Z[J=0, \lambda=0]$.或者令$\tilde{Z} = Z[J] / Z[0,0]$

例如，求解$\tilde{Z}$中含有λ和J^4的这一项，我们就取出$\text{Exp}[J^2/2m^2]$中J^8这一项，也即$\left(\frac{1}{4!(2m^2)^4}\right) J^8$。 用$-\frac{\lambda}{4!}\left(\frac{d}{dJ}\right)^4$作用，得到$\left(\frac{8!(-\lambda)}{(4!)^3 (2m^2)^4}\right) J^4$。

类似地，双重级数展开，一个参数是耦合常数λ，一个是J的次数，J的次数等于$\text{Exp}[J^2/2m^2]$展开式的次数减去求导$-\frac{\lambda}{4!}\left(\frac{d}{dJ}\right)^4$的次数

见 Zee 书的描述。

威克收缩

另一种展开方式，被称作威克收缩。即先用J的幂级数展开。在小学生问题中，可以写作

$$Z[J] = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{s\,!} J^s \int_{-\infty}^{+\infty} dq\, \mathrm{Exp}\left[\frac{-1}{2} m^2 q^2 - \frac{\lambda}{4\,!} q^4\right] q^s = Z[0,0] \sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{s\,!} J^s G^{(s)}$$

$$G^{(s)} = \frac{1}{Z[0,0]} \int_{-\infty}^{+\infty} dq\, \mathrm{Exp}\left[\frac{-1}{2} m^2 q^2 - \frac{\lambda}{4\,!} q^4\right] q^s$$

$G^{(s)}$类似于场论中的“格林函数”，可以按照λ进行级数展开得到，而每一项由威克收缩(见下方)得到

$$\left\langle x^{2n}\right\rangle \equiv \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \mathrm{Exp}\left[-\frac{1}{2} x^2\right] x^{2n}}{\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \mathrm{Exp}\left[-\frac{1}{2} x^2\right]} = \frac{1}{a^n} (2n-1)(2n-3)\ldots 5*3*1 \qquad (0.40)$$

例如，$G^{(4)}$中的$O[\lambda]$阶为，

$$\frac{-\lambda}{4\,!\,Z[0,0]} \int_{-\infty}^{+\infty} dq\, \mathrm{Exp}\left[\frac{-1}{2} m^2 q^2\right] q^8 = \frac{-7\,!\,!}{4\,!} * \frac{1}{m^8}$$

连接图与非连接图

费曼图分为连接图和非连接图

$$Z[J,\lambda] = Z[J=0,\lambda]\, \mathrm{Exp}[W[J,\lambda]] = Z[J=0,\lambda] \sum_{N=0}^{\infty}\frac{1}{N\,!} (W[J,\lambda])^n$$

按照定义，$Z[J=0,\lambda]$由那些没有外源J的图组成。我们声称W是所有连接图的总和，而Z中既包含连接图，也包含非连接图。

因此，需要计算的是W而不是Z.

统计力学类比，连接与非连接图的这种关系，恰恰是自由能与配分函数之间的关系。

****

这里不含外源的肯定是类似真空泡的东西，所以称之为非连接图。因为费曼图的不连接部分是想乘的关系，所以除掉真空泡，剩下的是连接图的贡献。

把连接图强行按照Exp进行分割，其单元W就是这个场论体系的最小重复单元。

传播：从这到那

推广到多个积分而不是单个积分：

$$Z[J] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} dq_1\, dq_2 \ldots dq_N\, \mathrm{Exp}\left[\frac{-1}{2} q.A.q - \frac{\lambda}{4\,!} q^4 + J.q\right]$$

$$\text{where, } q^4 \equiv \sum_i q_i^4$$

推广之前的步骤，有：

$$Z[J] = \left[\frac{(2\pi)^N}{\mathrm{Det}[A]}\right]^{1/2} \mathrm{Exp}\left[\frac{-\lambda}{4\,!} \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial J_i}\right)^4\right] \mathrm{Exp}\left[\frac{1}{2} J.A^{-1}.J\right]$$

或者，就像（I.7.5）一样，按照J进行幂级数展开

$$Z[J] = \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{i1=1}^{\infty}\cdots\sum_{is=1}^{\infty}\frac{1}{s\,!} J_{i1}\ldots J_{is} \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\prod_l dq_l\right) \mathrm{Exp}\left[\frac{-1}{2} q.A.q - \frac{\lambda}{4\,!} q^4\right] q_{i1}\ldots q_{is}$$

$$= Z[0,0] \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{i1=1}^{\infty}\cdots\sum_{is=1}^{\infty}\frac{1}{s\,!} J_{i1}\ldots J_{is}\, G^{(s)}_{i1\ldots is}$$

这样又可以对λ进行展开，按威克收缩进行计算了。

下标i可以视为对晶格上格点的标记。

$$G^{(2)}_{ij}[\lambda=0] = \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\prod_l dq_l\right)\text{Exp}\left[\frac{-1}{2}q.A.q\right]q_i\,q_j\right)\Big/Z[0,0] = \left(A^{-1}\right)_{ij}$$

矩阵元$(A^{-1})_{ij}$描述了从i到j的传播。

微扰场论

可以用类似的手段处理场论系统。

$$z[J] = \int \mathbb{D}\varphi\,\text{Exp}\left[I\int d^4x\left(\frac{1}{2}\left((\partial\varphi)^2 - m^2\varphi^2\right) - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 + J\varphi\right)\right]$$

和（1.7.2）以及（1.7.7）中的多重积分具有相同的形式，除了指数上的I。

类似地，

$$Z[J] = \text{Exp}\left[\frac{-\lambda}{4!}\int d^4w\left(\frac{\delta}{\delta(I\,J[\omega])}\right)^4\right].\int\mathbb{D}\varphi\,\text{Exp}\left[I\int d^4x\left(\frac{1}{2}\left((\partial\varphi)^2 - m^2\varphi^2\right) + J\varphi\right)\right]$$

$$= Z[0,0]\,\text{Exp}\left[\frac{-\lambda}{4!}\int d^4w\left(\frac{\delta}{\delta(I\,J[\omega])}\right)^4\right].\text{Exp}\left[\frac{-I}{2}\int\int d^4x\,d^4y\,J[x]*D[x-y]*J[y]\right]$$

传播子

$$D[x-y] = \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}*\frac{\text{Exp}[I\,k.(x-y)]}{k^2 - m^2 + I\epsilon}$$

现在就扮演了（1.7.3）中$1/m^2$和（1.7.8）中A^{-1}的角色。

如果处于d维时空，$D[x-y]$的表达式也是相同的，仅需要将其中的$\frac{d^4k}{(2\pi)^4}$替换为$\frac{d^dk}{(2\pi)^d}$.

普通积分（1.7.2）类似于0维时空中的场论：

如果我们取$d=0$，那么就不会有传播，并且$D[x-y]$会坍缩成$-1/m^2$.

****

我们也知道$J[x]$对应于源和汇。因此，如果将$Z[J]$展开为J的级数，J的幂次就代表了该过程中涉及的粒子数。

$$Z[J] = Z[0,0]\sum_{S=0}^{\infty}\frac{I^s}{s!}\int dx_1\ldots dx_s\,J[x_1]*\ldots*J[x_s]\,G^{(s)}[x_1,\ldots,x_s]$$

$$= \sum_{S=0}^{\infty}\frac{I^s}{s!}\int dx_1\ldots dx_s\,J[x_1]*\ldots*J[x_s]\int\mathbb{D}\varphi\,\text{Exp}\left[I\int d^4x\left(\frac{1}{2}\left((\partial\varphi)^2 - m^2\varphi^2\right) - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4\right)\right]\varphi[x_1]*\ldots*\varphi[x_s]$$

特别地，有两点格林函数

$$G[x_1,x_2] \equiv \frac{1}{Z[0,0]}\int\mathbb{D}\varphi\,\text{Exp}\left[I\int d^4x\left(\frac{1}{2}\left((\partial\varphi)^2 - m^2\varphi^2\right) - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4\right)\right]\varphi[x_1]*\varphi[x_2]$$

和四点格林函数

$$G[x_1,x_2,x_3,x_4] \equiv \frac{1}{Z[0,0]}\int\mathbb{D}\varphi\,\text{Exp}\left[I\int d^4x\left(\frac{1}{2}\left((\partial\varphi)^2 - m^2\varphi^2\right) - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4\right)\right]\varphi[x_1]*\varphi[x_2]*\varphi[x_3]*\varphi[x_4]$$

所以$Z[J]$被称作生成泛函，因为它生成了格林函数。

$D[x-y]$描述了没有相互作用时粒子在x_1和x_2之间的传播，而$G[x-y]$描述了存在相互作用时粒子在x_1和x_2之间的传播。

****

我们有两种方法可以处理场论：施温格方法或者威克方法。就是不同的展开次序。

总而言之，费曼图只是一种极其简便的表示$Z[J]$的λ和J双级数展开的方法

粒子之间的碰撞

威克方法的例子，展开到λ一阶项

$$\frac{1}{Z[0,0]}\left(\frac{-I\lambda}{4!}\right)\int d^4w\int\mathbb{D}\varphi\,\text{Exp}\left[I\int d^4x\left(\frac{1}{2}\left((\partial\varphi)^2 - m^2\varphi^2\right)\right)\right]\varphi[x_1]*\varphi[x_2]*\varphi[x_3]*\varphi[x_4]*\varphi[w]^4$$

做威克收缩可得

$$(-I\lambda)\int d^4 w\, D[x_1-w]*D[x_2-w]*D[x_3-w]*D[x_4-w]$$

一劳永逸

不真实的代价

费曼图所涉及的物理也非常清楚：内线与虚粒子相关，该虚粒子的相对论4-动量平方不一定等于m^2。

而如果例子是真实的，则必须如此。虚粒子的动量离质壳越远，振幅就越小。这就是因为不真实而受到的惩罚。

圈图及发散初瞥

（1.7.23）中体现的物理很清楚，由于k覆盖了所有可能的值，

因此仅当与两条内线关联的虚粒子中的一个或两个均接近于实粒子时，被积函数才大。再一次地，不真实会受到惩罚。

真空涨落

聊两句历史

1.8 正经的量子化

正则量子化和路径积分往往是互补的--很难在一种量子化方法中看清楚另一种方法。

海森堡绘景

$$L=\frac{1}{2}\dot{q}^2-V[q]$$

regular momentum,

$$p=\frac{\delta L}{\delta \dot{q}}=\dot{q}$$

$$H=p\,\dot{q}-L=\frac{p^2}{2}+V[q]$$

$$[p,q]=-I,\ \text{or},\ [q,p]=I$$

****

$$\frac{dp}{dt}=I[H,p]=-V'[q]$$

****

$$[H,p]=\left[\frac{p^2}{2}+V[q],p\right]=[V[q],p]=[\text{Exp}[q.\partial_{x=0}].V[x],p]=[\text{Exp}[q.\partial_{x=0}],p].V[x]$$

$$[\text{Exp}[\lambda*q.\partial_{x=0}],p]$$

在λ零点展开, first order

$$[\text{Exp}[\lambda*q.\partial_{x=0}]\,q.\partial_{x=0},p]\to I\,\partial_{x=0}$$

second order

$$\left[\text{Exp}[\lambda*q.\partial_{x=0}]\,(q.\partial_{x=0})^2,p\right]\to I*2\,q*(\partial_{x=0})^2$$

n order

$$I\,(2\,q)^{n-1}\,(\partial_{x=0})^n$$

so,

$$[\mathrm{Exp}[\lambda * q.\partial_{x=0}], p] = I \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2q)^n (\partial_{x=0})^{n+1}}{n!}$$

****

$$\mathrm{Exp}[A].B.\mathrm{Exp}[-A]$$

凡是微扰展开的公式，公式里不含有小量的，可以认为引入一个小量λ.

幂级数展开式是唯一的，所以可以先展开子部分，进行级数分析，也可以直接去求n阶的导数。

$$\mathrm{Exp}[\lambda A].B.\mathrm{Exp}[-\lambda A]$$

把这个公式按照λ的幂次进行展开，在最后的结果中，取λ为1。

$$\frac{d}{d\lambda}\mathrm{Exp}[\lambda A].B.\mathrm{Exp}[-\lambda A] = \mathrm{Exp}[\lambda A]\,A.B.\mathrm{Exp}[-\lambda A] + \mathrm{Exp}[\lambda A].B.(-A)\,\mathrm{Exp}[-\lambda A] = \mathrm{Exp}[\lambda A].[A, B].\mathrm{Exp}[-\lambda A]$$

$$\frac{d^2}{d\lambda^2}\mathrm{Exp}[\lambda A].B.\mathrm{Exp}[-\lambda A] = \mathrm{Exp}[\lambda A].A.[A, B].\mathrm{Exp}[-\lambda A] + \mathrm{Exp}[\lambda A].[A, B].(-A).\mathrm{Exp}[-\lambda A]$$

$$= \mathrm{Exp}[\lambda A].[A, [A, B]].\mathrm{Exp}[-\lambda A]$$

等等，最终展开式的每一项都可以如此求解。

****

此外，由p和q组成的算符按照$O[t] = \mathrm{Exp}[I\,H\,t]\,O[0]\,\mathrm{Exp}[-I\,H\,t]$演化。在（1.8.1）中，$p$和$q$被理解为等时的。

算符的运动方程为$\ddot{q} = -V'[q]$

根据狄拉克的思想

$$a \equiv \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega q + I p),\ a^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega q - I p)$$

$$q = \frac{\sqrt{2\omega}\,(a + a^\dagger)}{2\omega},\ p = \frac{\sqrt{2\omega}\,(a + a^\dagger)}{2I}$$

$$H = \frac{p^2}{2} + V[q] = \frac{1}{2}\left(\frac{2\omega(a + a^\dagger)^2}{-4}\right) + V[a, a^\dagger] = \frac{-\omega}{4}(a + a^\dagger)^2 + V[a, a^\dagger]$$

$$[a, a^\dagger] = 1$$

$$[a, a^\dagger] = \frac{1}{2\omega}([\omega q, -I p] + [I p, \omega q])$$

$$= \frac{1}{2\omega}(-I\omega[q, p] + I\omega[p, q])$$

$$= \frac{1}{2\omega}(-I\omega I + I\omega(-I)) = 1$$

$$\frac{da}{dt} = I\left[H, \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega q + I p)\right] = -I * \sqrt{\frac{\omega}{2}}\left(I p + \frac{1}{\omega}V'[q]\right)$$

****

在特殊情况$V' = \omega^2 q$下，我们得到一个特别简单的结果$\frac{da}{dt} = -I\,\omega\,a$。这就是谐振子

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{2}w^2 q^2$$

以及

$$H = \frac{1}{2}\left(p^2 + \omega^2 q^2\right) = \omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)$$

****

推广到场论，在D维空间中，

$$L = \int d^D x\left(\frac{1}{2}\left(\partial\varphi^2 - m^2\varphi^2\right) - u[\varphi]\right)$$

把非谐项记作$u[\varphi]$。

正则动量密度

$$\pi[x] = \frac{\delta L}{\delta\dot{\varphi}[x]} = \partial_0\varphi[x]$$

等时关系变成

$$\left[\pi\left[t, \vec{x}\right], \varphi\left[t, \vec{x\prime}\right]\right] = \left[\partial_0\varphi\left[t, \vec{x}\right], \varphi\left[t, \vec{x\prime}\right]\right] = -I\,\delta^{(D)}\left[x - \vec{x\prime}\right]$$

其他为0。

****

为了把上面的推导和路径积分方法联系起来，现在计算   ，其中$t > 0$。

在两个常的乘积$a^\dagger a^\dagger$, $a^\dagger a$, $a\,a^\dagger$, $a\,a$中只有 $a\,a^\dagger$活下来了，因此利用（1.8.12）可以得到

$$\int\frac{d^D k}{(2\pi)^D\, 2\,\omega_k}\,\mathrm{Exp}\left[-I\left(\omega_k\, t - \boldsymbol{k}.\boldsymbol{x}\right)\right]$$

换句话，如果定义编时乘积$T[\varphi[x]*\varphi[y]] = \theta\left[x^0 - y^0\right]*\varphi[x]*\varphi[y] + \theta\left[y^0 - x^0\right]*\varphi[y]*\varphi[x]$，就可以得到：

$$\langle 0|\; T\left[\varphi\left[t, \vec{x}\right].\varphi\left[0, \vec{0}\right]\right]\;|0\rangle = \int\frac{d^D k}{(2\pi)^D\, 2\,\omega_k}\left(\theta[t]\,\mathrm{Exp}[-I\,k.x] + \theta[-t]\,\mathrm{Exp}[+I\,k.x]\right)$$

$T\left[\varphi[t, \vec{x}].\varphi\left[0, \vec{0}\right]\right] = I*D[x]$，也就是路径积分推导的，粒子从0到$x$的传播子

这进一步证实了（1.3.22）中$I\,\epsilon$的描述。

函数 $D(x)$ 被称为传播函数，在量子场论中具有举足轻重的作用。作为一个微分算符的逆，它和你在电磁学课上碰到的格林函数显然有很近的联系。

虽然物理学家们对数学严谨性总显得很随意，但这时候他们最好暂时提高一下警惕，确保他们的操作确实是让人信服的：为了让积分 (一.3.17) 对很大的 ϕ 收敛，令 $m^2 \to m^2 - i\varepsilon$，这样积分会包含一项 $e^{-\varepsilon\int d^4x\varphi^2}$，其中 ε 为一个趋近于零的正无穷小数[3]

通过变换到动量空间，并且使用狄拉克函数表达式 (一.2.19) 的四次方：

其中的物理意义是：粒子总是先产生，再湮灭，其他的方法都行不通。这也是在量子场论中表述因果律的一种形式。

积分测度$\frac{d^D k}{2\,\omega_k}$是洛伦兹不变的。

散射振幅

用正则量子化计算散射振幅。

$$\left\langle\vec{k_3}\,\vec{k_4}\right|\,\mathrm{Exp}[-I\,H\,T]\,\left|\vec{k_1}\,\vec{k_2}\right\rangle = \left\langle\vec{k_3}\,\vec{k_4}\right|\,\mathrm{Exp}\left[I\int d^4x\,\mathcal{L}[x]\right]\,\left|\vec{k_1}\,\vec{k_2}\right\rangle$$

first order of λ,

$$\left(\frac{-I\,\lambda}{4\,!}\right)\left\langle\vec{k_3}\,\vec{k_4}\right|\,\mathrm{Exp}\left[I\int d^4x\,\mathcal{L}[x]\right]\,\left|\vec{k_1}\,\vec{k_2}\right\rangle$$

和计算传播子类似，找出$a^\dagger[\vec{k_4}].a^\dagger[\vec{k_3}].a[\vec{k_2}].a[\vec{k_1}]$，表示先湮灭再产生两个粒子。

****

对于每个入射态有一个因子$\frac{1}{\rho[k]}$ Exp[$-I\,k.x$]，对于每个入射态有一个因子$\frac{1}{\rho[k]}$ Exp[$+I\,k.x$]，$\rho[k]=\sqrt{(2\,\pi)^D\,2\,\omega_k}$

总共给出，

$$\left(\prod_{\alpha=1}^{4}\frac{1}{\rho[k_\alpha]}\right)\int d^4x\,\mathrm{Exp}[I\,(k_3+k_4-k_1-k_2).x]=\left(\prod_{\alpha=1}^{4}\frac{1}{\rho[k_\alpha]}\right)(2\,\pi)^4\,\delta^4[k_3+k_4-k_1-k_2]$$

为了方便把　　　　　　　　　　　　　称作S矩阵的矩阵元。还可以定义跃迁矩阵T，$S=1+I*T$，也就是

$$S_{fi}=\delta_{fi}+I*T_{fi}$$

总的来说，利用初末态动量标记例子，利用动量守恒写下

$$I*T_{fi}=(2\,\pi)^4\,\delta^4\left(\sum_f k-\sum_i k\right)\left(\prod_{\alpha=1}^{4}\frac{1}{\rho[k_\alpha]}\right)M[f\leftrightarrow i]$$

复标量场

目前为止，我们已经讨论了厄米标量场，或者叫做“实标量场”。

接着讨论一下非厄米标量场。拉格朗日量为

$$\mathcal{L}=\partial\varphi^\dagger\,\partial\varphi-m^2\,\varphi^\dagger\,\varphi$$

φ的正则动量

$$\pi[t,\vec{x}]=\frac{\delta L}{\delta\,\dot{\varphi}[t,\vec{x}]}$$

对易子

$$[\pi[t,\vec{x}],\varphi[t,\vec{x}]]=[\partial_0\varphi^\dagger[t,\vec{x}],\varphi[t,\vec{x}]]=-I\,\delta^D[\vec{x}-\vec{x}\prime]$$

对φ做变分就得到欧拉-拉格朗日方程$(\partial^2+m^2)\,\varphi=0$，类似地，$(\partial^2+m^2)\,\varphi^\dagger=0$

我们依然可以做傅里叶展开，但是现在场是非厄米的，要求把（1.8.11）替换为

$$\varphi[t,\vec{x}]=\int\frac{d^Dk}{\sqrt{(2\,\pi)^D\,2\,\omega_k}}\left(a[\vec{k}]\,\mathrm{Exp}[-I\,k.x]+b^\dagger[k]\,\mathrm{Exp}[I\,k.x]\right)$$

在（1.8.11）中厄米性要求第二项和第一项之间是厄米共轭的。这里，相反的，我们被迫引入两组产生湮灭算符$(a,a^\dagger)$, $(b,b^\dagger)$。

这两组算符满足产生湮灭算符的对易关系。

****

考虑流算符

$$J_\mu=I\left(\varphi^\dagger\,\partial_\mu\varphi-(\partial_\mu\varphi^\dagger)\,\varphi\right)$$

利用运动方程可以得到$\partial_\mu J^\mu=I(\varphi^\dagger\,\partial^2\,\varphi-(\partial^2\,\varphi^\dagger)\,\varphi)=I(\varphi^\dagger\,(-m^2)\,\varphi-\varphi(-m^2\,\varphi^\dagger))=0$

所以这是一个守恒流。对应的时间无关的守恒荷可以写作

$$Q=\int d^Dx\,J_0[x]=\int d^Dx\left(a^\dagger[\vec{k}]\,a[\vec{k}]-b^\dagger[\vec{k}]\,a[\vec{k}]\right)$$

$$I\left(\varphi^\dagger\,\partial_0\varphi-(\partial_0\varphi^\dagger)\,\varphi\right)$$

$$=I\left(\int\frac{d^Dk1}{\sqrt{(2\,\pi)^D\,2\,\omega_{k1}}}\int\frac{d^Dk2}{\sqrt{(2\,\pi)^D\,2\,\omega_{k2}}}\right.$$

$$\left(a^\dagger[\vec{k1}]\,\mathrm{Exp}[+I\,k1.x]+b[k1]\,\mathrm{Exp}[-I\,k1.x]\right).\left(-I\,\omega_k\,a[\vec{k2}]\,\mathrm{Exp}[-I\,k2.x]+I\,\omega_k\,b^\dagger[k2]\,\mathrm{Exp}[I\,k2.x]\right)$$

$$\left.-\left(+I\,\omega_k\,a^\dagger[\vec{k2}]\,\mathrm{Exp}[+I\,k2.x]-I\,\omega_k\,b[k2]\,\mathrm{Exp}[-I\,k2.x]\right).\left(a[\vec{k2}]\,\mathrm{Exp}[-I\,k2.x]+b^\dagger[k2]\,\mathrm{Exp}[I\,k2.x]\right)\right)$$

$$= I \int \frac{\mathbb{d}^D k1}{\sqrt{(2\pi)^D 2\,\omega_{k1}}}$$

$$\int \frac{\mathbb{d}^D k2}{\sqrt{(2\pi)^D 2\,\omega_{k2}}} \left(-2 I \omega_k a^\dagger[\overrightarrow{k1}]\, a[\overrightarrow{k2}]\, \mathrm{Exp}[I(k1-k2).x] + 2 I \omega_k b[\overrightarrow{k1}].b^\dagger[\overrightarrow{k2}]\, \mathrm{Exp}[-I(k1-k2).x]\right)$$

$$= \int \mathbb{d}^D k \left(a^\dagger[\vec{k}]\, a[\vec{k}] - b[\vec{k}].b^\dagger[\vec{k}]\right)$$

$$= \int \mathbb{d}^D k \left(a^\dagger[\vec{k}]\, a[\vec{k}] - b^\dagger[\vec{k}]\, b[\vec{k}] + \delta[0]\right)$$

因此被$a^\dagger$产生的粒子和被$b^\dagger$产生的粒子（称之为反粒子）携带不同的荷。

显然，利用对易关系可以得到 和 .

于是我们得到以下结论：$\varphi^\dagger$产生了一个粒子，湮灭一个反粒子，也就是$\varphi^\dagger$产生一个单位电荷。场φ做相反的事。

电子和反电子的狄拉克场也是同理。

附录2 重定义场

场论新手应该在这里学到：没有一个国际规范组织强迫使用哪一个场定义。

比如$\eta = \varphi + \alpha\,\varphi^3$。两个场可以通过一些可逆函数联系起来。这也被称为场的重定义。

****

实验学家测量的S矩阵在场重定义下不变。

并不知道谁是φ，谁是η。

****

$$Z[J] = \int \mathbb{D}\eta\, \mathrm{Exp}\left[I\left(S[\eta] + \int \mathbb{d}^4 x\, J\,\eta\right)\right]$$

$$Z[J] = \int \mathbb{D}\eta\, \mathrm{Exp}\left[I\left(S[\varphi] + \int \mathbb{d}^4 x\, J\,\varphi\right)\right]$$

$$\tilde{Z}[J] = \int \mathbb{D}\eta\, \mathrm{Exp}\left[I\left(S[\varphi] + \int \mathbb{d}^4 x\, J\,\eta\right)\right]$$

$\tilde{Z}[J] \neq Z[J]$，通过微分$\tilde{Z}[J]$和$Z[J]$得到的格林函数（1.7.14.15）也不想等。

一个重要的物理诠释是：从$\tilde{Z}[J]$和$Z[J]$得到的S矩阵事实上是一样的。

想象一位朋友，使用的是$\tilde{Z}[J]$，设立一个源来产生或者消除$\eta = \varphi + \alpha\,\varphi^3$扰动。

既然如此，他就一次产生了三个场扰动而不是一个（概率由α决定）。

但是为了得到S矩阵，要把每个动量k的外退乘上格林函数$k^2 - m^2$，再设定k^2等于m^2。

完成这个手续后，图1.8.1a 的项被保留下来了--因为他有类似$\frac{1}{k^2-m^2}$的极点，但是额外的项如 1.8.1b，则被消除掉了，也就是极点类型不同。

值得强调的是，这里的m是体系的真是物理质量。

精确来说，找一个单粒子态 ，并用哈密顿作用上去，会得到 。

出现在H本征值中的m就是这个粒子的真实质量。

1.9 扰乱真空

卡西米尔效应

真空可以被扰动。

$$2\int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} * \frac{1}{2}\hbar\,\omega_k$$

1948年，卡西米尔提出：我们可以扰动真空，并且产生一个该变量$\Delta\epsilon$，虽然ϵ不是可观测量，

但是由于扰动真空的方式是可控的，所以$\Delta\epsilon$应该是可观测量。

尤其是卡西米尔考虑，在真空中引入两个平行的“理想”导电平板（准确的说是零厚度且在两个方向无限延伸）。

随着两板之间距离d的变化，$\Delta\epsilon$的改变会引入一个梁板之间的力，叫做卡西米尔力。

事实上，是电磁场导致的卡西米尔力，而并不是上文的标量场。

定义垂直板面方向为x轴。由于电磁场必须满足导电平板的边界条件，波矢量只能取值$(\pi n/d, k_y, k_z)$。

因此两板之间每单位面积的能量改变了：$\sum_n \int \frac{dk_y\, dk_z}{(2\pi)^2}\sqrt{\left(\frac{\pi n}{d}\right)^2 + k_y^2 + k_z^2}$

****

为了计算，改变d，但是随后就要担心两板外的能量密度的变化了。机制的小技巧可以避免上面的担心：引入第三块板！

固定外部的两个板而移动中间的板。现在就不用担心板外的世界了。

两个外面的板的间隔可以想取多大就取多大。

****

为了方便计算进行简化，

在$(1+1)$维时空，并且用无质量标量场代替电磁场，进行计算。

根据上面的模型，能量$E = f[d] + f[L-d]$，其中：

$$f[d] = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n = \frac{\pi}{2d}\sum_{n=1}^{\infty} n$$

其中模式由 $\mathrm{Sin}\left[\frac{n\pi}{d}x\right]$给出，对应的能量为$\omega_n = \frac{n\pi}{d}$。

1.10 对称性

连续对称性

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left((\partial\varphi)^2 - m^2\vec{\varphi}^2\right) - \frac{\lambda}{4}(\vec{\varphi}^2)^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\partial\vec{\varphi}^T.\partial\vec{\varphi}\right) - m^2\vec{\varphi}^T.\vec{\varphi}\right) - \frac{\lambda}{4}\left(\vec{\varphi}^T.\vec{\varphi}\right)^2$$

诺特定理

$$R^{\mathsf{T}}.R = \mathbb{1},$$

$$\mathrm{Det}[R] = 1$$

可以构造$R = \mathrm{Exp}[\theta.T]$，其中$\theta.T = \sum_A \theta^A T^A$是一个实的反对称矩阵。群$\mathrm{SO}(N)$有$N(N-1)/2$个生成元，记作$T^A$（想想熟悉的例子$\mathrm{SO}(3)$）。

在无穷小变换下，$\varphi_a \to R_{ab}\varphi_b \simeq (1+\theta^A T^A)_{ab}\varphi_b$，换句话说，就有了无穷小量$\delta\varphi_a = \theta^A T^A{}_{ab}\varphi_b$。

****

$$R^{\mathsf{T}} R = \mathbb{1},$$

$$\left(1 + \theta^A T^{T,A}\right).\left(1 + \theta^A T^A\right) = \mathbb{1}$$

$$\mathbb{1} + \theta^A T^A + \theta^A T^{T,A} + O\left[\theta^{A,2}\right] = \mathbb{1} + \theta^A T^A + \theta^A T^{T,A} = \mathbb{1}$$

$$\theta^A T^A + \theta^A T^{T,A} = 0$$

$$T^A = -T^{T,A}$$

即T^A是实反对称矩阵。

$$\mathrm{Det}[A] = \mathrm{Det}\left[1 + \theta^A T^A\right] = \mathrm{Det}[1] + \mathrm{Det}\left[\theta^A T^A\right] = 1$$

so,$\mathrm{Det}\left[T^A\right] = 0$

实对称矩阵一定可以通过相似变换，其中行变换和列变换都是初等变换，把对角线上的零都移到同一行，所以行列式为0.

$$\epsilon\left[\mathrm{i1},\ \ldots,\ \mathrm{in}\right]\ (A)_{1,\mathrm{i1}} * \ldots * (A)_{n,\mathrm{in}}$$

$$\epsilon\left[\mathrm{i1},\ \ldots,\ \mathrm{in}\right]\ (A + B)_{1,\mathrm{i1}} * \ldots * (A + B)_{n,\mathrm{in}}$$

$$\epsilon\left[\mathrm{i1},\ \ldots,\ \mathrm{in}\right]\ (B)_{1,\mathrm{i1}} * \ldots * (B)_{n,\mathrm{in}}$$

$$\mathrm{Tr}[A.B] = (A.B)_{a,a} = A_{a,c}\, B_{c,a} \neq \mathrm{Tr}[A] * \mathrm{Tr}[B]$$

****

一个守恒流 和每一个连续对称性的生成元有关。

把我们理论中的记作φ_a。因为对称性是连续的，考虑一个无穷小变换$\delta\,\varphi_a$，因为拉格朗日量不发生变化，有

$$0 = \delta\,\mathcal{L} = \frac{\delta\,\mathcal{L}}{\delta\,\varphi_a}\,\delta\,\varphi_a + \frac{\delta\,\mathcal{L}}{\delta\,\partial_\mu\,\varphi_a}\,\delta\,\partial_\mu\,\varphi_a$$

$$= \frac{\delta\,\mathcal{L}}{\delta\,\varphi_a}\,\delta\,\varphi_a + \frac{\delta\,\mathcal{L}}{\delta\,\partial_\mu\,\varphi_a}\,\partial_\mu\,\delta\,\varphi_a$$

如果使用运动方程$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\varphi_a} = \partial_\mu\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\varphi_a}\right)$，两项会被合并，给出：

$$0 = \partial_\mu\left(\frac{\delta\,\mathcal{L}}{\delta\,\partial_\mu\,\varphi_a}\,\delta\,\varphi_a\right) \qquad (0.41)$$

如果定义:

$$J^\mu = \frac{\delta\,\mathcal{L}}{\delta\,\partial_\mu\,\varphi_a}\,\delta\,\varphi_a$$

那么 （1.10.5）就给出了$\partial_\mu J^\mu = 0$，我们得到了守恒流!

****

上面的讨论，对任意的群G使用，其中场φ在群G的任意表示$\mathcal{R}$下变换。

守恒流依然给作$J^A_\mu = \partial_\mu\,\varphi_a\left(T^A\right)_{\mathrm{ab}}\,\varphi^b$，其中$T^A$是表示$\mathcal{R}$下给定的。

例如，如果φ在SO[3]的5维表示下不变，那么T^A就是一个5*5矩阵。

对于群变换下不变的物理，只需要作用量是不变的就可以了。当表面项可以丢掉的时候，拉格朗日密度可以变换一个全微分:

$$\delta\,\mathcal{L} = \partial_\mu K^\mu$$

这样就可以从（1.10.5）中看出，只需要修改（1.10.6）为$J^\mu \equiv \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\varphi_a}\,\delta\varphi_a - k^\mu$就可以得到守恒流的公式。

很多超对称场论就是这个类型。

****

$$\mathrm{for},\ \mathcal{L} = \frac{1}{2}\left((\partial\varphi)^2 - m^2\,\vec{\varphi}^2\right)$$

$$\frac{\delta\,\mathcal{L}}{\delta\,\varphi_a} = m^2\,\varphi_a$$

$$\varphi_a\,\delta\varphi_a = \frac{1}{2}\,\delta\,\varphi_a^2 = 0$$

$$\left(1 + \theta^A\,T^A\right)_{\mathrm{ab}}\,\varphi_b\left(\theta^B\,T^B{}_{\mathrm{ac}}\,\varphi_c\right)$$

$$= \left(\delta_{ab} + \Theta^A T^A_{ab}\right) \varphi_b \left(\Theta^B T^B{}_{ac} \varphi_c\right)$$

$$= \Theta^B T^B{}_{ac} \varphi_a \varphi_c + \Theta^A \Theta^B T^A_{ab} T^B{}_{ac} \varphi_b \varphi_c$$

因为是反对称矩阵，所以上面的表达式等于0

$$\left(A^{\mathsf{T}}.B\right)^{\mathsf{T}} = B^{\mathsf{T}}.A = -B.(A) = B.A$$

++++++++++++++++++++++++++++++

有些作者喜欢用复杂的推导方法。

假设作用量在无穷小变换$\delta\varphi_a = \theta^A V^A$下不变，【其中$\theta^A$是一些参数，$A$是指标，$V^A_a$是场$\varphi_b$或者它们一阶导数的函数】。

值得强调的是，当我们说作用量S不改变时，我们不需要使用运动方程。

毕竟，欧拉-拉格朗日运动方程是在任意变分$\delta\varphi_a$下$\delta S = 0$，推导出来的，并服从一些边界条件。

我们的标量场理论良好的展示了这一点，而这一点在别的书中有时很迷惑：

$\delta S = 0$仅仅是因为S是由$O(N)$矢量的标量积构建的。

现在让我们做一点怪事儿。我们还是考虑上面的无穷小变换，但是其中的参数θ^A依赖于x。换句话说，我们考虑$\delta\varphi_a = \theta^A[x] V^A$.

当然现在没有理由说δS会消失。

但是，在另一方面，我们知道如果θ^A是常数的话，δS的确会消失。δS必须有这种形式：$\delta S = \int d^4 x J^\mu[x] \partial_\mu \theta^A[x]$。

从实践上来说，这给了我们一种快速读出$J^\mu[x]$的方法。它就是δS中$\partial_\mu \theta^A[x]$的系数。

****

对于$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left((\partial\varphi)^2 - m^2 \vec{\varphi}^2\right) - \frac{\lambda}{4}(\vec{\varphi}^2)^2$展现这一过程。

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi_a} \delta \varphi_a + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \varphi_a} \partial_\mu \delta \varphi_a = 0$$

$$\varphi_a = \left(1 + \Theta^A T^A\right)_{ab} \varphi_b$$

$$\delta \varphi_a = \Theta^A T^A{}_{ab} \varphi_b$$

****

Schwartz book

$$S = \int dt\, L = \int d^4 x\, \mathcal{L}[x]$$

$\mathcal{L}[x]$是φ和它的一阶导数的泛函。

现在，令$\varphi \to \delta\varphi$，then

$$\delta S = \int d^4 x \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi_a} \delta \varphi_a + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \varphi_a} \delta(\partial_\mu \varphi_a)\right)$$

做一个分部积分，

$$= \int d^4 x \left(\left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi_a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_a)}\right) \delta \varphi_a + \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \varphi_a)} \delta \varphi_a\right)\right)$$

有一个always的假设：我们的场在asymptotic 边界消失，$\delta S = 0$就得到了运动方程。

如果拉格朗日量有一个连续对称性

$$0 = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \alpha} = \sum_n \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi_n} - \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \varphi_n)}\right) \frac{\delta \varphi_n}{\delta \alpha} + \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \varphi_n)} \frac{\delta \varphi_n}{\delta \alpha}\right)$$

其中φ_n是拉格朗日量依赖的一组场。

跟推导运动方程不同的是，即使φ_n的取值不能使作用量取极值，

也就是说不遵守运动方程，上面的方程仍然成立。因为这个变分对应着一个对称性。

当运动方程满足时，有

$$\partial_\mu J_\mu = 0$$

$$J_\mu = \sum_n \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta\,(\partial_\mu \varphi_n)} \frac{\delta \varphi_n}{\delta \alpha}$$

如果拉格朗日量有一个连续对称性，那么将存在一个守恒流，当运动方程被满足时候。

对称性必须是连续的，而不能是离散的

在壳的时候，流才守恒。也就是运动方程满足。

对于 global 对称性成立，而不需要有规范对称性，也不需要相应的 spin-1 massless 粒子

总结

诺特定理得到守恒流，需要运动方程被满足。

拉格朗日量具有对称性，显而易见对于 global 变换等于0。

诺特定理的证明过程，相当于是找到了这个连续变换的系数。

这个系数是$\partial_\mu J^\mu = 0$的形式，但J^μ本身并不需要等于0

****

QED：

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}(I.\gamma^\mu.(\partial_\mu - I\,e\,A_\mu) - m)\,\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

$$= \overline{\psi}(I.\gamma^\mu.\partial_\mu - m).\psi + e\,\gamma^\mu.A_\mu\,\overline{\psi}.\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

ψ是非厄米场，每个分量有两个自由度。

可以任意进行线性组合，选取基。把ψ and $\overline{\psi}$选成基，每个有四个分量，总共八个分量。

欧拉--拉格朗日方程为

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi_n} - \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \varphi_n)} = 0$$

对于费米子，也就是电子，进行变分，矢量运算和变分运算互相可以透过，看起来就像是直接对矢量变分一样。

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \overline{\psi}} = (I.\gamma^\mu.\partial_\mu - m).\psi + e\,\gamma^\mu.A_\mu.\psi = (I.\gamma^\mu.\partial_\mu - m + e\,\gamma^\mu.A_\mu).\psi = 0$$

而自由狄拉克场的运动方程是$(I.\gamma^\mu.\partial_\mu - m).\psi = 0$

它们并不相同。

但是守恒流的表达式$\sum_n \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\varphi_n)} \frac{\delta\varphi_n}{\delta\alpha}$，对应此时为

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}(I.\gamma^\mu.\partial_\mu - m).\psi + e\,\gamma^\mu.A_\mu\,\overline{\psi}.\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

$$\psi \to \mathrm{Exp}[I\,e\,\alpha]\,\psi = (1 + I\,e\,\alpha)\,\psi,$$

$$\overline{\psi} \to \overline{\psi}\,\mathrm{Exp}[-I\,e\,\alpha] = \overline{\psi}(1 - I\,e\,\alpha),$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta\left(\partial_\mu \overline{\psi}\right)} \frac{\delta \overline{\psi}}{\delta \alpha} + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta\,(\partial_\mu \psi)} \frac{\delta \psi}{\delta \alpha} = \overline{\psi}\,I \star \gamma^\mu.I\,e\,\psi = -I\,e\,\overline{\psi}.\gamma^\mu.\psi$$

电子跟光子耦合项中，并不含$\partial_\mu\psi$项，所以不影响费米子守恒流的表达式，

运动方程方面，我们认为新的运动方程也被满足，所以守恒流成立，且形式和原来相同。

区别就在于运动方程改变了。

不和光子耦合时候的local变换

如果变换是定域的$\delta\varphi_a = \theta^A[x]\,V^A$，也就是一个规范变换。

θ^A是一些参数，A是指标，V^A_a是场φ_b或者它们一阶导数的函数。

那么就像 Zee 说的，如果理论中没有引入规范玻色子补偿费米子的规范变换，那么$\delta S \neq 0$。

****

$$\delta\mathcal{L} = \sum_n \left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\varphi_n} - \partial_\mu \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\varphi_n)}\right)\delta\varphi_n + \partial_\mu\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\varphi_n)}\delta\varphi_n\right)$$

考虑运动方程不变，仍然被满足，所以左边一项系数仍然为0。

第二项里面，$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\varphi_n)}$也不变，变的仅仅是$\delta\varphi_a = \theta^A[x]\,V^A$。

原本的情况下，θ^A是常数。

$$\partial_\mu\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\varphi_n)}\delta\varphi_n\right) = \partial_\mu\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\varphi_n)}\theta^A V^A\right) = \theta^A\,\partial_\mu\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\varphi_n)}V^A\right)$$

现在，$\theta^A[x]$不是一个常数，

$$\theta^A\left(\partial_\mu\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\varphi_n)}V^A\right)\right) + \left(\partial_\mu\theta^A\right)\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\varphi_n)}V^A\right)$$

可以发现，$\left(\partial_\mu\theta^A\right)$ 一线的系数，正好是守恒流的表达式。

从实践上来说，这给了我们一种快速读出$J^\mu[x]$的方法。它就是δS中$\partial_\mu\theta^A[x]$的系数。

成立的条件就是，δS中的$\delta\varphi$可以写成这种形式

$\delta\varphi_a = \theta^A[x]\,V^A$，$\theta^A$是一些参数，$A$是指标，$V^A_a$是场$\varphi_b$或者它们一阶导数的函数。

作为生成元的荷

用章节1.8中的正则形式理论，我们可以推导出守恒流对应的守恒荷的结果

$$J^\mu = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\,\partial_\mu\varphi_a}\delta\varphi_a - K^\mu$$

注意到Q不依赖时间：

$$\frac{dQ}{dt} = \int d^3x\,\partial_0 J^0 = -\int d^3x\,\partial_i J^i = 0$$

其中$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\varphi_a}$就是场$\varphi_a$共轭的正则动量，可以得到：

$$I\,[Q,\,\varphi_a] = \delta\varphi_a$$

荷算符生成了场对应的变换。

一个重要的例子就是SO[2] ≃ U[1]时复场φ。此时$[Q,\varphi_a] = \varphi$且$\mathrm{Exp}[I\,\theta\,Q]\,\varphi\,\mathrm{Exp}[-I\,\theta\,Q] = \mathrm{Exp}[I\,\theta]\,\varphi$

1.11 弯曲时空中的场论

1.12 场论回顾

第一部分回顾

量子场论无非就是一个超大积分：

$$Z[J]=\int \mathbb{D}\varphi\,\mathrm{Exp}\left[I\int \mathbb{d}^{D+1}x\left(\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2-\frac{1}{2}m^2\varphi^2-\lambda\varphi^4+J\varphi\right)\right]$$

通过重复的泛函微分$Z[J]$然后令$J=0$可以得到

$$Z[J]=\int \mathbb{D}\varphi *\varphi[x_1]*\varphi[x_2]*\ldots*\varphi[x_n]\,\mathrm{Exp}\left[I\int \mathbb{d}^{D+1}x\left(\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2-\frac{1}{2}m^2\varphi^2-\lambda\varphi^4\right)\right]$$

它代表和场φ有关的n粒子在时空点$x_1, x_2, \ldots, x_n$上产生湮灭以及在之间相互作用的振幅。

由于不会计算原积分，进行级数展开：

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-I\lambda)^k}{k!}\int \mathbb{D}\varphi *\varphi[x_1]*\varphi[x_2]*\ldots*\varphi[x_n]\left(\int \mathbb{d}^{D+1}y\,\varphi[y]^4\right)^k\mathrm{Exp}\left[I\int \mathbb{d}^{D+1}x\left(\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2-\frac{1}{2}m^2\varphi^2\right)\right]$$

泛函积分宗量，拉下来的每一个宗量函数，都有自己独有的自变量，用以体现泛函不依赖于函数自变量的特点。

****

考虑泛函积分的简化，在(0 + 1)--维空间，也就是没有空间，它就变成了

$$Z[J]=\int \mathbb{D}\varphi\,\mathrm{Exp}\left[I\int \mathbb{d}t\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\mathbb{d}\varphi}{\mathbb{d}t}\right)^2-\frac{1}{2}m^2\varphi^2-\lambda\varphi^4+J\varphi\right)\right]$$

其中t就是唯一的时空坐标。

注意到上面的作用量就是非谐振子的量子力学，它的质量中心被弹簧挂住，记作φ，以及受到一个外力J的推动。

****

在量子场论中，作用量的每一项都有物理意义：前两个项推广了谐振子来包括空间的变化，第三项是非谐性，最后一项是外加的驱动。

你可以把量子场论想象成无数个非谐振子的集合，每一个时空点就有一个谐振子。

我们在这里定义了标量场，后面还会见到旋量场。

洛伦兹不变性和其他一些对称性会约束场作用量的形式。积分会看起来更加复杂，但是手段正是这里列出来的这些。

量子场论，仅此而已。