



# Parton Distribution note

ChPT PDF relevant

作者: Thomas Young

组织: IHEP

时间: January 2, 2020

版本: 1.00



*Stay sleepy, stay tired*

# 目 录



<b>1</b>	<b>留数定理</b>	<b>1</b>
1.1	留数定理-prepare . . . . .	2
1.2	应用留数定理计算实变函数定积分 . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Light Cone relevant</b>	<b>6</b>

# 第 1 章 留数定理

对于多项式单宗量复变函数积分, 总结起来:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z-\alpha} = \begin{cases} 0, & \alpha \text{ isn't included in } l \\ 1, & \alpha \text{ is included in } l \end{cases}$$
$$\frac{1}{2\pi i} \oint (z-\alpha)^n dz = 0 (n \neq -1)$$

因为原函数一个是多值函数  $\ln(z-\alpha)$ , 一个是单值函数  $(z-\alpha)^{n+1}/(n+1)$

柯西定理 (2.2.1) 指出, 如被积函数  $f(z)$  在回路  $l$  所围闭区域上是解析的, 则回路积分  $\oint f(z)dz$  等于 0.

现考虑回路  $l$  包围  $f(z)$  的奇点的情形。

先设  $l$  只包围着  $f(z)$  的一个孤立奇点  $z_0$ , 在以  $z_0$  为圆心而半径为零的圆环域上将  $f(z)$  展为洛朗级数

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k \quad (1.1)$$

由柯西定理回路任意易形, 洛朗级数除去  $k=-1$  的一项之外全为 0, 而  $k=-1$  的一项的积分等于  $2\pi i$ . 于是

$$\oint_l f(z)dz = 2\pi i a_{-1} \quad (1.2)$$

洛朗级数的  $(z-z_0)^{-1}$  项的系数因而具有特别重要的地位, 专门起了名字, 称为函数  $f(z)$  在点  $z_0$  的**留数** (或残数), 通常记作  $\text{Res } f(z_0)$ , 这样,

$$\oint_l f(z)dz = 2\pi i \text{Res } f(z_0) \quad (1.3)$$

如果  $l$  包围着  $f(z)$  的  $n$  个孤立奇点  $b_1, b_2, \dots, b_n$  的情形. 做回路  $l_1, l_2, \dots, l_n$  分别包围  $b_1, b_2, \dots, b_n$ . 并使每个回路只包围一个奇点, 按照柯西定理,

$$\oint_l f(z)dz = \oint_{l_1} f(z)dz + \oint_{l_2} f(z)dz + \dots + \oint_{l_n} f(z)dz \quad (1.4)$$

于是得到,

$$\oint_l f(z)dz = 2\pi i [\text{Res } f(b_1) + \text{Res } f(b_2) + \cdots + \text{Res } f(b_n)] \quad (1.5)$$

**定理 1.1 (留数定理)** 设函数  $f(z)$  在回路  $l$  所围区域  $B$  上除有限个孤立奇点  $b_1, b_2, \dots, b_n$  外解析, 在闭区域  $\bar{B}$  上除  $b_1, b_2, \dots, b_n$  外连续, 则

$$\oint f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res } f(b_j) \quad (1.6)$$

留数定理将回路积分归结为被积函数在回路所围区域上各奇点的留数之和.

函数  $f(z)$  在全平面上所有各点的留数之和为零. 这里说的所有各点包括无限远点和有限远的奇点.

## 1.1 留数定理-prepare

一般地, 在以奇点为圆心的圆环域上将函数展开为洛朗级数, 取它的负一次幂项的系数就行了. 对于极点, 可以不用做洛朗展开而直接求出留数.

设  $z_0$  是  $f(z)$  的单极点. 洛朗展开应是

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots \quad (1.7)$$

这样,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)f(z)] = \text{Res } f(z_0) \quad (1.8)$$

(1.8)既可用于计算函数  $f(z)$  在单极点  $z_0$  的留数, 也可用来判断  $z_0$  是否为函数  $f(z)$  的单极点.

若  $f(z)$  可以表示为  $P(z)/Q(z)$  的特殊形式, 其中  $P(z)$  和  $Q(z)$  都在  $z_0$  点解析,  $z_0$  是  $Q(z)$  的一阶零点.  $P(z_0) \neq 0$ , 从而  $z_0$  是  $f(z)$  的一阶极点, 则

$$\text{Res } f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)} \quad (1.9)$$

上式最后一步应用了洛必达法则.

同理, 若  $z_0$  是  $f(z)$  的  $m$  阶极点. 洛朗展开应是

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{a_{-(m-1)}}{(z - z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots \quad (1.10)$$

故有, 判断极点:



$$\lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)^m f(z)] = \text{非零有限值} \quad (1.11)$$

求留数:

$$\text{Res } f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)] \quad (1.12)$$

用以上公式, 可以判断函数  $f(z)$  的极点阶数, 并求出  $f(z)$  在极点的留数

## 1.2 应用留数定理计算实变函数定积分

首先将实变函数定积分跟复变函数回路积分联系起来. 其要点如下:

定积分  $\int_a^b f(x)dx$  的积分区间  $[a, b]$  可以看作是复数平面上实轴上的一段  $l_1$ , 于是, 或者利用自变数的变换把  $l_1$  变换为某个新的复数平面上的回路, 这样就可以应用留数定理了;

或者另外补上一段曲线  $l_2$ , 使  $l_1$  和  $l_2$  合成回路  $l$ ,  $l$  包围着区域  $B$ . 将  $f(x)$  解析延拓到闭区域  $B$  (这个延拓往往只是把  $f(x)$  改为  $f(z)$  而已), 并把它沿着  $l$  积分,

$$\oint f(z)dz = \int_{l_1} f(x)dx + \int_{l_2} f(z)dz \quad (1.13)$$

上式左边可以应用留数定理, 右边第一个积分就是所求的定积分. 如果右边第二个积分较易算出 (往往证明为零) 或可用第一个积分表出, 问题就算解决了。

下面介绍几种类型的实变定积分。

类型一  $\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx$ . 被积函数是三角函数的有理式; 积分区间是  $[0, 2\pi]$ .

作自变数代换

$$z = e^{ix} \quad (1.14)$$

当实变数  $x$  从 0 变到  $2\pi$  时, 复变数  $z = e^{ix}$  从  $z = 1$  出发沿单位圆  $|z| = 1$  逆时针走一圈又回到  $z = 1$ , 实变定积分化为复变回路积分, 就可以应用留数定理了。至于实变定积分里的  $\cos x$  和  $\sin x$ , 则按(1.14)而做如下变换

$$\cos x = \frac{1}{2}(z + z^{-1}), \quad \sin x = \frac{1}{2i}(z - z^{-1}), \quad dx = \frac{1}{iz} dz \quad (1.15)$$

于是, 原积分化为

$$I = \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) \frac{dz}{iz} \quad (1.16)$$

类型二  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ . 积分区间是  $(-\infty, +\infty)$ ;

复变函数  $f(z)$  在实轴上没有奇点, 在上半平面除有限个奇点外是解析的; 当  $z$  在上半平面及实轴上  $\rightarrow \infty$  时,  $zf(z)$  一致地  $\rightarrow 0$ 。

如果  $f(x)$  是有理分式  $\phi(x)/\psi(x)$ , 上述条件意味着  $\psi(x)$  没有实的零点,  $\psi(x)$  的次数至少高于  $\phi(x)$  两次

这一积分通常理解为下列极限:

$$I = \lim_{R_1 \rightarrow \infty, R_2 \rightarrow \infty} \int_{-R_1}^{R_2} f(x) dx \quad (1.17)$$

若极限存在的话, 这一极限便称为反常积分  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  的值。而当  $R_1 = R_2 \rightarrow \infty$  时极限存在的话, 该极限便称为积分  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  的主值, 记作

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx \quad (1.18)$$

本类型积分要计算的是积分主值。考虑半圆形回路  $l$

$$\oint f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz \quad (1.19)$$

根据留数定理, 上式即

$$2\pi i f(z) \text{ 在 } l \text{ 所围半圆内各奇点的留数之和} = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz \quad (1.20)$$

令  $R \rightarrow \infty$ 。上式左边趋于  $2\pi i f(z)$  在  $l$  所围半圆内各奇点的留数之和, 右边第一个积分趋于所求的定积分  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ , 第二个定积分可证明是趋于零的:

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| = \left| \int_{C_R} z f(z) \frac{dz}{z} \right| \leq \int_{C_R} |z f(z)| \frac{|dz|}{|z|} \leq \max |z f(z)| \frac{\pi R}{R} = \pi \cdot \max |z f(z)| \rightarrow 0 \quad (1.21)$$

式中  $\max |z f(z)|$  是  $|z f(z)|$  在  $C_R$  上的最大值。于是得到结果

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i f(z) \text{ 在上半平面所有奇点的留数之和} \quad (1.22)$$

类型三  $\int_0^{\infty} F(x) \cos mx dx, \int_0^{\infty} G(x) \sin mx dx$ . 积分区间是  $[0, +\infty]$ ; 偶函数  $F(z)$  和奇函数  $G(z)$  在实轴上没有奇点, 在上半平面除有限个奇点外是解析的;

当  $z$  在上半平面或实轴上  $\rightarrow \infty$  时,  $F(z)$  及  $G(z)$  一致地  $\rightarrow 0$

首先, 将所求积分的形式变换一下,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} F(x) \cos mx dx &= \int_0^{\infty} F(x) \frac{1}{2} (e^{imx} + e^{-imx}) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} F(x) e^{imx} dx + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} F(x) e^{-imx} dx \end{aligned}$$

在右边第二个积分中做代换  $x = -y$ , 并考虑到  $F(x)$  是偶函数, 得

$$\int_0^{\infty} F(x) \cos mx dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} F(x) e^{imx} dx - \frac{1}{2} \int_0^{-\infty} F(y) e^{imy} dy \quad (1.23)$$

将右边第二项积分的积分变数再改成  $x$ , 则

$$\int_0^{\infty} F(x) \cos mx dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} F(x) e^{imx} dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 F(x) e^{imx} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{imx} dx \quad (1.24)$$

同理,

$$\int_0^{\infty} G(x) \sin mx dx = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} G(x) e^{imx} dx \quad (1.25)$$

(1.24) and (1.25) 右边积分的计算, 需要用到约当引理。

### 1.2.1 约当引理

如  $m$  为证书,  $C_R$  是以原点为圆心而位于上半平面的半圆周, 又设当  $z$  在上半平面及实轴上  $\rightarrow \infty$  时  $F(z)$  一致地  $\rightarrow 0$ , 则

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} F(z) e^{imz} dz = 0 \quad (1.26)$$

证明:

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} F(z) e^{imz} dz \right| &= \left| \int_{C_R} F(z) e^{imx-my} dz \right| \\ &= \left| \int_0^{\pi} F(Re^{i\phi}) e^{-mR \sin \phi} e^{imR \cos \phi} Re^{i\phi} i d\phi \right| \\ &\leq \max |F(z)| \cdot \int_0^{\pi} e^{-mR \sin \phi} R d\phi \end{aligned}$$

当  $z$  在上半平面或实轴上  $\rightarrow \infty$  时,  $F(z)$  一致地  $\rightarrow 0$ , 所以  $\max |F(z)| \rightarrow 0$ , 从而只需证明

$$\begin{aligned} &\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} e^{-mR \sin \phi} R d\phi \\ i.e. &2 \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} e^{-mR \sin \phi} R d\phi \end{aligned}$$

是有界的。

在  $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$  范围内,  $0 \leq 2\phi/\pi \leq \sin \phi$ ,

$$\int_0^{\pi/2} e^{-mR \sin \phi} R d\phi \leq \int_0^{\pi/2} e^{-2mR\phi/\pi} R d\phi = \frac{\pi}{2m} (1 - e^{-mR}) \quad (1.27)$$

于  $R \rightarrow \infty$ , 上式趋于有限值, 这就证明了约当引理。

如果  $m$  是负数, 则约当引理应为

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C'_R} F(z) e^{imz} dz = 0 \quad (1.28)$$

$C'_R$  是  $C_R$  对于实轴的映像。

类型四

## 第 2 章 Light Cone relevant

**定义 2.1 (光锥动量)** 在光锥坐标中，动量的各分量定义为：

$$\begin{aligned} k^\pm &= k_0 \pm k_3, \quad k_\perp^2 = k_1^2 + k_2^2 \\ k^2 &= k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2 = k^+ k^- - k_\perp^2, \\ p^+ p^- &= M^2, \quad p_\perp^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

$k_\perp$  : 垂直方向的动量，在垂直面上可以分解成两个方向的投影，把这个矢量记作  $\vec{k}_\perp$ ，其模方为  $k_\perp^2$

上式最后一行中我们假设核子在  $z$  方向快速运动，因此  $p_\perp^2 = 0$

**定义 2.2 (光锥动量)** 符号约定: 介子和重子传播子因子  $D_\phi(k)$  和  $D_B(k)$  定义为：

$$\begin{aligned} D_\phi(k) &= k^2 - m_\phi^2 + i\epsilon = k^+ k^- - k_\perp^2 - m_\phi^2 + i\epsilon = k^+ k^- - \Omega_\phi + i\epsilon, \\ D_B(p-k) &= (p-k)^2 - m_B^2 + i\epsilon = (p-k)^+ (p-k)^- - k_\perp^2 - m_B^2 + i\epsilon \\ &= (p-k)^+ (p-k)^- - \Omega_B + i\epsilon \end{aligned}$$

**定义 2.3 (光锥动量)** 光锥积分：如 (3.33) 式所示，被积函数化简后变为  $\frac{1}{D_\phi^n D_B^m}$  ( $n$  和  $m$  为自然数) 类型的积分。此类积分可通过计算它们的留数求解：

$$\begin{aligned} \int dk^- \frac{1}{D_\phi D_B} &= -\frac{2\pi i p^+ \bar{y}}{D_{\phi B}} \\ \int dk^- \frac{1}{D_\phi^2 D_B} &= \frac{\partial}{\partial m_\phi^2} \int dk^- \frac{1}{D_\phi D_B} = \frac{-2\pi i}{D_{\phi B}^2 p^+ \bar{y}} \\ \int dk^- \frac{1}{D_\phi D_B^2} &= \frac{\partial}{\partial M_B^2} \int dk^- \frac{1}{D_\phi D_B} = \frac{-2\pi i y}{D_{\phi B}^2 p^+ \bar{y}^2} \end{aligned} \quad (2.2)$$

作为一个例子，演示第一个积分的计算过程，根据留数定理：



$$\begin{aligned}
\int dk^- \frac{1}{D_\phi D_B} &= -2\pi i \text{Res} \left[ \frac{1}{D_\phi D_B} \right]_{\text{lower half plane}} \\
&= -2\pi i \lim_{k^- \rightarrow \frac{\Omega_\phi}{k^+}} \frac{k^- - \frac{\Omega_\phi}{k^+}}{(k^+ k^- - \Omega_\phi + i\epsilon) [(p^+ - k^+) (p^- - k^-) - \Omega_B + i\epsilon]} \\
&= -2\pi i \lim_{k^- \rightarrow \frac{\Omega_\phi}{k^+}} \frac{k^- - \frac{\Omega_\phi}{k^+}}{(p^+ - k^+) k^+ \left( k^- - \frac{\Omega_\phi}{k^+} + \frac{i\epsilon}{k^+} \right) \left[ (p^- - k^-) - \frac{\Omega_B}{p^+ - k^+} + \frac{i\epsilon}{p^+ - k^+} \right]} \\
&= \frac{-2\pi i}{(p^+ - k^+) k^+ \left[ \left( p^- - \frac{\Omega_\phi}{k^+} \right) - \frac{\Omega_B}{p^+ - k^+} \right]} \\
&= \frac{2\pi i}{p^+ \left[ k_\perp^2 + (1-y)m_\phi^2 + y(1-y)M^2 + yM_B^2 \right]} \\
&= \frac{-2\pi i}{p^+ D_{\phi B} \bar{y}}
\end{aligned}$$

$\delta$  函数项的积分： $\frac{1}{D_\phi^n}$  和  $\frac{K^+ k^-}{D_\phi^n}$  ( $n$  为自然数) 类型的积分由下式给出：

$$\begin{aligned}
\int dk^- \frac{1}{D_\phi} &= 2\pi i \log \left( \frac{\Omega_\phi}{\mu^2} \right) \frac{\delta(y)}{p^+}, \\
\int dk^- \frac{1}{D_\phi^2} &= \frac{\partial}{\partial \Omega_\phi} \int dk^- \frac{1}{D_\phi} = \frac{2\pi i}{p^+ \Omega_\phi} \delta(y) \\
\int dk^- \frac{k^+ k^-}{D_\phi} &= 2\pi i \delta(y) \frac{\Omega_\phi}{p^+} \left[ \log \left( \frac{\Omega_\phi}{\mu^2} \right) - 1 \right] \\
\int dk^- \frac{k^+ k^-}{D_\phi^2} &= \frac{\partial}{\partial \Omega_\phi} \int dk^- \frac{k^+ k^-}{D_\phi} = 2\pi i \log \left( \frac{\Omega_\phi}{\mu^2} \right) \frac{\delta(y)}{p^+}
\end{aligned}$$