第 6 章 置换群

置换群在物理和数学上的重要意义：

1. 置换群描写全同粒子体系的置换对称性
2. 所有有限群都同构于置换群的子群
3. 杨算符能明确描写张量指标间的复杂对称性

section 6.0 置换群的一般性质

定义 6.1 (置换) n 个客体排列次序的变换称为置换；

n 个客体共有 $n!$ 个不同的置换

定义 6.2 (矩阵描写) 设原来排在第 j 位置的客体，经过置换 R 后排到了第 r_j 位置，用 $2n$ 矩阵来描写这一置换 R

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & j & n \\ r_1 & r_2 & r_3 & r_j & r_n \end{pmatrix} \tag{6.1}$$

例 6.1 置换作用于波函数

$$\begin{gathered} \psi = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{then,} \\ R\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_3 & \phi_1 & \phi_2 \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{6.2}$$

注意 对一给定的置换，各列的排列次序无关紧要，重要的是每一列上下两个数字间的对应关系

定义 6.3 (置换的乘积) 两个置换的乘积定义为相继做两次置换

考虑 S 和 R 的乘积 SR：重新排列 R 或 S 的各列，使 R 的第二行和 S 的第一行排列一样，由 R 的第一行和 S 的第二行组成的 $2n$ 矩阵即为 SR

例 6.2 置换相乘

$$\begin{aligned} S &= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \\ R &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \\ SR &= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{6.3}$$

注意

例 6.3 轮换

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_{l-1} & a_l & b_1 & b_{n-l} \\ a_2 & \cdots & a_l & a_1 & b_1 & b_{n-l} \end{pmatrix} \tag{6.4}$$

注意

1. 用行矩阵描写轮换时，数字的排列次序不能改变，但可以顺序变换。

$$\begin{pmatrix} a & b & c & \cdots & p & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & c & \cdots & p & q & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & \cdots & p & q & a & b \end{pmatrix} \tag{6.5}$$

2. 长度为 1 的轮换时恒等变换，长度为 2 的轮换称为对换，对换满足

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b & a \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} &= E \end{aligned} \tag{6.6}$$

3. 长度为 l 的轮换，它的 l 次自乘等于恒元，即它的阶数为 l

$$\begin{aligned} R &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_l \end{pmatrix} \\ R^l &= E \end{aligned} \tag{6.7}$$

4. 两个没有公共客体的轮换，乘积次序可以交换

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_m \end{pmatrix} = \\ &\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_l \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{6.8}$$

5. 轮换的逆

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{l-1} & a_l \end{pmatrix}^{-1} = \\ &\begin{pmatrix} a_l & a_{l-1} & \cdots & a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{6.9}$$

命题 6.2 (置换分解) 任何一个置换，都可以唯一地分解为没有公共客体的轮换乘积

例 6.4 置换分解

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{6.10}$$

注意

1. 把一置换分解为没有公共客体的轮换乘积时，各轮换长度的集合，称为该轮换的轮换结构

$$\begin{aligned} R &= \begin{pmatrix}1 & 3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\end{pmatrix} \quad \text{structure is}(3,2) \\ S &= \begin{pmatrix}1 & 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\end{pmatrix} \quad \text{structure is}(3,1,1) = (3,1^2) \end{aligned} \tag{6.11}$$

2. 把一个正整数 n 分解为若干个正整数 l_i 之和，这样的正整数的集合称为 n 的一组配分数

$$n = 4, \ \text{possible allocations :}(4),(3,1),(2,2),(2,1^2),(1^4) \tag{6.12}$$

3. n 个客体的任一置换 1 的轮换结构为

$$\begin{pmatrix}l_1 & l_2 & \cdots\end{pmatrix}, \qquad \sum_i l_i = n \tag{6.13}$$

命题 6.3 (胶水公式)

$$\begin{pmatrix}a & b & \cdots & c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d & e & \cdots & f\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b & \cdots & c & d & e & \cdots & f\end{pmatrix} \tag{6.14}$$

注意

1. 处理有一个公共客体的轮换乘积：在每个轮换内部，把公共客体顺序移到最右或最左，然后按上式把两个轮换接起来。
2. 同理也可以把一个轮换分成两个轮换

例 6.5 轮换的合并与截断

1.

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 2 & 5 & 6\end{pmatrix} \\ =&\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 5 & 6 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 1 & 2 & 5 & 6 & 4\end{pmatrix} \end{aligned} \tag{6.15}$$

2.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3 & 4 & 5\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 5\end{pmatrix} \end{aligned} \tag{6.16}$$

3.

$$
\begin{aligned}
& \begin{pmatrix}5 & 1 & 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 3 & 2 & 6\end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix}5 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 6\end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix}5 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 6\end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix}5 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 3\end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix}5 & 1 & 2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 3\end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{6.17}
$$

把轮换拆成相邻两个轮换只含一个重复公共客体的形式后再相乘

命题 6.4 (置换群的类) 1. R 的共轭元素：SRS^{-1}

2. 把 R 置换的上下两行数字同时作 S 置换即得 R 置换的共轭元素 SRS^{-1}
3. 互相共轭的两个置换有相同的轮换结构

注意 参考 note-**??**

当 R 是轮换时，

$$
S\begin{pmatrix}a & b & c & \cdots & d\end{pmatrix}S^{-1} = \begin{pmatrix}S_a & S_b & S_c & \cdots & S_d\end{pmatrix} \tag{6.18}
$$

1. 共轭轮换不改变轮换的长度，只改变轮换设计的客体编号
2. 互相共轭的两置换具有相同的轮换结构
3. 亦可证明，有相同轮换结构的两置换必定互相共轭

注意

1. 置换群的类由置换的轮换结构来描写
2. 置换群的类数等于整数 n 分解为不同配分数的数目

定理 6.1 (类的元素数目) 如果群 S_n 的类包含 ν_1 个 1 循环，ν_2 个 2 循环，$\cdots$，ν_n 个 n 循环，即它的轮换结构为

$$
(l) = (1^{\nu_1}, 2^{\nu_2}, \cdots, n^{\nu_n}),\ 1\nu_1 + 2\nu_2 + \cdots + n\nu_n = n \tag{6.19}
$$

则该类所包含的元素个数为

$$
C_l = \frac{n!}{1^{\nu_1}2^{\nu_2}\cdots n^{\nu_n}\nu_1!\nu_2!\cdots\nu_n!} \tag{6.20}
$$

引理 6.1 (置换群元的奇偶性) 1. 任何置换都可分解为若干个对换的乘积，

分解方式不唯一，但它包含对换个数的奇偶性是确定的

长度为奇数的轮换可分解为偶数个对换的乘积–偶置换

长度为偶数的轮换可分解为奇数个对换的乘积–奇置换

2. 两个偶置换或两个奇置换的乘积是偶置换

一个偶置换和一个奇置换的乘积是奇置换

恒元是偶置换

3. $n > 1$ 时候，除了恒等表示，S_n 至少还有一个一维非恒等表示，称为反对称表示，

置换 R 在在该表示中的值称为它的置换宇称，记作 $\delta(R)$

$$\delta(R) = \begin{cases} 1, & R \text{ 是偶置换} \\ -1, & R \text{ 是奇置换} \end{cases} \tag{6.21}$$

定义 6.5 (交变子群) 1. 置换群中所有偶置换的集合构成指数为 2 的不变子群，称为交变子群

2. 奇置换的集合是它的陪集商群是 c_2 群

引理 6.2 (置换群的生成元) 1. 相邻客体的对换：$P_a = (a \;\; a+1)$

2. 任何置换都可以写成无公共客体轮换的乘积，任何轮换都可分解为若干对换的乘积。

3. 任何对换都可以表示为相邻客体对换的乘积

4. 任何置换都可以表示为相邻客体对换的乘积

5. 引入长度为 n 的轮换 $W = (1 \;\; 2 \;\; \cdots \;\; n)$

则：$P_a = WP_{a-1}W^{-1} = W^2P_{a-2}W^{-2} = \cdots = W^{a-1}P_1W^{-(a-1)}$

即：任何相邻客体的对换可由 W 和 P_1 生成

定理 6.2 (置换群的生成元) 置换群的生成元是 W 和 P_1，置换群的秩为 2

定理 6.3 (Cayley 定理) 任何一个 n 阶有限群都与置换群 S_n 的一个子群同构

推论 6.1 (n 阶有限群的数目)

1. 若置换群 S_n 的子群与 n 阶有限群 G 同构，则该子群中的元素除恒等置换外，任一置换所包含的无公共客体的轮换的轮换长度相等
2. $S-N$ 的子群数目是有限的，满足上述性质的不同构的子群的数目更加有限
3. 不同构的 n 阶有限群的数目是有限的

section 6.0 杨图、杨表和杨算符

引理 6.3 (置换)

1. 置换群 S_n 的类的个数等于 n 分解为不同组配分数的数目，
   故置换群不等价不可约表示的个数也等于 n 分解为不同组配分数的数目
2. 置换群 S_n 的类由 n 的配分数 $(\lambda) = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_m)$ 描写，不等价不可约表示也可以用配分数来描写，
   记作 $[\lambda] = [\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_m]$，其中

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_m \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{m} \lambda_j = n \tag{6.22}$$

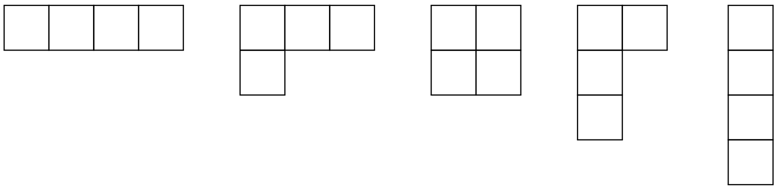
不过，由相同配分数描写的类和不等价不可约表示并无任何关系。

定义 6.6 (杨图) 对配分数 $[\lambda] = [\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_3,]$，画 m 行放个图，左边对齐，第一行含 λ_1 个，第二行含 λ_2 格，以此类推，
这样的方格图称为配分数 $[\lambda]$ 对应的杨图，简称杨图 $[\lambda]$

注意

1. 杨图中，上面行的格子数不少于下面行的格子数，
   左边列的格子数不少于右边列的格子数为强调这一规则，称它为正则杨图。
2. 每个杨图都唯一地对应于置换群 S_n 的一个不可约表示，不同杨图对应的不可约表示不等价。
3. 杨图的大小：从第一行开始逐行比较，格子多的杨图大

例 6.6 S_4 群的杨图从大到小排列为



$$[4] \qquad [3,1] \qquad [2,2] \qquad [2,1^2] \qquad [1^4] \tag{6.23}$$

注意

1. 把杨图 $[\lambda]$ 的行和列互换得到的杨图 $[\tilde{\lambda}]$ 称为杨图 $[\lambda]$ 的对偶杨图，对应的不可约表示称为对偶表示
   例：S_3 群的杨图 $[3]$ 和 $[1^3]$ 互为对偶杨图
   S_4 群的杨图 $[4]$ 和 $[1^4]$ 以及 $[3,1]$ 和 $[2,1^2]$ 分别为对偶杨图
2. 若杨图 $[\lambda]=[\tilde{\lambda}]$ 则称为自偶杨图
   例：S_3 群的杨图 $[2,1]$ 为自偶杨图
   S_4 群的杨图 $[2,2]$ 为自偶杨图

定义 6.7 (杨表与正则杨表) 1. 对于给定的杨表 $[\lambda]$，把 1 到 n 的 n 个自然数分别填入杨图的 n 个格子中，就得到一个杨表

2. n 格的杨图有 $n!$ 个不同的杨表
3. 如果在杨表的每一行中，左面的填数小于右边的填数，在每一列中，上面的填数小于下面的填数，则此杨表称为正则杨表
4. 正则杨表的大小：同一杨图对应的正则杨表，从第一行开始逐行从左到右比较它们的填数，第一次出现填数不同时，填数大的杨表大
   例如，杨图 1 对应的全部正则杨表从小到大排列为

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 4&5\\\cline{1-2}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&4\\\hline 3&5\\\cline{1-2}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&5\\\hline 3&4\\\cline{1-2}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&4\\\hline 2&5\\\cline{1-2}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&5\\\hline 2&4\\\cline{1-2}\end{array} \tag{6.24}$$

定理 6.4 (维数定理) 置换群 S_n 的不可约表示 $[\lambda]$ 的维数，等于杨图 $[\lambda]$ 对应的正则杨表的个数

注意

1. 杨图 $[\lambda]$ 对应的不可约表示的维数 (即正则杨表的个数) 由钩形规则给出
2. 杨图中任一格子的钩形数，等于该格子所在行右面的格子数 + 该格子所在列下面的格子再 +1
3. 杨图 $[\lambda]$ 对应的不可约表示的维数为

$$d_{[\lambda]}(S_n)=\frac{n!}{\prod\limits_{ij} h_{ij}} \tag{6.25}$$

4. 钩形数杨表：将杨图 $[\lambda]$ 中每格的钩形数 h_{ij} 填入该杨图，得到的杨表称为该杨表的钩形数杨表

例 6.7 S_3 群各个不可约表示的维数

$$
\begin{array}{ccc}
\text{不可约表示} & \text{钩形数杨表} & \text{不可约表示的维数} \\
[3]: & \begin{array}{|c|c|c|}\hline 3 & 2 & 1 \\ \hline\end{array} & d_{[3]}(S_3) = \dfrac{3!}{3\times 2\times 1} = \dfrac{3\times 2\times 1}{3\times 2\times 1} = 1 \\
[2,1]: & \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 1 \\ \hline 1 \\ \cline{1-1}\end{array} & d_{[2,1]}(S_3) = \dfrac{3!}{3\times 1\times 1} = \dfrac{3\times 2\times 1}{3\times 1\times 1} = 2 \\
[1^3]: & \begin{array}{|c|}\hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline\end{array} & d_{[1^3]}(S_3) = \dfrac{3!}{3\times 2\times 1} = \dfrac{3\times 2\times 1}{3\times 2\times 1} = 1
\end{array}
\tag{6.26}
$$

对于给定的杨图 $[\lambda] = [\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m]$，其对偶杨图记为 $[\tilde{\lambda}] = [\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_{\lambda 1}]$；考虑杨图 $[\lambda]$ 对应的某一正则杨表

引理 6.4 (横纵置换) 1. 保持杨表中同一行数字只在这一行中变动的置换称为横向置换，记作 p，所有横向置换的集合记作 $R(\lambda) = \{p|p \in S_n\}$.

(a). 第 i 行 λ_i 个数字间的 $\lambda_i!$ 个横向置换构成的集合构成 S_n 群的子群 P_i

(b). m 行的正则杨表共有 m 个这样的子群，它们的直乘winered[1] 构成 S_n 群 $\lambda_1!\lambda_2!\cdots\lambda_m!$ 阶的子群，记为 $R(\lambda) = P_1 \otimes P_2 \otimes \cdots \otimes P_m$

2. 保持杨表中同一列数字只在这一列中变动的置换称为 1 纵向置换，记作 1，所有纵向置换的集合记作 1.

(a). 第 j 列 τ_j 个数字间的 $\tau_j!$ 个纵向置换构成的集合构成 S_n 群的子群 Q_j

(b). λ_1 列的正则杨表共有 λ_1 个这样的子群，它们的直乘构成 S_n 群 $\tau_1!\tau_2!\cdots\tau_m!$ 阶的子群，记为 $C(\lambda) = Q_1 \otimes Q_2 \otimes \cdots \otimes Q_{\lambda_1}$

引理 6.5 (横算符和纵算符) 1. 所有横向置换之和称为给定杨表的横算符

$$
\mathcal{P} = \sum_{p\in R(\lambda)} = \prod_i P_i \tag{6.27}
$$

[1]恒元为唯一公共元素，分属不同子群的元素可对易

2. 所有纵向置换乘以置换宇称后相加，称为给定杨表的纵算符

$$\mathcal{Q} = \sum_{q\in C(\lambda)} \delta(q)q \tag{6.28}$$

3. 横算符和纵算符之乘积称为给定杨表的杨算符，正则杨表对应的杨算符称为正则杨算符。

$$\mathcal{Y} = \mathcal{P}\mathcal{Q} = \sum_{p\in R(\lambda)} \sum_{q\in C(\lambda)} \delta(q)\, p\, q \tag{6.29}$$

4. 横向置换、纵向置换、横算符、纵算符、杨算符均为群代数中的矢量
5. 横向置换的集合 $R(\lambda)$ 与纵向置换的集合 $C(\lambda)$ 只有一个公共元素恒元，故杨算符 $\mathcal{Y}$ 展开式中每一项 $p\,q$ 都是 S_n 群的不同元素，因此 $\mathcal{Y} \neq 0$
6. 只有在给定杨图和杨表时，才能写出杨算符 $\mathcal{Y}$，故通常把杨算符 $\mathcal{Y}$ 对应的杨图和杨表，称为杨图 $\mathcal{Y}$ 和杨表 $\mathcal{Y}$；若单独说 $\mathcal{Y}$，则指杨算符本身

注意

1. 给定杨表横算符的写法：先把每一行的横向置换加起来，再把不同行的横向置换之和乘起来
2. 给定杨表纵算符的写法：先把每一列的所有纵向置换乘上各自的置换宇称后加起来，再把不同列的纵向置换之代数和乘起来

例 6.8 S_3 群各不可约表示杨图对应的正则杨表的杨算符

$$\begin{array}{ll}
\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline\end{array} & \mathcal{Y}^{[3]} = E + (1\ \ 2) + (1\ \ 3) + (2\ \ 3) + (1\ \ 2\ \ 3) + (1\ \ 3\ \ 2) \\
\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array} & \mathcal{Y}^{[2,1]} = \{E + (1\ \ 2)\} + \{E - (1\ \ 3)\} = E + (1\ \ 2) - (1\ \ 3) - (1\ \ 3\ \ 2) \\
\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array} & \mathcal{Y}^{[2,1]} = \{E + (1\ \ 3)\} + \{E - (1\ \ 2)\} = E + (1\ \ 3) - (1\ \ 2) - (1\ \ 2\ \ 3) \\
\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline\end{array} & \mathcal{Y}^{[1^3]} = E - (1\ \ 2) - (1\ \ 3) - (2\ \ 3) + (1\ \ 2\ \ 3) + (1\ \ 3\ \ 2)
\end{array} \tag{6.30}$$

section 6.0 置换群的不可约标准表示

定理 6.5 (置换群的原始幂等元) 杨算符 $\mathcal{Y}$ 是置换群群代数 $\mathcal{L}(S_n)$ 本质的原始幂等元，

最小左理想 $\mathcal{L}(S_n)\mathcal{Y}$ 给出 S_n 群的一个不可约表示；

由同一杨图的不同正则杨表给出的表示是等价的，不同杨图给出的表示是不等价的。

注意

1. $(\frac{f}{n!})\mathcal{Y}$ 是置换群的原始幂等元 (f 是不可约表示的维数)
2. 等价的原始幂等元不一定正交；
   不等价的原始幂等元一定正交
3. $n \geq 5$ 时会出现同一杨图的不同正则杨表对应的杨算符可能不正交的情况。
4. 一行的杨图对应一维恒等表示

例 6.9 S_n 群的杨图 $[n]$ 确定的不可约表示

该杨图只有一个正则杨表 $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{\cdots}\boxed{n}$

该杨表的杨算符为 $\mathcal{Y}^{[n]} = \sum_i p_i, \quad p_i \in S_n$

由重排定理，对任意 $t \in S_n$，有

$$t\mathcal{Y}^{[n]} = t\sum_i p_i = \sum_i p_i = \mathcal{Y}^{[n]} \tag{6.31}$$

故杨图 $[n]$ 对应 S_n 群的一维恒等表示

例 6.10 S_n 群的杨图 $[1^n]$ 确定的不可约表示

该杨图只有一个正则杨表 $\begin{array}{|c|}\hline 1\\ \hline 2\\ \hline \cdots\\ \hline n\\ \hline\end{array}$

该杨表的杨算符为 $\mathcal{Y}^{[n]} = \sum_i \delta(q_i)q_i, \quad q_i \in S_n$

由重排定理，对任意 $t \in S_n$，有

$$t\mathcal{Y}^{[n]} = t\sum_i \delta(q_i)q_i = \sum_i \delta(q_i)t\,q_i = t\sum_i \delta(t\,q_i)t\,q_i = \delta(t)\mathcal{Y}^{[n]} \tag{6.32}$$

故杨图 $[1^n]$ 对应 S_n 群的一维全反对称表示

注意

1. 一列的杨图对应一维全反对称表示
2. 由于任意对换作用在上面，给出一个负号

例 6.11 S_3 杨图 1 有两个正则杨表，给出两个等价的二维不可约表示。以其中一个为例：

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2\\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad \mathcal{Y}^{[2,1]} = (E + (1\ \ 2))(E - (1\ \ 3)) = E + (1\ \ 2) - (1\ \ 3) - (1\ \ 3\ \ 2) \tag{6.33}$$

$\mathcal{L}(S_3)\mathcal{Y}^{[2,1]}$ 确实是二维的。

令

$$\begin{cases}\psi^1 = \mathcal{Y}^{[2,1]} \\ \psi^2 = (1\quad 3)\mathcal{Y}^{[2,1]}\end{cases} \tag{6.34}$$

由此得 1 群生成元在二维不可约标准表示中的表示矩阵

$$D^{[2,1]}(1\quad 2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad D^{[2,1]}(1\quad 2\quad 3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{6.35}$$

section 6.0 置换群的不可约正交表示

subsection 6.0.0 不可约表示按子群链的分解

命题 6.5 (分支律) S_n 群的不可约表示 $[\lambda]$ 对它的子群 S_{n-1} 来时，一般是可约的，从杨图 $[\lambda]$ 中按所有可能的方式去掉一个方格后，所剩下的如果仍是正则杨图 $[\lambda']$，则 $[\lambda']$ 就是 $[\lambda]$ 作为 S_{n-1} 群的表示进行约化时可能出现的不可约表示，且每个 $[\lambda']$ 只出现一次。

例 6.12

例如，S_5 群的不可约表示 $[2^2,1]$ 中包含 S_4 群的不可约表示 $[2^2]$ 和 $[2,1^2]$ 各一次。

$$\begin{array}{ccccccc} & \begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline & \\ \hline \\ \cline{1-1}\end{array} & \rightarrow & \begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline & \\ \hline\end{array} & \bigoplus & \begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline \\ \cline{1-1} \\ \cline{1-1}\end{array} \\ \text{维数} & 5 & = & 2 & + & 3 \end{array} \tag{6.36}$$

定义 6.8 (name) 荷载子群链 $S_n \supset S_{n-1} \supset S_{n-2} \supset \cdots \supset S_2$ 中所有子群的不可约表示的基互相正交，由它们得到的表示称为置换群的实正交表示

注意 用正则样表标记正交基：从 S_n 的正则杨表中去掉填 n 的格子，仍是正则杨表，标识 S_{n-1} 不可约表示的基；依次分解下去，杨表逐步缩小的过程反映出置换群表示逐步按子群表示分解的过程，也确定了基函数按子群链的分类

例 6.13

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 \\ \cline{1-1}\end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline\end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline\end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline\end{array} \tag{6.37}$$

subsection 6.0.0 不可约正交表示的具体形式

注意

1. 任意置换都可以分解为无公共客体的轮换的乘积，任一轮换都可以分解为对换的乘积，任一对换都可以分解为相邻客体的对换的乘积
2. 只要知道了相邻客体的对换 $(k-1\ \ k)$ 的表示矩阵，就可以由乘法求得 S_n 群的任意元素的表示矩阵
3. 用 $\mathcal{Y}_r^{[\lambda]}$ 表示不可约表示 $[\lambda]$ 的第 r 个正则杨表，$|\mathcal{Y}^{[\lambda]}\rangle$ 表示荷载正交表示 $[\lambda]$ 的基
4. $k-1$到k的轴距 正则杨表 $\mathcal{Y}_r^{[\lambda]}$ 中，从填 $k-1$ 的格子到填 k 的格子，向左或向下数一个方格为 $+1$，向右或向上数一个方格为 -1，这样数出的代数和 μ 称为数字 $k-1$ 到 k 的轴距
5. 若 $k-1$ 和 k 不在正则杨表 $\mathcal{Y}_r^{[\lambda]}$ 的同一行或同一列，则 $(k-1\ \ k)$ 把正则杨表 $\mathcal{Y}_r^{[\lambda]}$ 变为正则杨表 $\mathcal{Y}_s^{[\lambda]}$

$$\mathcal{Y}_s^{[\lambda]} = (k-1\ \ k)\,\mathcal{Y}_r^{[\lambda]} \tag{6.38}$$

6. 对换 $(k-1\ \ k)$ 在正交表示中的表示矩阵
   (a). 相邻客体的的同一行对称，在同一列反对称
   (b). 当 $k-1$ 和 k 在杨表 $\mathcal{Y}_r^{[\lambda]}$ 的同一行或同一列

$$(k-1\ \ k)\,|\mathcal{Y}_r^{[\lambda]}\rangle = -\mu\,|\mathcal{Y}_r^{[\lambda]}\rangle \tag{6.39}$$

   (c). 当 $k-1$ 和 k 不在杨表 $\mathcal{Y}_r^{[\lambda]}$ 的同一行或同一列

$$(k-1\ \ k)\,|\mathcal{Y}_r^{[\lambda]}\rangle = -\frac{1}{\mu}\,|\mathcal{Y}_r^{[\lambda]}\rangle + \frac{\sqrt{\mu^2-1}}{|\mu|}\,|\mathcal{Y}_s^{[\lambda]}\rangle \tag{6.40}$$

例 6.14 S_3 群的实正交表示

1.
$$(1\ \ 2)\left|\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline\end{array}\right\rangle = \left|\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline\end{array}\right\rangle \tag{6.41}$$

2.
$$(1\ \ 2)\left|\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline 3\\\hline\end{array}\right\rangle = -\left|\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline 3\\\hline\end{array}\right\rangle \tag{6.42}$$

3.
$$(1\ \ 2)\left|\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\right\rangle = \left|\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\right\rangle \tag{6.43}$$

4.
$$(1\ \ 2)\left|\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\right\rangle = -\left|\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\right\rangle \tag{6.44}$$

5.
$$(2\ \ 3)\left|\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline\end{array}\right\rangle = -\left|\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline\end{array}\right\rangle \tag{6.45}$$

6.

$$(2\ \ 3)\left|\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}\right\rangle = -\frac{1}{2}\left|\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}\right\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}\left|\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}\right\rangle \tag{6.46}$$

7.

$$(2\ \ 3)\left|\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}\right\rangle = \frac{1}{2}\left|\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}\right\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}\left|\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}\right\rangle \tag{6.47}$$

8.

$$(2\ \ 3)\left|\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline\end{array}\right\rangle = -\left|\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline\end{array}\right\rangle \tag{6.48}$$

9.

$$\begin{aligned} D^{[3]}(2,3) &= -D^{[1^3]}(2,3) = 1 \\ D^{[2,1]}(2,3) &= -D^{[1^3]}(2,3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{6.49}$$

10. 其它元素的表示矩阵可由乘法给出：

$$\begin{aligned} D(1\ \ 3) &= D(1\ \ 2)D(2\ \ 3)D(1\ \ 2) \\ D(1\ \ 2\ \ 3) &= D(1\ \ 2)D(2\ \ 3) \\ D(1\ \ 3\ \ 2) &= D(1\ \ 2)D(1\ \ 3) \end{aligned} \tag{6.50}$$

11. 于是有：

$$\begin{aligned} D^{[3]}(1\ \ 3) = D^{[1^3]}(1\ \ 3) = 1 \qquad & D^{[2,1]}(1\ \ 3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \\ D^{[3]}(1\ \ 2\ \ 3) = D^{[1^3]}(1\ \ 2\ \ 3) = 1 \qquad & D^{[2,1]}(1\ \ 2\ \ 3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \\ D^{[3]}(1\ \ 3\ \ 2) = D^{[1^3]}(1\ \ 3\ \ 2) = 1 \qquad & D^{[2,1]}(1\ \ 3\ \ 2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{6.51}$$

subsection6.0.0 不可约表示的基函数

1. 有了不可约正交表示的表示矩阵，可得投影算符

$$\mathcal{P}^{[\lambda]}_{rs} = \frac{d_{[\lambda]}}{n!}\sum_{R\in S_n} D^{[\lambda]}_{rs}(R)R \tag{6.52}$$

它作用在有置换变换的函数上，可得具有指定对称性 $[\lambda]$ 的波函数

2. 设 n 粒子系统的波函数为 $\phi(1,2,\cdots,n)$，其中 $1,2,\cdots,n$ 为粒子的坐标，则具有对称性 $[\lambda]$ 的 $d_{[\lambda]}$ 个波函数为 (s 固定)

$$\psi_{rs}^{[\lambda]}=\mathcal{P}_{rs}^{[\lambda]}\,\phi(1,2,\cdots,n)=\frac{d_{[\lambda]}}{n!}\sum_{R\in S_n}D_{rs}^{[\lambda]}(R)\,R\,\phi(1,2,\cdots,n)\qquad(6.53)$$

例 6.15 由组态 $\phi=uds$ 构造 S_3 群 $[3]$ 表示的基

$$\mathcal{P}_{11}^{[3]}=\frac{1}{6}[E+(132)+(123)+(12)+(23)+(13)]\qquad(6.54)$$

$$\psi^{[3]}=\mathcal{P}_{11}^{[3]}=\frac{1}{6}[uds+dsu+sud+dus+usd+sdu]\qquad(6.55)$$

注意 flavor wave function of Σ^*

$$\begin{cases}\mathcal{P}_{11}^{[2,1]}= & \frac{1}{6}[2E-(132)-(123)+2(12)-(23)-(13)]\\ \mathcal{P}_{21}^{[2,1]}= & \frac{\sqrt{3}}{6}[(132)-(123)+(23)-(13)]\\ \mathcal{P}_{12}^{[2,1]}= & \frac{\sqrt{3}}{6}[-(132)+(123)+(23)-(13)]\\ \mathcal{P}_{22}^{[2,1]}= & \frac{1}{6}[2E-(132)-(123)-2(12)+(23)+(13)]\end{cases}\qquad(6.56)$$

注意 Σ^0 flavor wave function

$$\begin{cases}\psi_{11}^{[2,1]}=\mathcal{P}_{11}^{[2,1]}\phi=\frac{1}{6}[2uds-dsu-sud+2dus-usd-sdu]\\ \psi_{21}^{[2,1]}=\mathcal{P}_{21}^{[2,1]}\phi=\frac{\sqrt{3}}{6}[dsu-sud+usd-sdu]\end{cases}\qquad(6.57)$$

注意 Λ flavor wave function

$$\begin{cases}\psi_{12}^{[2,1]}=\mathcal{P}_{21}^{[2,1]}\phi=\frac{\sqrt{3}}{6}[-dsu+sud+usd-sdu]\\ \psi_{22}^{[2,1]}=\mathcal{P}_{22}^{[2,1]}\phi=\frac{1}{6}[2uds-dsu-sud-2dus+usd+sdu]\end{cases}\qquad(6.58)$$