量子规范场论

陈　莹

中国科学院高能物理研究所
电子信箱：cheny@ihep.ac.cn
电话：010-88234180，13552559685

准备知识

- **分析力学：**

  最小作用量原理、哈密顿体系描述、拉格朗日体系描述、变分运算

- **电动力学：** 熟悉经典场的概念和狭义相对论中的四矢量运算
- **量子力学：** 表象理论（薛定谔表象、海森堡表象、相互作用表象）、希尔伯特态空间、狄拉克刀矢、刃矢运算
- **相对论量子场论：**

  自由场（标量场、旋量场、电磁场）的正则量子化过程、平面波展开；产生湮灭算符的（反）对易关系、S矩阵理论和S矩阵元的微扰计算（Feynman规则、树图和单圈图计算）、圈图发散的处理及正规化方案、重整化理论的基本概念

- **粒子物理：** 物质基本组成和微观相互作用的基本知识
- **数学准备：** 微积分、低阶偏微分方程理论、复变函数（解析函数、洛朗展开、解析延拓、留数定理等）、线性代数、傅里叶变换、群论基本知识

量子场论计算基本训练

- φ^4理论中S矩阵元的微扰计算（树图和单圈水平、对称因子等）
- QED中一些基本过程（Bahbah散射、Compton散射等）的树图计算、简单的单圈积分（紫外阶段正规化、Pauli-Villars 正规化、维数正规化）等;

参考书目

- Peskin & Schroeder,
  An Introduction to Quantum Field Theory;
- S. Weinberg,
  The Quantum Theory of Fields: Vol. I & Vol. II
- Mathew D. Schwartz,
  Quantum Theory and the Standard Model
- T.-P. Cheng & L.-F. Li,
  Gauge Theory of Elmentary Particle Physics
- C. Itzykson & J.-B. Zuber,
  Quantum Field Theory
- 戴元本， 相互作用的规范理论
- 曹昌祺， 量子规范场论

课程内容

一．正则量子化简单回顾

1. 常用的约定和公式
2. 自由场的量子化
3. S矩阵与S矩阵元
4. S矩阵元和格林函数的关系——LSZ约化公式
5. 有质量矢量场的正则量子化

二、规范对称性及对称性自发破缺

1. 规范理论的发展简史
2. 非阿贝尔规范对称性（非阿贝尔规范变换、Yang-Mills 理论、规范对称群）
3. 整体对称性自发破缺和Goldstone定理（线性σ模型）
4. 规范对称性破缺和Higgs机制

三、路径积分量子化

1. 一维量子力学中的路径积分量子化
2. 标量场的路径积分量子化
3. 旋量场的路径积分量子化
4. 电磁场的路径积分量子化
5. 非阿贝尔规范场Faddeev-Popov路径积分量子化

四、场的重整化及重正化群方程

1. φ^4理论的重整化
2. 对称性自发破缺的理论的重整化
3. 一般的重整化理论
4. 非Abel规范理论的重整化
5. 重正化群方程

五、标准模型的有关讨论

1. QCD
2. 电弱统一理论

一、正则量子化简单回顾

1. 常用约定和公式

1.1 符号约定

1) 在课程中采用自然单位制，即取 $\hbar = \mathbf{c} = \mathbf{1}$。

$$[长度] = [时间] = [能量]^{-1} = [质量]^{-1}$$

2) Minkowski 空间的时空度规

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3$$

$$x^{\mu} = \left(x^0, \vec{x}\right), \qquad x_{\mu} = g_{\mu\nu} x^{\nu} = \left(x^0, -\vec{x}\right)$$

$$\partial_{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \nabla\right), \qquad p \cdot x = g_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu} = p^0 x^0 - \vec{p} \cdot \vec{x}$$

$$\epsilon^{0123} = -1, \qquad \epsilon_{0123} = +1$$

3) Pauli矩阵

$$\sigma^1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\qquad \sigma^2=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix},\qquad \sigma^3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

γ-矩阵的约定（引入 2×2 单位矩阵 $\sigma^0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ）

4) Dirac 矩阵

Weyl表示：

$$\gamma^0=\begin{pmatrix}0 & \sigma_0\\ \sigma_0 & 0\end{pmatrix},\qquad \gamma_i=\begin{pmatrix}0 & \sigma^i\\ -\sigma^i & 0\end{pmatrix}$$

$$\gamma_5\equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3=\frac{1}{4!}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma=\gamma^5=\begin{pmatrix}-\sigma_0 & 0\\ 0 & \sigma_0\end{pmatrix}$$

Dirac 表示：

$$\gamma^0=\begin{pmatrix}\sigma_0 & 0\\ 0 & -\sigma_0\end{pmatrix},\quad \gamma_i=\begin{pmatrix}0 & \sigma^i\\ -\sigma^i & 0\end{pmatrix},\quad \gamma_5=\begin{pmatrix}0 & \sigma_0\\ \sigma_0 & 0\end{pmatrix}$$

Majorana 表示：

$$\boldsymbol{\gamma^0} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma^2} \\ \boldsymbol{\sigma^2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\gamma^1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{i\sigma^3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{i\sigma^3} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\gamma^2} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\boldsymbol{\sigma^2} \\ \boldsymbol{\sigma^2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\gamma^3} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{i\sigma^1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\boldsymbol{i\sigma^1} \end{pmatrix}$$

$$\gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \frac{1}{4!}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma = \gamma^5 = \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 \end{pmatrix}$$

（Dirac方程 $\boldsymbol{(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0}$ 在Majorana表象是实方程，可以将 $\boldsymbol{\psi}$ 分解为实部和虚部，实部和虚部各自都满足Dirac方程）

1.2 常用公式

1） 留数定理的应用

Jordan引理： 如果函数 $g(z)$ 沿上半平面圆周Γ_R: $z = Re^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$上连续（R 充分大），并且 $\lim\limits_{R\to+\infty} g(z) = 0$ 在Γ_R 上一致成立，则：

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\Gamma_{\mathrm{R}}} dz\, g(z) e^{imz} = 0, \qquad (m > 0)$$

留数定理：对于满足上面条件的函数$g(z)$, 且$g(z)$ 的极点 a_k 都不在实轴上，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz\, g(z) e^{imz} = 2\pi i \sum_{Im\, a_k>0} \mathrm{Res}_{z=a_k}\left(g(z)e^{imz}\right), \qquad (m > 0)$$

2) 阶跃函数

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

积分定义：

$$\theta(t) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} ds \, \frac{e^{-ist}}{s + i\epsilon}$$

可以自己验证，当 $t > 0$ 时，积分路径取实轴和下半平面的大圆构成的闭合路

3) Dirac δ 函数

$$\delta(x) = \frac{d}{dx}\theta(x), \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, f(x-a) = f(a)$$

4) 傅里叶变换

$$f(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik\cdot x} \tilde{f}(k), \qquad \tilde{f}(k) = \int d^4x \, e^{ik\cdot x} f(x)$$

2. 自由场的量子化

高能微观物理过程满足狭义相对论原理、量子力学原理。
相对论因果律、大量的粒子产生和湮灭等特性要求相对论性的量子场论。
集团展开原理要求定域量子场论。
（参阅Weinberg《Quantum Field Theory》Vol.1）

集团展开原理：空间上相距很远的微观物理过程之间互不相关。
从表现形式上来看，S矩阵元可以因子化为不同的集团（确定的初末态粒子集合）的乘积，最终可以表述为不同子集团的连通S矩阵元的集团展开。所谓连通的S矩阵元，是指其包含唯一一个反映能动量守恒的δ函数。

2.1 定域场论

定域性： $H_{int}(t)=\int d^3x\,\mathcal{H}_{int}(\vec{x},t)$

洛伦兹（Lorentz）不变性： $U_0(\Lambda,a)\mathcal{H}_{int}(x)U_0^{-1}(\Lambda,a)=\mathcal{H}_{int}(\Lambda x+a)$

微观因果律、集团展开原理： $[\mathcal{H}(x),\mathcal{H}(x')]=0,$ 当 $(x-x')^2\le 0$

相对论性定域场论的直接结果：自旋统计关系、反粒子的存在等。

2.2 场按照Lorentz变换性质分类

$$\psi'_\alpha(x) = U(\Lambda, a)\psi_\alpha U^{-1}(\Lambda, a) = \sum_\beta D_{\alpha\beta}(\Lambda^{-1})\psi_\beta(\Lambda x + a)$$

$U(\Lambda, a)$: 洛伦兹变换（洛伦兹转动 Λ 和平移 a）；

$D_{\alpha\beta}(\Lambda^{-1})$: 洛伦兹转动在 $\psi(x)$ 所属的表示空间的表示矩阵。

不同的场所属的表示不同，$D_{\alpha\beta}(\Lambda^{-1})$ 也不同：

标量场（$S = 0$）： $D(\Lambda) = 1$;

旋量场（$S = 1/2$）： $D(\Lambda) = \Lambda_{1/2} = exp(-i\omega_{\alpha\beta}S^{\alpha\beta}/2)$,

$$S^{\alpha\beta} = \frac{1}{4}[\gamma^\alpha, \gamma^\beta]$$

矢量场（$S = 1$）： $D(\Lambda) = \Lambda$

2.3 二次量子化

拉格朗日量（$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$），作用量（$S = \int d^4x\, \mathcal{L}$）

Euler-Lagrangian 方程 $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = 0$$

由此，场的每一个分量都满足 Klein-Gordon 方程 $(\partial^2 + m^2)\phi(x) = 0$

对场做空间的Fourier 变换，

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\, \tilde{\phi}\left(\vec{k}, t\right),$$

则有，

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \left(\left|\vec{k}\right|^2 + m^2\right)\right] \tilde{\phi}\left(\vec{k}, t\right) = 0$$

谐振子方程

对各谐振子模式（量子化）的整数个激发的量子；

每个模式是指在同一时间，每个动量 $\vec{k}$ 对应一个模式；

每个模式中第 n 个激发态代表有 n 个粒子。

Fock 态空间: $F = \bigoplus_n \mathcal{H}_n$, $\mathcal{H}_n$ 表示 n 粒子的 Hilbert态空间

Fock 态空间在所有的时间都是相同的，具有时间平移不变性。

幺正变换：场论计算中，我们感兴趣的是矩阵元，即态矢量的内积，

$$\mathcal{M} = \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \langle \psi_1 | P^+ P | \psi_2 \rangle \Longrightarrow P^+ P = I$$

要求态矢量（物理粒子态）是 Poincaré 的幺正表示。

粒子是Poincaré 群的不可约幺正表示，
场 $\psi, A_\mu, T_{\mu\nu}$ … 是Poincaré 群的有限维表示，但不是幺正表示；

Poincaré 群不存在有限维的幺正表示。

Wigner 证明了，不可约幺正表示按照质量 m 和自旋 J 唯一分类；
$m = 0$ 时只存在两种极化态。

这里我们不做细致讨论，可以参见 Schwartz 和 Weinberg （Vol. I）

自由场正则量子化步骤:

1. 拉氏量 $\Longrightarrow$ 作用量 $\Longrightarrow$ 欧拉-拉格朗日方程（运动方程）
2. 可以证明，所有的场都满足 Klein-Gordon 方程
3. 由拉氏量，对每一种场 $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})$ 引入其正则动量 $\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{\phi}}}$
4. 等时正则对易关系：$[\boldsymbol{\phi}(\vec{x}, t), \boldsymbol{\Pi}(\vec{y}, t)] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y})$
5. 勒让德变换：拉氏体系 $\Longrightarrow$ 哈密顿体系（哈密顿量）
6. 场（算符）的平面波展开
7. 平面波展开系数为粒子的产生湮灭算符（乘以自由波函数）
8. 由场及其正则动量满足的等时正则对易关系可以得到产生、湮灭算符满足的对易关系
9. 引入自由真空态 $|0\rangle$，可以定义单粒子态 $a_{\vec{p}}^{+}|0\rangle = |\vec{p}\rangle$。

2.4 自由标量场的正则量子化

a） 实标量场

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi(x)\right)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2(x)$$

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \Longrightarrow (\partial^2 + m^2)\phi(x) = 0$$

$$\Pi(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi} \qquad \mathcal{H}(x) = \Pi(x)\dot{\phi}(x) - \mathcal{L}(x)$$

$$[\boldsymbol{\phi}(\vec{x},t), \boldsymbol{\Pi}(\vec{y},t)] = i\delta^3(\vec{x}-\vec{y}), \qquad [\boldsymbol{\phi}(\vec{x},t), \boldsymbol{\phi}(\vec{y},t)] = [\boldsymbol{\Pi}(\vec{x},t), \boldsymbol{\Pi}(\vec{y},t)] = 0$$

$$\boldsymbol{\phi}(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}\left(a_{\vec{p}}e^{-ip\cdot x} + a_{\vec{p}}^{+}e^{ip\cdot x}\right)$$

$$\boldsymbol{\Pi}(x) = -i\int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2}\left(a_{\vec{p}}e^{-ip\cdot x} - a_{\vec{p}}^{+}e^{ip\cdot x}\right)$$

$a_{\vec{p}}$ 和 $a_{\vec{p}}^{+}$ 所满足的对易关系

$$\left[a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}'}^{+}\right] = (2\pi)^3 2E_{\vec{p}}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}'), \qquad \left[a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}'}\right] = \left[a_{\vec{p}}^{+}, a_{\vec{p}'}^{+}\right] = 0$$

动量为 $\vec{p}$ 单粒子态及态

$$|p\rangle = a_{\vec{p}}^{+}|0\rangle, \qquad \langle p|q\rangle = 2E_{\vec{p}}(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}-\vec{q}\,) \qquad U(\Lambda,a)|p\rangle = e^{i\Lambda p\cdot a}|\Lambda p\rangle$$

b） 复标量场 $\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\big(\phi_1(x)+i\phi_2(x)\big)$

复标量场的拉氏量 $\mathcal{L}(x)=\partial_\mu\phi(x)\partial^\mu\phi^*(x)-m^2\phi(x)\phi^*(x)$

运动方程 $(\partial^2+m^2)\phi(x)=0$

$\phi(x)$ 的正则动量 $\Pi(x)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}=\dot{\phi}^*(x),$

正则对易关系 $[\phi(\vec{x},t),\Pi(\vec{y},t)]=\big[\phi(\vec{x},t),\dot{\phi}^*(\vec{y},t)\big]=i\delta^3(\vec{x}-\vec{y})$

平面波展开

$$\phi(x)=\int\frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}\left(a_{\vec{p}}e^{-ip\cdot x}+b_{\vec{p}}^{+}e^{ip\cdot x}\right)$$

$$\Pi(x)=\dot{\phi}^*(x)=-i\int\frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2}\left(b_{\vec{p}}e^{-ip\cdot x}-a_{\vec{p}}^{+}e^{ip\cdot x}\right)$$

注意这时对正频部分和负频部分各引入了系数（算符），它们可以不同

$$\left[a_{\vec{p}},a_{\vec{p}'}^{+}\right]=\left[b_{\vec{p}},b_{\vec{p}'}^{+}\right]=(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}'),$$

$$\left[a_{\vec{p}},a_{\vec{p}'}\right]=\left[a_{\vec{p}}^{+},a_{\vec{p}'}^{+}\right]=\left[b_{\vec{p}},b_{\vec{p}'}\right]=\left[b_{\vec{p}}^{+},b_{\vec{p}'}^{+}\right]=0$$

可以看出，$a_{\vec{p}}^{+}$ 和 $b_{\vec{p}}^{+}$ 是粒子和反粒子的产生算符。

$\phi(x)$ 可以湮灭正粒子或者产生反粒子。

c) Dirac场

旋量场的拉氏量为 $\mathcal{L}(x) = \bar{\psi}(x)\left(\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\psi(x)$

经典运动方程——Dirac方程 $\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\psi = 0$

旋量场的正则动量 $\Pi(x) = \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} = \psi^{+}\gamma^{0}i\gamma^{0} = i\psi^{+}(x)$

正则（反）对易关系 $\left\{\psi_{\alpha}(\vec{x},t), \psi_{\beta}^{+}(\vec{y},t)\right\} = \delta^{\alpha\beta}\delta^{3}(\vec{x}-\vec{y})$

$\psi(x)$ 平面波展开

$$\psi(x) = \sum_{r=-1/2}^{1/2}\int \frac{d^{3}\vec{p}}{(2\pi)^{3}}\frac{1}{2E_{\vec{p}}}\left(a_{\vec{p}}^{(r)}u^{(r)}(p)e^{-ip\cdot x} + b_{\vec{p}}^{(r)+}v^{(r)}(p)e^{ip\cdot x}\right)$$

$a_{\vec{p}}^{(r)}$ 和 $b_{\vec{p}}^{(r)}$ 及其共轭的反对易关系

$$\left\{a_{\vec{p}}^{(r)}, a_{\vec{p}'}^{(s)+}\right\} = \left\{b_{\vec{p}}^{(r)}, b_{\vec{p}'}^{(s)+}\right\} = (2\pi)^{3}2E_{\vec{p}}\delta^{rs}\delta^{3}(\vec{p}-\vec{p}')$$

这里的$a_{\vec{p}}^{(r)+}$ 和 $b_{\vec{p}}^{(r)+}$ 分别为正粒子和反粒子的产生算符。

$u^{(r)}(p)$ 和 $v^{(r)}(p)$:

动量空间Dirac方程的正能解（正粒子）和负能解（反粒子），

$$(\gamma\cdot p-m)u^{(r)}(p)=0,\qquad (\gamma\cdot p+m)v^{(r)}(p)=0,$$

$$\overline{u}^{(r)}(p)(\gamma\cdot p-m)=0,\qquad \overline{v}^{(r)}(p)(\gamma\cdot p+m)=0,$$

归一化条件:

$$\sum_{r=-1/2}^{1/2}u^{(r)}(p)\overline{u}^{(r)}(p)=\gamma\cdot p+m\,,\ \sum_{r=-1/2}^{1/2}v^{(r)}(p)\overline{v}^{(r)}(p)=\gamma\cdot p-m$$

旋量标量积

$$\overline{u}^{(r)}(p)u^{(s)}(p)=2m\delta^{rs},\qquad \overline{v}^{(r)}(p)v^{(s)}(p)=-2m\delta^{rs}$$

$$u^{+(r)}(p)u^{(s)}(p)=2E\delta^{rs},\qquad v^{+(r)}(p)v^{(s)}(p)=2E\delta^{rs}$$

d) 有质量矢量场

质量为 μ 的矢量场 $A_\mu(x)$ 的洛伦兹变换性质

$$U(\Lambda,a)A^\mu(x)U^{-1}(\Lambda,a)=\left(\Lambda^{-1}\right)^\mu_{\ \nu}A^\nu\left(\Lambda x+a\right)$$

拉氏量 $\mathcal{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\frac{\mu^2}{2}A_\mu A^\mu$, $F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$

运动方程（Proca 方程）

$$\left.\begin{aligned}&\partial_\mu F^{\mu\nu}+\mu^2A^\nu=0\\ \Longrightarrow\quad &\partial_\mu A^\mu=0\end{aligned}\right\}\qquad \left(\partial^2+\mu^2\right)A^\mu(x)=0$$

正则量子化：$\Pi_i=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^0A^i)}=F^{0i}=-E_i$, $\Pi_0=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^0A^0)}=0$

由于 A^0 的正则动量为零，所以它不是一个正则变量！！！

哈密顿密度 $\mathcal{H}=\Pi_i\partial^0A^i-\mathcal{L}=\frac{1}{2}\left(\vec{E}^2+\vec{B}^2+\mu^2\vec{A}^2+\mu^2A_0^2\right)\geq 0$

正则对易关系

$$\left[A^i(t,\vec{x}),-E_i(t,\vec{y})\right]=i\delta^i_j\delta^3(\vec{x}-\vec{y}),\qquad \left[A^i(t,\vec{x}),A^j(t,\vec{y})\right]=0$$

平面波展开

$$A_\mu(x) = \sum_{\lambda=1}^{3} \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{k}}} \left(a_{\vec{k}}^{(\lambda)} \epsilon_\mu^{(\lambda)}(k) e^{-ik\cdot x} + a_{\vec{k}}^{(\lambda)+} \epsilon_\mu^{(\lambda)*}(k) e^{ik\cdot x} \right)$$

$\epsilon_\mu^{(\lambda)}(k)$ 为三个正交归一的（类空）极化矢量，

$$\epsilon_\mu^{(\lambda)} \epsilon^{(\lambda')*,\mu} = -\delta^{\lambda\lambda'}$$

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad k_\mu \epsilon^{(\lambda),\mu}(k) = 0$$

4-D transverse

可以证明，上述两个条件使得 $\epsilon_\mu^{(\lambda)}(k)$ 满足关系

$$\sum_{\lambda=1}^{3} \epsilon_\mu^{(\lambda)}(k) \epsilon_\nu^{(\lambda)*}(k) = -g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{\mu^2}$$

$a_{\vec{k}}^{(\lambda),+}, a_{\vec{k}}^{(\lambda)}$ 满足正则对易关系

$$\left[a_{\vec{k}}^{(\lambda)}, a_{\vec{k}'}^{(\lambda'),+} \right] = (2\pi)^3 2E_{\vec{k}} \delta_{\lambda\lambda'} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}')$$

有质量矢量场的自由传播子（作业）

$$\langle 0|TA_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left(-g_{\mu\nu}+\frac{k_\mu k_\nu}{\mu^2}\right)\frac{i}{k^2-m^2+i\epsilon}e^{-ik\cdot(x-y)} + \frac{i}{\mu^2}\delta_\mu^0\delta_\nu^0\delta^4(x-y)$$

正则量子化方案下，该传播子会出现洛伦兹非协变项，这似乎和我们要求的洛伦兹协变要求矛盾。不过，我们后面会看到，在正则量子化中，相互作用表象中的相互作用哈密顿量中也会出现非协变项，在我们计算振幅时，这两种来源的非协变项会完全抵消，从而保证最终的反映振幅是洛伦兹不变的。

另外，在后面的路径积分量子化方案中，则不会出现这种非协变项。

附录：

矢量场有四个分量，考虑由四个正交归一的态矢量

$$|V_\mu\rangle = (|V_1\rangle, |V_2\rangle, |V_3\rangle, |V_4\rangle)$$

构成的态空间。

任意的矢量态 $|\psi\rangle$:　　$|\psi\rangle = c_0|V_1\rangle + c_1|V_2\rangle + c_3|V_3\rangle + c_4|V_4\rangle$

量子力学的要求　　$\langle\psi|\psi\rangle = \sum_{i=0}^{4}|c_i|^2 > 0$

但是，这种内积的定义不是是洛伦兹不变的，
比如，一个由 β 定义的 Lorentz boost

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix}, \quad \Lambda^{-1} \neq \Lambda^{+}$$

$|\psi\rangle$ 在这个变换下变为

$$|\psi'\rangle = \cosh\beta\ |V_0\rangle + \sinh\beta\ |V_1\rangle \Longrightarrow \langle\psi'|\psi'\rangle \neq 1$$

如果我们重新约定

$$\langle\psi|\psi\rangle = |c_0|^2 - |c_1|^2 - |c_2|^2 - |c_3|^2$$

这个内积是Lorentz 不变的，但是不正定。

Hilbert空间态矢量内积要满足几率解释要求

$$\langle\psi|\psi\rangle > 0, \qquad \langle\psi_i|\psi_j\rangle = \delta_{ij}$$

矛盾!

Lorentz 不变性要求

$$\langle V_\mu|V_\nu\rangle = g_{\mu\nu}$$

实际上，齐次正的 Lorentz 群 $SO(3,1)$ 不是紧致群（compact），有非厄米的生成元（对应 Lorentz boost）。

洛伦兹矢量态 $|V_\mu\rangle$ 是自旋为 $J=0$ 的态和自旋为 $J=1$ 的态的直和

$$|V_\mu\rangle \to |J=0\rangle \oplus |J=1\rangle$$

如果我们能够将$|J=0\rangle$ 和 $|J=1\rangle$ 分别投影出去，则可以构造洛伦兹不变的拉氏量，并且保证 Hilbert 态是正模的。

e) 无质量矢量场

拉氏量 $$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

经典场方程为 $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \Longleftrightarrow \partial^2 A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = 0$

并不隐含约束条件 $\partial_\mu A^\mu(x) = 0$, 看起来 $A_\mu(x)$ 会有四个独立的分量，相应的无质量的矢量粒子（光子）应该有四种不同的极化态。

实际上光子只有两种极化方向。如果用无质量的矢量场来描述光子，就会多出来两种非物理的极化态。因此在对无质量矢量场进行量子化时，需要对非物理的极化态进行合理的处理。

矢量场 $A_\mu(x)$ 在如下变换下，拉氏量不变

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha$$

$A_\mu(x)$ 的这种不确定性造成 $A_\mu(x)$ 含有冗余的自由度，在量子化后就有可能出现非物理的极化模式。

消除 $A_\mu(x)$ 的冗余自由度的一般做法是进行规范固定，即使 $A_\mu(x)$ 满足某种条件 $F[A_\mu] = 0$，称作规范条件。

有相互作用的有质量矢量场理论 $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\mu^2}{2}A_\mu A^\mu - \boxed{J_\mu A^\mu}$

运动方程 $\partial_\mu F^{\mu\nu} + \mu^2 A^\nu = J^\nu \Longrightarrow \partial_\mu A^\mu = \frac{1}{\mu^2}\partial_\mu J^\mu$

在无质量极限$\mu^2 \to 0$，

$$\begin{cases} \partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \\ \partial_\mu A^\mu = \dfrac{1}{\mu^2}\partial_\mu J^\mu \end{cases} \Longleftarrow$$

只有在$\partial_\mu J^\mu = 0$时才有定义

$\partial_\mu J^\mu = 0$流守恒

Dirac场和标量场的守恒流 $j_D^\mu \sim \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$， $j_S^\mu \sim \phi^*\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^*$

协变导数：$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu$

最小耦合：$\mathcal{L}_M(\phi, \partial_\mu\phi) \to \mathcal{L}_M(\phi, D_\mu\phi)$保证矢量场是和守恒流耦合。

QED Lagrangian

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QED} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi \\ D_\mu &= \partial_\mu + ieA_\mu \end{aligned}$$

QED Lagrangian 在$U(1)$规范变换下不变

$$\psi(x) \to \exp(ia(x))\psi(x) \qquad A_\mu(x) \to A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu a(x)$$

规范固定：由于这种规范不变性，$A_\mu(x)$ 的定义有一定的不确定性，
但不影响物理结果

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad \text{(Coulomb)} \qquad A_3 = 0 \quad \text{(Axial)}$$

$$A_0 = 0 \quad \text{(Temporal)} \qquad \partial_\mu A^\mu = 0 \quad \text{(Covariant)}$$

流守恒：$\partial_\mu J^\mu = 0$

电荷守恒：（U(1)整体对称性） $Q = \int d^3\vec{x} J^0$ $\qquad \frac{d}{dt}Q = 0$

U(1)定域对称性并不带来新的守恒荷。

3. S矩阵和S矩阵元

散射的宏观描述：宏观上相距很远的粒子高速接近，在微观小尺度的时空范围内发生碰撞（相互作用）。此后，相互作用的产物从相互作用区域飞出，最终表现为宏观上远离的粒子。

实验观测：确定的初态演化到确定的末态的几率（截面、宽度）

$$S_{fi} = \left\langle \psi_f^- \middle| \psi_i^+ \right\rangle = \lim_{\substack{t_i \to -\infty \\ t_f \to +\infty}} \langle \phi_f | U(t_f, t_i) | \phi_i \rangle$$

$|\psi_i^+\rangle$ 和 $|\psi_f^-\rangle$ ：总哈密顿量 $H = H_0 + H_{int}$ 的本征态，
也即 in 态和 out 态；

$|\phi_{i,f}\rangle$ ： H_0 的本征态 （自由粒子态）。

初、末态粒子的渐近描述：

1） 入射态 $|\psi_i^+\rangle$（in态）：在无穷远过去（$t \to -\infty$）观察时，
$|\phi_i\rangle$ 包含入射粒子态（近似自由粒子态）；

2） 出射态 $|\psi_f^-\rangle$（out态）：在无穷远过去（$t \to +\infty$）观察时，
$|\phi_f\rangle$ 包含入射粒子态（近似自由粒子态）。

3.1 海森堡（Heisenberg）表象

体系的状态矢量 $|\psi\rangle$ 不随时间改变，即 $|\psi\rangle$ 描述了体系的所有时空历史。从这个意义上讲，in 态和 out 态不能理解为某个时间有关的态矢量在 $t \to \pm\infty$ 处的极限。

Hilbert 态的时空平移变换：$U(1,a)|p\rangle = e^{i\hat{P}_\mu \cdot a^\mu}|p\rangle$

观测： 海森堡表象的态矢量是与时间无关的，但是根据态矢量的洛伦兹变换性质，对于两个惯性系 θ 和 θ'：θ 系的时间原点 $t = 0$ 设为对撞时间；θ' 的时间原点 $t' = 0$ 设为 θ 系的 $t = \tau$ 时刻。这两个惯性系通过时间平移变换 $t' = t - \tau$ 联系起来。则当 θ 系中观测到状态 $|\psi\rangle$， 这个态在 θ' 系中表现为

$$U(1,-\tau)|\psi\rangle = e^{-iH\tau}|\psi\rangle$$

波包： 如果 $|\psi\rangle$ 已经是 H 的本征态，则这两个惯性系中态的表现是一样的，没有物理后果。因此需要考虑波包的概念：

$$|\psi\rangle = \sum_\alpha g_\alpha |\psi_\alpha\rangle, \qquad H|\psi_\alpha\rangle = E_\alpha |\psi_\alpha\rangle$$

对于远离对撞点的观察者，要求 in 态和 out 态 $|\psi_\alpha^\pm\rangle$ 满足：

$$e^{-iH\tau}\sum_\alpha g_\alpha|\psi_\alpha^\pm\rangle \equiv \sum_\alpha g_\alpha e^{-iE_\alpha\tau}|\psi_\alpha^\pm\rangle$$

在 $\tau \ll -\frac{1}{\Delta E}$ 或 $\tau \gg \frac{1}{\Delta E}$ 时表现为自由粒子的叠加，其中 ΔE 为波包的能量不确定性。

3.2 相互作用表象

$$H = H_0 + H_{int}$$

H_0: 自由粒子哈密顿量（其中出现的粒子质量为物理质量）H_0，本征态 $|\phi_\alpha\rangle$，即 $H_0|\phi_\alpha\rangle = E_\alpha|\phi_\alpha\rangle$；

H_{int}: 相互作用部分。

利用相互作用表象，渐近态 $|\psi_\alpha^\pm\rangle$ （H 的本征态 $H|\psi_\alpha^\pm\rangle = E_\alpha|\psi_\alpha^\pm\rangle$）满足渐近条件

$$\sum_\alpha e^{-iE_\alpha\tau} g_\alpha|\psi_\alpha^\pm\rangle \to \sum_\alpha e^{-iE_\alpha\tau} g_\alpha|\phi_\alpha\rangle, \tau \to \mp\infty$$

$$\Rightarrow \quad e^{-iH\tau}\sum_\alpha g_\alpha|\psi_\alpha^\pm\rangle = e^{-iH_0\tau}\sum_\alpha g_\alpha|\phi_\alpha\rangle$$

演化算符 $\Omega(\tau)$ $\boxed{\Omega(\tau) = e^{iH\tau}e^{-iH_0\tau}}$

渐近态 $|\psi_\alpha^\pm\rangle$ 和 自由态 $|\phi_\alpha\rangle$ 的关系： $\boxed{|\psi_\alpha^\pm\rangle = \Omega(\mp\infty)|\phi_\alpha\rangle}$

基于以上对初、末态的渐近定义，

初态（in 态）：$t \to -\infty$ 时入射态有确定的粒子组成，用 $|\psi_\alpha^+\rangle$ 表示；

末态（out 态）：$t \to +\infty$ 时出射态有确定的粒子组成，用 $|\psi_\beta^-\rangle$ 表示；

3.3 S 矩阵元和 S 矩阵

我们就可以讨论 S 矩阵元的定义和意义：

$\alpha \to \beta$ 的反应几率（S 矩阵元）就可以表示成

$$\boxed{S_{\beta\alpha} = \left\langle \psi_{\beta}^{-} \middle| \psi_{\alpha}^{+} \right\rangle}$$

S 矩阵元构成 S 矩阵。

S 矩阵用自由态 $|\phi_\alpha\rangle$ 的矩阵元来表示：

$$|\psi_{\alpha}^{\pm}\rangle = \Omega(\mp\infty)|\phi_\alpha\rangle$$

$$\Omega(\tau) = e^{iH\tau}e^{-iH_0\tau}$$

$$S_{\beta\alpha} = \left\langle \psi_{\beta}^{-} \middle| \psi_{\alpha}^{+} \right\rangle = \langle \phi_\beta | \Omega^{+}(+\infty)\Omega(-\infty) | \phi_\alpha \rangle$$

$$\equiv \langle \phi_\beta | U(+\infty, -\infty) | \phi_\alpha \rangle = \langle \phi_\beta | S | \phi_\alpha \rangle$$

时间演化算符：

$$S = U(+\infty, -\infty),$$

$$U(\tau, \tau') = e^{iH_0\tau}e^{-iH(\tau-\tau')}e^{-iH_0\tau'}$$

1. S 矩阵是幺正的，$S^+S = SS^+ = I$

$$(S^+S)_{\beta\alpha} = \sum_\gamma \left\langle \psi_\beta^+ \middle| \psi_\gamma^- \right\rangle \left\langle \psi_\gamma^- \middle| \psi_\alpha^+ \right\rangle = \left\langle \psi_\beta^+ \middle| \psi_\alpha^+ \right\rangle = \delta_{\beta\alpha}$$

$$(SS^+)_{\beta\alpha} = \sum_\gamma \left\langle \psi_\beta^- \middle| \psi_\gamma^+ \right\rangle \left\langle \psi_\gamma^+ \middle| \psi_\alpha^- \right\rangle = \left\langle \psi_\beta^- \middle| \psi_\alpha^- \right\rangle = \delta_{\beta\alpha}$$

2. S 算符的洛伦兹不变性

如果要求 $|\phi_\alpha\rangle \to |\phi'_\alpha\rangle = U|\phi_\alpha\rangle$，$U = U(\Lambda, a)$

$$\left\langle \phi'_\beta \middle| S \middle| \phi'_\alpha \right\rangle = \langle \phi_\beta | U^+ S U | \phi_\alpha \rangle \equiv \langle \phi_\beta | S | \phi_\alpha \rangle$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{U^+SU = S, \qquad [S, U] = 0}$$

3. In 态和 out 态可以通过 S 算符联系起来

$$\left\langle\psi_\beta^\pm|S|\psi_\alpha^\pm\right\rangle = \langle\phi_\beta|\Omega^+(\mp\infty)S\Omega(\mp\infty)|\phi_\alpha\rangle$$

$$= \lim_{t\to\mp\infty}\langle\phi_\beta|e^{iH_0t}e^{-iHt}Se^{iHt}e^{-iH_0t}|\phi_\alpha\rangle$$

$$= \lim_{t\to\mp\infty}\langle\phi_\beta|e^{iE_\beta t}e^{-iHt}Se^{iHt}e^{-iE_\alpha t}|\phi_\alpha\rangle$$

利用 S 算符的洛伦兹不变性（自然有时间平移不变性），

$$e^{-iHt}Se^{iHt} = S$$

有

$$\left\langle\psi_\beta^\pm|S|\psi_\alpha^\pm\right\rangle = \lim_{t\to\mp\infty} e^{i(E_\beta-E_\alpha)t}\langle\phi_\beta|S|\phi_\alpha\rangle = \langle\phi_\beta|S|\phi_\alpha\rangle = \left\langle\psi_\beta^-\middle|\psi_\alpha^+\right\rangle$$

in 态和 out 态可以通过 S 算符联系起来 $\boxed{S|\psi_\alpha^-\rangle = |\psi_\alpha^+\rangle}$

3.4 相互作用表象的场算符 （Peskin & Schroeder, Chpt. 4.2)

薛定谔表象（Shrödinger picture）的场算符： $\phi(\vec{x})$

海森堡表象（Heisenberg picture）的算符：

$$\phi(x) \equiv \phi(\vec{x}, t) = e^{iHt}\phi(\vec{x})e^{-iHt}$$

相互作用表象的场算符：由任意时刻 t_0 的海森堡场算符 $\phi(\vec{x}, t_0)$ 来定义，

$$\phi_I(\vec{x}, t) = e^{iH_0(t-t_0)}\phi(\vec{x}, t_0)e^{-iH_0(t-t_0)}$$

满足自由场方程： $$i\frac{\partial}{\partial t}\phi_I(\vec{x}, t) = [\phi_I(\vec{x}, t), H_0]$$

海森堡场算符 $\phi(\vec{x}, t)$ 和相互作用表象的场算符 $\phi_I(\vec{x}, t)$ 的关系：

$$\begin{aligned}\phi(\vec{x}, t) &= e^{iH(t-t_0)}e^{-iH_0(t-t_0)}\phi_I(\vec{x}, t)e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t_0)} \\ &\equiv U^+(t, t_0)\phi_I(\vec{x}, t)U(t, t_0)\end{aligned}$$

$$U(t,t_0)=e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t_0)}$$ 初条件 $U(t_0,t_0)=I$

算符 $U(t,t_0)$ 满足微分方程：

$$i\frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0)=H_I(t)U(t,t_0)$$

该微分方程可以形式地求解，得到

$$U(t,t_0)=1+(-\mathrm{i})\int_{t_0}^{t}dt_1\,H_I(t_1)+\frac{1}{2!}(-i)^2\int_{t_0}^{t}dt_1\,dt_2H_I(t_1)H_I(t_2)+\cdots$$

$$\equiv Texp\left[-i\int_{t_0}^{t}dt'\,H_I(t')\right]$$

这个定义自然推广为不依赖于 t_0 的定义：

$$i\frac{\partial}{\partial t}U(t,t') = H_I(t)U(t,t'),\quad U(t',t') = I$$

$$U(t,t') \equiv T\exp\left[-i\int_{t'}^{t} dt''\, H_I(t'')\right], \qquad (t \geq t')$$

如果取极限 $t \to +\infty, t' \to -\infty$，则可以得到不依赖于 t_0 的算符

$$\boxed{S = U(+\infty,-\infty) \equiv T\exp\left[-i\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, H_I(t)\right]}$$

这样，S 矩阵就表示成为相互作用表象中的从无穷远过去到无穷远将来的时间演化算符（用相互作用表象的场 $\phi_I(\vec{x},t)$ 来表达）。

它是微扰论的基础。

3.5 S 矩阵元的应用

$$S = I + iT \qquad S_{\beta\alpha} = \left\langle \psi_\beta^- \middle| \psi_\alpha^+ \right\rangle = \delta_{\beta\alpha} + iT_{\beta\alpha}$$

初末态不同时（最感兴趣），转换振幅

$$\left\langle \psi_\beta^- \middle| \psi_\alpha^+ \right\rangle = iT_{\beta\alpha} = \langle \phi_\beta | iT | \phi_\alpha \rangle \equiv \langle \{p_\beta\} | iT | \{p_\alpha\} \rangle$$

$\{p_{\alpha,\beta}\}$ 表示初末态粒子的四动量组合（自由粒子），能动量守恒

$$iT_{\beta\alpha} = (2\pi)^4 \delta^4(p_\beta - p_\alpha) i\mathcal{M}(\{p_\alpha\} \to \{p_\beta\})$$

$$\equiv (2\pi)^4 \delta^4(p_\beta - p_\alpha)\ i\mathcal{M}_{\beta\alpha}$$

不变振幅

1. 散射截面

$$\boxed{d\sigma = \frac{1}{4\sqrt{(p_A \cdot p_B)^2 - m_A^2 m_B^2}} |\mathcal{M}(A + B \to f)|^2\, d\Phi_f}$$

相空间体积元：$$d\Phi_f = (2\pi)^4 \delta^4(p_\beta - p_\alpha) \prod_f \frac{d^3\vec{p}_f}{(2\pi)^3 2E_f}$$

在任意的实验室系中，如果A, B粒子的相对速率为 $|\vec{v}_A - \vec{v}_B|$，

$$\boxed{d\sigma = \frac{1}{4E_A E_B\,|\vec{v}_A - \vec{v}_B|}|\mathcal{M}(A+B\to f)|^2 d\Phi_f}$$

$$4E_1E_2|\vec{v}_A - \vec{v}_B| = 4E_A E_B\left|\frac{p_{cm}}{E_A} + \frac{p_{cm}}{E_B}\right| = 4E_{cm}p_{cm}$$

$$\boxed{d\sigma = \frac{1}{4E_{cm}p_{cm}|}|\mathcal{M}(A+B\to f)|^2 d\Phi_f}$$

2. 衰变宽度

在衰变粒子的静止系，微分宽度为

$$d\Gamma(A\to f) = \frac{1}{2m_A}|\mathcal{M}(A\to f)|^2 d\Phi_f$$

因此，在理论计算中的关键是不变振幅的计算。

3.6 S 矩阵的幺正性，光学定理

$$\boldsymbol{S = I + iT}, \qquad \boldsymbol{S^{+}S = I \Longrightarrow -i(T - T^{+}) = T^{+}T}$$

幺正性关系直接给出不变振幅的虚部的信息

$$-i\langle\phi_\beta|(T - T^{+})|\phi_\alpha\rangle = \langle\phi_\beta|T^{+}T|\phi_\alpha\rangle = \int d\gamma\ \langle\phi_\beta|T^{+}|\phi_\gamma\rangle\langle\phi_\gamma|T|\phi_\alpha\rangle$$

相空间积分–所有的中间粒子态求和：

$$\int d\gamma = \sum_{\gamma}\int\prod_{f\in\gamma}\frac{d^3\vec{p}_f}{(2\pi)^3 2E_f}$$

利用定义 $\langle\phi_\beta|T|\phi_\alpha\rangle = (2\pi)^4\delta^4\left(\sum p_\beta - \sum p_\alpha\right)\ \mathcal{M}_{\beta\alpha}$,

$$\left(\mathcal{M}_{\beta\alpha} - \mathcal{M}^{*}_{\alpha\beta}\right) = \int d\gamma\ \mathcal{M}^{*}_{\gamma\beta}\mathcal{M}_{\gamma\alpha}(2\pi)^4\delta^4(p_\gamma - p_\alpha)$$

对于向前散射的情形（$\alpha = \beta$），

$$2\,\mathrm{Im}\mathcal{M}_{\alpha\alpha} = \int d\gamma\, \left|\mathcal{M}_{\gamma\alpha}\right|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_\gamma - p_\alpha)$$

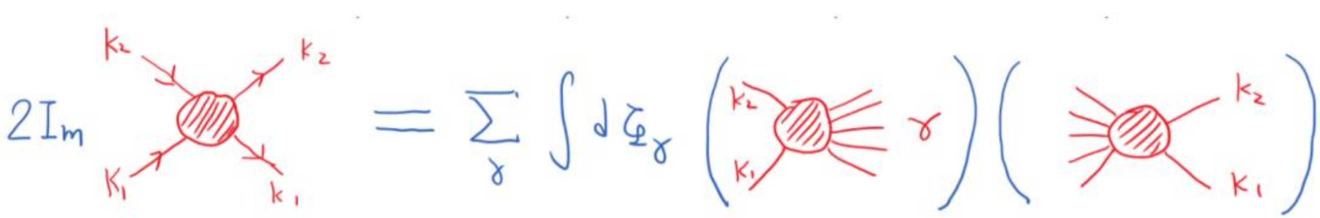
$$= \int d\Phi_\gamma\, \left|\mathcal{M}_{\gamma\alpha}\right|^2 = \left(V \sum_{i\in\alpha} 1/(2E_i V)\right)^{-1} \sum_{\gamma} w_{\gamma\alpha}$$

“光学定理”——向前散射振幅的虚部来自所有中间（物理）粒子态的贡献。

$2 \to 2$的向前散射，光学定理可表述为：

向前散射振幅的虚部正比于两体散射到所有可能末态的总截面（单举截面，inclusive cross section）

$$\boxed{\mathrm{Im}\,\mathcal{M}(k_1 k_2 \to k_1 k_2) = 2\,E_{cm} p_{cm} \sigma_{tot}(k_1 k_2 \to anything)}$$



4 S矩阵元和格林函数

- 微观高能物理实验中，我们实际上对相互作用的细节无法直接测量。
- 我们只知道反应前的粒子数（亮度）和反应后的末态数。
- 实际表现为反应截面和衰变宽度。他们都由 S 矩阵元来表达。
- 因此实际的物理观测量是 S 矩阵元。
- 通过理论计算 S 矩阵元（用物理量如质量、耦合常数等）来表达。
- 通过对S矩阵元的实验测量和理论计算，我们才可以了解相互作用的本质。

- 理论计算的核心就是计算S矩阵元。
- 历史上，Lehnamnn，Symanzik和Zimmermann首先在场论框架下推导出了 S 矩阵元和场算符的关联函数（格林函数）的关系，现在将这种联系统称为 LSZ约化公式。
- 相对而言，格林函数在场论中有很好的定义，是场论的更基本的物理量，包含了理论体系的所有性质。

- 具体而言，如果我们要计算 $2 \to n$ 过程的 S 矩阵元，我们可以计算相应的 $n+2$ 个Heisenberg场算符的关联函数（格林函数）。
- 这些关联函数的动量空间表达在p^2复空间存在极点，
- 极点可以理解为对应于物理态，即渐进态，它们在无穷远的过去和将来是自由的物理粒子态。
- 多极点（比如 $n+2$ 个极点）项的系数（留数）是我们需要的 S 矩阵元。

4.1 标量场的LSZ约化公式（Peskin & Schroeder, Chpt. 7.2）

$$\langle q_1 q_2 \dots q_m | S | p_1 p_2 \dots p_n \rangle$$

$$= \prod_{j=1}^{m} \left[i \int d^4 y_j \, e^{i q_j \cdot y_j} \left(\partial_{y_j}^2 + m^2 \right) \right] \prod_{k=1}^{n} \left[i \int d^4 x_k \, e^{-i p_k \cdot x_k} \left(\partial_{x_k}^2 + m^2 \right) \right]$$

$$\times Z_{OS}^{-(m+n)/2} \langle \Omega | T \phi(y_1) \phi(y_2) \cdots \phi(y_m) \phi(x_1) \phi(x_2) \cdots \phi(x_n) | \Omega \rangle$$

$+$ 非连通部分

$$= Z_{OS}^{-(m+n)/2} (-i)^{m+n} \prod_{j=1}^{m} \left(q_j^2 - m^2 \right) \prod_{k=1}^{n} \left(p_k^2 - m^2 \right)$$

$$\times \widetilde{G}^{(m+n)}(q_1 q_2 \cdots q_m, p_1 p_2 \cdots p_n) + \cdots$$

$\phi(x)$：海森堡算符（相互作用理论中的算符，重正化理论中的裸算符）；
Z_{OS}： 场算符的在壳（on-shell）波函数重正化常数；
$|\Omega\rangle$： 物理真空态；m：是标量粒子的物理质量。

LSZ 公式：连通格林函数会有极点，这些极点对应物理渐近态。
LSZ 公式就是通过加入“零点”来抵消这些极点，从而得到S 矩阵元。

$$\langle q_1 q_2 \dots q_m | S | p_1 p_2 \dots p_n \rangle = Z_{OS}^{-(m+n)/2} (-i)^{m+n}$$
$$\times \prod_{j=1}^{m} \left(q_j^2 - m^2\right) \prod_{k=1}^{n} \left(p_k^2 - m^2\right)$$
$$\times \tilde{G}^{(m+n)}(q_1 q_2 \cdots q_m, p_1 p_2 \cdots p_n) + \cdots$$

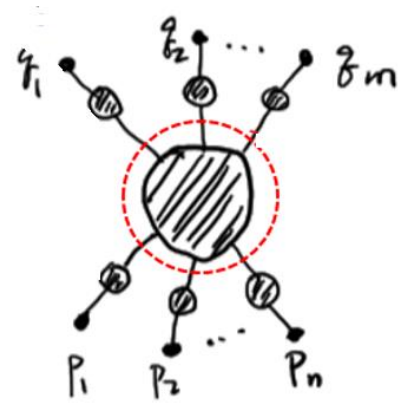
- 前面的因子相当于$(m+n)$个零（对于在壳粒子）；
- 只有 $\tilde{G}^{(m+n)}$ 在 p^2 复平面有且只有$(m+n)$个极点，右边才不为零；

$$q_j^2 = m^2, p_k^2 = m^2, j = 1, 2, \cdots m, k = 1, 2, \cdots n$$

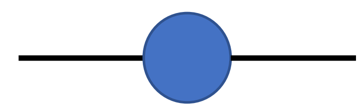
- 只有$(m+n)$点连通格林函数满足这个条件。

连通格林函数总可以表示为如下方式：

$$\widetilde{G}_c^{(m+n)}(q_1q_2\cdots q_m,p_1p_2\cdots p_n)$$
$$=\sum_{j=1}^{m}\widetilde{G}_c^{(2)}(q_j)\sum_{k=1}^{n}\widetilde{G}_c^{(2)}(p_k)$$
$$\times\widetilde{G}_{c,amp}^{(m+n)}(q_1q_2\cdots q_m,p_1p_2\cdots p_n)$$

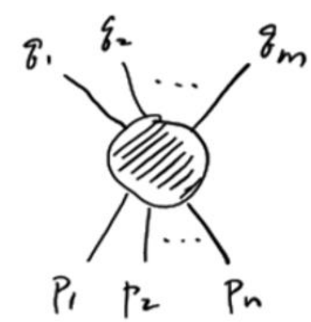


$\widetilde{G}_c^{(2)}(p)$: 两点连通格林函数，**全传播子**



$\widetilde{G}_{c,amp}^{(m+n)}$: **截腿格林函数**

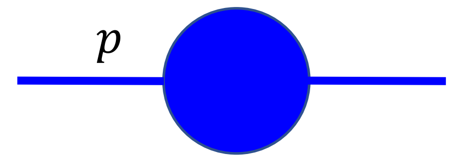
（amputated Green’s function）



标量场的全传播子 $\widetilde{G}_c^{(2)}(p)$：

$$G_c^{(2)}(x-y)=\langle\Omega|T\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle_c=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ip\cdot(x-y)}\widetilde{G}_c^{(2)}(p)$$

$$\widetilde{G}_c^{(2)}(p)\Big|_{p^2\to m^2}=\frac{iZ_{OS}}{p^2-m^2+i\epsilon}+\cdots$$



$$\boxed{\langle q_1q_2\ldots q_m|S|p_1p_2\ldots p_n\rangle=Z_{OS}^{(m+n)/2}\,\widetilde{G}_{c,amp}^{(m+n)}(q_1q_2\cdots q_m,p_1p_2\cdots p_n)\Big|_{\substack{q_i^2=m^2\\ p_j^2=m^2}}}$$

说明：在LSZ公式中，格林函数中的算符既可以是基本场算符（如$\phi(x)$），也可以是由基本场算符构成的某种组合算符 $O_i(x)$，只要它能够产生渐近的自由粒子态。这时将 LSZ 公式中的格林函数换成

$$\langle\Omega|TO_1(y_1)O_2(y_2)\cdots O_m(y_m)O_1'(x_1)O_2'(x_2)\cdots O_n'(x_n)|\Omega\rangle$$

相应地，在壳重正化常数的定义通过如下关系定义

$$\langle\Omega|O_i(x)|p\rangle=Z_ie^{-ip\cdot x}$$

4.2 旋量场的LSZ约化公式（Chpt.5, Itzykson&Zuber, Quantum Field Theory）

1. 初态电子态 $|e^-(k,s)\rangle$ 的约化公式

$$\langle\beta,out|\alpha,k,s,in\rangle=\langle\beta,out|a^{+}_{s,in}(k)|\alpha,in\rangle$$

$$=-iZ_2^{-1/2}\int d^4x\,\langle\beta,out|\,\overline{\psi}(x)|\alpha,in\rangle(-i\gamma\cdot\overleftarrow{\partial}-m)u_s(k)e^{-ik\cdot x}$$

2. 初态正电子态 $|e^+(k,s)\rangle$ 的约化公式

$$\langle\beta,out|\alpha,k,s,in\rangle=\langle\beta,out|b^{+}_{s,in}(k)|\alpha,in\rangle$$

$$=iZ_2^{-1/2}\int d^4x\,\overline{v}_s(k)e^{-ik\cdot x}(i\gamma\cdot\partial-m)\langle\beta,out|\,\psi(x)|\alpha,in\rangle$$

3. 末态电子态 $\langle e^-(k,s)|$ 的约化公式

$$\langle\beta,k,s,out|\alpha,in\rangle=\langle\beta,out|a_{s,out}(k)|\alpha,in\rangle$$

$$=-iZ_2^{-1/2}\int d^4x\,\overline{u}_s(k)e^{ik\cdot x}(i\gamma\cdot\partial-m)\langle\beta,out|\,\psi(x)|\alpha,in\rangle$$

4. 末态正电子态 $\langle e^+(k,s)|$的约化公式

$$\langle\beta,k,s,out|\alpha,in\rangle=\langle\beta,out|b_{s,out}(k)|\alpha,in\rangle$$

$$=iZ_2^{-1/2}\int d^4x\,\langle\beta,out|\,\overline{\psi}(x)|\alpha,in\rangle\left(-i\gamma\cdot\overleftarrow{\partial}-m\right)v_s(k)e^{-ik\cdot x}$$

多个（正）费米子初态到多个（正）费米子末态的

S 矩阵元的 LSZ 约化公式为

$$\langle k_1 s_1;\dots;k_m s_m, out|p_1 s_1';\dots;p_n s_n', in\rangle = Z_{OS}^{-(m+n)/2}\prod_{i=1}^{n}\left(-i\int d^4x_i\right)$$

$$\times\prod_{j=1}^{m}\left(-i\int d^4y_j\, e^{ik_j\cdot y_j}\bar{u}_{s_j,\beta_j'}(k_j)\left(i\gamma\cdot\partial_{y_j}-m\right)_{\beta_j'\beta_j}\right)$$

$$\times\langle\Omega|T\psi_{\beta_m}(y_m)\dots\psi_{\beta_1}(y_1)\bar{\psi}_{\alpha_1}(x_1)\dots\bar{\psi}_{\alpha_n}(x_n)|\Omega\rangle$$

$$\times\prod_{i=1}^{n}\left(\left(-i\gamma\cdot\overleftarrow{\partial}_{x_i}-m\right)_{\alpha_i\alpha_i'}u_{s_i',\alpha_i'}(p_i)e^{-ip_i\cdot x_i}\right)$$

4.3 初末态包含光子的LSZ约化公式(Chpt.5, Itzykson&Zuber, Quantum Field Theory)

直接给出结论:

1. 末态包含一个光子的过程 $\alpha \to \beta + \gamma(k, \epsilon)$:

$$\langle \beta, k, \epsilon, out | \alpha, in \rangle = -i\, Z_3^{-1/2} \int d^4x\, e^{ik\cdot x} \langle \beta, out | \epsilon^* \cdot j_{em}(x) | \alpha, in \rangle$$

2. 初末态各包含一个光子的过程 $\alpha + \gamma(k_i, \epsilon_i \to \beta + \gamma(k_f, \epsilon_f)$:

$$\langle \beta, k_f, \epsilon_f, out | \alpha, k_i, \epsilon_i, in \rangle$$
$$= -Z_3^{-1} \int d^4x\, d^4y\, e^{ik_f\cdot y - k_i\cdot x} \langle \beta, out | \epsilon^* \cdot j_{em}(y) \epsilon \cdot j_{em}(x) | \alpha, in \rangle$$

- $j_{em}(x)$ 是相应的电磁流算符， Z_3 是电磁场的波函数重正化常数，由真空极化图的发散部分给出；
- 这写约化公式的另一重含义是：初末态光子总是耦合到相应的电磁流上。

4.4 波函数重整化常数Z的含义

- 自由实标量场的的 Feynman 传播子

$$D_F(x-y)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon}e^{-ip\cdot(x-y)}\equiv\langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle$$

- 自由的Dirac场的 Feynman 传播子

$$S_F(x-y)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{i(\gamma\cdot p+m)}{p^2-m^2+i\epsilon}e^{-ip\cdot(x-y)}\equiv\langle 0\big|T\psi(x)\bar{\psi}(y)\big|0\rangle$$

- 相互作用的理论中，场（海森堡场）的传播子又是什么样呢？
  以标量场为例来讨论全传播子 $\langle\Omega|T\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle$。

引入体系的哈密顿量 H 的本征态 $|\lambda,\vec{p}\rangle$，　$H\left|\lambda,\vec{0}\right\rangle=m_\lambda|\lambda,\vec{0}\rangle$

$\left[H,\hat{\vec{p}}\right]=0$： 能量和动量具有共同的本征态

$$H|\lambda,\vec{p}\rangle=E_\lambda(\vec{p})|\lambda,\vec{p}\rangle,\qquad E_\lambda(\vec{p})=\sqrt{m_\lambda^2+\vec{p}^2}$$

注意，真空态也是 H 和 $\hat{\vec{p}}$ 的本征态，$H|\Omega\rangle=\hat{\vec{p}}|\Omega\rangle=0$

正交完备集：

$$\boxed{|\Omega\rangle\langle\Omega| + \sum_{\lambda}\int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_\lambda(\vec{p})}\,|\lambda,\vec{p}\rangle\langle\lambda,\vec{p}| = \mathbf{I}}$$

当 $x^0 > y^0$ 时　（注意 $\langle\Omega|\phi(x)|\Omega\rangle = 0$）

$$\langle\Omega|\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle = \sum_{\lambda}\int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_\lambda(\vec{p})}\langle\Omega|\phi(x)|\lambda,\vec{p}\rangle\langle\lambda,\vec{p}|\phi(y)|\Omega\rangle$$

海森堡算符 $\phi(x)$：　$\phi(x) = e^{i\hat{p}\cdot x}\phi(0)e^{-i\hat{p}\cdot x}$

$$\langle\Omega|\phi(x)|\lambda,\vec{p}\rangle = \left\langle\Omega\middle|e^{i\hat{p}\cdot x}\phi(0)e^{-i\hat{p}\cdot x}\middle|\lambda,\vec{p}\right\rangle = \langle\Omega|\phi(0)|\lambda,\vec{p}\rangle e^{-ip\cdot x}$$

矩阵元 $\langle\Omega|\phi(0)|\lambda,\vec{p}\rangle$ 是洛伦兹boost不变的：

令 Λ 表示一个 $-\vec{p}$ 的洛伦兹boost，

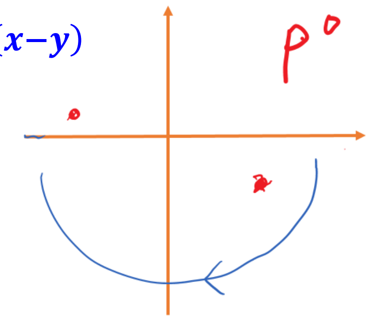
$$U(\Lambda)|\Omega\rangle = |\Omega\rangle,\qquad U(\Lambda)|\lambda,\vec{p}\rangle = \left|\lambda,\vec{0}\right\rangle,$$

$$U(\Lambda)\phi(0)U^{-1}(\Lambda) = \phi(0)$$

$$\langle\Omega|\phi(0)|\lambda,\vec{p}\rangle = \left\langle\Omega\middle|U^{-1}(\Lambda)U(\Lambda)\phi(0)U^{-1}(\Lambda)U(\Lambda)\middle|\lambda,\vec{p}\right\rangle = \langle\Omega|\phi(0)|\lambda,\vec{0}\rangle$$

$$\langle\Omega|\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle = \sum_\lambda \left|\left\langle\Omega|\phi(0)|\lambda,\vec{0}\right\rangle\right|^2 \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_\lambda(\vec{p})}e^{-ip\cdot(x-y)}\bigg|_{p^0=\sqrt{E_\lambda^2(\vec{p})+m_\lambda^2}}$$

$$= \sum_\lambda \left|\left\langle\Omega|\phi(0)|\lambda,\vec{0}\right\rangle\right|^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{i}{p^2-m_\lambda^2+i\epsilon}e^{-ip\cdot(x-y)}$$



当 $x^0 < y^0$ 时有相同的结果。

最终，我们得到

$$\langle\Omega|T\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle = \sum_\lambda \left|\left\langle\Omega|\phi(0)|\lambda,\vec{0}\right\rangle\right|^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{i}{p^2-m_\lambda^2+i\epsilon}e^{-ip\cdot(x-y)}$$

引入谱函数 $$\rho(M^2) = \sum_\lambda (2\pi)\delta(M^2-m_\lambda^2)\left|\left\langle\Omega|\phi(0)|\lambda,\vec{0}\right\rangle\right|^2$$

传播子的 Käll é n-Lehmann 谱表示

$$\boxed{\langle\Omega|T\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle = \int_0^\infty \frac{dM^2}{2\pi}\rho(M^2)D_F(x-y;M^2)}$$

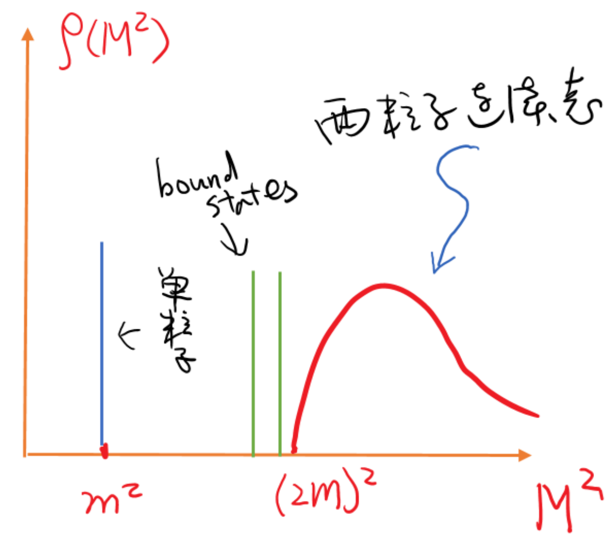
对于基本场 $\phi(x)$（没有内部结构），谱函数的典型形式为

$$\rho(M^2) = 2\pi\delta(M^2 - m^2)\cdot Z + \tilde{\rho}(M^2; M^2 \gtrsim 4m^2)$$

其中， $Z = \left|\left\langle\Omega|\phi(0)|1,\vec{0}\right\rangle\right|^2$ 称作场 $\phi(x)$ 的 （在壳）波函数重正化常数。

$$\langle\Omega|T\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle = \frac{iZ}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

$$+\int_{\sim 4m^2}^{\infty}\frac{dM^2}{2\pi}\tilde{\rho}(M^2)\frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon}$$



多出了一个因子 Z。它是该算符在真空态上产生一个质量为m的自由粒子的几率。对于自由场算符作用于相互作用真空，这个因子是1，不出现。但对于相互作用场算符，除了产生自由粒子，还可能产生多粒子态，所以不能等于1。

相互作用理论中，海森堡算符 $\phi(x)$ 即可以耦合到单粒子态，也可以耦合到多粒子束缚态、共振态、连续态或者称作散射态。两粒子束缚态会在两粒子阈附近（但略低于粒子阈），其它的态都在两粒子阈上，即 $M^2 \geq 4m^2$ 的区域（这种情况下的谱函数见示意图）。所以， $Z \neq 1$。

如果我们引入产生物理的单粒子态（质量为 m）场算符 $\phi_R(x)$，其归一化为

$$\langle\Omega|\phi_R(x)|1,\vec{p}\rangle = e^{-ip\cdot x}$$

则由于

$$\langle\Omega|\phi(x)|1,\vec{p}\rangle = Z^{1/2}e^{-ip\cdot x}$$

我们有

$$\phi(x) = Z^{1/2}\phi_R(x)$$

在后面的重正化理论讨论中，我们可以发现，$\phi(x)$ 就是所谓的“裸”的场算符，而 $\phi_R(x)$ 是重正化的场算符。

5 微扰论——格林函数的微扰计算

在LSZ约化公式中出现的是海森堡场（相互作用场）算符关联函数（格林函数），即它们的编时乘积在物理真空态之间的矩阵元：

$$G^{(n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \langle\Omega|T\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)|\Omega\rangle$$

对于相互有相互作用的理论，很难对它们进行直接的解析计算。格点场论(Lattice Field Theory)可以对它们进行数值模拟计算（采用路径积分量子化形式）。

但是，如果相互作用耦合常数比较小，相互作用Hamiltonian可以看作微扰项，则可以采用对相互作用项进行微扰展开。

格林函数在相互作用表象中（场是自由场，满足自由场运动方程）可以表示为 见Peskin& Schröder书4.2, p87.

$$\langle\Omega|T\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)|\Omega\rangle = \lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)} \frac{\left\langle 0\left|T\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\cdots\phi_I(x_n)e^{-i\int_{-T}^{T}H_I(t)dt}\right|0\right\rangle}{\left\langle 0\left|Te^{-i\int_{-T}^{T}H_I(t)dt}\right|0\right\rangle}$$

这是微扰论计算的出发点。

5.1 “有质量”光子和电子的相互作用理论

$J^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$
是守恒流

Lagrangian: $$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\mu^2}{2}A_\mu A^\mu + \bar{\psi}(i\gamma\cdot\partial - m)\psi - \boxed{e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu}$$

Hamiltonian :

对 $A_\mu(x)$ 引入正则动量（A_0的正则动量为零，不是正则变量）

$$\Pi^i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^0 A^i)} = F^{0i} = -E_i$$

由此可以得到相互作用哈密顿量 $\mathcal{H}_{int}$

$$\mathcal{H}_{int} = -\vec{J}\cdot\vec{A} - \frac{1}{\mu^2}J^0\nabla\cdot\vec{E} + \frac{1}{2\mu^2}\left(J^0\right)^2$$

在相互作用表象中，场服从自由场的运动方程，

$$\partial_\mu F_I^{\mu\nu} + \mu^2 A_I^\nu = 0 \;\Longrightarrow A_I^0 = -\frac{1}{\mu^2}\nabla\cdot\vec{E}_I$$ 、

代入到相互作用哈密顿量 $\mathcal{H}_{int}$，得到相互作用表象的 $\mathcal{H}_I$

$$\mathcal{H}_I = -\vec{J}_I\cdot\vec{A}_I + J_I^0 A_I^0 + \frac{1}{2\mu^2}\left(J^0\right)_I^2 = J_I^\mu A_{I,\mu} + \boxed{\frac{1}{2\mu^2}\left(J^0\right)_I^2}$$

非协变项

附录：相互作用表象中 $\mathcal{H}_I$ 的形式的导出

1. 在自由场情形，

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$$

$$= -\frac{1}{4}F_{\mu 0}F^{\mu 0} - \frac{1}{4}F_{\mu i}F^{\mu i}$$

$$= -\frac{1}{4}F_{i0}F^{i0} - \frac{1}{4}F_{0i}F^{0i} - \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij}$$

$$= -\frac{1}{2}F_{i0}F^{i0} - \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} = \frac{1}{2}\vec{\Pi}^2 - \frac{1}{2}\left(\nabla \times \vec{A}\right)^2$$

这样，

$$\mathcal{L}_\gamma = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\mu^2 A_\mu A^\mu = \frac{1}{2}\vec{\Pi}^2 - \frac{1}{2}\left(\nabla \times \vec{A}\right)^2 - \frac{1}{2}\mu^2\vec{A}^2 + \frac{1}{2}\mu^2 A_0^2$$

通过勒让德变换

$$\mathcal{H} = \vec{\Pi} \cdot \dot{\vec{A}} - \mathcal{L}, \qquad \vec{\Pi} \cdot \dot{\vec{A}} = \vec{\Pi} \cdot \left(F^{0i} - \nabla A_0\right) = \vec{\Pi}^2 - \vec{\Pi} \cdot \nabla A_0$$

有

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\vec{\Pi}^2 + \frac{1}{2}\left(\nabla \times \vec{A}\right)^2 + \frac{1}{2}\mu^2\vec{A}^2 - \frac{1}{2}\mu^2 A_0^2 - \vec{\Pi} \cdot \nabla A_0$$

根据场方程

$$\partial_\mu F^{\mu 0} + \mu^2 A^0 = \nabla_i F^{i0} + \mu^2 A^0 = 0 \;\Rightarrow A_0 = -\frac{1}{\mu^2}\nabla\cdot\vec{E} = \frac{1}{\mu^2}\nabla\cdot\vec{\Pi}$$

$$\vec{\Pi}\cdot\nabla A_0 = \frac{1}{\mu^2}\vec{\Pi}\cdot\nabla\left(\nabla\cdot\vec{\Pi}\right) = -\frac{1}{\mu^2}\left(\nabla\cdot\vec{\Pi}\right)^2 + \text{表面项}$$

$$-\frac{1}{2}\mu^2 A_0^2 - \vec{\Pi}\cdot\nabla A_0 = +\frac{1}{2}\mu^2 A_0^2$$

所以有

$$\mathcal{H}_\gamma = \frac{1}{2}\vec{\Pi}^2 + \frac{1}{2}\left(\nabla\times\vec{A}\right)^2 + \frac{1}{2}\mu^2\vec{A}^2 + \frac{1}{2}\mu^2 A_0^2 \geq 0$$

2. 考虑和电子场的守恒流耦合的情形

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\mu^2}{2}A_\mu A^\mu + \bar{\psi}(i\gamma\cdot\partial - m)\psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$$

$J^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ 是守恒流。$A_\mu(x)$ 的正则动量和自由情形相同；

对 ψ 引入正则动量 $P_\psi = i\psi^+$，相应的 $A_\mu(x)$ 经典运动方程为

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \mu^2 A^\nu = J^\nu \;\Longrightarrow A^0 = \frac{1}{\mu^2}(J^0 + \nabla\cdot\vec{\Pi})$$

这时，$\mathcal{H}_\gamma=\frac{1}{2}\vec{\Pi}^2+\frac{1}{2}\left(\nabla\times\vec{A}\right)^2+\frac{1}{2}\mu^2\vec{A}^2-\frac{1}{2}\mu^2A_0^2-\vec{\Pi}\cdot\nabla A^0$

$$\mathcal{H}_\psi=i\psi^+\partial_0\psi-\left[\bar{\psi}(i\gamma\cdot\partial-m)\psi+\vec{J}\cdot\vec{A}-J^0A^0\right]$$
$$=i\bar{\psi}\gamma^0\partial_0\psi-\bar{\psi}(i\gamma\cdot\partial-m)\psi-\vec{J}\cdot\vec{A}+J^0A^0$$
$$=\bar{\psi}(-i\vec{\gamma}\cdot\nabla+m)\psi-\vec{J}\cdot\vec{A}+J^0A^0$$

对 $\mathcal{H}=\mathcal{H}_\gamma+\mathcal{H}_\psi$ 进行重新组合，

$$\mathcal{H}=\mathcal{H}'_0+\mathcal{H}'_{int}$$
$$\mathcal{H}'_0=\frac{1}{2}\vec{\Pi}^2+\frac{1}{2}\left(\nabla\times\vec{A}\right)^2+\frac{1}{2}\mu^2\vec{A}^2+\bar{\psi}(-i\vec{\gamma}\cdot\nabla+m)\psi$$
$$\mathcal{H}'_{int}=-\vec{J}\cdot\vec{A}+J^0A^0-\frac{1}{2}\mu^2A_0^2-\vec{\Pi}\cdot\nabla A^0$$

利用 A_0 满足的经典方程 $A^0=\frac{1}{\mu^2}(J^0+\nabla\cdot\vec{\Pi})$，$\mathcal{H}'_{int}$ 可以重新整理为

$$\mathcal{H}'_{int}=-\vec{J}\cdot\vec{A}+\frac{1}{\mu^2}J^0\left(J^0+\nabla\cdot\vec{\Pi}\right)-\frac{1}{2\mu^2}\left(J^0+\nabla\cdot\vec{\Pi}\right)^2-\frac{1}{\mu^2}\vec{\Pi}\cdot\nabla(J^0+\nabla\cdot\Pi)$$
$$=-\vec{J}\cdot\vec{A}+\frac{1}{\mu^2}J^{02}+\frac{1}{\mu^2}J^0\nabla\cdot\vec{\Pi}-\frac{1}{2\mu^2}J^{02}-\frac{1}{\mu^2}J^0\nabla\cdot\vec{\Pi}-\frac{1}{2\mu^2}\left(\nabla\cdot\vec{\Pi}\right)^2$$
$$+\frac{1}{\mu^2}J^0\nabla\cdot\vec{\Pi}+\frac{1}{\mu^2}\left(\nabla\cdot\vec{\Pi}\right)^2$$
$$=-\vec{J}\cdot\vec{A}+\frac{1}{2\mu^2}J^{02}+\frac{1}{2\mu^2}\left(\nabla\cdot\vec{\Pi}\right)^2+\frac{1}{\mu^2}J^0\nabla\cdot\vec{\Pi}$$

相互作用表象的相互作用哈密顿量 $\mathcal{H}_I{}'$ 和 $\mathcal{H}'_{int}$ 具有相同的形式，但要将海森堡场算符替换为相互作用表象中的场算符 $A_I^\mu(x)$ 和 ψ_I

即

$$\mathcal{H}'_I = -\vec{J}_I \cdot \vec{A}_I + \frac{1}{2\mu^2} J_I^{02} + \frac{1}{2\mu^2}\left(\nabla \cdot \vec{\Pi}_I\right)^2 + \frac{1}{\mu^2} J_I^0 \nabla \cdot \vec{\Pi}_I$$

注意，相互作用表象中的场算符满足自由场方程，

$$A_I^0 = -\frac{1}{\mu^2}\nabla \cdot \vec{E}_I = \frac{1}{\mu^2}\nabla \cdot \vec{\Pi}_I$$

带入上面公式得到

$$\mathcal{H}'_I = -\vec{J}_I \cdot \vec{A}_I + \frac{1}{2\mu^2} J_I^{02} + \frac{1}{2}\mu^2 {A^0}^2 + \frac{1}{\mu^2} J_I^0 A_I^0 = J_I \cdot A_I + \frac{1}{2\mu^2} J_I^{02} + \frac{1}{2}\mu^2 {A^0}^2$$

由于 A_0 不是正则变量（正则动量为零），所以将$\frac{1}{2}\mu^2 {A^0}^2$ 吸收到自由哈密顿量中去，我们得到

$$\mathcal{H}_I = J_I \cdot A_I + \frac{1}{2\mu^2} J_I^{02}$$

$$\mathcal{H}_{int}' = -\vec{J}\cdot\vec{A} + J^0 A^0 - \frac{1}{2}\mu^2 A^{0^2} + \vec{\pi}\cdot\nabla A^0 \qquad A^0 = \frac{1}{\mu^2}(J^0 - \nabla\cdot\vec{\pi})$$

$$= -\vec{J}\cdot\vec{A} + J^0\frac{1}{\mu^2}(J^0 - \nabla\cdot\pi) - \frac{1}{2\mu^2}(J^0 - \nabla\cdot\pi)^2 + \frac{1}{\mu^2}(\pi\cdot\nabla(J^0 - \nabla\cdot\pi))$$

$$= -\vec{J}\cdot\vec{A} + \frac{1}{\mu^2}J^{0^2} - \frac{1}{\mu^2}J^0\nabla\cdot\pi - \frac{1}{2\mu^2}(J^{0^2} + (\nabla\cdot\pi)^2 - 2J^0\nabla\cdot\pi)$$

$$- \frac{1}{\mu^2}(\nabla\cdot\pi)(J^0 - \nabla\cdot\pi)$$

$$= -\vec{J}\cdot\vec{A} + \frac{1}{2\mu^2}J^{0^2} + \frac{1}{2\mu^2}(\nabla\cdot\pi)^2 - \frac{1}{\mu^2}(\nabla\cdot\pi)J^0 \rightarrow J_I^0 A_I^0$$

现在我们引入相互作用表象中 令 $A_I^0 = -\frac{1}{\mu^2}(\nabla\cdot\pi_I)$

则可以在相互作用表象将 $\mathcal{H}$ 分成两部分

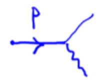
$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0(\vec{A}_I, \vec{\pi}_I; A_I^0) + \mathcal{H}_I(\vec{A}_I, \vec{\pi}_I, J_I; A_I^0)$$

$$H_I = J_\mu A_I^\mu + \frac{1}{2\mu^2}J_I^{0^2}, \quad \mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_0' + \frac{1}{2}\mu^2 A_I^{0^2}$$

显然 $A_I^{(0)}$ 满足自由场方程. $\partial_\mu F_I^{\mu 0} + \mu^2 A_I^0 = 0$.

5.2 “有质量”光子和电子的相互作用理论的 Feynman 规则

1. 外线粒子的费曼规则：

入射电子外线：$\psi|p,s\rangle =$ 

$= u_s(p)$

出射电子外线：$\langle p,s|\bar{\psi} =$ 
$= \bar{u}_s(p)$

入射正电子外线：$\bar{\psi}|p,s\rangle =$ 

$= \bar{v}_s(p)$

出射正电子外线：$\langle p,s|\psi =$ 

$= v_s(p)$

入射光子：

$= \epsilon^{(r)}(k)$

出射光子：

$= \epsilon^{(r)*}(k)$

2. 内线粒子的费曼规则：

电子传播子：

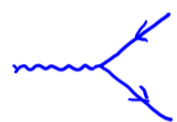
$$= \frac{i}{\gamma \cdot p - m + i\epsilon}$$

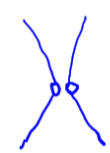
光子传播子：

$$= \boxed{\frac{-i}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{\mu^2}\right)} - \frac{i}{\mu^2}\delta_\mu^0 \delta_\nu^0$$

$$\boxed{\widetilde{G}_F^{\mu\nu}(k;\mu^2)}$$

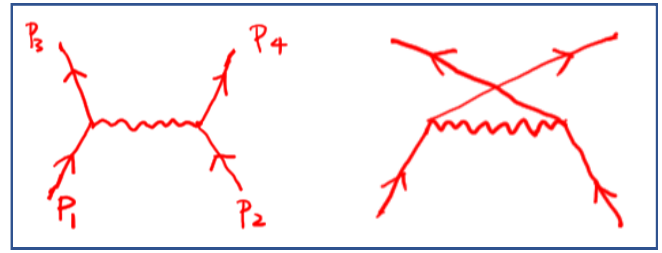
3. 相互作用顶点的费曼规则：

$e - \gamma - e$顶点： $-ie\gamma_\mu$ 
$-ie\gamma^\mu$

$4 - \text{fermion}$顶点： $-ie^2 \dfrac{1}{2\mu^2}\gamma^0 \otimes \gamma^0$ 
$= -ie^2 \dfrac{1}{2\mu^2}\gamma^0 \otimes \gamma^0$

4. 电子-电子散射（Coulomb 散射）

$$e^-(p_1)+e^-(p_2)\to e^-(p_3)+e^-(p_4)$$



在最低阶的微扰论中（$O(e^2)$），这个过程涉及四个费曼图，

一阶 $e-\gamma-e$ 顶点插入：

$$i\mathcal{M}^{e\gamma e}=(-ie)^2\,\bar u(p_3)\gamma_\mu u(p_1)\left(\tilde G_F^{\mu\nu}(p_3-p_1;\mu^2)-\frac{i}{\mu^2}\delta_0^\mu\delta_0^\nu\right)\bar u(p_4)\gamma_\nu u(p_2)$$

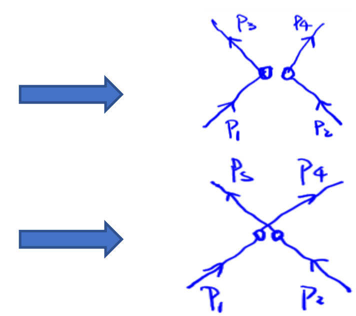
$$+(p_1\leftrightarrow p_2)$$

一阶4-ferimion顶点

$$i\mathcal{M}^{4-f}=-2ie^2\frac{1}{2\mu^2}\bar u(p_3)\gamma^0 u(p_1)\bar u(p_4)\gamma^0 u(p_2)-(p_1\leftrightarrow p_2)$$

$\langle p_3 p_4|\bar\psi\gamma^0\psi\bar\psi\gamma^0\psi|p_1 p_2\rangle$ $\langle p_3 p_4|\bar\psi\gamma^0\psi\bar\psi\gamma^0\psi|p_1 p_2\rangle$

$\langle p_3 p_4|\bar\psi\gamma^0\psi\bar\psi\gamma^0\psi|p_1 p_2\rangle$ $\langle p_3 p_4|\bar\psi\gamma^0\psi\bar\psi\gamma^0\psi|p_1 p_2\rangle$



总的振幅

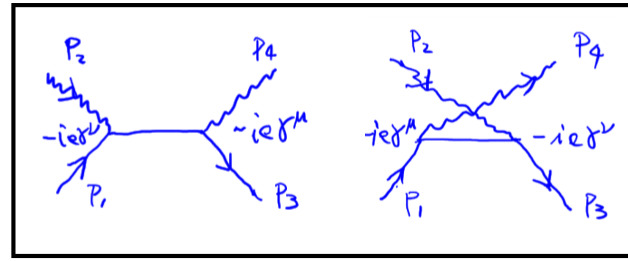
$$i\mathcal{M}=(-ie)^2\,\overline{u}(p_3)\gamma_\mu u(p_1)\widetilde{G}_F^{\mu\nu}(p_3-p_1;\mu^2)\overline{u}(p_4)\gamma_\nu u(p_3)+(p_1\leftrightarrow p_2)$$

$$=ie^2\,\frac{\overline{u}(p_3)\gamma_\mu u(p_1)\overline{u}(p_3)\gamma^\mu u(p_1)}{(p_3-p_1)^2-\mu^2}+(p_1\leftrightarrow p_2)$$

上式利用了（$\overline{u}(p)\gamma^\mu u(p')(p-p')_\mu=0$）（实际上也是 Ward Id. 的要求）。

- “光子”传播子中的非Lorentz协变项和非协变的四费米子相互作用项正好抵消。振幅是Lorentz不变的。
- 在$\mu^2\rightarrow 0$时，振幅和QED的结果完全相同。

5. 光子-电子散射（Compton 散射）



$$e^-(p_1)\gamma(p_2) \to e^-(p_3)\gamma(p_4)$$

树图阶的振幅

$$i\mathcal{M} \equiv i\epsilon_\mu^{(\lambda')*}(p_4)\epsilon_\nu^{(\lambda)}(p_2)\mathcal{M}^{\mu\nu}$$

$$i\mathcal{M}^{\mu\nu} = -ie^2\bar{u}(p_3)\left[\frac{\gamma^\mu(\gamma\cdot(p_3+p_4)+m)\gamma^\nu}{(p_3+p_4)^2-m^2} + \frac{\gamma^\nu(\gamma\cdot(p_1-p_4)+m)\gamma^\mu}{(p_1-p_4)^2-m^2}\right]u(p_1)$$

可以验证：

$$\boxed{p_{4\mu}\mathcal{M}^{\mu\nu} = p_{2\nu}\mathcal{M}^{\mu\nu} = 0}$$

这个结果直接来自于矢量粒子和守恒流的耦合，因为电子具有整体$U(1)$对称性，因此其电磁流是守恒流。

如果流不守恒，则没有这个结论。在这种情况下，当质量趋于零时，振幅是发散的，破坏幺正性。

在此基础上可以推出，非极化的散射振幅的模方（对所有初末态的极化求平均和求和）

$$\mathcal{M}^{\mu\nu}\mathcal{M}^{*\alpha\beta}\left(-g_{\mu\alpha}+\frac{p_{4\mu}p_{4\alpha}}{\mu^2}\right)\left(-g_{\nu\beta}+\frac{p_{2\nu}p_{2\beta}}{\mu^2}\right)=\mathcal{M}^{\mu\nu}\mathcal{M}^{*\alpha\beta}g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}$$

由此可以看出，对矢量粒子初模态螺旋度求和后的振幅平方表达式中，矢量粒子的纵向分量（正比于矢量粒子动量的项）不贡献。这等价于矢量粒子的极化求和可以做如下替换：

$$\sum_{i=1}^{3}\epsilon_\mu^{(i)*}(k)\epsilon_\nu^{(i)}(k)\rightarrow -g_{\mu\nu}$$

和QED中取Feynman规范时的光子极化求和类似。

证明 $p_{4\mu}\mathcal{M}^{\mu\nu} = p_{2\nu}\mathcal{M}^{\mu\nu} = 0$:

$$\bar{u}(p_3)\gamma^\mu(\gamma\cdot p_3 + m) = \bar{u}(p_3)(\gamma^\mu\gamma^\alpha p_{3\alpha} + m\gamma^\mu)$$
$$= \bar{u}(p_3)\big(2p_3^\mu - (p_3 - m)\gamma^\mu\big) = \bar{u}(p_3)\,2p_3^\mu$$

同理有

$$(\gamma\cdot p_1 + m)\gamma^\mu u(p_1) = 2p_1^\mu\, u(p_1)$$

另外，利用

$$(p_3+p_4)^2 - m^2 = 2p_3\cdot p_4 + \mu^2,$$
$$(p_1-p_4)^2 - m^2 = -2p_1\cdot p_4 + \mu^2$$

我们有

$$\mathcal{M}^{\mu\nu} = -e^2\bar{u}(p_3)\left[\frac{2p_3^\mu\gamma^\nu + \gamma^\mu(\gamma\cdot p_4)\gamma^\nu}{2p_3\cdot p_4 + \mu^2} + \frac{2p_1^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu(\gamma\cdot p_4)\gamma^\mu}{-2p_1\cdot p_4 + \mu^2}\right]u(p_1)$$

所以得到

$$p_{4\mu}\mathcal{M}^{\mu\nu} = -e^2\bar{u}(p_3)\left[\frac{2p_3\cdot p_4\gamma^\nu + (\gamma\cdot p_4)^2\gamma^\nu}{2p_3\cdot p_4 + \mu^2} + \frac{2p_1\cdot p_4\,\gamma^\nu - \gamma^\nu(\gamma\cdot p_4)^2}{-2p_1\cdot p_4 + \mu^2}\right]u(p_1)$$
$$= -e^2\,\bar{u}(p_3)(\gamma^\nu - \gamma^\nu)u(p_1) = 0$$

同理可证 $p_{2\nu}\mathcal{M}^{\mu\nu} = 0$。

6. 当 $\mu^2 \to 0$ 时，纵向分量退耦

不失一般性，我们选取出射的矢量粒子的动量为 $p_2^\mu = \left(\sqrt{k^2+\mu^2}, 0, 0, k\right)$，则其极化矢量可以选为

$$\epsilon^{(1,2)} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{i}{\sqrt{2}}, 0\right), \qquad \epsilon^{(3)} = \frac{1}{\mu}\left(k, 0, 0, \sqrt{k^2+\mu^2}\right)$$

利用Ward恒等式 $\quad p_{2\nu}\mathcal{M}^{\mu\nu} = 0$

$$\Longrightarrow \quad \sqrt{k^2+\mu^2}\,\mathcal{M}^{\mu 0} - k\mathcal{M}^{\mu 3} = 0 \;\Rightarrow\; \mathcal{M}^{\mu 0} = \frac{k}{\sqrt{k^2+\mu^2}}\mathcal{M}^{\mu 3}$$

则末态纵向极化的矢量粒子对振幅的贡献

$$\begin{aligned}
\epsilon_\nu^{(3)*}(p_2)\mathcal{M}^{\mu\nu} &= \frac{1}{\mu}\left(k\mathcal{M}^{\mu 0} - \sqrt{k^2+\mu^2}\,\mathcal{M}^{\mu 3}\right) \\
&= \frac{k}{\mu}\mathcal{M}^{\mu 3}\left(\left(1+\frac{\mu^2}{k^2}\right)^{-1/2} - \left(1+\frac{\mu^2}{k^2}\right)^{1/2}\right) \\
&= \frac{k}{\mu}\mathcal{M}^{\mu 3}\,O\!\left(\frac{\mu^2}{k^2}\right) \to 0\,, \quad \left(\frac{\mu}{k} \to 0\right)
\end{aligned}$$

对称性（守恒流）的存在对振幅给出了很强的限制。

7. 矢量粒子与非守恒流的相互作用（作业）

考虑如下模型： $\mathcal{L} \;=\; -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\mu^2 A_\mu A^\mu + \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi - e\bar{\psi}_L A\!\!\!/\psi_L$

1. 在树图阶计算：$e^+(p')e^-(p) \rightarrow \gamma(k,\epsilon_L)\gamma(k',\epsilon'_L)$总截面

当$s=(p+p')^2 >> m^2, \mu^2$时　总截面趋于正比于$e^4 m^2/\mu^4$的常数

2. 若考虑模型中加入新的标量粒子，与矢量粒子和费米子耦合如下

$$\mathcal{L}' \;=\; \frac{1}{2}\partial^\mu h\partial_\mu h - \frac{1}{2}m_h^2 h^2 + e^2 vhA_\mu A^\mu - \frac{\lambda_f}{\sqrt{2}}\bar{\psi}\psi h$$

导致总截面仍然在$s=(p+p')^2 >> m^2, \mu^2$时 正比于 $e^4\lambda_f^2 v^2/\mu^4$

适当的λ_f和v的值，使得总截面随s变化的行为为$1/s$

当矢量粒子和非守恒流耦合时，会导致危险的紫外行为，可能破坏幺正性；可以通过引入新的标量场和特定的耦合方式，来抵消危险的紫外行为。

6. 非阿贝尔规范场理论

非阿贝尔规范场 $A_\mu^a(x), a = 1, \cdots, N$

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c, \quad a, b, c = 1, \cdots, N$$

规范变换 $\psi(x) \to \psi'(x) = U(x)\psi(x) = \exp(i\varepsilon^a(x)T^a)\psi(x)$

$$A_\mu(x) \equiv A_\mu^a(x)T^a \to A'_\mu(x) = \frac{i}{g}UD_\mu U^\dagger$$

Lagrangian

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a,\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi$$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + f^{abc}A_\mu^b A_\nu^c$$

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a T^a = \partial_\mu - igA_\mu$$

规范场之间的自相互作用

非阿贝尔规范场论的特点：

- 量子化的困难
  - 正则量子化极其繁冗
  - Fadeev-Popov 路径积分量子化
- 渐近自由vs色禁闭
  - 高能时耦合变小，可以做微扰计算
  - 低能耦合变强，微扰失效
- 粒子物理唯象学的成功
  - 粒子物理标准模型：$SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$
  - GUT理论：规范对称群的扩大，例：$SU(5)$、$SO(10)$ GUT
  - 引力理论也为规范理论（存在定域的规范）；
  - 弦理论也为规范理论；

本课程的大致内容：

- 路径积分量子化
  路径积分、有效势、费曼规则、对称性等
- 非阿贝尔规范对称性及对称性自发破缺
  规范对称性、Goldstone定理、Higgs机制等
- 非阿贝尔规范理论的量子化
  正则量子化的困难、Faddeev-Popov量子化、BRST对称性、R_ξ规范
- 非阿贝尔规范理论的重整化及重整化群方法
  紫外发散、正规化、重整化手续、重整化群方程等
- 粒子物理标准模型（$SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$）
  量子色动力学、弱电统一理论等