

A.Zee.note.2.nb

initial 1

In[4]:=

```
If[
  (* if $ScriptCommandLine==={}, the environment is frontend*)
  SameQ[$ScriptCommandLine, {}],
  (*if execute in the frontend mode, refresh the title name*)
  CompoundExpression[
    (*文件绝对路径*)
    filename = NotebookFileName[],
    (*单元对象,第一个单元*)
    cell`title = First[Cells[], "please Open the frontend"],
    (*刷新第一个单元的名字*)
    NotebookWrite[cell`title, Cell[Last[FileNameSplit[filename]], "Title"]],
    (*if execute in commandline mode, print a ready message*)
    git`root`dir = First[StringCases[NotebookDirectory[], StartOfString ~~
      (WordCharacter | ":" | "\\") ..] ~~ "octet.formfactor"],
    "please adjust the string pattern"]
    (*add the base git root dir*)
  ],
  CompoundExpression[
    Print["Ready to execute this script"]
  ]
]
```

Out[4]= please adjust the string pattern

***** notebook 备忘录

记录 A.Zee 书上的公式

print

打印笔记本

```
In[6]:= Export[NotebookDirectory[] <> FileNameBaseName[filename] <> ".pdf", EvaluationNotebook[]]
```

[\[导出\]](#) [\[当前笔记本的目录\]](#) [\[文件基本名\]](#) [\[运行的笔记本\]](#)

Out[5]= C:\note\qft\A.Zee.note.2.pdf

笔记本字体设置

```
In[*]:= AbsoluteOptions[EvaluationNotebook[], StyleDefinitions];
```

[\[绝对设置\]](#) [\[运行的笔记本\]](#) [\[样式定义\]](#)

```

In[ ]:= style`my = Notebook[{
    [笔记本]
    Cell[StyleData[StyleDefinitions →
        [单元 [样式数据 [样式定义]
            FrontEnd`FileName[{"Book"}, "Textbook.nb", CharacterEncoding → "UTF-8"]]],
            [字符编码]
        Cell[StyleData["Section"], FontFamily → "Noto Sans CJK SC Bold",
            [单元 [样式数据 [字体系列 [粗体]
                FontSize → 16, FontWeight → "Bold", FontSlant → "Plain",
                [字体大小 [字体粗细 [粗体 [字体倾斜 [普通字体]
                    FontVariations → {"StrikeThrough" → False, "Underline" → False}],
                    [字体变化 [假 [假]
                Cell[StyleData["Subsection"], FontFamily → "Noto Sans CJK SC Black",
                [单元 [样式数据 [字体系列 [黑色]
                    FontSize → 13, FontWeight → "Heavy", FontSlant → "Plain",
                    [字体大小 [字体粗细 [字体倾斜 [普通字体]
                        FontVariations → {"StrikeThrough" → False, "Underline" → False}],
                        [字体变化 [假 [假]
                    Cell[StyleData["Subsubsection"], FontFamily → "Noto Sans CJK SC Bold",
                    [单元 [样式数据 [字体系列 [粗体]
                        FontSize → 11, FontWeight → "Bold", FontSlant → "Plain",
                        [字体大小 [字体粗细 [粗体 [字体倾斜 [普通字体]
                            FontVariations → {"StrikeThrough" → False, "Underline" → False}],
                            [字体变化 [假 [假]
                        Cell[StyleData["Text"], FontFamily → "Noto Sans CJK SC Regular",
                        [单元 [样式数据 [文本 [字体系列]
                            FontSize → 12, FontWeight → "Plain", FontSlant → "Plain",
                            [字体大小 [字体粗细 [普通字体 [字体倾斜 [普通字体]
                                FontVariations → {"StrikeThrough" → False, "Underline" → False}],
                                [字体变化 [假 [假]
                            },
                            Visible → False,
                            [可见否 [假]
                            StyleDefinitions → "PrivateStylesheetFormatting.nb"
                            [样式定义]
                        ]];
                    SetOptions[EvaluationNotebook[], StyleDefinitions → style`my];
                    [设置选项 [运行的笔记本 [样式定义]

```

狄拉克和旋量

狄拉克方程

凝视炉火

克利福德代数

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} = I \otimes \tau_3$$

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} = \sigma^i \otimes I \star \tau_2$$

插入

$$\psi[x] = \int d^4 p / (2\pi)^4 \text{Exp}[-I p \cdot x]$$

动量空间的狄拉克方程为，

$$(\gamma \mu \cdot p \mu - m) \cdot \psi[p] = 0$$

在静止系中, $p_\mu = (m, \vec{0})$,

$$(\gamma^0 - 1) \cdot \psi = 0$$

由于

$$(\gamma^0 - 1)^2 = -2(\gamma^0 - 1),$$

$\gamma^0 - 1$ 是一个投影算符。这样, 在静止系中, 选择 $\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$, Dirac 方程为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \cdot \psi = 0$$

从而告诉我们, ψ 的4个分量中有两个为 0

这非常合理, 因为我们知道, 电子具有2个物理自由度, 而不是4个。

从这个角度来看, 神秘的狄拉克方程不过是一个摆脱不必要自由度的投影操作而已。

与自旋为1的有质量粒子运动方程的讨论相比, A_μ 的4个分量中的1个被投影掉了。

克莱因-戈登方程 $(\partial^2 + m^2) \phi(x) = 0$ 也是把不满足在壳条件的傅里叶分量投影掉。

看待相对论物理学的运动方程提供了一个统一视角: 它们只是投影掉非物理的分量。

伽马矩阵一家

旋量变换

$$\psi[x] \rightarrow \psi'[x'] \equiv S[\Lambda] \cdot \psi[x]$$

整理出16个线性独立的4×4伽马矩阵。

我们已经知道了其中五个: 恒等矩阵和伽马矩阵。

我们的策略是把伽马矩阵简单相乘, 从而产生更多的4×4矩阵, 直到得到所有的16个。

由于每个伽马矩阵平方是±1, 并且彼此反对易, 所以我们只需考虑 $\gamma_\mu \gamma_\nu, \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda, \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\rho$, 其中 μ, ν, λ, ρ 各不相同。

因此, 我们需要考虑的唯一一个四重伽马矩阵乘积是

$$\gamma^5 \equiv I \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$$

$$\gamma^5 = I(I \otimes \tau_3) (\sigma^1 \otimes I \tau_2) (\sigma^2 \otimes I \tau_2) (\sigma^3 \otimes I \tau_2) = I^4 (I \otimes \tau_3) (\sigma^1 \sigma^2 \sigma^3 \otimes \tau_2)$$

所以,

$$\gamma^5 = I \otimes \tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

γ^5 是厄米的。与所有伽马矩阵反对易

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$$

所有不同的三种伽马矩阵乘积, 都可以写成 $\gamma^\mu \gamma^\nu$ 的形式。比如 $\gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = -I \gamma^0 \gamma^5$

我们把二重伽马矩阵乘积写成 $\gamma^\mu \gamma^\nu = \eta^{\mu\nu} - I \sigma^{\mu\nu}$, 其中

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{I}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

$$\sigma^{0i} = I \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \sigma^{ij} = \epsilon^{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} \cdot i.e., \sigma^{12} = \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix}$$

$\sigma^{\mu\nu}$ 这样的矩阵共有 $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ 个。

我们得到了所有的16个矩阵。

$$\{\eta^{\mu\nu}, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}, \gamma^\mu \gamma^5, \gamma^5\}$$

任意的4×4矩阵都可以用这16个矩阵的线性组合表示。

洛伦兹变换

普通转动写成 $\text{Exp}[i\vec{\theta}\vec{J}]$, \vec{J} 是转动的3个生成元, $\vec{\theta}$ 是三个转动参数。

洛伦兹群除了转动还包括平动, 我们以 \vec{K} 来表示平动的三个生成元。

6个生成元 \vec{J}, \vec{K} 如同电磁场 $F_{\mu\nu}$ 一样, 在洛伦兹群作用下, 作为反对称张量的分量变换, 因此用 $J_{\mu\nu}$ 来标记他们。

所以, 我们把洛伦兹变换写成 $\Lambda = \text{Exp}\left[\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\right]$, J^{ij} 产生转动, J^{0i} 产生平动,

反对称张量 $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ 中的 $6 = 4 \times \frac{3}{2}$ 分量分别对应3个转动和3个平动参数。

$$S[\Lambda] = \text{Exp}\left[\frac{-i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right]$$

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$$

在一个沿第3轴的转动下, $\phi \rightarrow \text{Exp}\left[-i\omega_{12} \times \frac{1}{2}\sigma^3\right]\phi$, 而 $\xi \rightarrow \text{Exp}\left[-i\omega_{12} \times \frac{1}{2}\sigma^3\right]\xi$ 。

ϕ 和 χ 作为2分量的泡利旋量变换。

$$[\sigma^{\mu\nu}, \gamma^\lambda] = 2i(\gamma^\mu\eta^{\nu\lambda} - \gamma^\nu\eta^{\mu\lambda})$$

for infinitesimal ω

$$S\gamma^\lambda S^{-1} = \gamma^\lambda - \frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}[\sigma^{\mu\nu}, \gamma^\lambda] = \gamma^\lambda + \gamma^\mu\omega_\mu{}^\lambda.$$

对应的有限大小变换为,

$$S\cdot\gamma^\lambda\cdot S^{-1} = \Lambda_\mu{}^\lambda\cdot\gamma^\mu$$

狄拉克双线性型

γ^0 是厄米的, γ^i 是反厄米的, 可以方便地表示为

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$$

所以 $\psi^\dagger\gamma^\mu\psi$ 不是厄米的; 反而 $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ 是厄米的, $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$

这个特点由闵可夫斯基度规(+, -, -, -)带来的

由此也可以推出,

$$(\sigma^{\mu\nu})^\dagger = \gamma^0\sigma^{\mu\nu}\gamma^0$$

因此, $S[\Lambda]^\dagger = \gamma^0\text{Exp}\left[\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right]\gamma^0$

这也说明了 S 不是么正的, 当然这一事实从 σ_{0i} 不是厄米的也可以知道。所以

$$\bar{\psi}'[x'] = \psi[x]^\dagger \cdot S[\Lambda]^\dagger \cdot \gamma^0 = \psi[x]^\dagger \cdot \gamma^0 \cdot \gamma^0 \cdot S[\Lambda]^\dagger \cdot \gamma^0 = \bar{\psi}[x] \text{Exp}\left[+\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right]$$

$$\bar{\psi}'[x'] \cdot \psi'[x'] = \bar{\psi}[x] \cdot \text{Exp}\left[+\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right] \cdot \text{Exp}\left[-\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right] \cdot \psi[x] = \bar{\psi}[x] \cdot \psi[x]$$

所以 $\bar{\psi}[x]\cdot\psi[x]$ 是一个洛伦兹标量

一共可以构造16个狄拉克双线性型 $\bar{\psi}[x]\cdot\Gamma\cdot\psi[x]$

宇称

物理学中的一个重要分立对称性就是宇称, 或者叫镜面反射。

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = (x^0, -\vec{x})$$

将狄拉克方程 (2.1.1) 乘以 γ^0 : $\gamma^0(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi[x] = 0$, i.e. $(i\gamma^\mu\partial'_\mu - m)\gamma^0\psi[x]$, 其中 $\partial'_\mu = \partial/\partial x'^\mu$ 。因此

$$\psi'[x'] \equiv \gamma^0\gamma^0\psi[x]$$

经此变换的 $\psi[x']$ 在空间反射的世界中满足狄拉克方程。（其中 η 是一个任意相位，一般设为1）。

在空间反射变换下，

$$\overline{\psi}'[x'] \cdot \psi'[x'] = \overline{\psi}[x] \cdot \gamma^0 \cdot \gamma^0 \cdot \psi[x] = \overline{\psi}[x] \cdot \psi[x]$$

$$\overline{\psi}'[x'] \cdot \gamma^5 \cdot \psi'[x'] = \overline{\psi}[x] \cdot \gamma^0 \cdot \gamma^5 \cdot \gamma^0 \cdot \psi[x] = -\overline{\psi}[x] \cdot \psi[x]$$

在洛伦兹变换下， $\overline{\psi}[x'] \cdot \gamma^5 \cdot \psi[x']$ 和 $\overline{\psi}[x'] \cdot \psi[x']$ 按照同样的方式变换，但在空间反演下按相反的方式变换。

换句话说， $\overline{\psi}[x'] \cdot \psi[x']$ 按标量变换， $\overline{\psi}[x'] \cdot \gamma^5 \cdot \psi[x']$ 按赝标量变换。

狄拉克拉格朗日量

狄拉克方程对应的拉格朗日量

$$\mathcal{L} = \overline{\psi} \cdot (I \star \gamma \cdot \partial - m) \psi$$

或者做分部积分，

$$\mathcal{L} = - \left(I \star \partial \cdot \overline{\psi} \cdot \gamma + m \star \overline{\psi} \right) \cdot \psi$$

取平均值，

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} I \star \left(\overline{\psi} \cdot \gamma \cdot \partial \cdot \psi - \partial \cdot \overline{\psi} \cdot \gamma \cdot \psi \right) - m \star \overline{\psi} \cdot \psi, \text{ or, } \mathcal{L} = \frac{I}{2} \star \overline{\psi} \cdot \left(\gamma \cdot \partial - m \right) \cdot \psi$$

在分部积分的意义下，向右偏导等价于向左偏导再加上一个负号。

$$I \star \gamma \cdot \partial \cdot \psi - m \star \psi = 0$$

$$I \star \partial \cdot \overline{\psi} \cdot \gamma + m \star \overline{\psi} = 0, \text{ or, } \overline{\psi} \cdot \left(I \star \overleftarrow{\partial} \cdot \gamma - m \right) = 0$$

作用量 $S = \int d^4 \mathcal{L}$ 是平等对待 ψ 和 $\overline{\psi}$ 的。

慢速和快速电子

给点一组伽马矩阵，求解狄拉克方程是很直接的。

$$(\gamma \cdot p - m) \psi[p] = 0$$

对于 $\psi[p]$ 而言，这是一个简单地矩阵方程。

sdafas

量子化狄拉克场

反对易

$$\{b_{\alpha}^{\dagger}, b_{\beta}^{\dagger}\} = 0$$

$$\{b_{\alpha}, b_{\beta}\} = 0$$

$$\{b_{\alpha}, b_{\beta}^{\dagger}\} = \delta_{\alpha\beta}$$

费米子粒子数算符仍然取为 $N = \sum_a b_{\alpha}^{\dagger} b_a$ ，上述的反对易关系可以保证，同往常一样，

$$\left[\sum_a b_{\alpha}^{\dagger} b_a, b_{\beta}^{\dagger} \right] = +b_{\beta}^{\dagger}$$

$$N \left| \theta \right\rangle = \theta, N b_{\beta}^{\dagger} \left| \theta \right\rangle = b_{\beta}^{\dagger} \left| \theta \right\rangle$$

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C] B$$

$$[AB, C] = A \{B, C\} - \{A, C\} B$$

狄拉克场

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} \cdot (I \star \gamma \cdot \partial - m) \cdot \psi$$

ψ 的共轭动量是 $\pi_\alpha = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_t \psi_\alpha} = I \star \psi^\dagger_\alpha$. 我们预料到正确的正则量子化步骤需要施加反对易关系:

$$\left\{ \psi_\alpha[\mathbf{t}, \vec{x}], \psi^\dagger_\alpha[\mathbf{t}, \vec{0}] \right\} = \delta^{(3)}[\vec{x}] \delta_{\alpha\beta}$$

平面波展开 $u[p, s] \text{Exp}[-I p \cdot x]$ 和 $v[p, s] \text{Exp}[+I p \cdot x]$ 插入 $(I \star \gamma \cdot \partial - m) \cdot \psi = 0$, 得到,

$$(\gamma \cdot p - m) u[p, s] = 0$$

and

$$(\gamma \cdot p + m) v[p, s] = 0$$

我们的策略是再静止系中利用一个特殊的基进行运算, 然后援引洛伦兹不变性和基无关性。

在狄拉克基下, $\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$, 所以两个独立的 u, v 分别为

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

归一化为 $\bar{u}[p, s] \cdot u[p, s] = 1$, $\bar{v}[p, s] \cdot v[p, s] = -1$ 注意有一个减号

求和关系,

将场升格为算符:

$$\psi_\alpha[x] = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2} (E_p/m)^{1/2}} \sum_s \left(b[p, s] \star u_\alpha[p, s] \star \text{Exp}[-I p \cdot x] + d^\dagger[p, s] \star v_\alpha[p, s] \star \text{Exp}[+I p \cdot x] \right)$$

这里使用静止归一化。

需要注意的是: 在 (2.2.10) 中, $b[p, s]$, $d^\dagger[p, s]$, $u[p, s]$ 和 $v[p, s]$ 写作是 4--动量的函数, 但严格地说, 它们只是 \vec{p} 的函数, 其中 p^0 总是理解为 $+\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$

量子化条件为

$$\{b[p, s], b^\dagger[p', s']\} = \delta^{(3)}[\vec{p} - \vec{p}'] \delta_{ss'}$$

$$\{b[p, s], b[p', s']\} = 0$$

$$\{b^\dagger[p, s], b^\dagger[p', s']\} = 0$$

对于正电子是类似的

$$\{d[p, s], d^\dagger[p', s']\} = \delta^{(3)}[\vec{p} - \vec{p}'] \delta_{ss'}$$

场的反对易关系为

$$\{\psi[\mathbf{0}, \vec{x}], \bar{\psi}[\mathbf{0}]\} = \gamma^0 \delta^{(3)}[\vec{x}]$$

$$\{\psi, \psi\} = 0, \{\psi^\dagger, \psi^\dagger\} = 0$$

这里的归一化为静止归一化, peskin 书中的为任意质量归一化。

真空能

哈密顿密度

$$\mathcal{H} = \pi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} - \mathcal{L} = \mathbf{I} \star \psi^\dagger \partial_0 \psi - \bar{\psi} \cdot (\mathbf{I} \star \boldsymbol{\gamma} \cdot \partial - m) \cdot \psi = \mathbf{I} \star \bar{\psi} \cdot \boldsymbol{\gamma}^\theta \cdot \partial_0 \psi - \bar{\psi} \cdot \mathbf{I} \star \boldsymbol{\gamma}^\theta \cdot \partial_0 \psi + \bar{\psi} \cdot \mathbf{I} \star \boldsymbol{\gamma} \cdot \vec{\partial} \psi + m \bar{\psi} \cdot \psi$$

$$\mathcal{H} = \bar{\psi} \cdot (\mathbf{I} \star \boldsymbol{\gamma} \cdot \vec{\partial} + m) \cdot \psi$$

$$(\mathbf{I} \star \boldsymbol{\gamma} \cdot \partial - m) \cdot \psi = \bar{\psi} \cdot \mathbf{I} \star \boldsymbol{\gamma}^\theta \cdot \partial_0 \psi - \bar{\psi} \cdot \mathbf{I} \star \boldsymbol{\gamma} \cdot \vec{\partial} \psi - m \bar{\psi} \cdot \psi = 0$$

$$\bar{\psi} \cdot \mathbf{I} \star \boldsymbol{\gamma} \cdot \vec{\partial} \psi + m \bar{\psi} \cdot \psi = \bar{\psi} \cdot \mathbf{I} \star \boldsymbol{\gamma}^\theta \cdot \partial_0 \psi$$

$$H = \int d^3 x \mathcal{H} = \int d^3 x \bar{\psi} \cdot (\mathbf{I} \star \boldsymbol{\gamma} \cdot \vec{\partial} + m) \cdot \psi = \int d^3 x \bar{\psi} \cdot (\mathbf{I} \star \boldsymbol{\gamma}^\theta) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

算出来是

$$H = \int d^3 p \sum_s E_p (b^\dagger[p, s] b[p, s] - d[p, s] d^\dagger[p, s])$$

进行反对易 $-d[p, s] d^\dagger[p, s] = d^\dagger[p, s] d[p, s] - \delta^{(3)}(\vec{0})$ 以得到,

$$H = \int d^3 p \sum_s E_p (b^\dagger[p, s] b[p, s] - d^\dagger[p, s] d[p, s]) - \delta^{(3)}(\vec{0}) \int d^3 p \sum_s E_p$$

前两项告诉我们, 每个具有动量 p 和自旋 s 的电子和正电子具有完全相同的能量 E_p , 这不出所料。

注意到 $\delta^{(3)}[\vec{p}] = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d^3 x \exp[i\vec{p} \cdot \vec{x}]$, 我们可知 $\delta^{(3)}[0] = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d^3 x$. 所以最后一项对 H 的贡献为

$$E_0 = \frac{-1}{h^3} \int d^3 x \int d^3 p \sum_s 2 \left(\frac{1}{2} E_p \right)$$

在统计学上, 这意味着准时电子和正电子 (因此有因子2) 的每个自旋, 在单位体积的相空间格子 $\frac{1}{h^3} d^3 x d^3 p$ 上, 我们有能量 $\frac{1}{2} E_p$.

这个无穷大的相加项恰好是谐振子零点能 $\frac{1}{2} \hbar \omega$ 的类比, 但是它有一个负号。

这个负号是奇异而特别的! 狄拉克场的每个模式都对真空能贡献 $-\frac{1}{2} \hbar \omega$. 对比之下, 标量场的每个模式都贡献 $\frac{1}{2} \hbar \omega$.

在时空中传播的费米子

电子的传播子 $iS_{\alpha\beta} \equiv \langle 0 | T \psi_\alpha[x] \bar{\psi}_\beta[0] | 0 \rangle$, 其中 $\bar{\psi}$ 的参数通过平移不变性被设为0.

正如我们将看到的, ψ 的反对易性质要求我们定义编时乘积时带一个负号, 亦即

$$T \psi[x] \bar{\psi}[0] \equiv \theta[x^0] \cdot \psi[x] \cdot \bar{\psi}[0] - \theta[-x^0] \cdot \bar{\psi}[0] \cdot \psi[x]$$

$$iS[x] = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 (E_p/m)} \left(\theta[x^0] \left(\frac{\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + m}{2m} \right) \exp[-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}] - \theta[-x^0] \left(\frac{\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} - m}{2m} \right) \exp[+i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}] \right)$$

$$= i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \exp[-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}] * \frac{\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \exp[-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}] * \frac{i}{\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} - m + i\epsilon}$$

经过所有的这些步骤, 我们看到动量空间的费米子传播子为

$$iS[p] = \frac{i}{\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} - m + i\epsilon}$$

这很合理, 我们最终发现 $S[p]$ 是狄拉克算符 $\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} - m$ 的逆, 就如同标量场玻色子算符 $D[k] = 1/(k^2 - m^2 + i\epsilon)$ 是克莱因-戈登算符 $k^2 - m^2$ 的逆一样。

诗意但令人困惑的隐喻

电子会沿着时间线逆行

负能量的电子组成的海洋。

洛伦兹群和外尔旋量

洛伦兹代数

三个转动群的生成元 J_i

$$[J_i, J_j] = I \varepsilon_{ijk} J_k$$

洛伦兹平动变换 K_i

$$[J_i, K_j] = I \varepsilon_{ijk} K_k \quad (0.1)$$

洛伦兹平动变换生成元 K_i 在旋转下就像一个3矢量 \vec{K} 一样变换

计算出 $[K_1, K_2]$, 它显然是一个反对称矩阵。你会发现它等于 $-I J_3$ 。

两次洛伦兹平动会产生一次转动。(你可能会回想起在电磁学课程中, 这个数学事实解释了托马斯进动的物理原理。)

数学上, 洛伦兹生成元满足以下代数, (行家称之为 $SO[3, 1]$ 代数)

$$[J_i, J_j] = I \varepsilon_{ijk} J_k$$

$$[J_i, K_j] = I \varepsilon_{ijk} K_k$$

$$[K_i, K_j] = I \varepsilon_{ijk} J_k$$

如果做线性组合,

$$J_{\pm I} \equiv \frac{1}{2} (J_i + I K_i)$$

代数将会分解为两部分:

$$[J_{+i}, J_{+j}] = I \varepsilon_{ijk} J_{+k}$$

$$[J_{-i}, J_{-j}] = I \varepsilon_{ijk} J_{-k}$$

另外最值得注意的是

$$[J_{+i}, J_{-j}] = 0$$

最后一个对易关系告诉我们 J_+ 和 J_- 构成了两个独立的 $SU[2]$ 代数。

在 $(0, \frac{1}{2})$ 表示中, 有 $J_i = \frac{1}{2} \sigma_i$ 和 $K_i = -\frac{1}{2} \sigma_i$ 。注意负号。

2分量旋量 ψ_a 和 $\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}$ 被称为 Weyl 旋量, 提供了 Lorentz 群的一种很好的表示。

那么为什么 Dirac 旋量有4个分量?

原因就是宇称。在宇称变换下, $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$, $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$, 因此

$$\vec{J} \rightarrow \vec{J}, K \rightarrow -K,$$

所以 $\vec{J}_+ \rightarrow \vec{J}_-$ 。

换句话说, 在宇称变换下, $(\frac{1}{2}, 0) \rightarrow (0, \frac{1}{2})$

因此, 要描述电子, 我们必须同时使用这两种二维表示, 或者用数学的语言, 一种四维可约表示

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

因此, 我们将两个 Weyl 旋量叠加在一起, 得到一个 Dirac 旋量。

宇称使我们有一个4分量旋量, 但另一方面我们知道电子只有两个物理自由度。

考虑静止坐标系, 我们必须在静止动量为 $p_r \equiv (m, \vec{0})$ 的条件下投影出包含在 $\Psi[p_r]$ 中的两个分量。

可以把投影算符写成 $\mathcal{P} = \frac{1}{2}(1 - \gamma^0)$, $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$, 因此 γ^0 的特征值是 ± 1 。

宇称守恒意味着我们应该平等的对待 ψ_a 和 $\bar{\psi}^a$ 。我们选择

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

γ^0 的不同选择对应于不同基的选择。这种选择被称为 Weyl 基。

投影到两个自由度，就可以被写作，

$$(\gamma^0 - 1) \Psi[p_r] = 0$$

狄拉克方程

对于任意动量 p 的情形，我们只需要平动变换。写下

$$\Psi[p] = \text{Exp}[-I \varphi \vec{K}] \Pi[p_r]$$

那么我们可以得到

$$(\text{Exp}[-I \varphi \vec{K}] \cdot \gamma^0 \cdot \text{Exp}[+I \varphi \vec{K}] - 1) \Psi[p] = 0$$

引入符号 $\gamma^\mu p_\mu / m \equiv \text{Exp}[-I \varphi \vec{K}] \cdot \gamma^0 \cdot \text{Exp}[+I \varphi \vec{K}]$, 我们得到了狄拉克方程

$$(\gamma^\mu p_\mu - m) \Psi[p] = 0$$

狄拉克方程的群论视角：它是一个被平动到任意坐标系的投影。

洛伦兹平动变换。在 $x \equiv x^1$ 方向上的平动将对时空坐标进行如下变换：

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Cosh}[\varphi] & \text{Sinh}[\varphi] \\ \text{Sinh}[\varphi] & \text{Cosh}[\varphi] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

$$\text{Cosh}[\varphi] = \frac{\text{Exp}[\varphi] + \text{Exp}[-\varphi]}{2}, \quad \text{Sinh}[\varphi] = \frac{\text{Exp}[\varphi] - \text{Exp}[-\varphi]}{2}$$

$$\text{Cosh}[\varphi]^2 - \text{Sinh}[\varphi]^2 \equiv 1$$

对于无穷小 φ ,

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \varphi \\ \varphi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

换句话说， x 方向上的无穷小 Lorentz 平动变换的生成元用厄米矩阵表示：（依惯例 $x^0 \equiv t$ ）

$$I K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

自旋-统计联系

知识不完备的程度

量子统计，依仗以下事实：在量子世界中，所有的基本粒子，是绝对相同的，因此无法区分不同的单位。

宇宙中的每一个电子都是同一个场 ψ 的激发态。

任性的代价

量子力学基本原理：如果两个可观测量是对易的，那么它们可以被同时对角化，因此可以被同时观测到。

如果两个时空点是类空的，那么没有信号可以在它们之间传播，所以对 a 点上可观测量 A 的测量，不会影响对 b 点上可观测量 B 的测量。

如带电标量场，电荷密度

$$J_0 = I \left(\varphi^\dagger \partial_0 \varphi - \partial_0 \varphi^\dagger \varphi \right)$$

对于 $\vec{x} \neq \vec{y}$ ， $J_0[t=0, \vec{x}]$ 和 $J_0[t=0, \vec{y}]$ 应该是对易的。

我们利用以下事实： $\varphi[t=0, \vec{x}]$ 和 $\partial_0 \varphi[t=0, \vec{x}]$ ， $\varphi[t=0, \vec{y}]$ 和 $\partial_0 \varphi[t=0, \vec{y}]$ ，两组间是对易的。

所以我们可以把 \vec{x} 点的场移过 \vec{y} 点的场。这个对易子平凡地消失了。

但是如果在 φ 的展开式中，赋予产生湮灭算符反对易关系，

$$\varphi[t=0, \vec{x}] = \int \frac{d^D k}{\sqrt{(2\pi)^D 2\omega_k}} \left(a[\vec{k}] \text{Exp}[I \vec{k} \cdot \mathbf{x}] + a^\dagger[\vec{k}] \text{Exp}[-I \vec{k} \cdot \mathbf{x}] \right)$$

$$\{a[\vec{k}], a^\dagger[\vec{q}]\} = \delta^{(D)}[\vec{k} - \vec{q}]$$

则，

$$\{\varphi[t=0, \vec{x}], \varphi[t=0, \vec{y}]\} = \int \frac{d^D k}{\sqrt{(2\pi)^D 2\omega_k}} (\text{Exp}[I \vec{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})] + \text{Exp}[-I \vec{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})])$$

所以如果用反对易量子化标量场会得到一场灾难。

自旋为0的场必须是对易的。

相对论和量子物理联手保证了自旋--统计关系。

真空能，格拉斯曼积分和费米子的费曼图

奇怪的费米子

如何在路径积分中表达，费米子算符在正则量子化中表现出的反对易性质。

我们可以推测，不能像 $\varphi[x]$ 一样把 $\psi[x]$ 表示成一个可对易变量。

事实上，我们会发现，要把 $\psi[x]$ 作为一个格拉斯曼数。

真空能

给了引入格拉斯曼数值场，我们先讨论真空能的概念。

直到20世纪70年代，物理学家才充分认识到真空波动的重要性。

首先用路径积分得到自由标量场中已有的结论，然后我们会发现，为了得到自由旋量场中的类似结论，必须修改路径积分。

即使在没有产生粒子的源时，真空波动也会发生。考虑无源的自由标量场生成函数 (2.5.1)：

$$Z = \int \mathcal{D}\varphi \text{Exp}\left[I \int d^4x \left((\partial\varphi)^2 - m^2 \varphi^2 \right)\right] = C \left(\frac{1}{\text{Det}[\partial^2 - m^2]} \right)^{\frac{1}{2}} = C \text{Exp}\left[-\frac{1}{2} \text{Tr}[\text{Log}[\partial^2 + m^2]]\right]$$

回想一下， $Z = \langle 0 | \text{Exp}[-IH T] | 0 \rangle$ ，默认 $T \rightarrow \infty$ ，即对 (2.5.1) 中的全时空进行积分。

在这种情形下正是 $\text{Exp}[-IE T]$ ，其中 E 是真空能。计算出 (2.5.1) 中的迹。

$$\text{Tr}[O] = \int d^4x \langle x | O | x \rangle = \int d^4x \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \langle x | k \rangle \langle k | O | q \rangle \langle q | x \rangle$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[\text{Log}[\partial^2 + m^2 - I\varepsilon]] &= \int d^4x \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \langle x|k\rangle \langle k| \text{Log}[\partial^2 + m^2 - I\varepsilon] |q\rangle \langle q|x\rangle \\
&= \int d^4x \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \text{Exp}[-I x \cdot k] \text{Log}[-q^2 + m^2 - I\varepsilon] \delta^4[k - q] \text{Exp}[+I q \cdot x] \\
&= \int d^4x \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Exp}[-I x \cdot k] \text{Log}[-k^2 + m^2 - I\varepsilon] \text{Exp}[+I k \cdot x] = \int d^4x \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Log}[-k^2 + m^2 - I\varepsilon]
\end{aligned}$$

这里的负号 $(-k^2 + m^2 - I\varepsilon)$ 不要紧，因为计算的是真空能的比值，所以可以差一个overall的整体负号。

我们可以得到 $IE T = \frac{1}{2} V T \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Log}[k^2 - m^2 + I\varepsilon] + A$ ，其中A是一个无限大常数，对应 (2.5.1) 中的系数C。

A的存在是一个好事，它解决了量纲问题。通过

$$A = -\frac{1}{2} V T \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Log}[k^2 - m^2 + I\varepsilon]$$

来定义 m_0 。换句话说，我们不计算真空能的绝对值，而只计算粒子质量 m 与 m_0 之间真空能的差值。

任意长的时间 T 相互消掉，能量 E 与体积 V 成正比。因此，真空能量密度的差值为

$$\begin{aligned}
\frac{E}{V} &= \frac{-I}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Log}\left[\frac{k^2 - m^2 + I\varepsilon}{k^2 - m_0^2 + I\varepsilon}\right] \\
&= \frac{-I}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{d\omega}{2\pi} \text{Log}\left[\frac{\omega^2 - \omega_k^2 + I\varepsilon}{\omega^2 - \omega_k'^2 + I\varepsilon}\right]
\end{aligned}$$

其中， $\omega_k \equiv \sqrt{k^2 + m^2}$ 。我们通过分部积分处理 ω 的积分：

$$\begin{aligned}
\int \frac{d\omega}{2\pi} \text{Log}\left[\frac{\omega^2 - \omega_k^2 + I\varepsilon}{\omega^2 - \omega_k'^2 + I\varepsilon}\right] &= -2 \int \frac{\omega}{2\pi} d\text{Log}\left[\frac{\omega^2 - \omega_k^2 + I\varepsilon}{\omega^2 - \omega_k'^2 + I\varepsilon}\right] \\
&= -2 \int \frac{\omega}{2\pi} \left(\frac{\omega}{\omega^2 - \omega_k^2 + I\varepsilon} - (\omega_k \rightarrow \omega_k') \right) d\omega = -2 I \omega_k^2 \left(\frac{1}{-2\omega_k} \right) - (\omega_k \rightarrow \omega_k') \\
&= +I (\omega_k - \omega_k')
\end{aligned}$$

事实上，恢复 \hbar 之后，我们得到：

$$\frac{E}{V} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{2} \hbar \omega_k - \frac{1}{2} \hbar \omega_k' \right)$$

路径积分公式

费米子的奇特符号

我们的目标是写出旋量场的路径积分。在章节2.2中我们知道了，旋量场的真空能与标量场的真空能有相反的符号。

这个负号肯定是理论物理中的“十大”符号之一。那么如何利用路径积分得到这个负号？

(2.5.1) 来自于简单地高斯积分公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \text{Exp}\left[\frac{-1}{2} a x^2\right] = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} = \sqrt{2\pi} \text{Exp}\left[\frac{-1}{2} \text{Log}[a]\right]$$

粗略地说，我们必须找到一种新的积分形式。类比高斯积分得到 $\text{Exp}\left[\frac{\pm 1}{2} \text{Log}[a]\right]$

格拉斯曼数学

让我们假设一种新的数，叫做格拉斯曼数或者反对易数。

这样，如果 η 和 ξ 是格拉斯曼数，那么 $\eta \cdot \xi = -\xi \cdot \eta$ 。特别地， $\eta^2 = 0$ 。

这反映了旋量场的反对易关系。格拉斯曼假设 η 的任何函数都可以泰勒展开。

既然 $\eta^2 = 0$, 那么 η 的最一般的函数形式就是 $f[\eta] = a + b\eta$, 其中 a 和 b 是两个普通数字。

定义对 η 的积分。格拉斯曼指出, 普通积分的一个基本性质是可以平移积分哑元: $\int_{-\infty}^{+\infty} dx f[x+c] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx f[x]$ 。

令格拉斯曼积分也满足这一性质: $\int_{-\infty}^{+\infty} d\eta f[\eta+\xi] = \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta f[\eta]$, 其中, ξ 是任意的格拉斯曼数。

代入到上面的一般函数形式中, 我们会发现 $\int d\eta b\xi = 0$ 。

由于 ξ 的取值是任意的, 所以有 $\int d\eta b = 0$, 其中 b 是任意普通数。

特别地, $\int d\eta 1 = 0$ 。

两个格拉斯曼数的乘积是普通数。 $\chi(\eta\xi) = (\eta\xi)\chi$

因此, 积分 $\int d\eta \eta$ 只是一个普通数, 我们令它为 1: 这就确定了 $d\eta$ 的归一化。因此, 格拉斯曼积分是非常简单的, 由两条规则定义:

$$\int d\eta = 0$$

与

$$\int d\eta \eta = 1$$

通过这两条规则, 我们可以对任何 η 的函数积分

$$\int d\eta f[\eta] = \int d\eta (a + b\eta) = b, \text{ b is c number}$$

$$\int d\eta f[\eta] = \int d\eta (a + b\eta) = -b, \text{ b is grassman number}$$

需要注意的是, 对于格拉斯曼积分, 并不存在积分区间的概念。

取 η 和 $\bar{\eta}$ 为两个格拉斯曼数, a 为普通数, 格拉斯曼的类高斯积分可以写成:

$$\int d\eta \int d\bar{\eta} \text{Exp}[\bar{\eta} a \eta] = \int d\eta \int d\bar{\eta} (1 + \bar{\eta} a \eta) = \int d\eta a \eta = a = \text{Exp}[+\text{Log}[a]]$$

这正是我们想要的结果!

我们可以推广这个结果:

$$\int d\eta \int d\bar{\eta} \text{Exp}[\bar{\eta} A \eta] = \text{Det}[A]$$

其中, $\eta = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N\}$ 是 N 个格拉斯曼数, $\bar{\eta}$ 同理, $A = \{A_{ij}\}$ 是一个 $N \times N$ 的反对称矩阵。

与玻色子的情况不同, A 不需要可逆。可以进一步拓展到泛函积分。

格拉斯曼路径积分

类似于标量场的生成泛函

$$Z = \int \mathcal{D}\varphi \text{Exp}[I S[\varphi]] = \int \mathcal{D}\varphi \text{Exp}\left[I \int d^4x \star \frac{1}{2} \left((\partial\varphi)^2 - (m^2 - I\varepsilon) \varphi^2 \right)\right]$$

我们很自然地可以写出旋量场的生成泛函

$$Z = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \text{Exp}[I S[\psi, \bar{\psi}]] = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \text{Exp}\left[I \int d^4x \star \bar{\psi} (I \star \gamma \cdot \partial - m + I\varepsilon) \cdot \psi\right]$$

将积分变量 ψ 和 $\bar{\psi}$ 看作取格拉斯曼值的狄拉克旋量, 可以立刻得到:

$$\int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \text{Exp}\left[I \int d^4x \star \bar{\psi} (I \star \gamma \cdot \partial - m + I\varepsilon) \cdot \psi\right] = C \star \text{Det}[I \star \gamma \cdot \partial - m + I\varepsilon] = C \star \text{Exp}[\text{Tr}[\text{Log}[I \star \gamma \cdot \partial - m + I\varepsilon]]]$$

其中 C 是某些乘子常数。利用求迹的轮换性质, 我们注意到 (这里的 m 表示 $m - I\varepsilon$)

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[\text{Log}[I \star \gamma \cdot \partial - m + I \star \varepsilon]] &= \text{Tr}[\text{Log}[\gamma^5 \cdot (I \star \gamma \cdot \partial - m) \cdot \gamma^5]] = \text{Tr}[\text{Log}[-(I \star \gamma \cdot \partial + m)]] \\
&= \frac{1}{2} (\text{Tr}[\text{Log}[(I \star \gamma \cdot \partial - m)]] + \text{Tr}[\text{Log}[-(I \star \gamma \cdot \partial + m)]]) \\
&= \frac{1}{2} \text{Tr}[\text{Log}[\mathbb{1}(\partial^2 + m^2)]]
\end{aligned}$$

因为1是一个4×4矩阵，所以这里的求迹与(2.5.1)中的相比，多了一个系数4.

所以这里得到的真空能，与在章节2.2中通过正则化方法得到的相同。

$$E_0 = \frac{-1}{h^3} \int d^3x \int d^3p \sum_s 2 \left(\frac{1}{2} E_p \right)$$

现在，我们可以看到格拉斯曼变量的必要性。

如果我们把 ψ 和 $\bar{\psi}$ 当作普通的复数处理，我们会得到类似 $(1/\text{Det}[I \star \gamma \cdot \partial - m])$ 的结果，因此会把真空能的符号搞错。

我们希望行列式出现在分子中。

狄拉克传播子

我们引入格拉斯曼旋量源 η 和 $\bar{\eta}$:

$$Z[\eta, \bar{\eta}] = \int D\psi D\bar{\psi} \text{Exp} \left[I \int d^4x \star \bar{\psi} (I \star \gamma \cdot \partial - m + I \star \varepsilon) \cdot \psi + \bar{\eta} \cdot \psi + \bar{\psi} \cdot \eta \right]$$

并且按照之前的方法进行计算。就像计算标量场的情况一样，配成平方可以得到:

$$\bar{\psi} K \cdot \psi + \bar{\eta} \cdot \psi + \bar{\psi} \cdot \eta = (\bar{\psi} + \bar{\eta} \cdot K^{-1}) \cdot K \cdot (\psi + K^{-1} \cdot \eta) - \bar{\eta} \cdot K^{-1} \cdot \eta$$

因此,

$$Z[\eta, \bar{\eta}] = C \cdot \text{Exp} \left[-I \bar{\eta} (I \star \gamma \cdot \partial - m)^{-1} \eta \right]$$

狄拉克传播子 $S[x]$ 是 $(I \star \gamma \cdot \partial - m)$ 的逆: 换句话说, $S[x]$ 由下面的式子决定:

$$(I \star \gamma \cdot \partial - m) S[x] = \delta^{(4)}[x]$$

这个方程的解为

$$I \star S[x] = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \star \frac{I \star \text{Exp}[-I p \cdot x]}{\gamma \cdot p - m + I \star \varepsilon}$$

和(2.2.22)吻合。

费米子的费曼规则

在施温格的魔法中，产生矢量玻色子 $J_\mu[x]$ 的源携带洛伦兹指标，与产生标量介子 $J[x]$ 的源相比。

在动量空间中讨论，流守恒 $k^\mu J_\mu[x] = 0$ 意味着我们可以分解为 $J_\mu[k] = \sum_{a=1}^3 J^{(a)}[k] \varepsilon_\mu^{(a)}[k]$ 。

对于 $k^\mu = (\omega[k], 0, 0, k)$ ，我们可以选择

$$\varepsilon_\mu^{(1)} = (0, 1, 0, 0), \varepsilon_\mu^{(2)} = (0, 0, 1, 0), \varepsilon_\mu^{(3)} = (-k, 0, 0, \omega[k]) / m,$$

类标量场 φ ，我们可以展开带质量矢量场

$$A_\mu[t, \vec{x}] = \int \frac{d^D k}{\sqrt{(2\pi)^D 2\omega_k}} \sum_{a=1}^3 \left(a^{(a)}[\vec{k}] \varepsilon_\mu^{(a)}[k] \text{Exp} \left[-I \left(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{x} \right) \right] + a^{\dagger(a)}[\vec{k}] \varepsilon_\mu^{\star(a)}[k] \text{Exp} \left[I \left(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{x} \right) \right] \right)$$

相对于标量场 φ ，矢量场 A_μ 携带洛伦兹指标，产生和湮灭算符必须知道这个指标（通过极化矢量）。

与(2.2.10)中的费米子场 ψ 的展开式对比是很有启发性的： ψ 上的旋量指标 α 在展开式中由旋量 $u[p, s]$ 和 $v[p, s]$ 携带。

在任一情况下，洛伦兹群使用的指标（矢量场的 μ 和旋量场的 α ）被用来“交易”为指定自旋极化的标签（分别为 a 和 s ）

一个小小的技术问题：注意，(2.5.25)中与产生算符 $a^{\dagger(a)}[\vec{k}]$ 相关的极化矢量去了复共轭，尽管这里所取的动量矢量是实

数。

因为实验物理学家们有时喜欢使用带有极化矢量 $\epsilon_\mu^{(1)}[k] = (0, 1, i, 0) / \sqrt{2}$, $\epsilon_\mu^{(2)}[k] = (0, 1, -i, 0) / \sqrt{2}$ 的圆偏振光子

电子散射和规范不变性

电子-质子散射

现在，终于要计算一个实验学家能够实际测量的物理过程了。

考虑电子和质子的散射。将质子简化为电子一样的自旋 $\frac{1}{2}$ 粒子。交换一个光子的费曼图。

先用有质量光子的传播子凑合，然后尽可能地设置为0。光子质量记为 μ 。

$$M[P, P_N] = (-I e) (I e) * \frac{I}{(P-p)^2 - \mu^2} \left(\frac{k_\mu k_\nu}{\mu^2} - \eta_{\mu\nu} \right) \bar{u}[P] \cdot \gamma^\mu \cdot u[p] \cdot \bar{u}[P_N] \cdot \gamma^\nu \cdot u[p_N]$$

我们省略了自旋标注，并使用 N （对于核子）来指带质子

由于 $\bar{u}[P_N]$, $u[p_N]$ 所满足的运动方程

$$k_\mu \bar{u}[P] \cdot \gamma^\mu \cdot u[p] = (P-p)_\mu \bar{u}[P] \cdot \gamma^\mu \cdot u[p] = \bar{u}[P] \cdot (\not{P} - \not{p}) \cdot u[p] = \bar{u}[P] \cdot (m - m) \cdot u[p] = 0$$

类似地, $k_\mu \bar{u}[P_N] \cdot \gamma^\mu \cdot u[p_N] = 0$

这个重要的洞察暗示了 $\frac{k_\mu k_\nu}{\mu^2}$ 项并不会进入结果中。因此

$$M[P, P_N] = -I * e^2 * \frac{1}{(P-p)^2 - \mu^2} \bar{u}[P] \cdot \gamma^\mu \cdot u[p] \cdot \bar{u}[P_N] \cdot \gamma_\mu \cdot u[p_N]$$

现在我们可以将光子质量 μ 无害地设置为零，并把分母中的 $(P-p)^2 - \mu^2$ 替换成 $(P-p)^2$

注意到这其实正是电磁流守恒方程 $\partial_\mu J^\mu = \partial_\mu (\bar{\psi} \cdot \gamma^\mu \cdot \psi) = 0$ 的动量空间版本。

把 $\partial_{x_\mu} J^\mu[x]$ 插入到振幅表达式中, ∂_{x_μ} 作用到 $\text{Exp}[-i \int dx k \cdot x]$ 上, 就会得到 $k_\mu \bar{u}[P_N] \cdot \gamma^\mu \cdot u[p_N] = 0$ 。

守恒流的表达式 $\sum_n \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi_n)} \frac{\delta \phi_n}{\delta \alpha}$, 对应此时为 $-i \int dx \bar{\psi} \cdot \gamma^\mu \cdot \psi$

电子跟光子耦合项中, 并不含 $\partial_\mu \psi$ 项, 所以不影响费米子守恒流的表达式,

运动方程方面, 我们认为新的运动方程也被满足, 所以守恒流成立, 且形式和原来相同。

区别就在于运动方程改变了。

势散射

由于质子质量 M 比电子质量 m 大的多, 这是我们能够使用一个在基本物理中熟知的近似。

在 M/m 趋近于无穷大的极限中, 质子几乎不动, 所以对于质子, 我们可以使用章节2.2中给出的, 静止系中粒子的旋量表示, 则

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} = I \otimes \tau_3$$

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} = \sigma^i \otimes I \otimes \tau_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{u}[P_N] \cdot \gamma_0 \cdot u[p_N] \approx 1, \text{ and } \bar{u}[P_N] \cdot \gamma_i \cdot u[p_N] \approx 0 \text{ so}$$

$$\mathcal{M} = \frac{-I e^2}{k^2} \bar{u}[P] \cdot \gamma^0 \cdot u[p]$$

我们认识到，我们正在质子产生的库仑势中散射电子。考虑到运动学：

$$p = (E, \theta, \theta, |\vec{p}|) \text{ and } p = (E, \theta, |\vec{p}| \sin[\theta], \cos[\theta])$$

我们看到 $k = P - p$ 是完全类空的，且 $k^2 = -\vec{k}^2 = -4 |\vec{p}| \sin[\theta/2]^2$

$$\int d^3x \text{Exp}[I * k \cdot x] * \frac{-e}{4 \pi r} = \frac{-e}{\vec{k}^2}$$

Yukawa potential

$$I \mathcal{M} = \frac{I g^2}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2} 2 m \delta^{ss'} 2 m \delta^{rr'}$$

傅里叶逆变换，找出 $V[x]$,

$$\begin{aligned} V[x] &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{-g^2}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2} \text{Exp}[I * \mathbf{q} \cdot \mathbf{x}] \\ &= \frac{-g^2}{4\pi^2} \int_0^\infty dq q^2 * \frac{\text{Exp}[I q r] - \text{Exp}[-I q r]}{I q r} * \frac{1}{q^2 + m_\phi^2} \\ &= \frac{-g^2}{4\pi^2 I r} \int_{-\infty}^\infty dq * \frac{q \text{Exp}[I q r]}{q^2 + m_\phi^2} \end{aligned}$$

在上半平面闭合积分回路。pickup 单极点 $I m_\phi$ 的留数，我们得到：

$$V[r] = \frac{-g^2}{4\pi^2 I r} 2\pi I * \frac{I m_\phi \text{Exp}[I I m_\phi r]}{2 I m_\phi} = \frac{-g^2}{4\pi r} * \text{Exp}[-m_\phi r]$$

使用正则形式推导势散射的表达式 \mathcal{M} 是有启发性的。

我们想得到单电子态 $|p, s\rangle \equiv b^\dagger[p, s] |0\rangle$ 的跃迁振幅 $\langle P, S | \text{Exp}[-I H T] | p, s \rangle$ 。

拉氏量中描述电子与外部 c 数势 A_μ 相互作用的项在 (2.5.23) 中给出 $e * \bar{\psi} \cdot \gamma^\mu \cdot \psi \cdot A_\mu$ ，因此至领头阶，跃迁振幅是

$$I * e \int d^4x * \frac{1}{\rho[P]} * \frac{1}{\rho[p]} * \bar{u}[P, S] \cdot \gamma^\mu \cdot u[p, s] \text{Exp}[I * (P - p) \cdot x] * A_\mu[x]$$

这里 $\rho[p]$ 表示 (2.2.10) 中费米子归一化因子 $\sqrt{(2\pi)^3 E_p / m}$

由于我们假定库仑势仅有一个时间分量，且不含时。所以关于时间的积分给我们一个能量守恒的 δ 函数。

关于空间的积分给出了势的傅里叶变换。

上式变成：

$$\frac{1}{\rho[P]} * \frac{1}{\rho[p]} * (2\pi) \delta[E_P - E_p] \cdot \left(\frac{-I e^2}{\vec{k}^2} \right) \bar{u}[P, S] \cdot \gamma^0 \cdot u[p, s]$$

注意到只有能量守恒而没有3-动量守恒。

电子-电子散射

接下来，我们处理两个电子的相互散射： $e^-[p_1] + e^-[p_2] \rightarrow e^-[P_1] + e^-[P_2]$

由于两个电子的全同性，我们无法区别两个出射的电子，所以，至 e^2 阶，有两个费曼图。可由交换两个出射电子得到。

对于图2.6.3a，我们有振幅

$$A[P_1, P_2] = I \frac{e^2}{(P_1 - p_1)^2} \bar{u}[P_1] \cdot \gamma^\mu \cdot u[p_1] \cdot \bar{u}[P_2] \cdot \gamma^\mu \cdot u[p_2]$$

仅标出对末态动量的依赖，而忽略了其他依赖

考虑到费米统计，图2.6.3b的振幅就是 $-A[P_2, P_1]$ 。

因此，动量分别为 p_1 和 p_2 的两个电子，散射到动量分别为 P_1 和 P_2 的电子，其不变振幅为

$$\mathcal{M} = A[P_1, P_2] - A[P_2, P_1]$$

为得到散射截面，需要对振幅求模方

$$|\mathcal{M}|^2 = (|A[P_1, P_2]|^2 + |A[P_2, P_1]|^2) - 2 \operatorname{Re}[A[P_2, P_1]^* A[P_1, P_2]]$$

求旋量振幅的复共轭，

$$\begin{aligned} (\bar{u}[p'] \cdot \gamma^\mu \dots \gamma^\nu \cdot u[p])^* &= (\bar{u}[p'] \cdot \gamma^\mu \dots \gamma^\nu \cdot u[p])^\dagger = u[p]^\dagger \cdot \gamma^{\nu\dagger} \dots \gamma^{\mu\dagger} \cdot \gamma^0 \cdot u[p'] \\ &= \bar{u}[p] \cdot \gamma^\nu \dots \gamma^\mu \cdot u[p'] \end{aligned}$$

即旋量振幅的复共轭会颠倒乘积的次序，并交换两个旋量。因此我们有：

$$|A[P_1, P_2]|^2 = \frac{e^4}{k^4} (\bar{u}[P_1] \cdot \gamma^\mu \cdot u[p_1] \cdot \bar{u}[p_1] \cdot \gamma^\nu \cdot u[P_1] \cdot \bar{u}[P_2] \cdot \gamma_\mu \cdot u[p_2] \cdot \bar{u}[p_2] \cdot \gamma_\nu \cdot u[P_2])$$

可以因式化为一个带动量下标1，一个包含动量下标2。而干涉项 $A[P_2, P_1]^* A[P_1, P_2]$ 不能因式化。

简单的实验，不测量初末态极化，对初态自旋求平均，对末态求和。

$$\sum_s u[p, s] \cdot \bar{u}[p, s] = \frac{\gamma \cdot p + m}{2m}$$

通过对 $|A[P_1, P_2]|^2$ 求平均和sum，遇到如下对象

$$\begin{aligned} \tau^{\mu\nu}[p_1, p_1] &= \frac{1}{2} \sum \sum \bar{u}[P_1, S] \cdot \gamma^\mu \cdot u[p_1, s] \cdot \bar{u}[p_1, s] \cdot \gamma^\nu \cdot u[P_1, S] \\ &= \frac{1}{(2m)^2} \operatorname{Tr}[\gamma \cdot P_1 + m] \cdot \gamma^\mu \cdot (\gamma \cdot p_1 + m) \cdot \gamma^\nu \end{aligned}$$

它需要乘上 $\tau_{\mu\nu}[P_2, p_2]$

伽马矩阵的平方等于 ± 1 ，且不同的伽马矩阵反对易。

奇数个伽马矩阵乘积的迹为0.最多存在4个伽马矩阵的乘积。

$$\begin{aligned} \tau^{\mu\nu}[P_1, p_1] &= \frac{1}{2(2m)^2} (\operatorname{Tr}[\gamma \cdot P_1 \cdot \gamma^\mu \cdot \gamma \cdot p_1 \cdot \gamma_\nu] + m^2 \operatorname{Tr}[\gamma^\mu \cdot \gamma^\nu]) \\ &= \frac{1}{2(2m)^2} 4 (P_1^\mu p_1^\nu - \eta^{\mu\nu} P_1 \cdot p_1 + P_1^\nu p_1^\mu + m^2 \eta^{\mu\nu}) \end{aligned}$$

在对 $A[P_2, P_1]^* A[P_1, P_2]$ 求平均并求和，会遇到更复杂的对象

$$\kappa \equiv \frac{1}{2^2} \sum \sum \sum \sum \bar{u}[P_1] \cdot \gamma^\mu \cdot u[p_1] \cdot \bar{u}[P_2] \cdot \gamma_\mu \cdot u[p_2] \cdot \bar{u}[p_2] \cdot \gamma^\nu \cdot u[P_2] \cdot \bar{u}[p_1] \cdot \gamma_\nu \cdot u[P_1]$$

应用(2.6.9)我们可以把 κ 写成单项求迹。多达八项伽马矩阵的求迹。

我们采取相对论极限做简化。相对于动量， m 可以忽略。

如同章节2.2中解释的那样，当我们将“静止归一化”用于旋量时，我们可以尽可能将 m 设置为0。

$$\kappa = \frac{1}{4(2m)^4} \operatorname{Tr}[\gamma \cdot P_1 \cdot \gamma^\mu \cdot \gamma \cdot p_1 \cdot \gamma^\nu \cdot \gamma \cdot P_2 \cdot \gamma_\mu \cdot \gamma \cdot p_2 \cdot \gamma_\nu]$$

应用附录D的等式，我们得到

$$\operatorname{Tr}[\gamma \cdot P_1 \cdot \gamma^\mu \cdot \gamma \cdot p_1 \cdot \gamma^\nu \cdot \gamma \cdot P_2 \cdot \gamma_\mu \cdot \gamma \cdot p_2 \cdot \gamma_\nu] = -2 \operatorname{Tr}[\gamma \cdot P_1 \cdot \gamma^\mu \cdot \gamma \cdot p_1 \cdot \gamma \cdot p_2 \cdot \gamma_\mu \cdot \gamma \cdot P_2] = -32 (p_1 \cdot p_2) (P_1 \cdot P_2)$$

在相同的极限下，

$$\tau^{\mu\nu}[P_1, p_1] = \frac{2}{(2m)^2} (P_1^\mu p_1^\nu + P_1^\nu p_1^\mu - \eta^{\mu\nu} P_1 \cdot p_1)$$

因此,

$$\begin{aligned}\tau^{\mu\nu}[P_1, p_1] \tau_{\mu\nu}[P_2, p_2] &= \frac{4}{(2m)^4} (P_1^\mu p_1^\nu + P_1^\nu p_1^\mu - \eta^{\mu\nu} P_1 \cdot p_1) (2P_{2\mu} p_{2\nu} - \eta^{\mu\nu} P_2 \cdot p_2) \\ &= \frac{4 \cdot 2}{(2m)^4} (p_1 \cdot p_1 P_1 \cdot P_2 + p_1 \cdot P_2 p_2 \cdot P_1)\end{aligned}$$

曼德尔斯坦变量

$$s \equiv (p_1 + p_2)^2 = (P_1 + P_2)^2$$

$$t \equiv (p_1 - p_1)^2 = (P_2 - p_2)^2$$

$$u \equiv (P_2 - p_1)^2 = (P_1 - p_2)^2$$

约束关系

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + M_1^2 + M_2^2$$

相对论极限下质心系运动学:

$$p_1 = E(1, 0, 0, 1), p_2 = E(1, 0, 0, -1)$$

$$p_1 = E(1, \sin[\theta], 0, \cos[\theta]), P_2 = E(1, -\sin[\theta], 0, -\cos[\theta])$$

因此,

$$p_1 \cdot p_2 = P_1 \cdot P_2 = 2E^2 = \frac{1}{2}s$$

$$p_1 \cdot P_1 = p_2 \cdot P_2 = 2E^2 \sin^2\left[\frac{\theta}{2}\right] = -\frac{1}{2}t$$

$$p_1 \cdot P_2 = p_2 \cdot P_1 = 2E^2 \cos^2\left[\frac{\theta}{2}\right] = -\frac{1}{2}u$$

在此极限下($m \rightarrow 0$), $(P_1 - p_1)^2 = (-2p_1 \cdot P_1)^2 = 16E^4 \sin^4\left[\frac{\theta}{2}\right] = t^4$

put it all together, we get

$$\frac{1}{4} \sum \sum \sum \sum |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4m^4} f[\theta] \quad (0.2)$$

where,

$$\begin{aligned}f[\theta] &= \frac{s^2 + u^2}{t^2} + \frac{2s^2}{tu} + \frac{s^2 + t^2}{u^2} \\ &= \frac{s^4 + t^4 + u^4}{t^2 u^2} \\ &= \left(\frac{1 + \cos[\theta/2]^4}{\sin[\theta/2]^4} + \frac{2}{\sin[\theta/2]^2 \cos[\theta/2]^2} + \frac{1 + \sin[\theta/2]^4}{\cos[\theta/2]^4} \right) \\ &= 2 \left(\frac{1}{\sin[\theta/2]^4} + 1 + \frac{1}{\cos[\theta/2]^4} \right)\end{aligned}$$

(2.6.23)中每一项的物理起源都是很清楚的。

由于光子传播子 $\sim 1/k^2$ 在 $k \sim 0$ 处发散, 第一项极大地增强向前散射。

第二项是由两个出射电子的不可分辨性要求的: 散射在 $\theta \rightarrow \pi - \theta$ 的变换下必须是对称的, 由于实验者无法分辨特定的入射电子是向前还是向后散射。

第二项来自于量子干涉。如果我们错误的认为电子是玻色子并在(2.6.6)中取加号, $f[\theta]$ 的第二项将会带有一个负号。

这会带来很大不同, 比如, $f[\pi/2] = 5 - 8 + 5 = 2$, rather than $5 + 5 + 5 = 15$

从概率振幅的平方到散射截面的转换与非相对论量子力学基本相同。我将其归入附录。

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha}{8 E^2} f[\theta]$$

其中精细结构常数 $\alpha \equiv e^2 / (4 \pi) \approx 1/137$ 。

附录：衰变率和散射截面

为了与实验联系，我们必须将跃迁振幅转换成实验人员能够实际测量的散射截面和衰变率。

为了能够形象地计算状态数，我们采取量子力学中用过的方法，箱归一化。

一个边长为 L 的立方体，而 L 比系统的特征长度大得多。在周期性边界条件下，平面波态 $\text{Exp}[i \vec{p} \cdot \vec{x}]$ 允许携带的动量为

$$\vec{p} = \frac{2 \pi}{L} (n_x, n_y, n_z)$$

其中 n_i 为三个整数。动量的允许值形成动量空间中格距为 $2 \pi / L$ 的点阵。实验人员以有限的分辨率测量动量，很小但远大于 $2 \pi / L$ 。

因此，动量空间中的无穷小体积 $d^3 p$ 包含的状态数为 $d^3 p / (2 \pi / L)^3 = V d^3 p / (2 \pi)^3$ ，其中 $V = L^3$ 为盒子的体积。我们得到对应关系：

$$\int \frac{d^3 p}{(2 \pi)^3} f[p] \leftrightarrow \frac{1}{V} \sum_p f[p]$$

在求和中， p 遍历 $\vec{p} = \frac{2 \pi}{L} (n_x, n_y, n_z)$ 中的离散值。 $\int \frac{d^3 p}{(2 \pi)^3} f[p] \leftrightarrow \frac{1}{V} \sum_p f[p]$ 中连续归一化和离散箱归一化的对应暗示了

$$\delta^{(3)}[\vec{p} - \vec{p}'] \leftrightarrow \frac{V}{(2 \pi)^3} \delta_{\vec{p}, \vec{p}'}$$

$\delta_{\vec{p}, \vec{p}'}$ 为克罗内克符号。记住这些对应关系的一种简单方法是量纲匹配。

观察一个用复标量场用产生和湮灭算符的展开

$$\varphi[t, \vec{x}] = \int \frac{d^3 k}{\sqrt{(2 \pi)^3 2 \omega_k}} \left(a[\vec{k}] \text{Exp}[-I(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{x})] + b^\dagger[\vec{k}] \text{Exp}[I(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{x})] \right)$$

对易关系对应

$$[a[\vec{k}], a^\dagger[\vec{k}']] = \delta^{(3)}[\vec{k} - \vec{k}'] \leftrightarrow [a[\vec{k}], a^\dagger[\vec{k}']] = \frac{V}{(2 \pi)^3} \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}$$

把产生和湮灭算符归一化为

$$a[\vec{k}] = \left(\frac{V}{(2 \pi)^3} \right)^{1/2} \tilde{a}[\vec{k}]$$

以使得

$$[a[\vec{k}], a^\dagger[\vec{k}']] = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}$$

态 $|k\rangle \equiv \tilde{a}^\dagger[k] |0\rangle$ 被适当地归一化为 $\langle k | k \rangle = 1$ 。我们最终得到

$$\varphi[x] = \frac{1}{V^{1/2}} \sum_k \frac{1}{\sqrt{2 \omega_k}} (\tilde{a} \text{Exp}[-I \vec{k} \cdot x] + \tilde{b}^\dagger \text{Exp}[I \vec{k} \cdot x])$$

我们指定了一个复标量场，所以如练习1.8.4所示，

可以用对应的荷 $Q = \int d^3 x J^0 = \int d^3 k (a^\dagger[k] a[k] - b^\dagger[k] b[k]) \rightarrow \sum_k (\tilde{a}^\dagger[k] \tilde{a}[k] - \tilde{b}^\dagger[k] \tilde{b}[k])$ 定义一个守恒流。

紧接着， $\langle k | Q | k \rangle = 1$ ，因此对于状态 $|k\rangle$ ，箱子中只有一个粒子。

为了得出衰变率的公式，采用一个玩具拉格朗日模型。 $\mathcal{L} = g(\eta^\dagger \xi^\dagger \varphi + h.c.)$ 描述一个介子到两个其他种类介子 $\varphi \rightarrow \eta + \xi$ 的衰变过程。

其中省略了拉格朗日中的动能部分。

跃迁振幅 $\langle p, q | \text{Exp}[-iHT] | k \rangle$ 的最低阶由 $\mathcal{A} = I \star \langle p, q | \int d^4x (g \eta^\dagger[x] \xi^\dagger[x] \phi[x]) | k \rangle$ 给出。

在这里，我们使用上面仔细归一化的态。（严格来说，我们应该使用波包而不是平面波状态。）

插入类似 $\phi[x] = \frac{1}{V^{1/2}} \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} (\tilde{a} \text{Exp}[-ikx] + \tilde{b}^\dagger \text{Exp}[ikx])$ 的式子，我们得到：

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= I g \left(\frac{1}{V^{1/2}} \right)^3 \sum_{p'} \sum_{q'} \sum_{k'} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{p'} 2\omega_{q'} 2\omega_{k'}}} \int d^4x \text{Exp}[I(p' + q' - k')x] \langle p, q | \tilde{a}^\dagger[p'] \tilde{a}^\dagger[q'] \tilde{a}[k'] | k \rangle \\ &= I g \star \frac{1}{V^{3/2}} \star \frac{1}{\sqrt{2\omega_p 2\omega_q 2\omega_k}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}[p + q - k] \end{aligned}$$

上面的符号有些许混淆，但是可以被理解。

接着，把跃迁振幅 \mathcal{A} 平方以得到跃迁几率。你可能担心，我们将会对狄拉克 δ 函数平方。但是不要担心，我们已经将自己封闭在盒子里。

此外，我们实际上是在计算 $\langle p, q | \text{Exp}[-iHT] | k \rangle$ ，状态 $|k\rangle$ 经过漫长但有限的时间转变成状态 $|p, q\rangle$ 的振幅。因此，我们可以安心地写下

$$\begin{aligned} ((2\pi)^4 \delta^{(4)}[p + q - k])^2 &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}[p + q - k] \int d^4x \text{Exp}[I(p + q - k)x] \\ &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}[p + q - k] \int d^4x = (2\pi)^4 \delta^{(4)}[p + q - k] VT \end{aligned}$$

δ 积分来自拉格朗日量中的 $\int d^4x$ ，一个作为时空体积，一个用来减少末态相空间的动量自由度。

因此单位时间的跃迁几率，亦称作跃迁速率，就等于

$$\frac{|\mathcal{A}|^2}{T} = \frac{V}{V^3} \left(\frac{1}{2\omega_p 2\omega_q 2\omega_k} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}[p + q - k] g^2$$

回想一下，动量空间中 $V d^3p / (2\pi)^3$ 体积内存在 d^3p 种状态。因此，将末态的数目 $(V d^3p / (2\pi)^3) (V d^3q / (2\pi)^3)$ 乘上跃迁速率 $\frac{|\mathcal{A}|^2}{T}$ ，

我们就得到了一个介子衰变到两个特定动量范围 d^3p 和 d^3q 内的介子的微分衰变率：

$$d\Gamma = \frac{1}{2\omega_k} \star \frac{V}{V^3} \left(V \star \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\omega_p} \right) \left(V \star \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2\omega_q} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}[p + q - k] g^2$$

跟你看到的一样，先生， V 因子本该抵消掉的。

为了得到总衰变率 Γ 我们对 d^3p 和 d^3q 进行积分。注意 $1/2\omega_k$ 因子：运动粒子的衰变率要比静止粒子小一个 m/ω_k 因子。

我们已经推导过时间膨胀效应。

现在我们准备推广到以下过程：一个携带动量 P 的粒子衰变到 n 个分别携带动量 k_1, \dots, k_n 的粒子。为了明确起见，假设他们都是玻色子。

第一步，我们画出所有相关的费曼图，并计算不变振幅 \mathcal{M} 。（在我们的玩具模型里， $\mathcal{M} = Ig$ 。）

第二步，跃迁几率包含了一个 $1/V^{n+1}$ 因子，对每个粒子有一个 $1/V$ 因子，

但是我们对代表动量守恒的 δ 函数平方时，我们也能得到一个 VT 因子，该因子将跃迁几率转换成跃迁率，并去掉 V 的一次幂，从而留下来 $1/V^n$ 因子。

接下来，当我们对末态求和时，对于末态的每一个粒子，我们将得到一个 $V d^3k_i / ((2\pi)^3 2\omega_{k_i})$ 因子。因此所有的 V 因子确实相互抵消了。

因此一个质量为 M 的玻色子在静止系中的微分衰变率

$$d\Gamma = \frac{1}{2M} \star \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3 2\omega[k_1]} \dots \star \frac{d^3k_n}{(2\pi)^3 2\omega[k_n]} (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left[P - \sum_{i=1}^n k_i \right] |\mathcal{M}|^2$$

Zee 书中，费米子场展开有两种归一化，平平无奇地由一个 $(2m)^{1/2}$ 因子联系起来。

如果选择使用“静止归一化”，那么场展开式中包含的归一化因子将是 $(E_p/m)^{1/2}$ 而不是玻色子那样的 $(2\omega_k)^{1/2}$ 。

对于每一个费米子，把因子 $(2\omega_k) = 2\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$ 替换成 $E[p]/m = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}/m$ 。

特别地，对于费米子的衰变率，因子 $1/2M$ 应当被移除。

如果你选择“任意质量归一化”，你需要记住将 M 出现的旋量正确地归一化，但无需改动这里推导出的相空间因子。

下面我们转向散射截面的部分。

基本概念：

束流的通量定义为单位时间内穿过假设的单位面积的电子数，因此由 $F = n v$ 给出，其中 n 和 v 标记束流中电子的密度和速度。

测得的事件率除以束流通量，其结果被定义为散射截面 σ ，散射截面具有面积的量纲，可以理解为质子被电子看到的有效尺寸。

转到电子的静止系中可能会更有帮助，在电子静止系中，质子像推土机一样在电子云中穿行。在时间 Δt 内质子移动了距离 $v \Delta t$ ，

因此扫过了 $\sigma v \Delta t$ 的体积，其中包括了 $n \sigma v \Delta t$ 数目的电子。将前式除以 Δt ，我们得到事例速率 $n v \sigma$ 。

为了测量微分散射截面，实验人员通常在目标例子处于静止系状态的实验室参考系内，建立一个立体角跨度为 $d\Omega = \sin[\theta] d\theta d\phi$ 的探测器，

并计算单位时间内的事例数。

现在，我们基本上完全套用计算微分衰变率的方法来计算过程 $p_1 + p_2 \rightarrow k_1 + k_2 + \dots + k_n$ 的截面。

由于初态现在有两个粒子，在跃迁概率中会出现一个 $(1/V)^{n+2}$ 。但是如同之前，动量守恒的 δ 函数产生 V 的一次幂，末态动量计数给出一个 V^n 因子。

所以我们最终得到一个 $1/V$ 因子。也许你会为这个剩下的 $1/V$ 担忧，但是回想一下，我们还需要除以束流。

由 $|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|$ 给出。由于我们归一到箱中只有单个粒子，所以数密度 n 等于 $1/V$ 。再一次，所有的 V 因子都抵消了，它们必须如此。

因此，画出所有相关的费曼图至欲求阶，并对于过程 $p_1 + p_2 \rightarrow k_1 + k_2 + \dots + k_n$ 计算 M 。然后，微分截面由下式给出（同样假设所有粒子均为玻色子）

$$d\sigma = \frac{1}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2| 2\omega[p_1] 2\omega[p_2]} * \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3 2\omega[k_1]} \dots * \frac{d^3 k_n}{(2\pi)^3 2\omega[k_n]} (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left[p_1 + p_2 - \sum_{i=1}^n k_i\right] |M|^2$$

我们默认在共线坐标系中工作，其中入射粒子的速度， \vec{v}_1, \vec{v}_2 的指向相反。这一类的参考系包括熟知的质心系和实验室系（其中 $\vec{v}_2 = 0$ ）。

在共线坐标系中， $p_1 = E_1(1, 0, 0, v_1)$ 和 $p_2 = (1, 0, 0, v_2)$ ，简单地计算表明

$$((p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2) = (E_1 E_2 (v_1 - v_2))^2$$

我们可以把 $d\sigma$ 中的 $|\vec{v}_1 - \vec{v}_2| E_1 E_2$ 因子写成更加凸显不变性的形式 $((p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2)^{1/2}$ ，

因此清晰地表明，微分散射截面在沿束流方向的洛伦兹平动变换下是不变的，显然在物理上也必须如此。

一个经常遇到的情况是，两粒子在质心系散射到两粒子。让我们完成相空间积分 $\int d^3 k_1 / 2\omega_1 d^3 k_2 / 2\omega_2 \delta^{(4)}[P - k_1 - k_2]$ 以作为一个简单的示范。

有两种方式完成：

我们可以直接对 $d^3 k_2$ 进行积分，因此拿掉3--维动量守恒的 $\delta^3[\vec{k}_1 - \vec{k}_2]$ 函数。写成 $d^3 k_1 = k_1^2 dk_1 d\Omega$,

我们对剩下的能量守恒 δ 函数 $\delta[\sqrt{k_1^2 + m_1^2} + \sqrt{k_1^2 + m_2^2} - E_{\text{total}}]$ 进行积分。

利用 $\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta[f(x)] * s[x] = \sum_i s[x_i] / |f'[x_i]|$ 我们发现对于 k_1 的积分给出 $k_a \omega_1 \omega_2 / E_{\text{total}}$ ，其中 $\omega_{a1} \equiv \sqrt{k_a^2 + m_1^2}$ 且 $\omega_{a2} \equiv \sqrt{k_a^2 + m_2^2}$ ，

k_a 由 $\sqrt{k_a^2 + m_1^2} + \sqrt{k_a^2 + m_2^2} = E_{\text{total}}$ 决定。因此我们得到：

$$\int \frac{d^3 k_1}{2 \omega_1} * \frac{d^3 k_2}{2 \omega_2} * \delta^{(4)}[P - k_1 - k_2] = \frac{k_a}{4 E_{\text{total}}} \int d\Omega$$

同样地，如果你对费米子使用“静止质量归一化”，记得像在衰变率那里一样做替换。

对于一个费米子加一个玻色子， $1/4$ 应当被替换成 $m_f/2$ ，对于两个费米子应当替换成 $m_1 m_2$ 。

或者，我们利用(1.8.14)倒退一步，改成 $d^3 k_2 = \int d^4 k_2 \theta[k_2^0] * \delta[k_2^2 - m_2^2] 2 \omega_2$

对 $d^4 k_2$ 进行积分，并且移除一个4--动量 δ 函数，我们还剩下 $\int 2 \omega_2 d^4 k_1 k_1^2 d\Omega / (2 \omega_1 2 \omega_2) \delta[(P - k_1)^2 - m_2^2]$

δ 函数的参数是 $E_{\text{total}}^2 - 2 E_{\text{total}} k_1 + m_1^2 - m_2^2$ ，因此对 k_1 积分，我们将在分母上得到一个 $2 E_{\text{total}}$ 因子，最终结果与(2.6.40)相同。

请注意，你可以求解运动学并得到

$$k_1 = \sqrt{(E_{\text{total}}^2 - (m_1 + m_2)^2)(E_{\text{total}}^2 - (m_1 - m_2)^2)} / 2 E_{\text{total}}$$

显然，这个相空间积分也适用于描述父粒子在其静止系衰变到两粒子的过程，这时我们把 E_{total} 替换成 M 。特别地，对于我们的玩具模型有：

$$\Gamma = \frac{g^2}{16 \pi M^3} \sqrt{(M^2 - (m + \mu)^2)(M^2 - (m - \mu)^2)}$$

质心系中2到2过程的微分散射截面由下式给出

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} \frac{1}{2\omega[p_1] 2\omega[p_2]} * \frac{k_1}{E_{\text{total}}} |\mathcal{M}|^2$$

正文中计算了相对论极限下的电子--电子散射。如前文所述，我们可以把截面写成

$$|\mathcal{M}|^2 = |\hat{\mathcal{M}}|^2 / (2m)^4$$

因子 $1/(2m)^4$ 把因子 $2\omega[p]$ 转换成 $2E$ 。由于 $|\vec{v}_1 - \vec{v}_2| = 2$ 且 $k_1 = \frac{1}{2} E_{\text{total}}$ ，事情大大简化了，所以最终

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2^4 (4\pi)^2 E^2} |\hat{\mathcal{M}}|^2$$

最后，我们考虑统计因子 S ，该因子必须包含在总衰变率和总散射截面的计算中，以避免在末态存在全同粒子时重复计算。

因子 S 本身与量子场论无关，在非相对论量子力学时你应当已熟悉。

规则是：若末态由 n_i 个 i 类型的全同粒子，总衰变率或总散射截面必须乘上 $S = \prod_i 1/n_i!$ 以反映不可区分性。

考虑电子--正电子湮灭成两个光子。为简单起见，对所有自旋极化取平均并求和。让我们依照(2.6.43)计算 $d\sigma/d\Omega$ 。

它是光子进入相对于束流方向成角度 θ 和 ϕ 的检测器的概率。

如果探测器发出咔嚓声，那么我们知道必然有另一个光子相对于束流以 $\pi - \theta$ 的角度出现，因此总散射截面为

$$\sigma = \frac{1}{2} \int d\Omega \star \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} \int_0^\pi d\theta \star \frac{d\sigma}{d\theta}$$

第二个等式对于类似的基本过程都成立，其中 $d\sigma$ 不依赖于方位角 ϕ 。换句话说，为避免重复计算，如果我们在 θ 的整个角度范围内积分，则应除以2。

也可以进行正式的论证。

考虑态

$$|k_1, k_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{a}^\dagger[k_1] \tilde{a}^\dagger[k_2] |\theta\rangle = |k_2, k_1\rangle$$

包含两个全同的玻色子。

使用对易关系，

$$\langle q_1, q_2 | k_1, k_2 \rangle = \langle \theta | \tilde{a}[q_1] \cdot \tilde{a}[q_2] \cdot \tilde{a}^\dagger[k_1] \cdot \tilde{a}^\dagger[k_2] | \theta \rangle = \frac{1}{2} (\delta_{q1,k1} \delta_{q2,k2} + \delta_{q2,k1} \delta_{q1,k2})$$

因此，

$$\sum_{q1} \sum_{q2} |q_1, q_2\rangle \langle q_1, q_2 | k_1, k_2 \rangle = \frac{1}{2} |q_1, q_2\rangle (\delta_{q1,k1} \delta_{q2,k2} + \delta_{q2,k1} \delta_{q1,k2}) = \frac{1}{2} (|k_1, k_2\rangle + |k_2, k_1\rangle) = |k_1, k_2\rangle$$

则态 $|k_1, k_2\rangle$ 是正确归一化的。

也就是全同粒子，算符产生的态跟归一化的完备基的内积会有一个大于1的系数。构造这种全同粒子态的时候，要除以这个系数。

也就是说，如果我们对 q_1 和 q_2 独立求和，那么我们必须像(2.6.45)中那样用 $1/\sqrt{2}$ 因子归一化态。

但是接着这个因子会在乘以 \mathcal{M} 时出现，在计算总衰变率或者总散射截面的时候，我们有效地实现了对一套完备的末态求和。

总而言之，我们有两个选项：

- 1) 我们将对于 $d^3k_1 d^3k_2$ 的积分视为独立的，在这种情况下，我们必须将积分乘以1/2。
- 2) 我们仅在一半的相空间上积分。

我们很容易将这个1/2因子推广为统计因子 S

最后，提及两个有趣的物理。

要计算散射截面 σ ，我们必须除以通量，因此 σ 正比于 $1/|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|$ 。

对于放热过程，例如电子-正电子湮灭到光子或慢中子捕获，当相对速度 $v_{\text{rel}} \rightarrow 0$ 时， σ 可以变得非常大。

费米利用这一事实在研究核裂变方面取得巨大优势。

请注意，尽管具有面积量纲的截面形式上称为无穷大，但反应率（单位时间内的反应数）仍然保持有限。

+++++

电子偶素衰变成光子是束缚态在有限时间内衰变的一个例子。

不像我们在散射截面计算过程中所假设的那样，在电子偶素中，正电子和电子不是以平面波状态互相接近的。

相反，正电子发现自己在电子附近的概率（单位体积内）有 $|\psi[0]|^2$ 给出，其依据是基本的量子力学。

其中束缚态波函数 $\psi[x]$ 可以使我们感兴趣的任何电子偶素态。

换句话说， $|\psi[0]|^2$ 给出正电子接近电子的体积密度。

由于 $v\sigma$ 的量纲是体积除以时间，所以衰变率由 $\Gamma = v\sigma |\psi[0]|^2$ 给出。

规范不变性的图解证明

规范不变性

从概念上讲，而不是计算截面，我们有更重要的任务去证明我们确实可以设光子质量 μ 等于零，而在计算任何物理过程时不受影响。

当 $\mu = 0$ 时，章节2.1给出的拉格朗日量就变成了量子电动力学的拉格朗日量：

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (I \cdot \gamma^\mu \cdot (\partial_\mu - I \cdot e \cdot A_\mu) - m) \cdot \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

我们已经准备好进行理论物理学史上最重要的观察之一。看呀，通过规范变换，拉格朗日保持不变。

$$\psi[x] \rightarrow \text{Exp}[I \cdot \Lambda[x]] \cdot \psi[x]$$

$$A_\mu[x] \rightarrow A_\mu[x] + \frac{1}{I \cdot e} \text{Exp}[-I \cdot \Lambda[x]] \cdot \partial_{x,\mu} \cdot \text{Exp}[I \cdot \Lambda[x]] = A_\mu[x] + \frac{1}{e} \partial_\mu \Lambda[x]$$

这意味着，

$$F_{\mu\nu}[x] \rightarrow F_{\mu\nu}[x]$$

如果我们想构造一个包含自旋 $\frac{1}{2}$ 和自旋为1的规范不变相对论场论，那么我们就必须研究量子电动力学。

$$A_\mu[x] \rightarrow A_\mu[x] + I \cdot U[x]^\dagger \cdot \partial_{x,\mu} U[x] = A_\mu[x] - \partial_{x,\mu} \cdot \Lambda[x]$$

上面的形式中，虽然第二种更简单，但是第一种形式也应该记住。

$\Lambda[x] + 2\pi$ 和 $\Lambda[x]$ 给出了完全相同的变换。

从数学上讲， $\text{Exp}[I \cdot \Lambda[x]]$ 和 $\partial_\mu \Lambda[x]$ 是良好定义的，但 $\Lambda[x]$ 没有。

我们就可以开始证明了，我会通过一些有代表性的例子给你展示。

$$\bar{\psi} \cdot \gamma^\mu \cdot (I \cdot \partial_\mu + e \cdot A_\mu) \cdot \psi, I \cdot \partial_\mu + e \cdot A_\mu,$$

重定义： $-e \cdot A_\mu \rightarrow A'_\mu$

$$I \cdot \partial_\mu - A'_\mu, \bar{\psi} \cdot \gamma^\mu \cdot (I \cdot \partial_\mu - e \cdot A'_\mu) \cdot \psi$$

$$\psi[x] \rightarrow \text{Exp}[I \cdot \Lambda[x]] \cdot \psi[x]$$

$$A_\mu[x] \rightarrow A_\mu[x] + I \cdot U[x]^\dagger \cdot \partial_{x,\mu} U[x] = A_\mu[x] - \partial_{x,\mu} \cdot \Lambda[x]$$

参考QED的拉氏量，当规范变换是local的，由求偏导的乘法规则，会多出一项，符号为正。

$$\psi[x] \rightarrow U \cdot \psi[x], U = \text{Exp}[I \cdot \Lambda[x]]$$

由于费米子场的动能项是 $\bar{\psi} \cdot \gamma \cdot \partial \cdot \psi$ ，所以多余的项是 $-U[x]^\dagger \cdot \partial_{x,\mu} U[x]$ ，

那么要把它减去，在耦合项里把负号明确写出，那么规范耦合场本身的变换就不用带负号了。

变换中的 I 因子是由于费米子场动能项中有 I 。

$$\bar{\psi} \cdot \gamma^\mu \cdot (I \cdot \partial_\mu - A'_\mu) \cdot \psi$$

$$I \cdot \bar{\psi} \cdot U^\dagger \cdot \gamma \cdot (\partial_x U) \cdot \psi - \bar{\psi} \cdot \gamma \cdot (I \cdot U[x]^\dagger \cdot \partial_{x,\mu} U[x]) \cdot \psi$$

所以规范场的变换是 $A'_\mu[x] + I \cdot U[x]^\dagger \cdot \partial_{x,\mu} U[x]$ ，dagger在前，对应了 $\bar{\psi}$ 在前。

QED又把耦合常数独立出来，相当于 $1 = (-e) \left(\frac{-1}{e} \right)$

+++++

+++++

回想一下假设有质量光子的传播子为 $I \star D_{\mu\nu} = I(k_\mu k_\nu / \mu^2 - g_{\mu\nu}) / (k^2 - \mu^2)$ 。

我们可以毫不费力地使分母中的 μ^2 等于零，并将光子传播子实际写成 $I \star D_{\mu\nu} = I \star (k_\mu k_\nu / \mu^2 - g_{\mu\nu}) / k^2$ 。

有危险的一项是 $k_\mu k_\nu / \mu^2$ 。我们想证明实际上它消失了。

一个特例

首先考虑 e^4 阶的电子-电子散射。在许多费曼图中，关注图（2.7.1a）中的两个。费曼振幅为

$$\bar{u}[p'] \cdot \left(\gamma^\lambda \cdot \frac{1}{p + \gamma \cdot k - m} \cdot \gamma^\mu + \gamma^\mu \cdot \frac{1}{p' - k - m} \cdot \gamma^\lambda \right) \cdot u[p] \star \frac{I}{k^2} \star \left(\frac{k_\mu \cdot k_\nu}{\mu^2} - \delta_\mu^\nu \right) \cdot \Gamma_{\lambda\nu} \quad (2.7.6)$$

其中 $\Gamma_{\lambda\nu}$ 是一些具体结构无所谓的因子。如果我们愿意，也可以写出来。

这里的加号来自于将两个光子交换，因为光子服从玻色统计。

我们来关注危险的一项。将（2.7.5）中的 $\bar{u}[p'] \dots u[p]$ 因子与 k_μ 缩并，我们可以得到

$$\bar{u}[p'] \cdot \left(\gamma^\lambda \cdot \frac{1}{\gamma \cdot p + \gamma \cdot k - m} \cdot \gamma \cdot k + \gamma \cdot k \cdot \frac{1}{\gamma \cdot p' - \gamma \cdot k - m} \cdot \gamma^\lambda \right) \cdot u[p]$$

这里的技巧是把分子中 $\gamma \cdot k$ 的写成 $(\gamma \cdot p + \gamma \cdot k - m) - (\gamma \cdot p - m)$ ，把第二项的分子写成 $(\gamma \cdot p' - m) - (\gamma \cdot p' - \gamma \cdot k - m)$ 。

使用 $(\gamma \cdot p - m) u[p] = 0$ 和 $(\gamma \cdot p' - m) \bar{u}[p'] = 0$ ，我们可以看到（2.7.6）中的表达式消失了。

在这个简单的例子中，即证明了上述定理。

由于没有给出 $\Gamma_{\lambda\nu}$ 的显示形式，所以即使图2.7.1a中的右侧被更广泛的图2.7.1b代替，证明也成立。

在图2.7.6中，任意复杂的过程都放在阴影部分里。

实际上，我们可以推广到图2.7.1c。

除了我们所关注的携带动量 k 的光子，在电子线上已经存在 n 个光子。这 n 个光子只是证明中的“旁观者”，就像图2.7.1a中携带动量 k' 的光子

从未出现在（2.7.6）等于零的证明中一样。

我们所关注的光子可以在 $n+1$ 个不同的位置连接到电子线上。

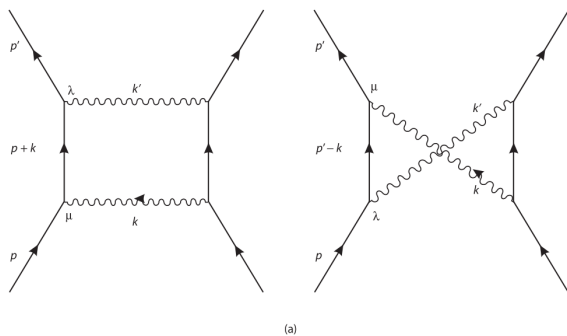


Figure 11.7.1

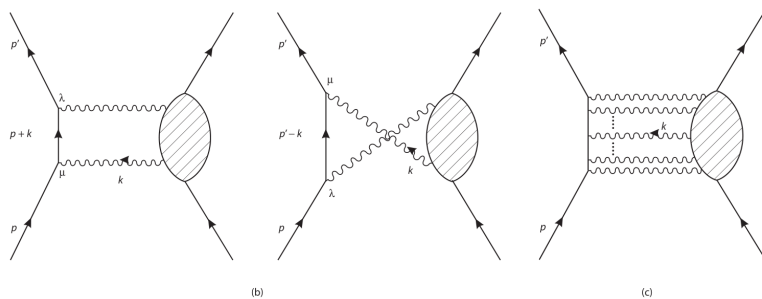


Figure 11.7.1 (continued)

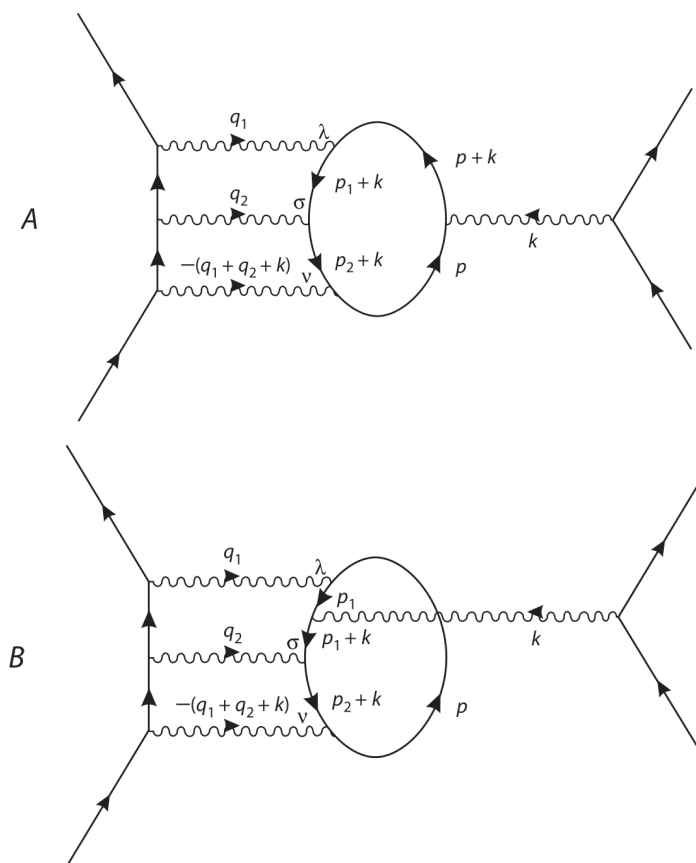
Figure 11.7.1 (continued)

光子落在内线上

在我们刚刚思考的例子中，所讨论的光子线都落在外电子线上。这两条线的两端是 $u[p]$ 和 $u[p]$ 这一事实在证明中很重要。

那么如果所讨论的光子线落在一条内线上将会如何呢？

图2.7.2中展示了一个例子，对 e^8 阶的电子-电子散射有贡献。改图包含了三个不同的图。



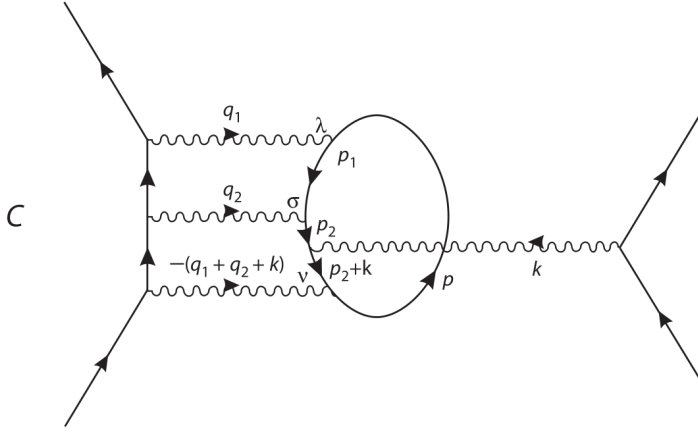


Figure II.7.2

“左边的”电子发射了三个光子，它们附着在内电子圈上。“右边的”电子发出带有动量 k 的光子，它们可以以三种不同的方式附着在电子圈上。

因为我们关心的是光子传播子 $I \star (k_\mu k_\rho / \mu^2 - g_{\mu\rho})$ 中的 $k_\mu k_\rho / \mu^2$ 项是否会消失，所以我们可以用 k_μ 来代替光子传播子。

为了节省书写时间，我们定义 $p_1 = p + q_1$ 和 $p_2 = p_1 + q_2$ （参见2.7.2中的动量标号）：让我们关注这三个图的相关部分，将它们称为A、B和C

$$A = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\gamma^\nu \star \frac{1}{\gamma \cdot p_2 + \gamma \cdot k - m} \star \gamma^\sigma \star \frac{1}{\gamma \cdot p_1 + \gamma \cdot k - m} \star \gamma^\lambda \star \frac{1}{\gamma \cdot p + \gamma \cdot k - m} \star \gamma \cdot k \star \frac{1}{\gamma \cdot p - m} \right]$$

$$B = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\gamma^\nu \star \frac{1}{\gamma \cdot p_2 + \gamma \cdot k - m} \star \gamma^\sigma \star \frac{1}{\gamma \cdot p_1 + \gamma \cdot k - m} \star \gamma \cdot k \star \frac{1}{\gamma \cdot p_1 - m} \star \gamma^\lambda \star \frac{1}{\gamma \cdot p - m} \right]$$

以及

$$C = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\gamma^\nu \star \frac{1}{\gamma \cdot p_2 + \gamma \cdot k - m} \star \gamma \cdot k \star \frac{1}{\gamma \cdot p_2 - m} \star \gamma^\sigma \star \frac{1}{\gamma \cdot p_1 - m} \star \gamma^\lambda \star \frac{1}{\gamma \cdot p - m} \right]$$

利用之前的技巧，在C中 $\gamma \cdot k = (\gamma \cdot p_2 + \gamma \cdot k - m) - (\gamma \cdot p_2 - m)$ ，因此

$$C = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left(\text{Tr} \left[\gamma^\nu \star \frac{1}{\gamma \cdot p_2 - m} \star \gamma^\sigma \star \frac{1}{\gamma \cdot p_1 - m} \star \gamma^\lambda \star \frac{1}{\gamma \cdot p - m} \right] - \text{Tr} \left[\gamma^\nu \star \frac{1}{\gamma \cdot p_2 + \gamma \cdot k - m} \star \gamma^\sigma \star \frac{1}{\gamma \cdot p_1 - m} \star \gamma^\lambda \star \frac{1}{\gamma \cdot p - m} \right] \right)$$

在B中 $\gamma \cdot k = (\gamma \cdot p_1 + \gamma \cdot k - m) - (\gamma \cdot p_1 - m)$

$$B = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left(\text{Tr} \left[\gamma^\nu \star \frac{1}{\gamma \cdot p_2 + \gamma \cdot k - m} \star \gamma^\sigma \star \frac{1}{\gamma \cdot p_1 - m} \star \gamma^\lambda \star \frac{1}{\gamma \cdot p - m} \right] - \text{Tr} \left[\gamma^\nu \star \frac{1}{\gamma \cdot p_2 + \gamma \cdot k - m} \star \gamma^\sigma \star \frac{1}{\gamma \cdot p_1 + \gamma \cdot k - m} \star \gamma^\lambda \star \frac{1}{\gamma \cdot p - m} \right] \right)$$

最后，在A中 $\gamma \cdot k = (\gamma \cdot p + \gamma \cdot k - m) - (\gamma \cdot p - m)$

$$A = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left(\text{Tr} \left[\gamma^\nu \star \frac{1}{\gamma \cdot p_2 - m} \star \gamma^\sigma \star \frac{1}{\gamma \cdot p_1 - m} \star \gamma^\lambda \star \frac{1}{\gamma \cdot p - m} \right] - \text{Tr} \left[\gamma^\nu \star \frac{1}{\gamma \cdot p_2 + \gamma \cdot k - m} \star \gamma^\sigma \star \frac{1}{\gamma \cdot p_1 + \gamma \cdot k - m} \star \gamma^\lambda \star \frac{1}{\gamma \cdot p + \gamma \cdot k - m} \right] \right)$$

现在你就可以看到发生了什么。当我们把这三个图加在一起时，项成对抵消，只剩下

$$A + B + C = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left(\text{Tr} \left[\gamma^\nu \star \frac{1}{\gamma \cdot p_2 - m} \star \gamma^\sigma \star \frac{1}{\gamma \cdot p_1 - m} \star \gamma^\lambda \star \frac{1}{\gamma \cdot p - m} \right] - \text{Tr} \left[\gamma^\nu \star \frac{1}{\gamma \cdot p_2 + \gamma \cdot k - m} \star \gamma^\sigma \star \frac{1}{\gamma \cdot p_1 + \gamma \cdot k - m} \star \gamma^\lambda \star \frac{1}{\gamma \cdot p + \gamma \cdot k - m} \right] \right)$$

如果我们在第二项中平移积分元 $p \rightarrow p - k$ ，我们就可以看到这两项抵消了。

的确，光子传播想的 $k_\mu k_\rho / \mu^2$ 的部分消失，我们就可以设 $\mu = 0$ 。

如此完成了对特定过程的证明。你可以在其他过程中尝试一下，你会看到它是如何运作的。

WardTakahashi恒等式

让我们来总结一下。给定任意的一个振幅 $T^{\mu\dots}[k, \dots]$ ，外线电子在壳（这是一个表示所有必要的因子 $u[p]$ 和 $\bar{u}[p]$ 都包含在 $T^{\mu\dots}[k, \dots]$ 从的术语），

并能描述携带动量 k 的光子从内穿出或从外进入一个用洛伦兹指标 μ 标记的顶点的过程，那么我们就有

$$k_\mu T^{\mu\dots}[k, \dots] = 0$$

这有时被称作“Ward--Takahashi”恒等式

底线是我们可以把光子传播子写成 $iD_{\mu\nu} = -i g^{\mu\nu} / k^2$ 。

因为我们可以抛弃光子传播子 $i \star (k_\mu k_\rho / \mu^2 - g^{\mu\nu}) / k^2$ 中的 $k_\mu k_\rho / \mu^2$ 项，我们也可以加入一个任意系数的 $k_\mu k_\rho / k^2$ 项。

因此，对于光子传播子，我们可以写为

$$iD_{\mu\nu} = \frac{i}{k^2} \left((1 - \xi) \star \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} - g_{\mu\nu} \right)$$

此处，我们可以指定数 1 来尽可能简化我们的计算。

显然 1 的选择相当于对电磁场规范的选择。特别地，

1 的选择被称为费曼规范，而 ξ 的选择被称为朗道规范。

对于相当简单的计算，通常建议用任意 ξ 进行计算。最终结果不依赖于 ξ 的这一事实提供了一种对算法的检查。

这就完成了量子电动力学费曼规则的推导：除了 (2.7.15) 中给出的光子传播子外，它们与章节 2.5 中的有质量矢量玻色子理论的规则相同。

我们在这里给出了量子电动力学规范不变性的图解证明。

稍后（在章节 4.7 中）我们也许会烦恼，在某些情况下，证明中所使用的积分动量的平移可能是不被允许的。

纵模

现在我们回顾一下在章节 1.5 中的担忧。想象一个沿 z 方向移动的有质量的自旋为 1 的介子。

现在我得泼点冷水：从逻辑上或者是数学上讲，质量 $m \neq 0$ 的粒子与质量 $m = 0$ 的粒子可能在物理上有所不同。

的确，在经典电动力学中我们知道电磁波有两种偏振，也即两个自由度。

对于有质量自旋 1 的粒子，我们可以取其所在的静止系，此时旋转群告诉我们体系具有 $2 \cdot 1 + 1 = 3$ 个自由度。

可最重要的是，我们永远无法取到无质量光子所在的静止系。

从数学上讲，此时旋转群 $SO(3)$ 将退化到 $SO(2)$ ，即绕着光子动量方向的二维旋转群。

这三个极化矢量由条件 $k^\lambda \varepsilon_\lambda = 0$ 固定。其中 $k^\lambda = (\omega, 0, 0, k)$ 。（回忆一下章节 1.5），并且归一化 $\varepsilon^\lambda \varepsilon_\lambda = -1$ 。

因此 $\varepsilon_\lambda^{(1)} = (0, 1, 0, 0)$ ， $\varepsilon_\lambda^{(2)} = (0, 0, 1, 0)$ ， $\varepsilon_\lambda^{(3)} = (-k, 0, 0, \omega) / \mu$ 。

注意，当 $\mu \rightarrow 0$ 时，纵向极化矢量 $\varepsilon_\lambda^{(3)}$ 与 $k_\lambda = (\omega, 0, 0, -k)$ 成正比。

在 (2.7.4) 所描述的过程中，发射一个纵向极化的介子的振幅由下式给出

$$\begin{aligned} \varepsilon_\lambda^{(3)} T^{\lambda\dots} &= (-k \star T^0\dots + \omega \star T^3\dots) / \mu = \left(-k \star T^0\dots + \sqrt{k^2 + \mu^2} \star T^3\dots \right) / \mu \\ &\simeq \left(-k \star T^0\dots + \left(k + \frac{\mu^2}{2k} \right) \star T^3\dots \right) / \mu \end{aligned}$$

对于 $\mu \ll k$ ，即 $-(k_\lambda T^{\lambda\dots} / \mu + \frac{\mu}{2k} T^3\dots)$ ，其中 $k_\lambda = (k, 0, 0, -k)$ 。

根据 $k_\mu T^{\mu\dots}[k, \dots] = 0$ ，我们可以发现当 $\mu \rightarrow 0$ 时，振幅 $\epsilon_\lambda^{(3)} T^{\lambda\dots} \rightarrow \frac{\mu}{2k} T^{\lambda\dots} \rightarrow 0$ 。

即纵模跟其他粒子的相互作用为0

因为与所有的物理过程解耦，所以光子的纵模不存在。

这里有个测量悖论。

由玻尔兹曼定理，热平衡中的每个自由度与 $\frac{1}{2} T$ 相联系。因此，通过测量一盒光子气体的某些热性质（如比热容），使其精确度达到 $2/3$ ，

实验者就能知道光子是否真的是无质量的，而不是拥有千万亿分之一电子伏特的质量。

但是，当纵模态耦合随着 $\mu \rightarrow 0$ 消失时，纵模达到热平衡的时间趋于无穷。因而我们灵巧的实验学家们必须得很有耐心。

光子的吸收和发射

根据章节2.5，发射或吸收外部的带有动量 k 的在壳光子的振幅由 $\epsilon_\mu^{(a)}[k] T^{\mu\dots}[k, \dots]$ 给出。

由于 $k_\mu T^{\mu\dots}[k, \dots] = 0$ ，我们可以自由地改变极化矢量

$$\epsilon_\mu^{(a)}[k] \rightarrow \epsilon_\mu^{(a)}[k] + \lambda * k_\mu$$

其中 λ 取任意值。这个式子实际上是 $A_\mu[x] \rightarrow A_\mu[x] - \partial_{x,\mu} \Lambda[x]$ 的动量空间版本。

在下一章我们将看到，通过 $\epsilon_\mu^{(a)}[k]$ 的适当选择，我们可以大大简化运算。

在一种被称为“横向规范”的选择下，4-矢量 $\epsilon_\mu^{(a)}[k] = (0, \vec{\epsilon}[k])$ ，其中 $a = 1, 2$ ，没有时间分量。

（对于一个在 z 方向上运动的光子，这正是前一节中指定的选择。）

光子--电子散射和交叉

光子在电子上的散射

现在，我们把刚刚学到的内容用于计算光子在电子上的康普顿散射的振幅。及过程 $\gamma[k] + e[p] \rightarrow \gamma[k'] + e[p']$ 。

第一步：绘制费曼图，有两个。如图2.8.1所示。

电子可以先吸收荷载动量 k 的光子，也可以先发射荷载动量 k' 的光子。

费曼图由外点确定。

回想我们在章节1.7中讨论的关于时空的故事。

电子或者先吸收再发射一个光子，或者先发射再吸收一个光子。两种可能性将会相干叠加。

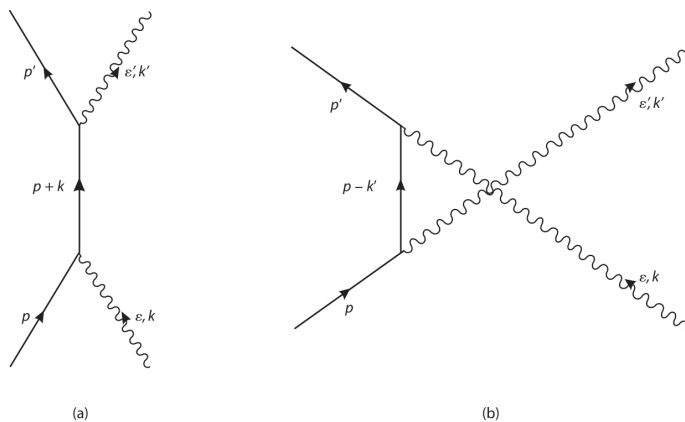


Figure II.8.1

微扰公式展开中的 $\frac{1}{n!}$ 这一项被丢弃，由于 n 个顶点（相互作用项）总会有重排产生的 $n!$ 个重复收缩。

编时乘积和 $\frac{1}{n!}$ 共同保持了微扰序列积分区域的正规性，或者说围绕序列的因果性。

编时乘积内，各个顶点的时间参量被推至无穷，顶点的时空参数由此具有了交换对称性，共 $n!$ 种。

所以在用费曼图计算时，编时乘积促使了传播子的产生。

两个 $n!$ 相消，使我们不用考虑由于坐标交换产生的重复。只用考虑“拓扑不等价”的图形。

也就是固定外点，内点跟外点连线不是同步变化时，一定是拓扑不等价的。

这个重排跟统计因子是两码事

peskin上的论述

go-on

应用费曼规则以得到（为了简化，我们将极化矢量 ε 和 ε' 设为实数）

$$M = A[\varepsilon', k'; \varepsilon, k] + (\varepsilon' \leftrightarrow \varepsilon, k' \leftrightarrow -k)$$

其中，

$$A[\varepsilon', k'; \varepsilon, k] = (-I * e)^2 \bar{u}[p'] \cdot \gamma \cdot \varepsilon' \cdot \frac{I}{\gamma \cdot p + \gamma \cdot k - m} \cdot \gamma \cdot \varepsilon \cdot u[p]$$

$$= \frac{I(-I * e)^2}{2 p \cdot k} \bar{u}[p'] \cdot \gamma \cdot \varepsilon' \cdot (\gamma \cdot p + \gamma \cdot k + m) \cdot \gamma \cdot \varepsilon \cdot u[p]$$

$$(p+k)^2 - m^2 = p^2 + k^2 + 2 p \cdot k - m^2 = 2 p \cdot k$$

$$(p+k)^2 = (p' + k')^2 \Rightarrow p \cdot k = p' \cdot k' \text{ for figure (a)}$$

$$(p-k)^2 = (p' - k')^2 \Rightarrow p \cdot k' = p' \cdot k \text{ for figure (b)}$$

无论那种情况，先吸收亦或先发射，电子因不真实而受到惩罚，前者中的系数为 $\frac{1}{(p+k)^2 - m^2} = \frac{1}{2 p \cdot k}$ ，

后者中的系数为 $\frac{1}{(p-k)^2 - m^2} = \frac{-1}{2 p \cdot k'}$

此时，为获得微分截面，只需继续计算下去。但是，可以通过明智地选择极化矢量和参考系来简化计算。

无论在哪个参考系，我们都有 $\varepsilon \cdot k = 0$, $\varepsilon' \cdot k' = 0$ 。现在选择前述章节里介绍过的横向规范，则 ε 和 ε' 的时间分量为 0。

然后在实验室系中进行计算。由于 $p = (m, 0, 0, 0)$ ，我们得到额外的关系

$$\varepsilon \cdot p = 0, \quad \varepsilon' \cdot p = 0$$

这样由于 $\gamma \cdot a \cdot \gamma \cdot b = 2 a \cdot b - \gamma \cdot b \cdot \gamma \cdot a$ 。因此我们可以把 $\gamma \cdot p$ 移动过 $\gamma \cdot \varepsilon$ 或者 $\gamma \cdot \varepsilon'$ ，代价只不过是翻转符号。所以，

$$(\gamma \cdot p + \gamma \cdot k + m) \cdot \gamma \cdot \varepsilon \cdot u[p] = -\gamma \cdot \varepsilon \cdot (-\gamma \cdot p - \gamma \cdot k + m) u[p] = -\gamma \cdot \varepsilon \cdot \gamma \cdot k \cdot u[p]$$

其中我们使用了 $\varepsilon \cdot k = 0$ 。因此

$$A[\varepsilon', k'; \varepsilon, k] = (I e)^2 \bar{u}[p'] \cdot \frac{\gamma \cdot \varepsilon' \cdot \gamma \cdot \varepsilon \cdot \gamma \cdot k}{2 p \cdot k} \cdot u[p]$$

为了得到微分散射截面，我们需要 $|\mathcal{M}|^2$ 。像章节 2.6 一样，我们假设初末态电子未指定极化，对初态求平均，末态求和，得到

$$\frac{1}{2} \sum \sum |A[\varepsilon', k'; \varepsilon, k]|^2 = \frac{e^4}{2 (2m)^2 (2 p \cdot k)^2} * \text{Tr}[(\gamma \cdot p' + m) \gamma \cdot \varepsilon' \cdot \gamma \cdot \varepsilon \cdot \gamma \cdot k \cdot (\gamma \cdot p + m) \cdot \gamma \cdot k \cdot \gamma \cdot \varepsilon \cdot \gamma \cdot \varepsilon']$$

在求迹时，请记住，奇数个伽马矩阵的迹为零。与 m^2 成比例的项包含 $\gamma \cdot k \cdot \gamma \cdot k = k^2 = 0$ ，因此为零。

我们只剩下 $\text{Tr}[\gamma \cdot p' \cdot \varepsilon' \cdot \varepsilon \cdot k \cdot p \cdot k \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon'] = 2 k \cdot p * \text{Tr}[\gamma \cdot p' \cdot \varepsilon' \cdot \varepsilon \cdot k \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon'] = -2 k \cdot p \text{Tr}[p' \cdot \varepsilon' \cdot \varepsilon \cdot k \cdot \varepsilon'] = 2 k \cdot p \text{Tr}[p' \cdot \varepsilon' \cdot k \cdot \varepsilon'] = 8 k \cdot p (2 (k \cdot \varepsilon')^2 + k' \cdot p)$

以上步骤中，我们明智的进行反对易运算，以便于尽可能地利用归零关系 $\varepsilon \cdot p = 0$, $\varepsilon' \cdot p = 0$, $\varepsilon \cdot k = 0$, $\varepsilon' \cdot k' = 0$

以及归一化关系 $\gamma \cdot \varepsilon \cdot \gamma \cdot \varepsilon = \varepsilon^2 = -1$ 和 $\gamma \cdot \varepsilon' \cdot \gamma \cdot \varepsilon' = \varepsilon'^2 = -1$

我们得到，

$$\frac{1}{2} \sum \sum |A[\varepsilon', k'; \varepsilon, k]|^2 = \frac{e^4}{2(2m)^2(2pk)^2} 8k \cdot p (2(k \cdot \varepsilon')^2 + k' \cdot p)$$

通过检查图2.8.1并进行交换 $\varepsilon' \leftrightarrow \varepsilon, k' \leftrightarrow -k$ ，可以立即得出另一项

$$\frac{1}{2} \sum \sum |A[\varepsilon, -k; \varepsilon', k']|^2 = \frac{e^4}{2(2m)^2(2pk)^2} 8(-k' \cdot p) (2(k' \cdot \varepsilon)^2 - k \cdot p)$$

就像在章节2.6中，干涉项

$$\frac{1}{2} \sum \sum A[\varepsilon, -k; \varepsilon', k']^* A[\varepsilon', k'; \varepsilon, k] = \frac{e^4}{2(2m)^2(2pk)(-2pk')} \text{Tr}[(\gamma \cdot p' + m) \gamma \cdot \varepsilon' \gamma \cdot \varepsilon \gamma \cdot k (\gamma \cdot p + m) \cdot \gamma \cdot k' \gamma \cdot \varepsilon' \gamma \cdot \varepsilon]$$

计算起来十分冗长。把这个求迹简记为 T 。代入 $p' = p + k - k'$ ，因为比起用 $\gamma \cdot p'$ ，我们用 $\gamma \cdot p$ 可以“做的更多”。

简写 $T = P + Q_1 + Q_2$ 。首先，

$$P \equiv \text{Tr}[(\gamma \cdot p + m) \gamma \cdot \varepsilon' \gamma \cdot \varepsilon \gamma \cdot k (\gamma \cdot p + m) \gamma \cdot k' \gamma \cdot \varepsilon' \gamma \cdot \varepsilon] = m^2 \text{Tr}[\gamma \cdot \varepsilon' \varepsilon k k' \varepsilon' \varepsilon] + \text{Tr}[\gamma \cdot p \varepsilon' \varepsilon k p k' \varepsilon' \varepsilon]$$

其余奇数个求迹为0。

在第二项中，我们可以把第一个 $\gamma \cdot p$ 挪过 $\gamma \cdot \varepsilon$ 和 $\gamma \cdot \varepsilon'$ （由于在静止系中）以达成组合 $\gamma \cdot p \gamma \cdot k \gamma \cdot p = 2k \cdot p \gamma \cdot p - m^2 \gamma \cdot k$ 。

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\gamma \cdot p \varepsilon' \varepsilon k p k' \varepsilon' \varepsilon] &= \text{Tr}[\gamma \cdot \varepsilon' \varepsilon p k p k' \varepsilon' \varepsilon] = \text{Tr}[\gamma \cdot \varepsilon' \varepsilon (2k \cdot p \gamma \cdot p - m^2 \gamma \cdot k) k' \varepsilon' \varepsilon] \\ &= 2k \cdot p \text{Tr}[\gamma \cdot \varepsilon' \varepsilon p k' \varepsilon' \varepsilon] - m^2 \text{Tr}[\gamma \cdot \varepsilon' \varepsilon k k' \varepsilon' \varepsilon] \end{aligned}$$

m^2 项的贡献抵消了 P 中的第一项，剩下

$$P = 2k \cdot p \text{Tr}[\gamma \cdot \varepsilon' \varepsilon p k' \varepsilon' \varepsilon] = 2k \cdot p \text{Tr}[\gamma \cdot p \gamma \cdot k' \gamma \cdot \varepsilon' \cdot (2\varepsilon' \cdot \varepsilon - \gamma \cdot \varepsilon' \gamma \cdot \varepsilon) \cdot \gamma \cdot \varepsilon] = 8(k \cdot p)(k' \cdot p)(2(\varepsilon' \cdot \varepsilon)^2 - 1)$$

类似地， $Q_1 = \text{Tr}[\gamma \cdot k \cdot \varepsilon' \varepsilon \cdot k \cdot p \cdot k' \cdot \varepsilon' \cdot \varepsilon] = -2k \cdot \varepsilon' \text{Tr}[\gamma \cdot k p k' \varepsilon' \varepsilon] = -8(\varepsilon' \cdot k)^2 k \cdot p$ 且 $Q_2 = -\text{Tr}[\gamma \cdot k' \cdot \varepsilon' \varepsilon k p k' \varepsilon' \varepsilon] = 8(\varepsilon \cdot k')^2 k \cdot p$ ，

把它们放在一起，鉴于 $k \cdot p' = k' \cdot p = m\omega'$ 和 $k' \cdot p' = k \cdot p = m\omega$ ，我们会发现

$$\frac{1}{2} \sum \sum |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{(2m)^2} \left(\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} + 4(\varepsilon \cdot \varepsilon')^2 - 2 \right)$$

与章节2.6稍微不同，我们处于实验室系中，但流程相似，所以计算微分散射截面得到：

$$d\sigma = \frac{m}{(2\pi)^2 2\omega} \left(\int \frac{d^3 k'}{2\omega'} \frac{d^3 p'}{E_{p'}} \delta^4[k' + p' - k - p] \right) \frac{1}{2} \sum \sum |\mathcal{M}|^2$$

如同章节2.6描述的那样，我们可以使用（1.8.14）并令 $\int \frac{d^3 p'}{E_{p'}} (...) = \int d^4 p' \theta[p'^0] \delta[p'^2 - m^2] (...)$ 。

完成对 $d^4 p'$ 的积分可以敲掉4-维 δ 函数，我们还剩下一个 δ 函数执行质壳条件

$$\theta = p'^2 - m^2 = (p + k - k')^2 - m^2 = 2p \cdot (k - k') - 2k \cdot k' = 2m(\omega - \omega') - 2\omega\omega'(1 - \cos[\theta])$$

其中 θ 是光子的散射角度。因此，出射光子和入射光子的频率通过下式联系

$$\omega' = \frac{\omega}{1 + \frac{2\omega}{m} \sin^2 \left[\frac{\theta}{2} \right]}$$

其中的频率帮助阿瑟·康普顿赢得了诺贝尔奖。当然你会意识到，尽管那时候看起来很深奥，这个公式现在仅仅是相对论运动学，跟量子场论本身没啥关系。

量子场论带给我们的是克莱因-仁科公式（1929）

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(2m)^2} * \left(\frac{e}{4\pi} \right)^2 \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \left(\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} + 4(\varepsilon \cdot \varepsilon')^2 - 2 \right)$$

我估计你会对这个年份印象深刻。

电子--正电子湮灭

物质和反物质的湮灭更加神奇，这种过程只存在于相对论性的量子场论中。

特别地，一个电子和一个正电子相遇然后互相湮灭，生成两个光子： $e^-[p_1] + e^+[p_2] \rightarrow \gamma[\varepsilon_1, k_1] + \gamma[\varepsilon_2, k_2]$ 。

湮灭到单个在壳光子在运动学上是不允许的。

没有量子场论，将无法计算诸如角动量分布等量。

但是，到目前为止，你只将费曼规则应用于图2.8.2中的费曼图，它描述了至 e^2 阶的过程。

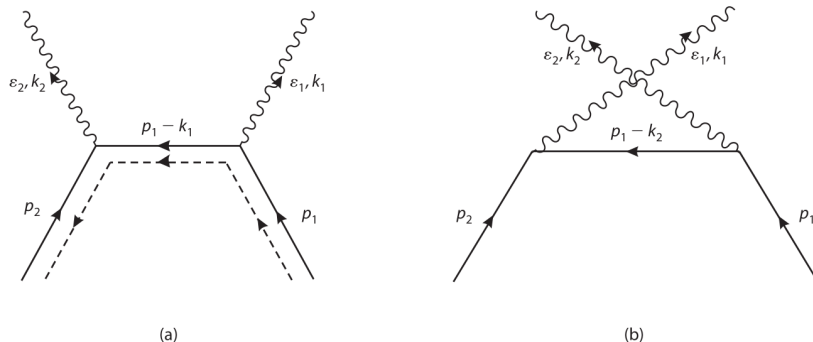


Figure 11.8.2

我们发现振幅是 $\mathcal{M} = A[k_1, \varepsilon_1; k_2, \varepsilon_2] + A[k_2, \varepsilon_2; k_1, \varepsilon_1]$ （两光子的玻色统计），其中

$$A[k_1, \varepsilon_1; k_2, \varepsilon_2] = (I e) (-I e) \bar{v}[p_2] \circ \gamma \cdot \varepsilon_2 * \frac{I}{\gamma \cdot p_1 - \gamma \cdot k_1 - m} * \gamma \cdot \varepsilon_1 \cdot u[p_1]$$

量子场论的学生有时也许会困惑：

入射电子匹配旋量 u ，而入射正电子匹配旋量 \bar{v} ，而不是 v 。

你可以通过检查 (2.2.10) 的厄米共轭来确认这件事。

$$\psi_\alpha[x] = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2} (E_p/m)^{1/2}} \sum_s (b[p, s] * u_\alpha[p, s] * \text{Exp}[-I p \cdot x] + d^\dagger[p, s] * v_\alpha[p, s] * \text{Exp}[+I p \cdot x])$$

更简单地，注意到 $\bar{v}(\dots)u$ （其中 (\dots) 是一堆跟各种动量收缩的伽马矩阵）在洛伦兹群下正确地进行变换，而 $v(\dots)u$ 不行（也没有意义，因为它俩都是列旋量）。或者注意到正电子的湮灭算符 d 是跟 \bar{v} 联系的，而不是 v 。

我要强调的是，正电子在去往和电子湮灭的路程中，携带的动量为 $p_2 = \left(+\sqrt{p_2^2 + m^2}, p_2\right)$ 。它的能量 $p_2^0 = +\sqrt{p_2^2 + m^2}$ 显而易见是正的。

物理的粒子也不会逆着时间轴运动。否则安排正电子产生的实验学家也得不到他。

在图2.8.2a中，我用箭头标记了各条线的动量流向。外线粒子是物理的，如果它们的能量不为正，将存在严重的合法性问题。

然而，对于被交换的虚粒子没有这种限制。

因为LSZ公式要求外线粒子在壳，但是内线粒子，也就是微扰公式指数项里出现的场，不必满足运动方程，也就是不必在壳。

因为费曼传播子中的场的动量已经摆脱了质壳条件，质壳条件变成了传播子。

虚拟例子上箭头的绘制方向完全取决于我们自己。我们可以翻转箭头，然后动量标签将变成 $p_2 - k_2 = k_1 - p_1$ ：

该”合成”4-矢量的时间分量可以为正也可以为负。

为了使这一点更加清楚，我们还可以用虚线箭头标记这些线，以显示（电子）电荷的流动。

的确，在正电子线上，动量和（电子）电荷沿相反的方向流动。

交叉

现在我请你凝视 (2.8.13) 中的表达式一会儿，以发现一些有趣的东西。

$$A[k_1, \varepsilon_1; k_2, \varepsilon_2] = (I e) (-I e) \bar{v}[p_2] \cdot \gamma \cdot \varepsilon_2 * \frac{I}{\gamma \cdot p_1 - \gamma \cdot k_1 - m} * \gamma \cdot \varepsilon_1 \cdot u[p_1]$$

它是否使你想起其他振幅。下面是 (2.8.2) 中康普顿散射的振幅。

$$A[\varepsilon', k'; \varepsilon, k] = (-I * e)^2 \bar{u}[p'] \cdot \gamma \cdot \varepsilon' \cdot \frac{I}{\gamma \cdot p + \gamma \cdot k - m} \cdot \gamma \cdot \varepsilon \cdot u[p]$$

注意，两个振幅可以通过下列交换而彼此转换（至多相差一个不相干的符号）

$$p \leftrightarrow p_1, k \leftrightarrow k_1, p' \leftrightarrow -p_2, k' \leftrightarrow k_2,$$

$$\varepsilon \leftrightarrow \varepsilon_1, \varepsilon' \leftrightarrow \varepsilon_2, u[p] \leftrightarrow u[p_1], u[p'] \leftrightarrow v[p_2]$$

这就是所谓的交叉。从图像上来说，相当于通过一个 90° 的旋转，我们可以把图 2.8.1 和图 2.8.2 变成彼此。

交叉用精确的术语表达了那些喜欢成天嘟囔着负能量，时光溯回之类话的人，心中所想的东西。

再次地，在电子静止系和横向规范下工作是有好处的，如此我们有 $\varepsilon_1 p_1 = 0$ 和 $\varepsilon_2 p_1 = 0$ ，以及 $\varepsilon_1 k_1 = 0$ 和 $\varepsilon_2 k_1 = 0$ 。

对电子和正电子的极化求平均我们得到

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{8m} \left(\frac{\omega_1}{|\vec{p}|} \right) \left(\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - 4(\varepsilon \varepsilon')^2 + 2 \right)$$

其中 $\omega_1 = m(m+E)/(m+E-p\cos[\theta])$ ， $\omega_2 = (E-m-p\cos[\theta])\omega_1/m$ 以及 $p = |\vec{p}|$ 和 E 分别是正电子的能量和动量。

对比之前的克莱因-仁科公式

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(2m)^2} * \left(\frac{e}{4\pi} \right)^2 \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \left(\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} + 4(\varepsilon \varepsilon')^2 - 2 \right)$$

狭义相对论和量子力学需要暗物质

章节 2.2 中的形式理论完全清楚地表明，反物质是必须的。倘若我们想在 (2.2.10) 中加上算符 b 和 d^\dagger ，

它们必须携带相同的电荷，因此 b 和 d 携带相反的电荷。也可以从物理上说明。

考虑康普顿散射过程。

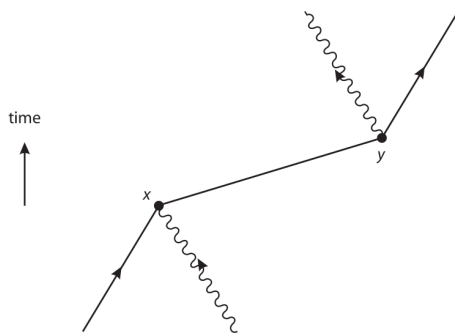


Figure II.8.3

我们在图 2.8.3 中重画了图 2.8.1：电子在 x 点被光子撞到，传播到 y 点，然后释放了一个光子。

我们隐式地假设了 $(y^0 - x^0) > 0$ ，因为我们不知道溯时传播是啥意思。

但是狭义相对论告诉我们另一个掠过的（比如说沿着 1--轴）的观察者看到的时间差是

$$y'^0 - x'^0 = \cosh[\varphi] (y^0 - x^0) - \sinh[\varphi] (y^1 - x^1)$$

假如 $(y^1 - x^1) > (y^0 - x^0)$ ，也就是说，如果两个时空点的间隔是类空的，此时间差对于足够大的平动参数 φ 将是负的。

那么这个观察者将会看到场的扰动从y传播到x。

既然我们看到负电荷从x传播到y，那么另一个观察者必然看到正电荷从y传播到x。

若没有狭义相对论，比如在非相对论量子力学中，我们只需要写下电子的薛定谔方程，也就完事儿了。

狭义相对论允许不同的观察者看到不同的时间顺序，因此朝向未来的电荷流是相反的。

Dirac spinor

$$\sigma \equiv (1, \vec{\sigma}), \quad \bar{\sigma} \equiv \sigma \equiv (1, -\vec{\sigma})$$

$$u[p, s] = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi[s] \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi[s] \end{pmatrix}, \quad s = 1, 2 \quad (0.3)$$

$$v[p, s] = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \eta[s] \\ -\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \eta[s] \end{pmatrix}, \quad s = 1, 2 \quad (0.4)$$

一般归一化到, $\xi^\dagger \xi = 1$, 两个线性独立的解。

$$p \cdot \sigma = \begin{pmatrix} E_p + p & 0 \\ 0 & E_p - p \end{pmatrix}, \quad p \cdot \bar{\sigma} = \begin{pmatrix} E_p - p & 0 \\ 0 & E_p + p \end{pmatrix}$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

如果电子的动量添一负号，但是能量分量不变。即相当于 $p^\mu \rightarrow p_\mu$, $p \cdot \sigma \leftrightarrow p \cdot \bar{\sigma}$

$$u[-p] = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi[s] \\ \sqrt{p \cdot \sigma} \xi[s] \end{pmatrix} = \gamma^0 \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi[s] \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi[s] \end{pmatrix} = \gamma^0 \cdot u[p, s]$$

$$v[-p] = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi[s] \\ -\sqrt{p \cdot \sigma} \xi[s] \end{pmatrix} = \gamma^0 \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \eta[s] \\ -\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \eta[s] \end{pmatrix} = \gamma^0 \cdot v[p, s]$$

和之前粒子物理note中总结的一致。
