# 6. 整体对称性自发破缺

- 对称性的自发破缺(Spontaneous Symmetry Breaking)是物理学中十分重要的对称性破缺机制。
- Anderson在1958年凝聚态物理研究中讨论过
- 南部（Nambu）和 Goldstone 分别在1960年和1961年独立地将它引入粒子物理地研究中

Goldstone定理：连续整体对称性的自发破缺，必然伴随零质量粒子的产生，这种零质量的粒子通常称作Goldstone粒子。

## 重要应用:

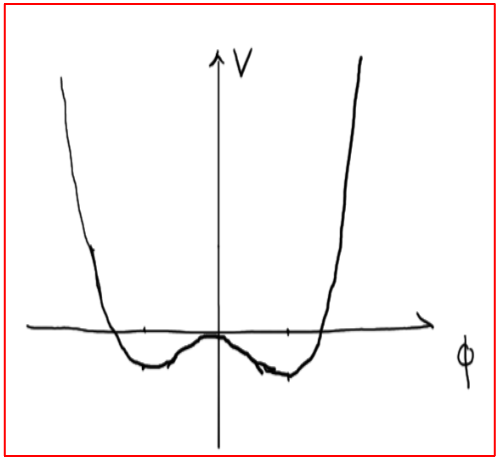
- 手征对称性的自发破缺：赝标介子八重态就是QCD中 $u, d, s$ 夸克（在 $m_q \to 0$ 极限）所满足的 $SU_L(3) \times SU_R(3)$ 对称性自发破缺到 $SU_F(3)$ 味道对称性后产生的Goldstone粒子（它们的质量不为零是由于 $u, d, s$ 有小的非零质量）。
- 规范对称性也会有自发破缺，其破缺后果是规范玻色子获得质量。
- 另外，破缺的对称性仍然对理论的可重正性起作用。

## 6.1 最简单的例子——实标量场

$\phi^4$ 理论的拉氏量 $\mathcal{L}=\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2-\frac{1}{2}m^2\phi^2-\frac{1}{4}\lambda\phi^4$

$\phi\rightarrow-\phi$ 的对称性

真空态：体系的能量最低态。动能永远是非负的，所以真空态的动能应该为零，真空态对应的是势能的最低态。$\phi^4$ 理论的势能最低点（即真空态）为 $\phi=0$，显然真空态是唯一的，而且仍然具有拉氏量的对称性。$\phi^4$ 理论中没有自发破缺




做替换： $m^2\rightarrow-\mu^2<0$

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2+\frac{1}{2}\mu^2\phi^2-\frac{1}{4}\lambda\phi^4\equiv\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2-V(\phi)$$

没有了质量项，势能项为： $V(\phi)=-\frac{1}{2}\mu^2\phi^2+\frac{1}{4}\lambda\phi^4$

两个最小点对应两个简并的真空态： $\phi$ 的取值为

$$\phi_0=\pm v=\pm\sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}$$

从物理上讲，真空态是不可测量的。我们能够测量的信号只能是在真空态基础上的量子激发，因此我们需要在这两个简并的真空态中任选一个作为我们的物理真空。

我们选取真空态 $\phi_0 = v \equiv \langle \phi \rangle$

实际有观测效应的场是对此真空态的偏离 $\sigma(x) = \phi(x) - v$

将 $\phi = v + \sigma(x)$ 代入到拉氏量中，我们得到

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)^2 - \frac{1}{2}(2\mu^2)\sigma^2 - \sqrt{\lambda}\mu\sigma^3 - \frac{\lambda}{4}\sigma^4$$

- 由于 $\sigma^3$ 项的出现，这个拉氏量已经不再有 $\sigma \to -\sigma$ 的对称性，
- $\sigma$ 场也获得了质量 $m_\sigma = \sqrt{2}\mu$。

## 6.2 $O(N)$ 线性 $\sigma$ 模型

考虑具有 $N$ 个实分量的标量场 $\phi^T = (\phi^1, \phi^2, \dots \phi^N) = \phi^i$ 理论

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi^T \partial^\mu \phi + \frac{1}{2}\mu^2 \phi^T \phi - \frac{1}{4}\lambda(\phi^T \phi)^2$$
$$\equiv \frac{1}{2}\partial_\mu \phi^i \partial^\mu \phi^i + \frac{1}{2}\mu^2 \phi^i \phi^i - \frac{1}{4}\lambda(\phi^i \phi^i)^2$$

整体的 $O(N)$ 对称性（ $N$ 维转动群，$N \times N$ 正交矩阵群），即 $\phi$ 场如下正交变换下拉氏量不变

$$\phi^i \to R^{ij}\phi^j, \qquad R \in O(N)$$

势能项为 $$V(\phi) = -\frac{1}{2}\mu^2 \phi^i \phi^i + \frac{1}{4}\lambda(\phi^i \phi^i)^2 \equiv -\frac{1}{2}\mu^2 \rho^2 + \frac{1}{4}\lambda \rho^4$$

其中 $\rho = \sqrt{\phi^i \phi^i}$，极小值条件为 $\rho_0 = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \equiv v$

真空态构成实场量的 $N$ 维空间中的一个半径为 $\rho = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}$ 的超球面，真空态是高度简并的。

如果我们在该真空态球面上任取一点作为物理真空，不失一般性，我们取真空态为

$$\phi_0^T = (\phi_0^i) = (0, 0, \dots, v), \qquad v = \sqrt{\mu^2/\lambda}$$

物理观测效应的自由度是标量场对该真空态偏离量

$$\phi^T = (\pi^1, \pi^2, \dots, \pi^{N-1}, \sigma + v)$$

$$\phi'^T = \phi^T - \phi_0^T = (\pi^1, \pi^2, \dots, \pi^{N-1}, \sigma)$$

则 $\mathcal{L}$ 可以用 $(\pi, \sigma)$ 表示为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \pi^k \partial^\mu \pi^k + \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)^2 - \frac{1}{2}(2\mu^2)\sigma^2$$
$$-\sqrt{\lambda}\mu\sigma^3 - \sqrt{\lambda}\mu\, \pi^k \pi^k \sigma - \frac{\lambda}{4}\sigma^4 - \frac{1}{2}\lambda \pi^k \pi^k \sigma^2 - \frac{1}{4}\lambda(\pi^k \pi^k)^2$$

- $\sigma$ 场是质量为 $\sqrt{2}\mu$ 的标量场；
- $\pi^k, k = 1, 2, \dots, N-1$ 为 $N-1$ 个零质量的标量场；
- 体系原有的 $O(N)$ 对称性已经破缺了，但还有剩余的对称性；
- $\pi$ 场在 $N-1$ 维转动 $\pi^k \to R^{kl}\pi^l$, $R \in O(N-1)$ 下，拉氏量不变。

- $O(N)$ ：$\frac{1}{2}N(N-1)$ 个生成元($N$ 维空间的 $\frac{1}{2}N(N-1)$ 个转动轴)。
- 对称性由 $O(N)$ 破缺到 $O(N-1)$，
- 相应地，对称转动轴由 $\frac{1}{2}N(N-1)$ 个变为 $\frac{1}{2}(N-1)(N-2)$，减少 $N-1$个，
- 伴有$N-1$个零质量的粒子的产生（这和第一个例子离散对称性破缺不同）。

$$O(N) \xrightarrow{SSB} O(N-1)$$

$$\frac{1}{2}N(N-1) \qquad \frac{1}{2}(N-1)(N-2)$$

线性独立的连续变换数减少 $(N-1)$

产生 $(N-1)$ 个质量为零的粒子. ($\pi^k$, $k=1,2,\cdots N-1$)

$\pi^k$ 具有剩余的 $O(N-1)$ 对称性.

## 6.3 Goldstone定理

**简单表述**：每一个连续的对称性的自发破缺，都伴随着一个无质量的粒子的产生，这个无质量的粒子称为Goldstone粒子。

### 1. 经典标量场的Goldstone定理的证明

考虑标量场 $\phi=\{\phi^i, i=1,2,\ldots,N\}$,

考察体系的基态，忽略动能（拉氏量中时空导数部分），只考虑势能 $V(\phi)$。

势能极值条件 $$\left.\frac{\partial}{\partial\phi^i}V(\phi)\right|_{\phi^i(x)=\phi_0^i}=0$$ ⟹ 真空场（常数场）

在 $\phi_0$ 处对势能进行泰勒展开（重要：如果 $\phi_0$ 是简并的，我们需要选择其中一个作为基态 $\phi_0$，这时对称性就发生了自发破缺）

$$V(\phi)=V(\phi_0)+\frac{1}{2}(\phi-\phi_0)^i(\phi-\phi_0)^j\left.\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^i\partial\phi^j}\right|_{\phi=\phi_0}+\cdots$$

理论上讲，系统的基态是不可观测的，可观测的是场在真空态基础上的激发，所以具有物理可观测效应的是场对真空态偏移量 $\eta = \phi - \phi_0$ 。这样，势能对场的二阶导数在 $\phi = \phi_0$ 处的取值可以看作是场 $\eta$ 的质量平方矩阵，

$$m_{ij}^2(\phi_0) = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^i \partial \phi^j}\right|_{\phi=\phi_0}$$

**命题**：当每一个连续对称性破坏时（即 $\phi_0$ 不满足该对称性），则矩阵 $\{m_{ij}^2\}$ 就获得了一个零本征值。

**证明**：场在无穷小变换下的变换性质可以表示为 $\phi^a \to \phi^a + \alpha \Delta^a(\phi)$

对称性要求势能 $V(\phi)$ 在该变换下不变，即

$$V(\phi) = V(\phi + \alpha\Delta(\phi)) = V(\phi) + \alpha\Delta^i(\phi)\frac{\partial V}{\partial \phi^i} + \mathcal{O}(\alpha^2) = V(\phi)$$

$$\Longrightarrow \quad \Delta^i(\phi)\frac{\partial V}{\partial \phi^i} = 0$$

该等式两边再对 $\phi$ 求导数，得到

$$\left(\frac{\partial \Delta^i(\phi)}{\partial \phi^j}\right)\frac{\partial V}{\partial \phi^i} + \Delta^i(\phi)\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^i \partial \phi^j} = 0$$

在 $V(\phi)$ 的极值点 $\phi=\phi_0$ 处有 $\left(\frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi^j}\right)_{\phi=\phi_0}=0$，则有

$$\Delta^i(\phi_0)\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^i\partial\phi^j}\bigg|_{\phi=\phi_0}\equiv \Delta^i(\phi_0)m_{ij}^2(\phi_0)=0$$

a) 当 $\phi_0$ 在该变换下不变时，即 $\Delta^a(\phi_0)=0$，则上式自然成立，对 $m_{ij}^2(\phi_0)$ 没有特殊的限制；

b）当 $\phi_0$ 在该变换下是变的，即 $\Delta^a(\phi_0)\neq 0$，也就是说，真空态不再具有这种对称性（对称性自发破缺），则 $\Delta^i(\phi_0)m_{ij}^2(\phi_0)=0$ 说明 $\Delta^i(\phi_0)$ 为 $m_{ij}^2(\phi_0)$ 的本征值为零的本征矢量。 $\Delta^i(\phi_0)$ 就可以看作是质量为零的场，称作Goldstone场，其激发就是Goldstone 粒子。

## 2. 量子理论中的Goldstone定理的证明

### a) 对称性自发破缺条件——真空是非不变的

哈密顿量 $H$ 在群 $G$ 变换下是不变的（正交变换群和幺正变换），即

$$UHU^{+}=H, \qquad U\in G$$

两个物理态 $|A\rangle$ 和 $|B\rangle$由 $U$ 联系，即 $|B\rangle=U|A\rangle$，一般可以得到

$$E_A=\langle A|H|A\rangle=\langle A|U^{+}HU|A\rangle=\langle B|H|B\rangle=E_B$$

这表明，$|A\rangle$ 和 $|B\rangle$ 是简并的能量本征态。

但是，有一个隐含的前提，即基态（真空态）在该变换下不变：$\boxed{U|\Omega\rangle=|\Omega\rangle}$

态 $|A\rangle$ 和 $|B\rangle$ 通常应该是某些场算符在真空态上作用的结果

$$|A\rangle=\phi_A|\Omega\rangle, \qquad |B\rangle=\phi_B|\Omega\rangle, \qquad \phi_B=U\phi_AU^{+}$$

则当且仅当 $U|\Omega\rangle=|\Omega\rangle$ 时 （充要条件），才有 $|B\rangle=U|A\rangle$。

反之，当 $U|\Omega\rangle\neq|\Omega\rangle$ 时，$|B\rangle\neq U|A\rangle$，$|A\rangle$ 和 $|B\rangle$ 不简并。

## b) 作用在 Hilbert 态上的对称变换——由诺特荷生成

连续的整体对称变换 $\phi \to \phi + i\epsilon^a t^a \phi$ 对应的守恒流（实标量场为例）

$$j^{a,\mu} = -i\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^i)}(t^a)_{ij}\phi^j \Longrightarrow Q^a(t) \equiv \int d^3\vec{x}\, j^{a,0}(x) = \int d^3\vec{x}\ \pi^i(-it^a)_{ij}\phi^j$$

$$\partial_\mu j^{a,\mu}(x) = 0 \Longrightarrow \int d^3\vec{x}\, \partial_\mu j^{a,\mu}(x) = \int d^3\vec{x}\left(\partial_0 j^{a,0} - \vec{\nabla}\cdot\vec{j}^a\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt}Q^a(t) = 0$$

守恒荷：Hilbert 态空间的算符

诺特荷 $Q^a(t)$ 满足群生成元的对易关系 $\boxed{\left[Q^a(t), Q^b(t)\right] = if^{abc}Q^c(t)}$

场算符（以及场算符构成的组合算符 $A(x)$）的对称变换关系：

$$\boxed{\phi(x) \to e^{i\epsilon^a Q^a}\phi(x)e^{-i\epsilon^a Q^a} = e^{i\epsilon^a t^a}\phi(x)}$$

无穷小变换：$e^{i\epsilon^a Q^a} = I + i\epsilon^a Q^a$， $e^{i\epsilon^a t^a} = I + i\epsilon^a t^a$

$$\delta\phi(x) = i\epsilon^a[Q^a, \phi(x)] = i\epsilon^a t^a \phi(x)$$

即

$$\boxed{[Q^a, \phi_i(x)] = (t^a)_{ij}\phi_j(x)}$$

对称性没有自发破缺时——真空在变换下不变：

$$e^{i\epsilon^a Q^a}|\Omega\rangle = |\Omega\rangle \Rightarrow Q^a|\Omega\rangle = 0$$

$$|i\rangle = \phi_i|\Omega\rangle \Rightarrow |i\rangle \to e^{i\epsilon^a Q^a}\phi_i|\Omega\rangle = e^{i\epsilon^a Q^a}|i\rangle$$

对称性存在自发破缺时——真空简并：

存在诺特荷的非空子集 $S = \{Q^\alpha(t), \alpha = 1, 2, \ldots\}$，使得真空在变换下是变的，

$$Q^\alpha|\Omega\rangle \neq 0, \alpha = 1, 2, \ldots$$

但还有剩余的对称性： $Q^{a'}|\Omega\rangle = 0,\qquad Q^{a'} \notin S$

对称性自发破缺——真空不是不变的——的另外一种描述：
存在观测量 $A$，其在不同的真空态的期望值不同。

$$|\Omega\rangle \to |\Omega\rangle + i\epsilon^a Q^a(t)|\Omega\rangle,\qquad \forall\ Q^a \in S$$

$$\langle\Omega|A|\Omega\rangle \to \langle\Omega|A|\Omega\rangle - i\epsilon\langle\Omega|[Q^a(t), A]|\Omega\rangle \neq \langle\Omega|A|\Omega\rangle$$

即 $$\boxed{\langle\Omega|[Q^a(t), A]|\Omega\rangle \neq 0}$$

比如，$A$ 实标量场算符，$A(x) = \phi(x)$

$$\langle\Omega|[Q^a(t), \phi(x)]|\Omega\rangle = t^a_{ij}\langle\Omega|\phi_j(x)|\Omega\rangle \neq 0$$

即存在 $\phi_j(x)$, 使得

$$\boxed{\langle\Omega|\phi_j(x)|\Omega\rangle \equiv \langle\Omega|\phi_j(0)|\Omega\rangle \neq 0}$$

即标量场的真空期望值不为零。最后的等式利用了真空的平移不变性。

---

## c. Goldstone 粒子：

守恒流算符 $j_\mu(x)$ 满足条件 $\partial^\mu j_\mu(x) = 0$；守恒荷定义为

$$Q_V(t) = \int_V d^3\vec{y}\ j^0(\vec{y}, t)$$

可以证明

$$\boxed{\lim_{V\to\infty} \frac{d}{dt}[Q_V(t), A(x)] = 0}$$

$$0 = \int_V d^3\vec{y}\left[\partial^{(y)}_\mu j^\mu(y), A(x)\right] = \frac{d}{dt}\int_V d^3\vec{y}\left[j^0(\vec{y}, t), A(x)\right] + \int_{\partial V} d\vec{S}\cdot[\vec{j}(\vec{x}, t), A(y)]$$

由 $\langle\Omega|[Q(t),A(x)]|\Omega\rangle \neq 0$， 插入中间态（令$x=0$）：

$$\lim_{V\to\infty}\sum_{n,p}\int_V d^3\vec{y}\ \left[\langle\Omega|j_0(0)|n\rangle\langle n|A|\Omega\rangle e^{-ip_n\cdot y}-\langle\Omega|A|n\rangle\langle n|j_0(0)|\Omega\rangle e^{ip_n\cdot y}\right]$$

$$=\sum_n(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}_n)\left[\langle\Omega|j_0(0)|n\rangle\langle n|A|\Omega\rangle e^{-iE_nt}-\langle\Omega|A|n\rangle\langle n|j_0(0)|\Omega\rangle e^{iE_nt}\right]$$

$$\neq 0$$

$$\boxed{\mathcal{O}(x)=e^{i\hat{P}\cdot x}\mathcal{O}(0)e^{-i\hat{P}\cdot x}}$$

由 $\lim_{V\to\infty}\frac{d}{dt}[Q_V(t),A(x)]=0$， 插入中间态：

$$0=\sum_n(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}_n)\,E_n\left[\langle\Omega|j_0(0)|n\rangle\langle n|A|\Omega\rangle e^{-iE_nt}+\langle\Omega|A|n\rangle\langle n|j_0(0)|\Omega\rangle e^{iE_nt}\right]$$

显然，该式要和上面的式同时成立，要求必须存在一个态 $|n\rangle$ 满足

$$\langle\Omega|A|n\rangle\langle n|j_0(0)|\Omega\rangle\neq 0 \quad \text{并且} \quad E_n(\vec{p}_n=0)\equiv m_n=0$$

这个态就是具有和 $j_0(x)$ 具有相同量子数的无质量的 Goldstone 粒子态。

如果将 Goldstone 粒子态记为 $|\pi^a(p)\rangle$，对应的诺特流为 $j^{a,\mu}(x)$

$$\langle\Omega|j_0^a(0)|\pi^a(p)\rangle \neq 0$$

根据 Lorentz 不变性，以及时空平移不变性，考虑 Lorentz 结构（Goldstone 粒子是标量粒子）

$$\langle\Omega|j_\mu^a(x)|\pi^a(p)\rangle = ip_\mu f_{\pi^a}(p^2)e^{-ip\cdot x}$$

流守恒条件 $\partial^\mu j_\mu(x) = 0$ 要求

$$\langle\Omega|\partial^\mu j_\mu^a(x)|\pi^a(p)\rangle = ip^2 f_{\pi^a}e^{-ip\cdot x} = 0$$

由于 $f_{\pi^a}(p^2) \neq 0$， 则必有 $p^2 = 0$，这是零质量粒子的在壳条件。
所以 $f_{\pi^a}(p^2)$ 是一个常数，即 $f_{\pi^a}(p^2) = f_{\pi^a}$ 。

注：强子物理中，赝标量粒子是手征对称性自发破缺后的Goldstone 粒子，对应的常数 $f_\pi$ 一般称作衰变常数。

## d) 对称性自发破缺模式举例

### 1. $O(3) \to O(2)$

$O(3)$ 群的自伴表示记作 $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)^T$

体系的对称性可以由场量在如下变换下拉氏量不变

$$\phi \to e^{i\theta_i Q_i}\,\phi\, e^{-i\theta_i Q_i} = e^{i\theta_i T_i}\phi$$

其中

$$T_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \qquad T_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

如果取真空期望值：　$\phi_0 = \langle \Omega | \phi | \Omega \rangle = (0, 0, v)^T$

剩余的对称性——真空期望值的对称性：$Q_z |\Omega\rangle = 0$，

$$\langle \Omega \big| e^{i\theta_z Q_z}\,\phi\, e^{-i\theta_z Q_z} \big| \Omega \rangle = \phi_0 - i\theta_z T_z \langle \Omega | \phi | \Omega \rangle = \phi_0$$

即 $\phi_0 = e^{i\theta_z T_z}\phi_0$，真空态在如上变换下不变，剩余的对称性为 $O(2)$。

## 2. $SU(3) \to U(1) \times U(1)$ 或者 $SU(2) \times U(1)$

$SU(3)$ 伴随表示的标量场 $\phi = \phi^a \frac{\lambda^a}{2} \equiv \phi^a t^a, a = 1, 2, \ldots, 8$，

$$\phi \to e^{i\theta^a Q^a}\, \phi\, e^{-i\theta^a Q^a} = e^{i\theta^a t^a}\, \phi\, e^{-i\theta^a t^a}$$

- 如果取真空期望值的形式为 $\phi_0 = \langle \phi \rangle_{VAC} = t^3 v_3 + t^8 v_8$

它在如下变换下不变 （$[t^3, t^8] = 0$）

$$e^{i(\theta^3 t^3 + \theta^8 t^8)} \phi_0 e^{-i(\theta^3 t^3 + \theta^8 t^8)} = \phi_0$$

这说明真空态还具有两个 $U(1)$ 对称性，则对称性的破缺形式为

$$SU(3) \to U(1) \times U(1)$$

有 $8 - 1 - 1 = 6$ 个 Goldstone 粒子产生。

- 如果我们再取 $v_3 = 0$，即真空态为 $\phi_0 = t^8 v_8$

由于 $[\lambda^8, \lambda^i] = 0, i = 1, 2, 3, 8$，则真空态满足的剩余对称性为 $SU(2) \times U(1)$，同时产生四个Goldstone粒子。

# 7. 规范对称性对称性自发破缺

## 7.1 $U(1)$定域对称性自发破缺

$$\boxed{\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\phi)^\dagger D^\mu\phi - V(\phi)\,,} \qquad \text{with } D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu\,,$$

$$V(\phi) = -\mu^2\phi^\dagger\phi + \frac{\lambda}{2}\left(\phi^\dagger\phi\right)^2$$

在U(1)规范变换下不变

$$\phi(x) \to e^{i\alpha(x)}\phi, \quad \phi^\dagger(x) \to e^{-i\alpha(x)}\phi^\dagger, \quad A_\mu(x) \to A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x)$$

当$\mu^2 > 0$时，$\phi$的真空期望值(VEV)： $\boxed{\phi_0 = \langle\phi\rangle = \left(\frac{\mu^2}{\lambda}\right)^{1/2}}$

场的重定义： $\phi(x) = \frac{v}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(h(x) + i\varphi(x)\right)$

$$(D_\mu\phi)^\dagger D^\mu\phi = \frac{1}{2}\left((\partial_\mu h)^2 + (\partial_\mu\varphi)^2\right) + ev\cdot A_\mu\partial^\mu\varphi + \boxed{\frac{1}{2}e^2v^2A_\mu A^\mu} + \ldots$$

$$V(\phi) = -\frac{1}{2\lambda}\mu^4 \boxed{+ \frac{1}{2}\cdot 2\mu^2h^2} + \mathcal{O}(\phi^3)$$

$h$获得质量$m = \sqrt{2}\mu$;　光子获得质量：$m_A^2 = e^2 v^2$;

$\varphi$为无质量的Goldstone.

Goldstone与规范玻色子之间的相互作用:

$$\boxed{\mathcal{L}_{G-g} = ev \cdot A_\mu \partial^\mu \varphi = m_A A_\mu \partial^\mu \varphi}$$


$$= iev(-ik^\mu) = m_A k^\mu$$

这种相互作用可以看作是规范玻色子和Goldstone粒子存在混合，即规范粒子在传播过程中和规范玻色子可以相互转化。

在以下部分，我们讨论理论中的物理自由度的数目：

## 复标量场的非线性实现

$$\phi(x) = \rho(x)\exp\left(i\varphi(x)/f\right)/\sqrt{2}:$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left(D_\mu\phi\right)^\dagger D^\mu\phi - V(\phi) \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}e^2\rho^2\left(A_\mu + \frac{1}{ef}\partial_\mu\varphi\right)^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu\rho\partial^\mu\rho + \frac{1}{2}\mu^2\rho^2 - \frac{1}{4}\lambda\rho^4\,.\end{aligned}$$

非线性的规范变换:

$$\varphi(x)\to\varphi(x)+f\alpha(x),\quad \rho(x)\to\rho(x),\quad A_\mu(x)\to A_\mu(x)-\frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x)\,.$$

**对称性自发破缺:** $\langle\rho(x)\rangle = \sqrt{\mu^2/\lambda} = v$

$$\rho(x) = \sigma(x) + v:$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}e^2(v+\sigma(x))^2\left(A_\mu + \frac{1}{ef}\partial_\mu\varphi\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma - \mu^2\sigma^2 + \ldots\end{aligned}$$

$\sigma$的退耦：$\mu^2, \lambda \to \infty$但$v$被固定

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}e^2v^2\left(A_\mu + \frac{1}{ef}\partial_\mu\varphi\right)^2 \\ &= -\frac{1}{4}F_{B\mu\nu}F_B^{\mu\nu} + \frac{1}{2}e^2v^2B_\mu B^\mu, \quad \text{with } B_\mu = A_\mu + \frac{1}{ef}\partial_\mu\varphi\,.\end{aligned}$$

**规范对称性** $\varphi(x) \to \varphi(x) + f\alpha(x), \qquad A_\mu(x) \to A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x)\,.$

**a. 幺正规范:**

我们可以选择规范条件，即选择 $\alpha(x)$ 满足

$$\phi(x) \to \phi(x) + f\alpha(x) = 0$$

则有

$$A_\mu(x) \to A_\mu + \frac{1}{ef}\partial_\mu\phi(x) \equiv B_\mu(x)$$

拉氏量变为：

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_B^2 + \frac{1}{2}m_A^2\,B_\mu(x)B^\mu(x) + \cdots$$

这是有质量矢量场的自由拉氏量部分。

也就是说，在幺正规范（都是物理自由度），Goldstone不出现，规范玻色子“吃掉”了Goldstone粒子，从而获得了纵向极化分量，也获得了质量 $ev$。物理的自由度为3 。

## b. Landau 规范:

我们可以选择 Landau 规范条件 $\partial_\mu A^\mu(x) = 0$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^2 + \frac{1}{2}m_A^2\left(A_\mu + \frac{1}{ef}\partial_\mu\phi\right)^2 = -\frac{1}{4}F^2 + \frac{1}{2}m_A^2\left(A_\mu^2 + \frac{2}{ef}A^\mu\partial_\mu\phi + \frac{1}{e^2f^2}(\partial_\mu\phi)^2\right)$$

$$= -\frac{1}{4}F^2 + \frac{1}{2}m_A^2A_\mu^2 + \frac{m_A^2}{2e^2f^2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{m_A^2}{ef}(\partial_\mu A^\mu)\phi$$

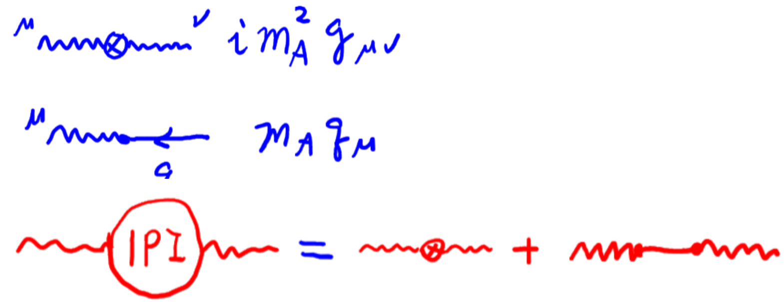
$$= -\frac{1}{4}F^2 + \frac{1}{2}m_A^2A_\mu^2 + \frac{m_A^2}{2e^2f^2}(\partial_\mu\phi)^2$$

在 Landau 规范，规范玻色子和 Goldstone 没有耦合，但规范场在规范条件约束下满足（四维）横场条件，有两个物理的极化分量。但Goldstone仍有动力学项，因此 Goldstone 场也是一个物理的自由度 。

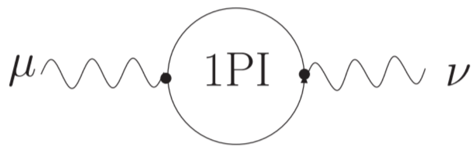
说明：由以上和以后的讨论中可以看出，在规范对称性自发破缺时，Goldstone 和规范玻色子的纵向分量是等价的——Goldstone 玻色子等价性定理。

# 真空极化:

将质量项也看作相互作用项，我们有右边的费曼规则和单粒子不可约图的贡献




$i\Pi_{\mu\nu}(q) \equiv$




$$= \quad i m_A^2 g^{\mu\nu} + (m_A q^\mu)\frac{i}{q^2}(-m_A q^\nu) = i m_A^2\left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}\right)$$

光子传播子：（Landau规范）

$$\boxed{\frac{i}{q^2}\left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right)}(1 + \Pi(q^2) + \Pi^2(q^2) + \ldots)$$

$$\boxed{\Pi(q^2) = \frac{m_A^2}{q^2}}$$

$$= \frac{i}{q^2(1-\Pi(q^2))}\left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right) = \frac{i}{q^2 - m_A^2}\left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right)$$

我们看到，考虑规范玻色子和Goldstone粒子之间的混合（或相互作用），规范玻色子传播子在$m_A^2$处有一个pole，这对应于规范玻色子的质量。但除此之外，还存在一个 $q^2$ =0的pole，后面我们会看到这个pole是规范依赖的，并不对应物理自由度。另外，规范玻色子是完全横向的，对应两个横向极化的自由度。但考虑到Goldstone也有$q^2$=0的极点，所以物理的自由度数目是三个。

## 7.2 非阿贝尔定域对称性自发破缺

实标量场 $\phi$ 是非阿贝尔群的自伴表示，其规范变换：

$$\phi^a \to \left(1 + i\epsilon^b t_G^b\right)_{ac}\phi^c \equiv (1 - \epsilon^a T^a)_{ij}\phi^j \qquad \boxed{\left(t_G^b\right)_{ac} = if^{abc}, \qquad T^b = it_G^b}$$

协变微商:　$D_\mu\phi = (\partial_\mu - igA_\mu^a t_G^a)\phi = (\partial_\mu + gA_\mu^a T^a)\,\phi$

实标量场 $\phi$ 的动能项：

$$\frac{1}{2}(D_\mu\phi)^2 = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + gA_\mu^a(\partial_\mu\phi^b(T^a)_{bc}\phi^c + \frac{1}{2}g^2A_\mu^aA^{b,\mu}(T^a\phi)_c(T^b\phi)^c$$

对称性自发破缺（SSB），选取真空态：　$\langle\phi^a\rangle_{VAC} = (\phi_0)^a$

未破缺的对称性 $T^A$，真空态在这些对称变化下不变：　$T^A\phi_0 = 0$

破缺的对称性 $T^a$，真空态在这些变化是变的：　$\boxed{T^a\phi_0 \neq 0}$

对 $\phi$ 场平移，$\phi = \tilde{\phi} + \phi_0$，规范玻色子的质量项：

$$\mathcal{L}_{m_A} = \frac{1}{2}\left(m^2\right)_{ab}A_\mu^aA^{b,\mu}, \qquad \left(m^2\right)_{ab} = g^2\,(T^a\phi_0)_c\left(T^b\phi_0\right)^c$$

未破缺的对称性对应的规范玻色子仍然是无质量的。

例子：　具有一个Higgs二重态的SU(2)规范场理论

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4\end{pmatrix} \qquad V(\phi) = -\mu^2\phi^+\phi + \lambda(\phi^+\phi)^2$$

$$\phi_0 = \langle\phi\rangle_{VAC},\ \frac{\rho}{\sqrt{2}} = \sqrt{\phi_0^+\phi_0} \xRightarrow[SSB]{} \phi_0 = e^{i\theta^a\frac{\sigma^a}{2}}\begin{pmatrix}0 \\ \frac{\rho_0}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}, \rho_0 = v = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}$$

- 基础表示的生成元：$\tau^a = \sigma^a/2$, $a = 1, 2, 3$.
- 协变微商：$D_\mu\phi = (\partial_\mu - igA_\mu^a\sigma^a/2)\phi$.
- 对称性自发破缺：$\boxed{\langle\phi\rangle_{\mathrm{VAC}} = (0, v)/\sqrt{2}.}$
- 破缺的对称性：$\sigma^a\langle\phi\rangle_{\mathrm{VAC}} \neq 0$, $a = 1, 2, 3$.
- 规范玻色子的质量平方矩阵：

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{L} &= \frac{1}{8}g^2\begin{pmatrix}0 & v\end{pmatrix}\sigma^a\sigma^b\begin{pmatrix}0 \\ v\end{pmatrix}A^{a,\mu}A_\mu^b \\ &= \frac{g^2}{8}v^2A_\mu^aA^{a,\mu}\,.\end{aligned}$$

- 结论：SU(2)的三个对称性均等地完全地破缺了。