Parton Distribution note

ChPT PDF relevant

作者：Thomas Young

组织：IHEP

时间：January 16, 2020

版本：1.00

ElegantLATEX Program

Stay sleepy, stay tired

目　　录

第 1 章 留数定理

对于多项式单宗量复变函数积分，总结起来:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{dz}{z-\alpha}=\begin{cases}0, & \alpha \text{ isn't included in l}\\ 1, & \alpha\text{is included in l}\end{cases}\\
&\frac{1}{2\pi i}\oint(z-\alpha)^n dz=0(n\neq -1)
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

因为原函数一个是多值函数 $\ln(z-\alpha)$，一个是单值函数 $(z-\alpha)^{n+1}/(n+1)$

柯西定理 (2.2.1) 指出，如被积函数 $f(z)$ 在回路 l 所围闭区域上是解析的，则回路积分 $\oint f(z)dz$ 等于 0.

现考虑回路 l 包围 $f(z)$ 的奇点的情形。

先设 l 只包围着 $f(z)$ 的一个孤立奇点 z_0，在以 z_0 为圆心而半径为零的圆环域上将 $f(z)$ 展为洛朗级数

$$
f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k(z-z-0)^k \tag{1.2}
$$

由柯西定理回路任意易形，洛朗级数除去 $k=-1$ 的一项之外全为 0，而 $k=-1$ 的一项的积分等于 $2\pi i$. 于是

$$
\oint_l f(z)dz=2\pi i a_{-1} \tag{1.3}
$$

洛朗级数的 $(z-z_0)^{-1}$ 项的系数因而具有特别重要的地位，专门起了名字，称为函数 $f(z)$ 在点 z_0 的**留数** (或残数), 通常记作 Res $f(z_0)$, 这样,

$$
\oint_l f(z)dz=2\pi i\,\mathrm{Res}\ f(z_0) \tag{1.4}
$$

如果 l 包围着 $f(z)$ 的 n 个孤立奇点 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 的情形. 做回路 $l_1,l_2,\cdots,l_n$ 分别包围 $b_1,b_2,\cdots,b_n$. 并使每个回路只包围一个奇点, 按照柯西定理,

$$
\oint_l f(z)dz=\oint_{l1}f(z)dz+\oint_{l2}f(z)dz+\cdots+\oint_{ln}f(z)dz \tag{1.5}
$$

于是得到,

$$\oint_l f(z)dz = 2\pi i[\text{Res}\, f(b_1) + \text{Res}\, f(b_2) + \cdots + \text{Res}\, f(b_n)] \tag{1.6}$$

定理 1.1 (留数定理) 设函数 $f(z)$ 在回路 l 所围区域 B 上除有限个孤立奇点 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 外解析, 在闭区域 $\bar{B}$ 上除 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 外连续, 则

$$\oint f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \text{Res}\, f(b_j) \tag{1.7}$$

留数定理将回路积分归结为被积函数在回路所围区域上各奇点的留数之和.

函数 $f(z)$ 在全平面上所有各点的留数之和为零. 这里说的所有各点包括无限远点和有限远的奇点.

1.1 留数定理-prepare

一般地, 在以奇点为圆心的圆环域上将函数展开为洛朗级数, 取它的负一次幂项的系数就行了. 对于极点, 可以不用做洛朗展开而直接求出留数.

设 z_0 是 $f(z)$ 的单极点. 洛朗展开应是

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots \tag{1.8}$$

这样,

$$\lim_{z \to z_0} [(z - z_0) f(z)] = \text{Res}\, f(z_0) \tag{1.9}$$

(1.9)既可用来计算函数 $f(z)$ 在单极点 z_0 的留数, 也可用来判断 z_0 是否为函数 $f(z)$ 的单极点.

若 $f(z)$ 可以表示为 $P(z)/Q(z)$ 的特殊形式, 其中 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 都在 z_0 点解析, z_0 是 $Q(z)$ 的一阶零点. $P(z_0) \neq 0$, 从而 z_0 是 $f(z)$ 的一阶极点, 则

$$\text{Res}\, f(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)} \tag{1.10}$$

上式最后一步应用了洛必达法则.

同理, 若 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶极点. 洛朗展开应是

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{a_{-(m-1)}}{(z - z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots \tag{1.11}$$

故有, 判断极点:

$$\lim_{z\to z_0}[(z-z_0)^m f(z)] = \text{非零有限值} \tag{1.12}$$

求留数:

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \lim_{z\to z_0}\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)] \tag{1.13}$$

用以上公式, 可以判断函数 $f(z)$ 的极点阶数, 并求出 $f(z)$ 在**极点的留数**

1.2 应用留数定理计算实变函数定积分

首先将实变函数定积分跟复变函数回路积分联系起来. 其要点如下:
定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的积分区间 $[a,b]$ 可以看作是复数平面上实轴上的一段 l_1, 于是, 或者利用自变数的变换把 l_1 变换为某个新的复数平面上的回路, 这样就可以应用留数定理了；
或者另外补上一段曲线 l_2，使 l_1 和 l_2 合成回路 l，l 包围着区域 B。将 $f(x)$ 解析延拓到闭区域 B（这个延拓往往只是把 $f(x)$ 改为 $f(z)$ 而已），并把它沿着 l 积分，

$$\oint f(z)dz = \int_{l_1} f(x)dx + \int_{l_2} f(z)dz \tag{1.14}$$

上式左边可以应用留数定理，右边第一个积分就是所求的定积分。如果右边第二个积分较易算出（往往证明为零）或可用第一个积分表出，问题就算解决了。

下面介绍几种类型的实变定积分。

类型一 $\int_0^{2\pi} R(\cos x,\sin x)dx$. 被积函数是三角函数的有理式；积分区间是 $[0,2\pi]$.

作自变数代换

$$z = e^{ix} \tag{1.15}$$

当实变数 x 从 0 变到 2π 时，复变数 $z=e^{ix}$ 从 $z=1$ 出发沿单位圆 $|z|=1$ 逆时针走一圈又回到 $z=1$，实变定积分化为复变回路积分，就可以应用留数定理了。至于实变定积分里的 $\cos x$ 和 $\sin x$，则按(1.15)而做如下变换

$$\cos x = \frac{1}{2}(z+z^{-1}),\quad \sin x = \frac{1}{2i}(z-z^{-1}),\quad dx = \frac{1}{iz}dz \tag{1.16}$$

于是，原积分化为

$$I = \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z+z^{-1}}{2},\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)\frac{dz}{iz} \tag{1.17}$$

类型二 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$. 积分区间是 $(-\infty,+\infty)$；

复变函数 $f(z)$ 在实轴上没有奇点，在上半平面除有限个奇点外是解析的；当 z 在上半平面及实轴上 $\to\infty$ 时，$zf(z)$ 一致地 $\to 0$。

如果 $f(x)$ 是有理分式 $\phi(x)/\psi(x)$，上述条件意味着 $\psi(x)$ 没有实的零点，$\psi(x)$ 的次数至少高于 $\phi(x)$ 两次

这一积分通常理解为下列极限：

$$I=\lim_{R_1\to\infty,R2\to\infty}\int_{-R_1}^{R^2}f(x)dx \tag{1.18}$$

若极限存在的话，这一极限便称为反常积分 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$ 的值。而当 $R_1=R_2\to\infty$ 时极限存在的话，该极限便称为积分 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$ 的**主值**，记作

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}f(x)dx \tag{1.19}$$

本类型积分要计算的是积分主值。考虑半圆形回路 l

$$\oint f(z)dz=\int_{-R}^{R}f(x)dx+\int_{C_R}f(z)dz \tag{1.20}$$

根据留数定理，上式即

$$2\pi i f(z)\text{在}l\text{所围半圆内各奇点的留数之和}=\int_{-R}^{R}f(x)dx+\int_{C_R}f(z)dz \tag{1.21}$$

令 $R\to\infty$。上式左边趋于 $2\pi i f(z)$在l所围半圆内各奇点的留数之和，右边第一个积分趋于所求的定积分 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$，第二个定积分可证明是趋于零的：

$$|\int_{C_R}f(z)dz|=|\int_{C_R}zf(z)\frac{dz}{z}|\le\int_{C_R}|zf(z)|\frac{|dz|}{|z|}\quad\le\max|zf(z)|\frac{\pi R}{R}=\pi\cdot\max|zf(z)|\to 0 \tag{1.22}$$

式中 $\max|zf(z)|$ 是 $|zf(z)|$ 在 C_R 上的最大值。于是得到结果

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=2\pi i f(z)\text{在上半平面所有奇点的留数之和} \tag{1.23}$$

类型三 $\int_0^\infty F(x)\cos mxdx$, $\int_0^\infty G(x)\sin mxdx$. 积分区间是 $[0,+\infty]$；偶函数 $F(z)$ 和奇函数 $G(z)$ 在实轴上没有奇点，在上半平面除有限个奇点外是解析的；

当 z 在上半平面或实轴上 $\to\infty$ 时，$F(z)$ 及 $G(z)$ 一致地 $\to 0$

首先，将所求积分的形式变换一下，

$$\begin{aligned}\int_0^\infty F(x)\cos mxdx&=\int_0^\infty F(x)\frac{1}{2}(e^{imx}+e^{-imx})dx\\&=\frac{1}{2}\int_0^\infty F(x)e^{imx}dx+\frac{1}{2}\int_0^\infty F(x)e^{-imx}dx\end{aligned} \tag{1.24}$$

在右边第二个积分中做代换 $x=-y$，并考虑到 $F(x)$ 是偶函数，得

$$\int_0^\infty F(x)\cos mxdx=\frac{1}{2}\int_0^\infty F(x)e^{imx}dx-\frac{1}{2}\int_0^{-\infty}F(y)e^{imy}dy \tag{1.25}$$

将右边第二项积分的积分变数再改成 x，则

$$\int_0^\infty F(x)\cos mxdx=\frac{1}{2}\int_0^\infty F(x)e^{imx}dx+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}F(x)e^{imx}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{imx}dx \tag{1.26}$$

同理，

$$\int_0^\infty G(x)\sin mx dx = \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty} G(x)e^{imx}dx \tag{1.27}$$

(1.26)and (1.27)右边积分的计算，需要用到约当引理。

1.2.1 约当引理

如 m 为证书，C_R 是以原点为圆心而位于上半平面的半圆周，又设当 z 在上半平面及实轴上 $\to\infty$ 时 $F(z)$ 一致地 $\to 0$，则

$$\lim_{R\to infty}\int_{C_R} F(z)e^{imz}dz = 0 \tag{1.28}$$

证明：

$$\begin{aligned}|\int_{C_R} F(z)e^{imz}dz| = |\int_{C_R} F(z)e^{imx-my}dz|& \\ &= |\int_0^\pi F(Re^{i\phi})e^{-mR\sin\phi}e^{imR\cos\phi}Re^{i\phi}id\phi| \\ &\le \max|F(z)|\cdot\int_0^\pi e^{-mR\sin\phi}Rd\phi\end{aligned} \tag{1.29}$$

当 z 在上半平面或实轴上 $\to\infty$ 时，$F(z)$ 一致地 $\to 0$，所以 $\max|F(z)|\to 0$，从而只需证明

$$\begin{aligned}&\lim_{R\to\infty}\int_0^\pi e^{-mR\sin\phi}Rd\phi \\ i.e.:\ &2\lim_{R\to\infty}\int_0^\pi e^{-mR\sin\phi}Rd\phi\end{aligned} \tag{1.30}$$

是有界的。

在 $0\le\phi\le\frac{\pi}{2}$ 范围内，$0\le 2\phi/\pi\le\sin\phi$，

$$\int_0^{\pi/2} e^{-mR\sin\phi}Rd\phi \le \int_0^{\pi/2} e^{-2mR\phi/\pi}Rd\phi = \frac{\pi}{2m}(1-e^{-mR}) \tag{1.31}$$

于 $R\to\infty$，上式趋于有限值，这就证明了约当引理。

如果 m 是负数，则约当引理应为

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C'_R} F(z)e^{imz}dz = 0 \tag{1.32}$$

C'_R 是 C_R 对于实轴的映像。

对于类型二，计算(1.26)and (1.27)右边积分的主值，利用留数定理及约当引理得到，

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty F(x)\cos mx dx = \pi i \text{ all Res of } F(z)e^{imz} \text{ in the above half plane} \\ &\int_0^\infty G(x)\sin mx dx = \pi \text{ all Res of } G(z)e^{imz} \text{ in the above half plane}\end{aligned} \tag{1.33}$$

类型四 **实轴上有单极点的情形**

考虑积分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$，被积函数 $f(x)$ 在实轴上有单极点 $z=\alpha$，除此之外，$f(x)$ 满足类型二或类型三（$f(z)$ 应被理解为 $f(z)e^{imz}$ 或 $G(z)e^{imz}$）的条件。由于存在这个奇点，我们以 $z=\alpha$ 为圆心，以充分小的正数 ϵ 为半径作半圆弧绕过奇点 α 构成积分回路。于是，

$$\oint_l f(z)dz = \int_{-R}^{\alpha-\epsilon} f(x)x + \int_{\alpha+\epsilon}^{R} f(x)dx \quad \int_{C_R} f(z)dz + \int_{C_\epsilon} f(z)dz \tag{1.34}$$

取极限 $R\to\infty$, $\epsilon\to 0$，(1.34)左边积分值等于 $2\pi i\sum_{\text{above half}}$. 右边第一、第二项之和即为所求积分。按类型二或类型三的条件，第三项为零。对于第四项，计算如下：将 $f(z)$ 在 $z=\alpha$ 的邻域展开为洛朗级数，由于 $z=\alpha$ 是 $f(z)$ 的单极点，于是，

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-\alpha} + P(z-\alpha) \tag{1.35}$$

其中 $P(z-\alpha)$ 为级数的解析部分，它在 C_ϵ 上连续且有界，因此，

$$|\int_{C_\epsilon} P(z-\alpha)dz| \le \max|P(z-\alpha)||\int_{C_\epsilon} ||dz| = \pi\epsilon\cdot\max|P(z-\alpha)|, \tag{1.36}$$

所以，

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{C_\epsilon} P(z-\alpha)dz = 0 \tag{1.37}$$

而

$$\begin{aligned}\int_{C_\epsilon}\frac{a_{-1}}{z-\alpha}dz &= \int_{C_\epsilon}\frac{a_{-1}}{z-\alpha}d(z-\alpha)\\ &= \int_{\pi}^{0}\frac{a_{-1}}{\epsilon e^{i\phi}}\epsilon e^{i\phi} i d\phi = -\pi i a_{-1} = -\pi i \,\mathrm{Res}\, f(\alpha)\end{aligned} \tag{1.38}$$

于是，由(1.34)取极限 $R\to\infty, \epsilon\to 0$，得

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{\text{the above half}} \mathrm{Res}\, f(z) + \pi i\,\mathrm{Res}\, f(\alpha) \tag{1.39}$$

若实轴上存在有限个单极点，则类似地可以得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{\text{the above half}} \mathrm{Res}\, f(z) + \pi i \sum_{\text{in the real axis}} \mathrm{Res}\, f(z) \tag{1.40}$$

从以上计算看到，实轴上有奇点时，仍归结为留数的计算，但需注意以下两点：

(a). C_ϵ 不是闭合曲线，$f(z)$ 洛朗展开的解析部分的积分值只是由于 $\epsilon\to 0$ 才趋近于零

(b). 实轴上的奇点只能是单极点，不能是二阶或者二阶以上的极点，更不能是本性奇点，否则当 $\epsilon\to 0$ 时，积分 $\int_{C_\epsilon}$ 之值将趋于 ∞（极点情形）或不存在（本性奇点情形）。

1.3 色散关系

对于在上半平面处处解析的函数 $f(z)$，如果当 $z\to\infty$ 时，$f(z)$ 一致地 $\to 0$ $(0\le Arg\ z\le\pi)$，α 为一实数，则按照(1.39)，

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-\alpha}dx=\pi i\cdot \text{Res of }\frac{f(z)}{z-\alpha}=\pi i\ f(\alpha) \tag{1.41}$$

分别写出实部和虚部

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} f(\alpha)&=\frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Im} f(x)}{x-\alpha}dx\\ \operatorname{Im} f(\alpha)&=-\frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Re} f(x)}{x-\alpha}dx\end{aligned} \tag{1.42}$$

这一对关系在数学上称之为希尔伯特变换，在物理上称为色散关系。

第 2 章 Light Cone relevant

定义 2.1 (光锥动量) 在光锥坐标中，动量的各分量定义为：

$$
\begin{aligned}
k^{\pm} = k_0 \pm k_3, \quad k_{\perp}^2 = k_1^2 + k_2^2 \\
k^2 = k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2 = k^+ k^- - k_{\perp}^2, \\
p^+ p^- = M^2, \quad p_{\perp}^2 = 0.
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

$k_{\perp}$: 垂直方向的动量，在垂直面上可以分解成两个方向的投影，把这个矢量记作 $\vec{k_{\perp}}$，其模方为 $k_{\perp}^2$

上式最后一行中我们假设核子在 z 方向快速运动，因此 $p_{\perp}^2 = 0$

定义 2.2 (光锥动量) 符号约定: 介子和重子传播子因子 $D_{\phi}(k)$ 和 $D_B(k)$ 定义为：

$$
\begin{aligned}
D_{\phi}(k) &= k^2 - {m_{\phi}}^2 + i\epsilon = k^+ k^- - k_{\perp}^2 - {m_{\phi}}^2 + i\epsilon = k^+ k^- - \Omega_{\phi} + i\epsilon, \\
D_B(p-k) &= (p-k)^2 - {m_B}^2 + i\epsilon = (p-k)^+ (p-k)^- - k_{\perp}^2 - {m_B}^2 + i\epsilon \\
&= (p-k)^+ (p-k)^- - \Omega_B + i\epsilon \\
\Omega_{\phi} &= k_{\perp}^2 + {m_{\phi}}^2 \geq 0 \\
\Omega_B &= k_{\perp}^2 + {m_B}^2 \geq 0
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

定义 2.3 (光锥动量) 光锥积分：如 (3.33) 式所示，被积函数化简后变为 $\frac{1}{D_{\phi}^n D_B^m}$($n$ 和 m 为自然数) 类型的积分。此类积分可通过计算它们的留数求解：

$$
\begin{aligned}
\int dk^- \frac{1}{D_{\phi} D_B} &= \frac{-2\pi i}{D_{\phi B} p^+ \bar{y}} \\
\int dk^- \frac{1}{D_{\phi}^2 D_B} &= \frac{\partial}{\partial m_{\phi}^2} \int dk^- \frac{1}{D_{\phi} D_B} = \frac{-2\pi i}{D_{\phi B}^2 p^+ \bar{y}} \\
\int dk^- \frac{1}{D_{\phi} D_B^2} &= \frac{\partial}{\partial M_B^2} \int dk^- \frac{1}{D_{\phi} D_B} = \frac{-2\pi i \ y}{D_{\phi B}^2 \ p^+ \ \bar{y}^2} \\
D_{\phi B} &= -\left(\frac{k_{\perp}^2 + y M_B^2 + (1-y) m_{\phi}^2 - y(1-y) M^2}{1-y} \right) \\
\bar{y} &= 1 - y
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

作为一个例子，演示第一个积分的计算过程，单极点位于 $k^- \to \frac{\Omega_{\phi} - i\epsilon}{k^+}$ and $k^- \to p^- - \left(\frac{\Omega_B - i\epsilon}{p^+ - k^+} \right)$ 第一个极点位于下半平面，第二个极点位于上半平面。第一个极点的表达式更简单一些。根据留数定理：

$$\begin{aligned}
&\int dk^- \frac{1}{D_\phi D_B} = -2\pi i \ \text{Res}\left[\frac{1}{D_\phi D_B}\right]_{\text{lower half plane}} \\
&= -2\pi i \lim_{k^-\to\frac{\Omega_\phi}{k^+}} \frac{k^- - \frac{\Omega_\phi}{k^+}}{\left(k^+k^- - \Omega_\phi + i\epsilon\right)\left[\left(p^+ - k^+\right)\left(p^- - k^-\right) - \Omega_B + i\epsilon\right]} \\
&= -2\pi i \lim_{k^-\to\frac{\Omega_\phi}{k^+}} \frac{k^- - \frac{\Omega_\phi}{k^+}}{\left(p^+ - k^+\right)k^+\left(k^- - \frac{\Omega_\phi}{k^+} + \frac{i\epsilon}{k^+}\right)\left[\left(p^- - k^-\right) - \frac{\Omega_B}{p^+-k^+} + \frac{i\epsilon}{p^+-k^+}\right]} \\
&= \frac{-2\pi i}{\left(p^+ - k^+\right)k^+\left[\left(p^- - \frac{\Omega_\phi}{k^+}\right) - \frac{\Omega_B}{p^+-k^+}\right]} \\
&= \frac{2\pi i}{p^+\left[k_\perp^2 + (1-y)m_\phi^2 + y^2M_B^2\right]} \\
&= \frac{-2\pi i}{D_{\phi B}\,p^+\bar{y}} \\
D_{\phi B} &= -\left(\frac{k_\perp^2 + yM_B^2 + (1-y)m_\phi^2 - y(1-y)M^2}{1-y}\right) \\
&\text{if set } M = M_B, \text{ then } D_{\phi B} = -\left(\frac{k_\perp^2 + (1-y)m_\phi^2 + y^2M_B^2}{1-y}\right)
\end{aligned} \tag{2.4}$$

δ 函数项的积分：$\frac{1}{D_\phi^n}$ 和 $\frac{K^+k^-}{D_\phi^n}$(n 为自然数) 类型的积分由下式给出:

$$\begin{aligned}
\int dk^- \frac{1}{D_\phi} &= 2\pi i \log\left(\frac{\Omega_\phi}{\mu^2}\right)\frac{\delta(y)}{p^+}, \\
\int dk^- \frac{1}{D_\phi^2} &= \frac{\partial}{\partial\Omega_\phi}\int dk^- \frac{1}{D_\phi} = \frac{2\pi i}{p^+\Omega_\phi}\delta(y) \\
\int dk^- \frac{k^+k^-}{D_\phi} &= 2\pi i\,\delta(y)\frac{\Omega_\phi}{p^+}\left[\log\left(\frac{\Omega_\phi}{\mu^2}\right) - 1\right] \\
\int dk^- \frac{k^+k^-}{D_\phi^2} &= \frac{\partial}{\partial\Omega_\phi}\int dk^- \frac{k^+k^-}{D_\phi} = 2\pi i\ \log\left(\frac{\Omega_\phi}{\mu^2}\right)\frac{\delta(y)}{p^+}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

这一部分的公式推导，见同文件夹下的 <parton.1.nb>

第 3 章 单举与遍举

reference: What's the difference between inclusive and exclusive decays?

3.0.1 An experimental take

Exclusive implies that you have measured the energy and momenta of all the products (well, with an exception I'll discuss below).

Inclusive means that you may have left some of the products unmeasured.

This applies to scattering processes as well as decays.

Some things to note:

Exclusive measurements allow you to nail down(确定，明确；用钉钉住) one, well defined physics process,
while inclusive measurements may tell you about a collection of processes.

It is generally difficult to measure neutral particles, If there are more than a couple of products, it begins to require a lot of instrumentation to reliably collect them all and (crucially) to know how well you have done so.

In the process you are asking about, the neutrino is necessarily unobserved, rendering the measurement inclusive,
further an **X** in the final state is often used to indicate unmeasured and unspecified stuff (i.e. it means the measurement is inclusive by design).
Here unspecified includes case, in high acceptance instruments, where you consider all events with the specified products: those for which we know **X** is empty, those for which **X** is non-empty and well characterized, and those for which **X** is ill-characterized.

3.0.2 Theoretical view

I'm less sure of how theorist use these terms, but I believe there is a parallel. Something like:
exclusive means one and only one process, while **inclusive** means all processes that include the specified products.

3.0.3 Convergence of theory and experiment

Of course, we haven't really learned anything until we get theory and experiment together, which is sometimes traumatic(痛苦的；极不愉快的) for both communities.

Still exclusive measurements and calculations are clearly talking about the same thing, and inclusivity can be made to agree, with some care in building the experiment and assembling the theoretical results.

3.0.4 Experimenters cheating on exclusivity

Sometimes in nuclear physics we talk about scattering measurements as exclusive when there is an unmeasured, heavy, recoiling nucleus involved.
The assumption being that that it carries a small fraction of the total energy and momentum involved and can be neglected, though there is some risk from this if the nucleus is left in a highly excited state.

In particular my dissertation(专题论文; 学位论文) project was on $A(e,e'p)$ reaction
(elastic scattering of protons out of a stationary nuclear target where the beam was characterized and both the proton and outgoing electron were observed),
and we assumed that the remnant(残余部份；剩余部份) nucleus was left largely undisturbed and recoiling with a momentum opposite the Fermi motion of the target proton.

第 4 章 引言-深度非弹散射

深度非弹性散射解面参数化为：

$$\frac{d^2\sigma}{dE'd\Omega} = \frac{a\alpha^2}{q^4}[\frac{F_2}{\nu}\cos^2\frac{\theta^2}{2} + \frac{F_1}{M}\sin^2\frac{\theta^2}{2}] \tag{4.1}$$

In which, $Q^2 = -q^2$, $\alpha^2 \equiv \frac{e^2}{4\pi}$, $\nu = E' - E$, and, 重新标度的变量：$x = Q^2/2M\nu$。

F_1 和 F_2 是核子的电磁结构函数，它们是 x 和 Q^2 的函数，

在深度非弹性散射中，如果 ν 和 Q^2 非常大，结构函数 F_1 和 F_2 不再同时是 ν 和 Q^2 的函数，而是 x 的函数，这时结构函数可参数化为

$$F_2(x) = \sum e_q^2[q(x) + \bar{q}(x)], \quad F_1(x) = 2xF_2(x) \tag{4.2}$$

In which, e_q is the charge of partons, $q(x)$ is the unpolarized distribution function of partons.

for nucleons:

$$\begin{aligned} F_2^p(x) &= \frac{4}{9}[u_p(x) + \bar{u}_p(x)] + \frac{1}{9}[d_p(x) + \bar{d}_p(x)] + \frac{1}{9}[s_p(x) + \bar{s}_p(x)] + \ldots \\ F_2^n(x) &= \frac{4}{9}[u_n(x) + \bar{u}_n(x)] + \frac{1}{9}[d_n(x) + \bar{d}_n(x)] + \frac{1}{9}[s_n(x) + \bar{s}_n(x)] \end{aligned} \tag{4.3}$$

in which, $q(x)$ and $\bar{q}(x)$ 分别代表正反夸克分布函数。

因为 u, d, s 夸克质量与非弹性散射能量相比小得多，假设胶子分裂成 $u, \bar{u}$ 夸克和 $d, \bar{d}$ 夸克的概率相等。如果核子海夸克满足同位旋对称性即 $\bar{d}_p(x) = \bar{u}_p(x)$，?? 质子和中子的结构函数，$F_2^p(x)$ 和 ${}^n_2(x)$ 应满足 $GottFried$ 求和规则：

$$S_G = \int_0^1 \frac{dx}{x}[F_p^2(x) - F_n^2(x) = \frac{1}{3}] \tag{4.4}$$

in which，我们假设核子奇异海夸克分布满足 $s_n(x) = s_p(x)$.

但是 NMC 实验返现 $S_G = 0235 \pm 0.026 (Q^2 = 4\text{GeV}^2)$ 这说明核子夸克分布对称性也许被破坏 $\int_0^1 dx[\bar{d}_p - \bar{u}_p = 0] \neq 0$??

另一个实验依据是 Paschos-Wolfenstein 关系

$$R_N^- = \frac{\sigma_{NC}^{\nu N} - \sigma_{NC}^{\bar{\nu}N}}{\sigma_{CC}^{\nu N} - \sigma_{CC}^{\bar{\nu}N}} = R^- - \delta R_S^- \tag{4.5}$$

in which, $R^- = \frac{1}{2} - \sin^2(\theta_W)$ 是原来的奇异夸克部分，$\delta R_S^- = [1 - \frac{7}{3}\sin^2(\theta_W)]\frac{S^-}{S^- + Q_\nu}$ 是奇异

夸克对称性破缺部分。$S^{-} = \int dxx[s - \bar{s}]$, $Q_v = \int dxx[u_v + d_v]$ in which, the subscript v refers to "valence"

根据他们的实验结果，核子夸克海里面的奇异夸克对核子结构有一定的贡献。

随着实验数据的丰富，人们发现了更多的核子海中对称性破缺现象，比如极化的味道对称性破缺 $\Delta\bar{d} - \Delta\bar{u}$ 和粲夸克对称性破缺。虽然这种效应的贡献不大，但它体现出关于核子海夸克分布的更多信息。

可以肯定的是，这种效应在 QCD 框架下无法得到解释，核子海中的味道对称性破缺跟 QCD 微扰演化无关。核子海夸克可以看成来自于胶子分裂成正反海夸克对，此过程满足 CP 对称性，因此不会出现味道对称性和奇异夸克对称性破缺现象。

那么最有可能的是，味道对称性破缺和奇异夸克对称性破缺跟核子束缚态的非微扰机制有关。随着能量的增大，胶子分裂成正反夸克对的过程仍然满足味道对称性，但最初的对称性破缺得以保留。

如泡利 (Pauli) 阻碍模型。根据夸克模型，质子包含两个 u_v 和一个 d_v，而且受泡利不相容原理的限制，在 QCD 演化过程中产生的海夸克对 $\bar{u}u$ 的个数少于海夸克对 $\bar{d}d$ 的个数，因而体现出味道对称性破缺。但是泡利阻碍模型给出的核子味道对称性 $\int_0^1[\bar{d}_p(x) - \bar{u}_p(x)]$ 无法解释全部实验数据。

另一方面，介子云 (Meson cloud) 在深度非弹性散射过程中的作用不可忽略，尤其在核子的长距离结构中，它的作用更为重要。介子云模型的主要观点是，核子外部结构由赝标量介子云组成，因而对散射过程有贡献。介子云模型成功地解释了核子味道对称性破缺，介子云模型还表明，手征对称性破缺应该也可以在其他种类的夸克分布中发现。其中一个重要的问题是如何建立夸克分布的 Mellin 矩与 QCD 的关系。

正如 [Phys.Rev.Lett.85,2892(2000).] 所发现，可以从手征微扰理论得到非单态夸克分布的领头阶非解析项 (LNA)，它跟 QCD 具有相同的手征对称性 [22–24]。格点 QCD 证明了，当 介子质量很大的时候，夸克分布的 Mellin 矩和其他观测量都能拟合到物理点。此外，格点 QCD 还证实了 QCD 红外端的行为直接导致不为零的 $\bar{d} - \bar{u}$。

在不同的模型中，各种费曼图对领头阶非解析项的贡献独立存在，而且依赖于红外端行为。但是，在计算完全振幅的时候，需要选取具体的正规化方案来处理紫外发散。各文献采用了不同的正规化方案，比如横向动量锐截断、Pauli-Villars 正规化和维数正规化以及有效形状因子方法。有效形状因子方法考虑强子的有限大小和非定域性，其他的方法把强子看成点粒子。

在非协变正规化中，如果正规化因子是三维动量的函数，则电荷是守恒的，因为电荷守恒与守恒流的时间分量有关。

另一方面，协变计算中，采用协变（相对论性）的正规化因子，将导致电荷守恒明显破缺。理论上这些问题促使我们，在定域规范不变的拉氏量中引入非定域相互作用，来解决电荷守恒被破坏的问题。

构造非定域拉氏量的过程见于 [J.Terning,Phys.Rev.D44,887(1991).]。

σ 介子的特性，由规范不变的相对论性非定域夸克模型体现。非定域拉氏量中规范链接算符的出现，保证了相互作用的规范不变性，具体表现在产生了额外的费曼图。考虑这些额外费曼图时，介子圈图对质子与中子电荷的总贡献完全抵消掉。额外费曼图使得核子奇异数为零。

非定域模型的构造过程更加自洽，并满足电荷守恒与 Ward 恒等式。与 Pauli-Villars 正规化不同的是，非定域正规化跟定域手征拉氏量及其对称性有关，因此需要回顾手征对称性和手征拉氏量。

我们的计算包括 SU(3) 八重态和十重态重子贡献，通过选取一个满足洛伦兹不变性和规范不变的正规化因子，使得圈图贡献收敛。除此之外，为了更直观的解释不同正规化方法之间的区别，及其所限制的物理量之间的差别，我们还会讨论用 Pauli-Villars 正规化得到的的 SU(3) 八重态分裂函数，及其对核子奇异夸克对称性破缺的贡献。

本文结构如下：

第二章 手征对称性和手征微扰理论的构造过程，非定域拉氏量的基本思想和构造过程

第三章 非定域和 Pauli-Villars 正规化中，质子 $\rightarrow$ 重子 + 赝标量介子，的分裂函数 (包括八重态和十重态)

第四章 推导中间态介子和重子夸克分布，对核子奇异夸克分布进行数值计算

第五章 总结理论计算结果

第 5 章 第二章-非定域手征微扰理

我们需要构造出一个即满足规范不变性又能使得圈图收敛的非定域手征拉氏量。为了更好的理解从定域手征拉氏量过度到非定域拉氏量的过程，我们首先回顾定域手征对称性以及手征拉氏量。

5.1 手征对称性与手征拉氏量

胶子场是非对易的规范场，因此 QCD 具有渐进自由的特性，即 QCD 耦合常数随能量的增大而减少，因此在高能区域内可以做微扰展开。但在低能区域微扰 QCD 无法使用，比如 QCD 无法描写静止核子的特点，因为核物理的研究能标远小于 QCD 能标。随着能量减小 QCD 原有的自由（胶子和夸克）被冻结并且新的自由度（强子）出现，但是新出现的强子态的属性跟原有的对称性破缺有关。

另一方面已知的强子谱展示一些有趣的特征，比如除了赝标量介子之外，其他基态强子的质量基本都在 1GeV 左右。这暗示着赝标量介子产生机制与对称性的关系。我们从无质量的 QCD 拉氏量入手讨论手征对称性与手征拉氏量。三代夸克根据它们的质量可分为轻夸克和重夸克，因为它们的质量满足以下关系

$$m_u, m_d, m_s \ll 1\text{GeV} \ll m_c, m_b, m_t \tag{5.1}$$

当能量低于 1GeV 时，重夸克 (c,b,t) 可视为静止，轻夸克 (u,d,s) 因而成为 QCD 拉氏量的有效自由度，因此我们用三个轻夸克拉氏量代替所有夸克拉氏量，另外轻夸克质量远远小于 1GeV，因此把夸克质量近似为零 (这叫做手征极限)，在手征极限下 QCD 拉氏量可写为

$$\mathcal{L}^{QCD}(x) = \sum_{f=u,d,s} \bar{q}_f(x) i\not{D} q_f(x) - \frac{1}{4} G_{\mu\nu,a}(x) G^{\mu\nu,a}(x) \tag{5.2}$$

其中夸克场算符 $q_f(x)$ 携带三种颜色 $q_f(x) = [q_{f,r}(x), q_{f,b}(x), q_{f,g}(x)]^T$，$G^{\mu\nu,a}(x)$ 是胶子场强张量。

用手征矩阵 γ^5 来定义左右手投影算符:

$$P_R = \frac{1}{2}(1+\gamma^5), \quad P_L = \frac{1}{2}(1-\gamma^5) \tag{5.3}$$

狄拉克场 $q_f(x)$ 可分解为两个手征分量:

$$q_{f,L}(x) = P_L q_f(x), \quad q_{f,R}(x) = P_R q_f(x) \tag{5.4}$$

P_L, P_R 之所以叫做左右手投影算符，是因为在极端的相对论性情况下，旋度和手征性等价

的。利用上式，拉氏量(5.2)式可写成左右手征分量场的形式

$$\mathcal{L}^{QCD}(x) = \sum_{f=u,d,s} \bar{q}_{f,L}(x) i\not{D} q_{f,L}(x) + \sum_{f=u,d,s} \bar{q}_{f,R}(x) i\not{D} q_{f,R}(x) - \frac{1}{4} G_{\mu\nu,a}(x) G^{\mu\nu,a}(x) \tag{5.5}$$

从上式可以看出左右手征态互不混合，因此拉氏量 $\mathcal{L}^{QCD}(x)$ 在以下独立的定域规范变换下不变的

$$q_L(x) \to U_L q_L(x), \quad q_R(x) \to U_R q_R(x) \tag{5.6}$$

in which, U_L, U_R 为 3×3 幺正矩阵，具体表示如下:

$$\begin{aligned} U_L &= \exp(-i \sum_{a=1}^{8} \frac{\lambda^a}{2} \theta_a^L) \exp(-i\theta^L), \\ U_R &= \exp(-i \sum_{a=1}^{8} \frac{\lambda^a}{2} \theta_a^R) \exp(-i\theta^R) \end{aligned} \tag{5.7}$$

in which, θ^L，θ^R，θ_a^L 和 θ_a^R 是 18 个实参数。这说明无质量的 $\mathcal{L}^{QCD(x)}$ 具有经典 $U_L(3)\times U_R(3)$ 整体对称性，根据 Noether 定理，这样的对称性，对应于 18 个守恒流，

$$\begin{aligned} L^{\mu,a} &= \bar{q}_L(x)\gamma^\mu \frac{\lambda^a}{2} q_L(x), \quad R^{\mu,a} = \bar{q}_R(x)\gamma^\mu \frac{\lambda^a}{2} q_R(x) \\ L^\mu &= \bar{q}_L(x)\gamma^\mu q_L(x), \quad R^\mu = \bar{q}_R(x)\gamma^\mu q_R(x) \end{aligned} \tag{5.8}$$

实际讨论中我们经常以矢量流和轴矢流的形式进行讨论，因此可以定义如下矢量和轴矢量流

$$\begin{aligned} V^{\mu,a} &\equiv L^{\mu,a} + R^{\mu,a} = \bar{q}(x)\gamma^\mu \frac{\lambda^a}{2} q(x) \\ A^{\mu,a} &\equiv L^{\mu,a} - R^{\mu,a} = \bar{q}(x)\gamma^\mu \gamma^5 \frac{\lambda^a}{2} q(x) \\ V^\mu &\equiv L^\mu + R^\mu = \bar{q}(x)\gamma^\mu q(x) \\ A^\mu &\equiv L^\mu - R^\mu = \bar{q}(x)\gamma^\mu \gamma^5 q(x) \end{aligned} \tag{5.9}$$

对于单态矢量流 V_μ 来说，量子化后单态矢量流仍然是守恒的，这对应于重子数守恒，至于单态轴矢量流 A_μ，即使在手征极限下，量子化后出现反常并破坏轴矢量流守恒。对于八重态矢量流和单态矢量流，对应的守恒电荷为

$$\begin{aligned} Q_V^a &= \int d\vec{x}^3 q^\dagger(x) \frac{\lambda^a}{2} q(x), \ a = 1\ldots8 \\ Q_A^a &= \int d\vec{x}^3 q^\dagger(x) \frac{\lambda^a}{2} \gamma^5 q(x), \ a = 1\ldots8 \\ Q_V &= \int d\vec{x}^3 q^\dagger(x) q(x) \end{aligned} \tag{5.10}$$

根据以上讨论，量子化后，在手征极限下 QCD 拉氏量的对称群是 $SU(3)_L\times SU(3)_R\times U(1)_V$。如果拉氏量的对称性不是体系基态的对称性，叫做对称性自发破缺，并产生无质量的 Goldstone 玻色子。

在手征极限下，当手征对称群 $SU(3)_R\times SU(3)_L$ 降低到 $SU(3)_V$ 时，对称性自发破缺。实验数

据表示，$J^P = 0$ 的赝标量介子八重态：$\pi^\pm, \pi^0, , K^\pm, K^0, \bar{k}^\pm, \eta$ 的质量都比较轻，而且内部宇称都相同。我们猜测实际的 QCD 整体对称性发生了自发破缺，而且自法破缺方式为 $SU(3)_L \times SU(3)_R \to SU(3)_V$。这表明 $SU(3)_A$ 对称性破缺了，但保留了 $SU(3)_V$ 对称性，因此有：

$$Q_V^a |0\rangle = 0, \quad Q_A^a |0\rangle \neq 0 \tag{5.11}$$

根据 Goldstone 定理，自发破缺后产生八个与破缺生成元 Q_a^A 相对应 Goldstone 玻色子，而且这些玻色子的量子数与被破缺的轴矢量对称性的量子数一样, 比如由手征对称性破缺产生的 Goldstone 玻色子也具有负宇称。

到目前为止我们只讨论了在手征极限下的情况，实际上 QCD 拉氏量包含夸克质量项，

$$L_M = -(\bar{q_R} M q_L + \bar{q_L} M q_R) \tag{5.12}$$

式中 M 为夸克质量矩阵，

$$M = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{pmatrix} \tag{5.13}$$

显然质量项明显破缺 $SU(3)_R \times SU(3)_L$ 对称性，实际上轻夸克的质量项可视为八个 Goldstone 玻色子的质量来源。

另一方面，守恒流的变化与夸克质量有关，由于轻夸克的流质量非常小，可以把它视为微扰项。如上所述，无质量轻夸克的手征对称性自发破缺，并产生无质量的 Goldstone 粒子。但是如何用拉氏量来描述对称性自发破缺过程？

另一方面，赝标量介子在手征变换下是变的，但是 $SU(3)$ 赝标量介子 (用 ϕ 表示) 和 $SU(3)$ 标量介子 (用 σ 表示) 的线性组合 $U = \sigma + i\phi$ 在手征变换下不变，

$$U' = U_L U U_R^+ \tag{5.14}$$

容易验证标量介子基态 $U_0 = 1$ 在矢量变换 $U_L = U_R$ 下不变，但在 $U_L = U_R^+$ 轴矢量变换下改变。

至于物质场和赝标量介子的相互作用，试探性地用线性 σ 模型来描述它们之间的相互作用

$$\mathcal{L} \propto \mathrm{Tr}(\bar{\psi}_L U \psi_R) + \mathrm{Tr}(\bar{\psi}_R U^\dagger \psi_L) \tag{5.15}$$

但是线性 σ 模型无法描述真实世界，因为线性 σ 模型中物质场和赝标量介子相互作用不包含赝标量场的动量项，除此之外，实验上无法找到 σ 对应的标量介子。在这种情况下，赝标量介子动量趋于零的时候核子–π 介子散射振幅为零。

重新定义物质场 $BU^{\frac{1}{2}}\psi$，把依赖于模型的相互作用和独立于模型的相互作用 (自相互作用和运动学项) 分解出来，这样赝标量介子获得动量并且仍然满足手征对称性。这时候，在手征变换下物质场 (八重态和十重态重子) 变换为

$$B' = hBh^\dagger, \quad {T_{abc}^\mu}' = h_{ad} h_{be} h_{cf} T_{def}^\mu \tag{5.16}$$

in which, 变换算符 h 满足 $U_L u h^\dagger = h u U_R^\dagger \quad u^2 = U$。值得注意的是，式中 h 不是手征变换群的元素, 而是手征变换群的子群 $SU_V(3)$ 的元素而且跟赝标量介子无关。

总结以上讨论可以得到满足手征对称性 $SU(3)_L \times SU(3)_R$ 的领头阶拉氏量。

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \mathrm{Tr}\left[\bar{B}(i\not{D} - M_B)\right] + D\,\mathrm{Tr}\left[\bar{B}\gamma^\mu\gamma_5\{u_\mu, B\}\right] + F\,\mathrm{Tr}\left[\bar{B}\gamma^\mu\gamma_5[u_\mu, B]\right] \\
&+ \bar{T}_\mu^{ijk}(i\gamma^{\mu\nu\alpha}D_\alpha - M_T\gamma^{\mu\nu})T_\nu^{ijk} + C\left[\epsilon^{ijk}\bar{T}_\mu^{ilm}\Theta^{\mu\nu}(u_\nu)^{lj}B^{mk} + h.c.\right] \\
&- \mathcal{H}\bar{T}_\mu^{ijk}\gamma^{\mu\nu\alpha}\gamma_5(u_\alpha)^{kl}T_\nu^{ijl} + \frac{f^2}{4}\mathrm{Tr}\left[D_\mu U(D^\mu U)^\dagger\right]
\end{aligned}
\tag{5.17}
$$

in which, M_B 和 M_T 分别代表八重态和十重态重子质量，DF 是八重态重子轴矢量电荷，C，$\mathcal{H}$ 分别代表八重态--十重态轴矢量跃迁和十重态轴矢量电荷，“h.c.’’ 代表厄米共轭。介子衰变常数 f，我们取 $f = 93\mathrm{MeV}$。张量 ϵ^{ijk} 是味道空间中的反对称张量。十重态自由拉氏量包括矩阵 $\gamma^{\mu\nu}$ 和 $\gamma^{\mu\nu\alpha}$，其定义为 $\gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ $\gamma^{\mu\nu\alpha} = \frac{1}{2}[\gamma^{\mu\nu}, \gamma^\alpha]$。

八重态-十重态相互作用顶角 $\Theta^{\mu\nu}$ 定义为

$$
\Theta^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - Z\gamma^\mu\gamma^\nu \tag{5.18}
$$

其中 Z 代表十重态离壳参数，至于它的值目前还没有统一的观点，一般其取值范围为 $Z \in (0, 1)$，另一方面十重态重子传播子也依赖于离壳参数 Z，当 $Z = 1$ 的时候十重态重子回到最简单的形式

< 手征拉氏量部分，此处待补充 >

十重态包括 $\Delta, \Sigma^*, \Xi^*, \Omega^-$，全对称张量 T_μ^{ijk} 的不同分量代表不同的十重态重子。

式中算符 U 跟赝标量介子矩阵 ϕ 有关，即

$$
U = U^2, \quad u = \exp(i\frac{\phi}{\sqrt{2}f}) \tag{5.19}
$$

赝标量介子以矢量和轴矢量的形式与八重态重子，十重态重子耦合，即

$$
\begin{aligned}
\Gamma_\mu &= \frac{1}{2}(u\partial_\mu u^\dagger + u^\dagger\partial_\mu u) - \frac{i}{2}(u\lambda^a u^\dagger + u^\dagger\lambda^a u)v_\mu^a, \\
u_\mu &= \frac{i}{2}(u\partial_\mu u^\dagger - u^\dagger\partial_\mu u) + \frac{1}{2}(u\lambda^a u^\dagger - u^\dagger\lambda^a u)v_\mu^a,
\end{aligned}
\tag{5.20}
$$

in which, v_μ^a 代表矢量外场，$\lambda^a (a = a, \ldots, 8)$ 代表 Gell-Mann 矩阵。八重态协变导数定义为

$$
\begin{aligned}
D_\mu B &= \partial_\mu B + [\Gamma_\mu, B] - i\langle\lambda^0\rangle v_\mu^0 B \\
D_\mu T_\nu^{ijk} &= \partial_\mu T_\nu^{ijk} + (\Gamma_\mu, T_\nu)^{ijk} - i\langle\lambda^0\rangle v_\mu^0 T_\nu^{ijk}
\end{aligned}
\tag{5.21}
$$

in which, v_μ^0 代表矢量单态外场，λ^0 代表单位矩阵，符号 $\langle\cdots\rangle$ 代表对味道空间求迹。

十重态协变导数的定义为

$$
(\Gamma_\mu, T_\nu)^{ijk} = (\Gamma_\mu)_l^i T_\nu^{ljk} + (\Gamma_\mu)_l^j T_\nu^{ilk} + (\Gamma_\mu)_l^k T_\nu^{ijl} \tag{5.22}
$$

介子协变导数定义为

$$
D_\mu U = \partial_\mu U + (iU\lambda^a - i\lambda^a U)v_\mu^a \tag{5.23}
$$

展开(5.17)式中的定域拉氏量后，我们得到重子——介子相互作用

< 待补充 >

其中忽略了和 $\mathcal{H}$ 有关的项，因为与此计算无关。根据(5.17)式我们可以计算出强子层次上的夸克流 v_μ^a，< 待补充 >

除此之外 SU(3) 味道单态流 v_μ^0 定义为

$$J_0^\mu = \langle\lambda^0\rangle\,\mathrm{Tr}[\bar{B}\gamma^\mu B] + \langle\lambda^0\rangle\bar{T}_\nu\gamma^{\nu\alpha\mu}T_\alpha \tag{5.24}$$

其中 λ^0 代表 3×3 单位矩阵，$\langle\ \rangle$ 代表对味道空间求迹。

8 分量，3 分量和单态流的线性组合给出三个轻夸克矢量流

$$\begin{aligned}
J_u^\mu &= \frac{1}{3}J_0^\mu + \frac{1}{2}J_3^\mu + \frac{1}{2\sqrt{3}}J_8^\mu \\
J_d^\mu &= \frac{1}{3}J_0^\mu - \frac{1}{2}J_3^\mu + \frac{1}{2\sqrt{3}}J_8^\mu \\
J_s^\mu &= \frac{1}{3}J_0^\mu - \frac{1}{\sqrt{3}}J_8^\mu
\end{aligned} \tag{5.25}$$

由(5.24)，(5.24)和(5.25)式，得出强子层次上的夸克流 J_u^μ，J_d^μ 和 J_s^μ，

< 待补充 >

以上表达式中，忽略了与此计算无关的，含 $\Xi^{0,-}$ 和 $\Xi^{*0,-}$ 的夸克流。

以上我们讨论了手征对称性和手征拉氏量以及强子层次上的夸克守恒流。为了消除圈图贡献的紫外发散，下一节我们讨论非定域正规化方案及其在手征微扰理论中的应用。