

四、重整化理论

- 正规化与重整化： ϕ^4 理论
 - 正规化：紫外截断、Pauli-Villars、维数正规化...
 - 重整化：波函数、质量、耦合常数、BPHZ重整化步骤
- QED的重整化：
Ward恒等式带来的重整化常数之间的关系
- 一般的重整化理论：
表观发散度、高圈的重整化、算符重整化、算符的混合
- 非阿贝尔规范理论的重整化：
单圈发散、单圈重整化常数、Slavnov-Taylor恒等式
- 跑动的耦合：
跑动的耦合常数、质量，渐近自由
- 重整化群方法：
Green函数的重整化群方程及其解

紫外发散与重整化：

- 场论中，在进行费曼图计算时，全图积分有可能带来发散；
- 紫外发散的根源是动量积分中，积分区域是无穷大；
- 圈积分(对应虚过程，内线粒子都不在壳)无穷大动量积分是定域相互作用和 Lorentz 不变性的自然要求；
- Lorentz 不变性要求行队形场论的能谱是可以到无穷大的，但是现实的物理世界中，能量不可能达到无穷大；
- 测不准原理说明，最大的物理能量限制了可以达到的最小可测尺度；
- 一个场论应该有其内在的物理标度，这个标度给出理论的使用范围，即提供了一个自然的紫外截断，比如标准模型的紫外截断参数为
Planck 质量 $M_{\text{planck}} \sim 10^{19} \text{ GeV}$;
- 超出此标度则理论有可能不再适用，需要引入新的自由度和新的动力学。
- 重整化的思想就是：中间虚过程（动量积分）是不可测量的，因此我们在计算动量积分时对理论做一些修改（正规化），使得积分有限；当所有的积分都处理好时，求和后的结果是有限的（重整化）并与正规化无关。

1. 正规化方案

1.1 数学准备

1. 费曼参数化:

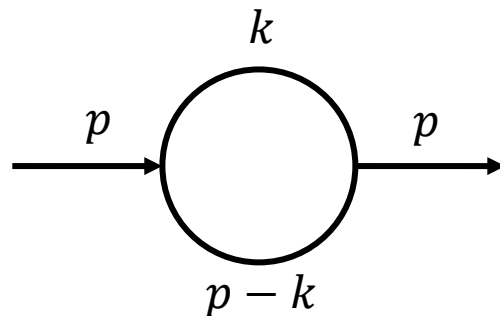
$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{[xA + (1-x)B]^2} = \int_0^1 dx dy \frac{1}{[xA + yB]^2} \delta(x + y - 1)$$

$$\frac{1}{AB^n} = \int_0^1 dx dy \frac{1}{[xA + yB]^{n+1}} \delta(1 - x - y)$$

$$\frac{1}{A_1 A_2 \cdots A_n} = \int_0^1 dx_1 dx_2 \cdots dx_n \delta\left(\sum x_i - 1\right) \frac{1}{[x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n]^n}$$

$$\frac{1}{A_1^{m_1} A_2^{m_2} \cdots A_n^{m_n}} = \int_0^1 dx_1 dx_2 \cdots dx_n \delta\left(\sum x_i - 1\right) \frac{\prod x_i^{m_i-1}}{[\sum x_i A_i]^{\sum m_i}} \frac{\Gamma(\sum m_i)}{\prod \Gamma(m_i)}$$

2. Wick转动



考虑 ϕ^3 理论的单圈图

$$-i\Sigma(p^2) = \frac{1}{2}(-i\lambda)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{(p-k)^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$$

令 $A = k^2 - m^2 + i\epsilon$, $B = (p-k)^2 - m^2 + i\epsilon$

$$-i\Sigma(p^2) = \frac{1}{2}\lambda^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{AB} = \frac{1}{2}\lambda^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(1-x)A + xB]^2}$$

$$(1-x)A + xB = (1-x)k^2 - (1-x)m^2 + i(1-x)\epsilon$$

$$+x(p-k)^2 - xm^2 + ix\epsilon$$

$$= (1-x)k^2 + xp^2 + xk^2 - 2x p \cdot k - m^2 + i\epsilon$$

$$= (k - xp)^2 + x(1-x) p^2 - m^2 + i\epsilon$$

令 $l = k - xp$, $\Delta = m^2 - x(1-x)p^2$

$$-i\Sigma(p^2) = \frac{\lambda^2}{2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{[l^2 - \Delta + i\epsilon]^2} \equiv \frac{\lambda^2}{2} \int_0^1 dx I(2, \Delta)$$

- 将 l^0 延拓到复平面，被积函数在一、三象限没有极点；

- 所以，如图中沿红色闭合路径的围道积分值为0；

- 两条圆弧在 $|l^0| \rightarrow \infty$ 时贡献为零；

- 所以， $\int_{-\infty}^{+\infty} dl^0 \dots + \int_{+i\infty}^{-i\infty} dl^0 \dots = 0$

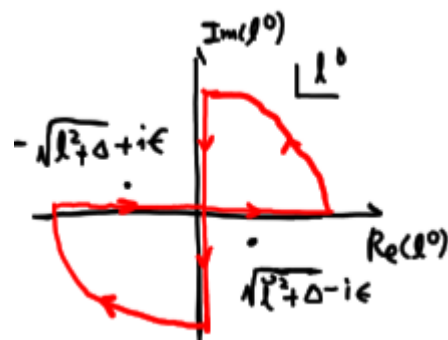
$$\int_{-\infty}^{+\infty} dl^0 \dots = - \int_{+i\infty}^{-i\infty} dl^0 \dots = \int_{-i\infty}^{+i\infty} dl^0 = i \int_{-\infty}^{+\infty} dl_E^0$$

- 这相当于将对 l^0 沿实轴的积分转到了沿虚轴的积分，做变量替换， $l^0 \rightarrow il_E^0$,

$$l_E^2 = l_E^{0^2} + \vec{l}^2 = -l^{0^2} + \vec{l}^2 = -l^2$$

- 最后，

$$I(2, \Delta) = \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{[l^2 - \Delta + i\epsilon]^2} = i \int \frac{d^4 l_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{[l_E^2 + \Delta]^2}$$



3. 多维欧氏空间体积元Wick

四维欧氏空间坐标用球坐标表示：

$$x_E = (r \sin \omega \sin \theta \cos \phi, r \sin \omega \sin \theta \sin \phi, r \sin \omega \cos \theta, r \cos \omega)$$

四维欧氏空间体积元可以写作

$$d^4 x_E = r^3 \sin^2 \omega \sin \theta \, d\phi d\theta d\omega dr = r^3 dr \, d\Omega_4$$

$$d\Omega_4 = \sin^2 \omega \sin \theta \, d\phi \, d\theta \, d\omega \quad \int d\Omega_4 = 2\pi^2$$

d 维欧氏空间体积积分

$$\begin{aligned} \int d^d l &= \int_0^\infty l^{d-1} dl \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^\pi \sin \theta_2 \, d\theta_2 \int_0^\pi \sin^2 \theta_3 \, d\theta_3 \cdots \\ &\quad \times \int_0^\pi \sin^{d-2} \theta_{d-1} \, d\theta_{d-1} = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \int_0^\infty l^{d-1} dl \end{aligned}$$

公式的由来：

$$\begin{aligned}(\sqrt{\pi})^d &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \right)^d = \int_{-\infty}^{\infty} d^d x e^{-\sum x_i^2} \\&= \int d\Omega_d \int_0^{\infty} dr r^{d-1} e^{-r^2} = \left(\int d\Omega_d \right) \frac{1}{2} \int_0^{\infty} d(x^2) (x^2)^{\frac{d}{2}-1} e^{-x^2} \\&= \left(\int d\Omega_d \right) \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\end{aligned}$$

这里使用了 Γ 的定义：

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} dt t^{z-1} e^{-t}$$

$$\left(\int d\Omega_d \right) = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$$

4. Γ 函数和 B 函数

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} dt t^{z-1} e^{-t}, \quad \Gamma(z) = (z-1)\Gamma(z-1), \quad \Gamma(n) = (n-1)!$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^z \right\}, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

伽马函数 $\Gamma(z)$ 有极点 $z = 0, -1, -2, -3, \dots$

伽马函数在极点处的展开:

$$z \rightarrow 0, \quad \Gamma(z) = \frac{1}{z} - \gamma + O(z),$$

$$z \rightarrow -n, \quad \Gamma(z) = \Gamma(-n + \epsilon) = \frac{(-)^n}{n!} \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma + \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} + O(\epsilon) \right]$$

$$\gamma \text{ 为 Euler 常数: } \gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} - \ln n = 0.5772 \dots$$

$$B \text{ 函数: } B(\alpha, \beta) = \int_0^1 dx x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

5. 典型的圈动量积分

1) 第一类典型的动量积分公式 ($\Delta > 0$)

$$I(a, \Delta) = \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{[l^2 - \Delta + i\epsilon]^a}$$

Wick 转动 $l^0 \rightarrow il_E^0, \quad l_E^2 = l_E^{0^2} + \vec{l}^2 = -l^{0^2} + \vec{l}^2 = -l^2$

$$\begin{aligned} I(a, \Delta) &= \frac{i}{(-1)^a} \int \frac{d^4 l_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{[l_E^2 + \Delta - i\epsilon]^a} \\ &= \frac{i(-1)^a}{(2\pi)^4} \int d\Omega_4 \int_0^\infty \frac{dl_E l_E^3}{[l_E^2 + \Delta - i\epsilon]^a} \end{aligned}$$

可以看出, 当 $a > 2$ 时, 积分可以简单积出

$$I(a, \Delta) = \frac{i(-1)^a}{(4\pi)^2} \frac{1}{(a-1)(a-2)} \frac{1}{\Delta^{a-2}}$$

当 $a \leq 2$ 时, 积分发散, 需要正规化。

2) 第二类典型的动量积分公式 ($\Delta > 0$)

$$J(a, \Delta) = \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{l^2}{[l^2 - \Delta + i\epsilon]^a}$$

这类动量积分出现在内线粒子为费米子（或非费曼规范的规范玻色子）的情形。

当 $a > 3$ 时，积分有定义，可以直接积出

$$J(a, \Delta) = \frac{i(-1)^{a-1}}{(4\pi)^2} \frac{2}{(a-1)(a-2)(a-3)} \frac{1}{\Delta^{a-3}}$$

当 $a \leq 3$ 时，积分发散，需要正规化。

1.2 发散积分的正规化

1. 简单的紫外截断正规化 $\int d^4 l_E \rightarrow \pi^2 \int_0^{\Lambda^2} dl_E^2 l_E^2$

既然动量积分发散来自积分限趋于无穷，一个最自然的正规化方式就是对积分上限引入一个紫外截断参数 Λ

$$I(a, \Delta) = \frac{i(-)^a}{(4\pi)^2} \int_0^{\Lambda^2} dl_E^2 \frac{l_E^2}{[l_E^2 + \Delta]^a}$$

$$I(1, \Delta) = -\frac{i}{(4\pi)^2} \left(\Lambda^2 - \Delta \ln \frac{\Lambda^2}{\Delta} + o\left(\frac{\Delta}{\Lambda^2}\right) \right), \quad \text{平方发散}$$

$$I(2, \Delta) = \frac{i}{(4\pi)^2} \left(\ln \frac{\Lambda^2}{\Delta} - 1 + o\left(\frac{\Delta}{\Lambda^2}\right) \right), \quad \text{对数发散}$$

紫外截断正规化很直观，但会破坏规范不变性（例如光子的自能修正，或者说真空极化图中，如果采用紫外截断正规化，会使Ward恒等式破坏，从而给光子引入一个无穷大的质量 $m_\gamma \propto e\Lambda$ ）

2. Pauli-Villars正规化

引入重粒子的耦合，即将传播子替换为

$$\frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \rightarrow \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} + \sum_i \frac{a_i}{k^2 - \Lambda_i^2 + i\epsilon}$$

- Λ_i^2 相当于紫外截断， a_i, Λ_i^2 可以任意选取，但要使动量积分收敛；
- 优点：既能保持洛伦兹协变，也能保证体系的对称性；
- 缺点：随着发散度的增大，发散的减除条件的选择会很复杂。

比如 $I(1, \Delta)$ 是平方发散的，但只引入一组 $(a_1, \Lambda_1^2) = (-1, \Lambda)$ 并不能完全消除发散，即

$$\begin{aligned} I(1, \Delta) &= -\frac{i}{(4\pi)^2} \int_0^{\Lambda_{UV}^2} dl_E^2 \left[\frac{l_E^2}{[l_E^2 + \Delta]} - \frac{l_E^2}{[l_E^2 + \Lambda^2]} \right] \\ &= -\frac{i}{(4\pi)^2} \left[-\Delta \ln \frac{\Lambda_{UV}^2}{\Delta} + \Lambda \ln \frac{\Lambda_{UV}^2}{\Lambda^2} \right] \end{aligned}$$

仍然发散。

引入两组 (a_i, Λ_i^2) ，并要求真规范化后的传播子的渐近行为

$$\frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} + \frac{a_1}{k^2 - \Lambda_1^2 + i\epsilon} + \frac{a_2}{k^2 - \Lambda_2^2 + i\epsilon} \rightarrow \frac{1}{k^6} \quad (k^2 \rightarrow \infty)$$

可以解出

$$a_1 = \frac{m^2 - \Lambda_2^2}{\Lambda_2^2 - \Lambda_1^2}, \quad a_2 = \frac{m^2 - \Lambda_1^2}{\Lambda_1^2 - \Lambda_2^2}$$

这时

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} + \frac{a_1}{k^2 - \Lambda_1^2 + i\epsilon} + \frac{a_2}{k^2 - \Lambda_2^2 + i\epsilon} \\ &= \frac{(\Lambda_1^2 - m^2)(\Lambda_2^2 - m^2)}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)(k^2 - \Lambda_1^2)(k^2 - \Lambda_2^2)} \rightarrow \frac{\Lambda^4}{(k^2 - m^2)(k^2 - \Lambda^2)^2} \quad (k^2 \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

显然积分可以收敛，

$$I(1, \Delta) \rightarrow -\frac{i}{(4\pi)^2} \left(\Lambda^2 - \Delta \ln \frac{\Lambda^2}{\Delta} \right)$$

3. 维数正规化

基本思想：

- 实际物理可观测量没有发散，微扰计算中的紫外发散来自动量积分。
- 把动量积分看作是时空维数的解析函数，可以降低时空维数（时空的维数体现在动量积分的积分测度上），从而使得动量积分收敛。
- 紫外发散将表现为取极限 $d \rightarrow 4$ 时的奇异性。
- 动量积分的有限部分可以通过选取合适的减除条件得到

令 $I_d(a, \Delta)$ 为 $d = 4 - 2\epsilon$ 时的动量积分 $I(a, \Delta)$ ，则

$$\begin{aligned} I_d(a, \Delta) &= \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{[l^2 - \Delta + i\epsilon]^a} = \frac{i}{(-)^a} \int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{[l_E^2 + \Delta - i\epsilon]^a} \\ &= \frac{2(\pi)^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \frac{i(-)^a}{(2\pi)^d} \int_0^\infty \frac{dl_E l_E^{d-1}}{[l_E^2 + \Delta - i\epsilon]^a} \\ &= \frac{i(-)^a}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{\Gamma(d/2)} \int_0^\infty \frac{dl_E^2 (l_E^2)^{\frac{d}{2}-1}}{[l_E^2 + \Delta - i\epsilon]^a} \end{aligned}$$

$$\left(\int d\Omega_d \right) = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$$

做变量替换 $x = \frac{\Delta}{l_E^2 + \Delta}$, $dl_E^2 = -\frac{\Delta}{x^2} dx$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{dl_E^2 (l_E^2)^{\frac{d}{2}-1}}{[l_E^2 + \Delta - i\epsilon]^a} &= \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{a-\frac{d}{2}} \int_0^1 dx x^{a-1-\frac{d}{2}} (1-x)^{\frac{d}{2}-1} \\ &= \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{a-\frac{d}{2}} B\left(a - \frac{d}{2}, \frac{d}{2}\right) = \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{a-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma\left(a - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(a)} \end{aligned}$$

所以有

$$I_d(a, \Delta) = \frac{i(-)^a}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma\left(a - \frac{d}{2}\right)}{\Gamma(a)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{a-\frac{d}{2}}$$

类似地，有

$$J_d(a, \Delta) = \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^2}{[l^2 - \Delta + i\epsilon]^a} = \frac{i(-)^{a-1}}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma\left(a - \frac{d}{2} - 1\right)}{\Gamma(a)} \frac{d}{2} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{a-\frac{d}{2}-1}$$

例如,

$$\begin{aligned} I_d(2, \Delta) &= \frac{i}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right)}{\Gamma(2)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2 - \frac{d}{2}} = \frac{i}{(4\pi)^2} (4\pi)^\epsilon \left(\frac{1}{\Delta}\right)^\epsilon \Gamma(\epsilon) \\ &= \frac{i}{(4\pi)^2} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \Delta + \ln 4\pi + O(\epsilon) \right) \end{aligned}$$

$$(4\pi)^\epsilon = e^{\epsilon \ln(4\pi)} = 1 + \epsilon \ln(4\pi) + \dots$$

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma + O(\epsilon^2)$$

$$\left(\frac{1}{\Delta}\right)^\epsilon = e^{-\epsilon \ln \Delta} = 1 - \epsilon \ln \Delta + O(\epsilon^2)$$

$$\begin{aligned} (4\pi)^\epsilon \left(\frac{1}{\Delta}\right)^\epsilon \Gamma(\epsilon) &= (1 + \epsilon \ln(4\pi) + \dots)(1 - \epsilon \ln \Delta + \dots) \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma + \dots\right) \\ &= \frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \Delta + \ln(4\pi) + \dots \end{aligned}$$

显然，在以上表达式中量纲有些问题，因为 Δ 的量纲为2，也就是说，当时空维数改变后，积分测度的量纲变化为 $4 \rightarrow 4 - 2\epsilon$ ，为了补偿这个量纲，使得积分保持原有的量纲，需要引入标度参量 $\tilde{\mu}$

$$I_d(a, \Delta) = \tilde{\mu}^{4-d} I_d(a, \Delta) = \frac{i(-)^a}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma\left(a - \frac{d}{2}\right)}{\Gamma(a)} \left(\frac{\tilde{\mu}^2}{\Delta}\right)^{a-\frac{d}{2}}$$

$$J_d(a, \Delta) = \tilde{\mu}^{4-d} J_d(a, \Delta) = \frac{i(-)^{a-1}}{(4\pi)^{d/2}} \frac{d}{2} \frac{\Gamma\left(a - \frac{d}{2} - 1\right)}{\Gamma(a)} \left(\frac{\tilde{\mu}^2}{\Delta}\right)^{1-\frac{d}{2}} \Delta^{2-a} \tilde{\mu}^2$$

这时

$$I_d(1, \Delta) = \frac{i}{(4\pi)^2} \Delta \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi - \ln \frac{\Delta}{\tilde{\mu}^2} + 1 + O(\epsilon) \right)$$

$$I_d(2, \Delta) = \frac{i}{(4\pi)^2} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi - \ln \frac{\Delta}{\tilde{\mu}^2} + O(\epsilon) \right)$$

在维数正规化中， $-\gamma + \ln 4\pi + \ln \tilde{\mu}^2$ 经常一起出现，
所以为了方便起见，我们取标度参量来消除常数 $-\gamma + \ln 4\pi$

$$\tilde{\mu}^2 = \frac{e^\gamma}{4\pi} \mu^2 \quad \longrightarrow \quad -\gamma + \ln 4\pi + \ln \tilde{\mu}^2 = \ln \mu^2$$

$$I(2, \Delta) = \frac{i}{(4\pi)^2} \left(\frac{1}{\epsilon} - \ln \frac{\Delta}{\mu^2} + O(\epsilon) \right)$$

$$I(1, \Delta) = \frac{i}{(4\pi)^2} \Delta \left(\frac{1}{\epsilon} - \ln \frac{\Delta}{\mu^2} + O(\epsilon) \right)$$

注意：

- μ^2 并不是我们前面PV和紫外截断正规化中的大动量截断参量，而是为了保证量纲正确而引入的。
- 在维数正规化中，我们引入了两个参量， (ϵ, μ^2) ，它们都会在物理观测量中消失。
- 维数正规化中，紫外发散表现为 $\frac{1}{\epsilon}$ 的项的出现。

根据普通的数幂律 (power counting) $I(1, \Delta)$ 是平方发散的, 而 $I(2, \Delta)$ 是对数发散的。但这两种发散在维数正规化的最终表达式中没有明显的差别。实际上, $I(1, \Delta)$ 的极点来自 $\Gamma(1 - d/2)$ 的极点项, $I(2, \Delta)$ 的发散来自 $\Gamma(2 - d/2)$ 当 $d \rightarrow 4$ 时的发散。也就是说, 在维数正规化中, 紫外发散度转变为d维时空振幅的奇异性。

当计算有费米子参与的振幅时, 会涉及到 γ 矩阵的操作。四维时空的 γ 矩阵操作和d维时空的 γ 矩阵操作会有些不同, 我们在这里给出d维时空的 γ 矩阵的明确约定:

$$\begin{aligned}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= 2 g^{\mu\nu}, & \gamma^\mu \gamma_\mu &= \delta_\mu^\mu = d, \\ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu &= \gamma^\mu \{\gamma^\nu, \gamma_\mu\} - \gamma^\mu \gamma_\mu \gamma^\nu = (2 - d) \gamma^\nu \\ \text{Tr} (\gamma^\mu \gamma^\nu) &= \frac{1}{2} \text{Tr} (\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}) = 4 g^{\mu\nu} \\ \text{Tr} (\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) &= 4 (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \\ \{\gamma_5, \gamma^\mu\} &= 0, & \text{Tr}(\gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) &\text{没有定义}\end{aligned}$$

4. 紫外截断正规化和维数正规化的对比

紫外截断正规化:

$$I(1, \Delta) = -\frac{i}{(4\pi)^2} \left(\Lambda^2 - \Delta \ln \frac{\Lambda^2}{\Delta} + O\left(\frac{\Delta}{\Lambda^2}\right) \right),$$

$$I(2, \Delta) = \frac{i}{(4\pi)^2} \left(\ln \frac{\Lambda^2}{\Delta} - 1 + O\left(\frac{\Delta}{\Lambda^2}\right) \right)$$

维数正规化:

$$I(1, \Delta) = \frac{i}{(4\pi)^2} \Delta \left(\frac{1}{\epsilon} - \ln \frac{\Delta}{\mu^2} + 1 + O(\epsilon) \right),$$

$$I(2, \Delta) = \frac{i}{(4\pi)^2} \left(\frac{1}{\epsilon} - \ln \frac{\Delta}{\mu^2} + O(\epsilon) \right)$$

紫外截断正规化和维数正规化中的发散的表现形式有这样的对应关系

$$\ln \frac{\Lambda^2}{\Delta} - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\epsilon} - \ln \frac{\Delta}{\mu^2}$$

- 物理观测量时有限的，紫外发散式不可观测的。因此，我们可以通过某种减除条件（重整化条件）对紫外发散进行减除，从而得到有限的物理参数（如质量、耦合常数等），并由此给出其它物理量的观测值。
- 发散积分中的有限项应该是与正规化方案无关的，不管用什么样的正规化，**应该保证有限的部分是一致的。**

2. 重正化方案

2.1 裸微扰论

重整化假设：

实验上的能量不能取无穷大，但我们可以建立有限能标下可观测量之间的关系。这些观测量（物理参量）与实验能量（截断或重整化标度）依赖不大（但仍有依赖性）。

假设 $\mathcal{L}(\phi_0; m_0, \lambda_0)$ 是具有完整的Lorentz不变性、到无穷大能标都成立的完整理论的拉氏量，但是裸场 ϕ_0 和裸参量 (m_0, λ_0) 是物理上不可测的。


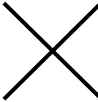
通过计算，建立物理可观测量（重整化量）和这些参量之间的联系（重正化条件或重正化点） $m = m(m_0, \lambda_0; \Lambda)$, $\lambda = \lambda(m_0, \lambda_0; \Lambda)$ ，其中 Λ 泛指重整化参量。

利用重正化后的 (ϕ, m, λ) 来计算其他物理观测量 $f_{obs} = f_{obs}(m, \lambda)$ ，这些预言值可以在微扰论各阶进行，与重整化过程无关。

1. ϕ^4 理论的单圈重正化过程



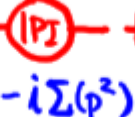

ϕ^4 理论的拉氏量:
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_0)^2 - \frac{1}{2}m_0^2 \phi_0^2 - \frac{1}{4!}\lambda_0 \phi_0^4$$

费曼规则

 $\frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon}$  $-i\lambda_0$

1) 自能修正

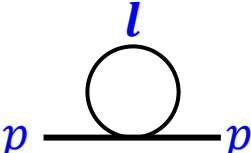
标量场的全传播子

 $D(p)$ $=$  $+$  $-i\Sigma(p^2)$ $+$  $+$ \dots

$$D(p) = \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} + \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} (-i\Sigma(p^2)) \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} + \dots$$

$$= \frac{i}{p^2 - m_0^2 - \Sigma(p^2) + i\epsilon}$$

在单圈水平上, $-i\Sigma(p^2)$ 为



$$-i\Sigma(p^2) = -\frac{1}{2}i\lambda_0 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{i}{l^2 - m_0^2 + i\epsilon}$$

a) 发散的分离:

这是二次发散的, 认识其发散部分的一个简单办法是对外线动量在物理质量 m^2 处 (重正化点, 也可以不是物理质量) 进行**泰勒展开**,

$$\Sigma(p^2) = \Sigma(m^2) + (p^2 - m^2) \frac{\partial}{\partial p^2} \Sigma(p^2) \Big|_{p^2=m^2} + \tilde{\Sigma}(p^2)$$

- **第一项 $\Sigma(m^2)$ 是平方发散的** (它保持了 $\Sigma(p^2)$ 的发散特征)。
- **第二项为对数发散** (在单圈水平上为零——圈积分和外线动量无关, 高圈时会依赖外线动量): 对外线动量的依赖体现于费曼图的内线传播子上; 对外线动量求偏导数会增被积函数的分母对圈动量 l 的幂次, 从而降低发散性, 发散会从平方发散降低为对数发散。
- **第三项是有限的**。因为一次微商已经变为对数发散, 而第三项中包含高阶导数项。

全传播子 $D(p)$ 可以表示为

$$\Sigma'(m^2) \equiv \frac{\partial}{\partial p^2} \Sigma(p^2) \Big|_{p^2=m^2}$$

$$D(p) = \frac{i}{p^2 - m_0^2 - \Sigma(m^2) - (p^2 - m^2)\Sigma'(m^2) - \tilde{\Sigma}(p^2) + i\epsilon}$$

单圈水平上, ϕ^4 理论有 $\Sigma'(p^2) = \tilde{\Sigma}(p^2) = 0$, 但高阶图不为零。我们在这里讨论时仍将按它们不为零来处理。

b) 物理质量 m

实际上我们在上面展开时就假设是在物理质量处进行展开，物理质量满足质壳条件 $p^2 - m^2 = 0$ （全传播子的极点），其值有以下方程确定

$$m_0^2 + \Sigma(m^2) = m^2$$

在微扰论的每一阶，我们都可以通过该方程求解物理质量（正规化后）

$$m^2 = m^2(m_0, \lambda_0, \Lambda)$$

c) 场的波函数重正化常数 Z_ϕ

$$D(p) = \frac{i}{(p^2 - m^2)(1 - \Sigma'(m^2)) - \tilde{\Sigma}(p^2) + i\epsilon}$$

利用 $\tilde{\Sigma}(p^2 = m^2) = 0$ 这个隐含条件，采用近似 $\tilde{\Sigma}(p^2) = (1 - \Sigma'(m^2)) \tilde{\Sigma}(p^2)$ (λ_0 数幂律, $\Sigma'(m^2) \propto O(\lambda)$)

$$D(p) = \frac{i Z_\phi}{p^2 - m^2 - \tilde{\Sigma}(p^2) + i\epsilon}$$

$$Z_\phi = \frac{1}{1 - \Sigma'(m^2)} \approx 1 + \Sigma'(m^2) + O(\lambda_0^2)$$

小结一下：

- 1) 自能修正给出质量重整化和波函数重整化；
- 2) 质量重整化： $m^2 = m_0^2 + \Sigma(m^2)$ ，其中 m_0^2 和 $\Sigma(m^2)$ 发散，但二者发散相互抵消，从而保证重整化质量 m^2 有限；
- 3) 定义重整化的场： $\phi_0 = Z_\phi^{1/2} \phi$ ，其中 $Z_\phi = 1 + \Sigma'(m^2)$ 为波函数重整化常数， ϕ 为重整化后的场；
- 4) 重整化后的全传播子完全有限， Z_ϕ 中的发散抵消了圈图中的发散。

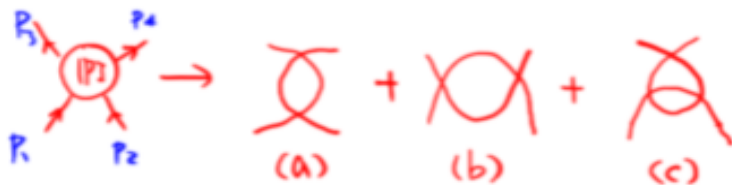
$$\begin{aligned} D_R(p) &= \int d^4x \, e^{ip \cdot x} \langle \Omega | T \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle \\ &= \frac{i}{p^2 - m^2 - \tilde{\Sigma}(p^2) + i\epsilon} \equiv Z_\phi D(p, m^2) \end{aligned}$$

2) 顶角重整化

顶角函数的费曼图为



在单圈水平上，单粒子不可约图 $\Gamma(p^2)$ 由三个图贡献：



图a, b, c 分别为 s, t, u 道贡献，它们分别和Mandelstam变量 s, t, u 有关

$$s = (p_1 + p_2)^2 = p^2, \quad t = (p_1 - p_3)^2, \quad u = (p_1 - p_4)^2$$

$$s + t + u = 4m^2$$

(注意这里的 m^2 是物理质量，要求四个外线粒子都在壳 $p_i^2 = m^2$)

$$\Gamma_a = \Gamma(p^2) = \frac{(-i\lambda_0)^2}{2} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{i}{(l-p)^2 - m_0^2 + i\epsilon} \frac{i}{l^2 - m_0^2 + i\epsilon} \equiv \Gamma(s)$$

$$\Gamma_b = \Gamma(t), \quad \Gamma_c = \Gamma(u)$$

$\Gamma(p^2)$ 是对数发散的，具体的圈积分过程如下：

$$\begin{aligned}
 \Gamma(p^2) &= \frac{\lambda_0^2}{2} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l-p)^2 - m_0^2 + i\epsilon} \frac{1}{l^2 - m_0^2 + i\epsilon} \\
 &= \frac{\lambda_0^2}{2} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{1}{\left[(1-x)(l^2 - m_0^2 + i\epsilon) + x((l-p)^2 - m_0^2 + i\epsilon) \right]^2} \\
 &= \frac{\lambda_0^2}{2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{[l^2 - \Delta + i\epsilon]^2} = \frac{\lambda_0^2}{2} \int_0^1 dx I_d(2, \Delta) \\
 &= \frac{\lambda_0^2}{2} \frac{i}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \left[\frac{1}{\epsilon} - \ln \frac{\Delta}{\mu^2} + \dots \right] \quad \boxed{\Delta = m_0^2 - x(1-x)p^2} \\
 &= \frac{i\lambda_0^2}{32\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} - \ln \frac{m_0^2}{\mu^2} - A(p^2) + \dots \right]
 \end{aligned}$$

其中， $A(p^2)$ 为

$$A(p^2) = \int_0^1 dx \ln \left[1 - x(1-x) \frac{p^2}{m_0^2} \right]$$

树图部分和三个单圈图的贡献，我们就得到单圈的四点顶点函数：

$$\Gamma^{(4)}(s, t, u) = -i\lambda_0 + \Gamma(s) + \Gamma(t) + \Gamma(u)$$

a) 重正化点的选取：

选择对称点 $s_0 = u_0 = t_0 = \frac{4m^2}{3}$ 作为重正化点。

b) 发散的分离：

将四点函数在对称点附件进行泰勒展开

$$\Gamma^{(4)}(s, t, u) = -i\lambda_0 + 3\Gamma(s_0) + \tilde{\Gamma}(s) + \tilde{\Gamma}(t) + \tilde{\Gamma}(u)$$

其中 $\tilde{\Gamma}(s_i) = \Gamma(s_i) - \Gamma(s_0)$ 是有限的，且 $\tilde{\Gamma}(s_0) = 0$

c) 顶角重整化常数

$$-iZ_\lambda^{-1}\lambda_0 = -i\lambda_0 + 3\Gamma(s_0)$$

$$\Gamma^{(4)}(s, t, u) = -iZ_\lambda^{-1}\lambda_0 + \tilde{\Gamma}(s) + \tilde{\Gamma}(t) + \tilde{\Gamma}(u)$$

根据 **LSZ 约化公式**, $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$ 过程的散射振幅与重整化的四点正规顶点 $\Gamma_R^{(4)}(s, t, u)$ 直接相关

$$\Gamma_R^{(4)}(s, t, u) = Z_\phi^2 \Gamma^{(4)}(s, t, u)$$

这样, 如果我们利用 $\Gamma_R^{(4)}(s, t, u)$ 在对称点的值来定义重整化的耦合常数 λ

$$\Gamma_R^{(4)}(s_0, t_0, u_0) = -i\lambda$$

我们就得到重整化耦合常数 λ 和裸耦合常数 λ_0 之间的关系

$$\lambda = Z_\phi^2 Z_\lambda^{-1} \lambda_0$$

由于 $Z_\phi = 1 + O(\lambda_0)$, $\tilde{\Gamma} = O(\lambda_0^2)$, $\lambda = \lambda_0 + O(\lambda_0^2)$,

$$\begin{aligned}\Gamma_R^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= Z_\phi^2 \Gamma^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) \\ &= -iZ_\phi^2 Z_\lambda^{-1} \lambda_0 + Z_\phi^2 [\tilde{\Gamma}(s) + \tilde{\Gamma}(t) + \tilde{\Gamma}(u)] \\ &= -i\lambda + Z_\phi^2 [\tilde{\Gamma}(s) + \tilde{\Gamma}(t) + \tilde{\Gamma}(u)] \\ &= -i\lambda + \tilde{\Gamma}(s) + \tilde{\Gamma}(t) + \tilde{\Gamma}(u) + O(\lambda^3) \quad \text{完全有限!}\end{aligned}$$

2. ϕ^4 理论的格林函数重正化

我们将上面对全传播子（两点格林函数）的重正化可以自然推广到多点格林函数的重正化。

如果裸的 n 点格林函数记作

$$G^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \langle \Omega | T \phi_0(x_1) \phi_0(x_2) \cdots \phi_0(x_n) | \Omega \rangle$$

重正化后的 n 点格林函数

裸场被重正化场替换

$$G_R^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \langle \Omega | T \phi(x_1) \phi(x_2) \cdots \phi(x_n) | \Omega \rangle$$

$$= Z_\phi^{-n/2} G^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$


$$\phi_0 = Z_\phi^{1/2} \phi$$

动量空间

$$\tilde{G}_R^{(n)}(p_1, p_2, \dots, p_n) = Z_\phi^{-n/2} \tilde{G}^{(n)}(p_1, p_2, \dots, p_n)$$

裸的截腿格林函数 (amputated Green's function) $\tilde{G}_c^{(n),amp}(p_1, p_2, \dots, p_n)$

$$\tilde{G}_c^{(n)}(p_1, p_2, \dots, p_n) = \left(\prod_{i=1}^n \frac{iZ_\phi}{p_i^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \tilde{G}_c^{(n),amp}(p_1, p_2, \dots, p_n)$$


全传播子

$$\tilde{G}_{c,R}^{(n)}(p_1, p_2, \dots, p_n) = Z_\phi^{-n/2} \left(\prod_{i=1}^n \frac{iZ_\phi}{p_i^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \tilde{G}_c^{(n),amp}(p_1, p_2, \dots, p_n)$$

$$D_R(p_i; m^2) = \frac{i}{p_i^2 - m^2 + i\epsilon}$$

$$= Z_\phi^{-n/2} Z_\phi^n \left(\prod_{i=1}^n D_R(p_i; m^2) \right) \tilde{G}_c^{(n),amp}(p_1, p_2, \dots, p_n)$$

$$= \left(\prod_{i=1}^n D_R(p_i; m^2) \right) Z_\phi^{n/2} \tilde{G}_c^{(n),amp}(p_1, p_2, \dots, p_n)$$

$$\equiv \left(\prod_{i=1}^n D_R(p_i; m^2) \right) \tilde{G}_{c,R}^{(n),amp}(p_1, p_2, \dots, p_n)$$

}

重整化后的截腿格林函数

$$\tilde{G}_{c,R}^{(n),amp}(p_1, p_2, \dots, p_n) = Z_\phi^{n/2} \tilde{G}_c^{(n),amp}(p_1, p_2, \dots, p_n)$$

LSZ约化公式:

$$i\mathcal{M}(p_1, p_2, \dots, p_n) \propto \lim_{p_i^2 \rightarrow m^2} \tilde{G}_{c,R}^{(n),amp}(p_1, p_2, \dots, p_n)$$

单粒子不可约图 (1PI) , 即不可约顶点

$$\Gamma_R^{(n)}(p_1, p_2, \dots, p_n) = Z_\phi^{n/2} \Gamma^{(n)}(p_1, p_2, \dots, p_n)$$

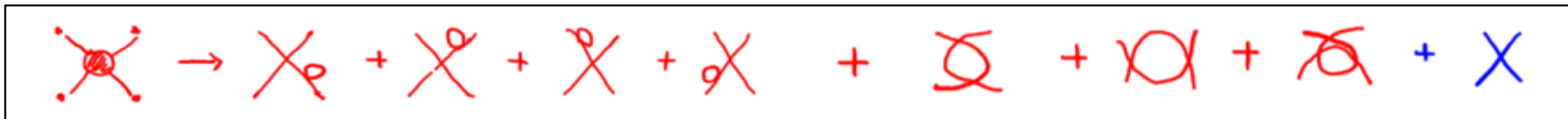
- 我们在前面用的是在壳重整化条件, 这时 $Z_\phi = Z_{OS}$ 。
- 如果我们选取其它的重正化条件, 则要得到在壳的 S 矩阵元, 则需要一个适配的因子(matching factor)

$$S(p_1, p_2, \dots, p_n) = \frac{Z_{OS}^{n/2}}{Z_\phi^{n/2}} i\Gamma_R^{(n)}(p_1, p_2, \dots, p_n)$$

3. ϕ^4 理论单圈水平上四点连通格林函数的计算

我们对单圈水平上 ϕ^4 理论中四点连通格林函数的计算做一个完整的练习。

四点函数会有如下费曼图的贡献：



$$\begin{aligned}
 \tilde{G}_c^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= \prod_{i=1}^4 \frac{i}{p_i^2 - m_0^2 + i\epsilon} \left((-i\lambda_0) \sum_{k=1}^4 (-i\Sigma(p_k^2)) \frac{i}{p_k^2 - m_0^2 + i\epsilon} \right) \\
 &\quad + \prod_{i=1}^4 \frac{i}{p_i^2 - m_0^2 + i\epsilon} [-i\lambda_0 + 3\Gamma(s_0) + \tilde{\Gamma}(s) + \tilde{\Gamma}(t) + \tilde{\Gamma}(u)] \\
 &= \prod_{i=1}^4 \frac{i}{p_i^2 - m_0^2 + i\epsilon} \left(-i\lambda_0 - i\lambda_0 \sum_{k=1}^4 (-i\Sigma(p_k^2)) \frac{i}{p_k^2 - m_0^2 + i\epsilon} \right) \\
 &\quad + \prod_{i=1}^4 \frac{i}{p_i^2 - m_0^2 + i\epsilon} [3\Gamma(s_0) + \tilde{\Gamma}(s) + \tilde{\Gamma}(t) + \tilde{\Gamma}(u)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{i=1}^4 \frac{i(-i\lambda_0)}{p_i^2 - m_0^2 - \Sigma(p_i^2) + i\epsilon} + \prod_{i=1}^4 \frac{i}{p_i^2 - m_0^2 + i\epsilon} [3\Gamma(s_0) + \tilde{\Gamma}(s) + \tilde{\Gamma}(t) + \tilde{\Gamma}(u)] \\
&\approx \prod_{i=1}^4 \frac{i}{p_i^2 - m_0^2 - \Sigma(p_i^2) + i\epsilon} [-i\lambda_0 + 3\Gamma(s_0) + \tilde{\Gamma}(s) + \tilde{\Gamma}(t) + \tilde{\Gamma}(u)] \\
&\approx \left(\prod_{i=1}^4 D(p_i) \right) \Gamma^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)
\end{aligned}$$

重正化后的连通格林函数为

$$\begin{aligned}
G_{c,R}^{(4)} &= Z_\phi^{-2} G_c^{(4)} = \left(\prod_{i=1}^4 Z_\phi^{-1} D(p_i) \right) Z_\phi^2 \Gamma^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) \\
&= \left(\prod_{i=1}^4 D_R(p_i) \right) \Gamma_R^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)
\end{aligned}$$

在单圈近似下，质量、波函数和顶角的重正化可以消除所有的发散。

i) 场、质量和顶角的重正化:

$$\phi = Z_\phi^{-1/2} \phi_0, \quad m^2 = m_0^2 + \delta m^2, \quad \delta m^2 = \Sigma(m^2), \quad \lambda = Z_\lambda^{-1} Z_\phi^2 \lambda_0$$

ii) 由物理的振幅定义物理的耦合常数 λ

$$\text{重正化点选为对称点 } s = t = u = \frac{4m^2}{3} = s_0$$

$$\begin{aligned} \Gamma_R^{(4)}(s, t, u) \Big|_{s=t=u=s_0} &= Z_\phi^2 \Gamma^{(4)}(s, t, u) \Big|_{s=t=u=s_0} = -i\lambda \\ &= \left(1 + \mathcal{O}(\lambda_0^2)\right)^2 \left[-i\lambda_0 + \frac{i3\lambda_0^2}{32\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon} - \ln \frac{m_0^2}{\mu^2} - A(s_0) \right) + \mathcal{O}(\lambda_0^3) \right] \\ &= -i\lambda_0 + \frac{i3\lambda_0^2}{32\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon} - \ln \frac{m_0^2}{\mu^2} - A(s_0) \right) + \mathcal{O}(\lambda_0^3) \end{aligned}$$

反解出 λ_0

$$\lambda_0 = \lambda + \frac{3\lambda^2}{32\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon} - \ln \frac{m_0^2}{\mu^2} - A(s_0) \right) + \mathcal{O}(\lambda^3)$$

iii) 其它能量点的散射振幅 (将 λ_0 替换为 λ)

$$\begin{aligned}
 \Gamma_R^{(4)}(s, t, u) &= \left(1 + \mathcal{O}(\lambda^2)\right)^2 \left[-i\lambda_0 + \frac{i3\lambda_0^2}{32\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon} - \ln \frac{m_0^2}{\mu^2} - \frac{1}{3} (A(s) + A(t) + A(u)) \right) + \mathcal{O}(\lambda^3) \right] \\
 &= -i\lambda_0 \left[1 - \frac{3\lambda_0}{32\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon} - \ln \frac{m_0^2}{\mu^2} - \frac{1}{3} (A(s) + A(t) + A(u)) \right) + \mathcal{O}(\lambda^2) \right] \\
 &= -i \left(\lambda + \frac{3\lambda^2}{32\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon} - \ln \frac{m_0^2}{\mu^2} - A(s_0) \right) + \mathcal{O}(\lambda^2) \right) \\
 &\quad \times \left[1 - \frac{3\lambda}{32\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon} - \ln \frac{m_0^2}{\mu^2} - \frac{1}{3} (A(s) + A(t) + A(u)) \right) + \mathcal{O}(\lambda^2) \right] \\
 &= -i \left[\lambda + \frac{3\lambda^2}{32\pi^2} \left(\frac{1}{3} (A(s) + A(t) + A(u)) - A(s_0) \right) + \mathcal{O}(\lambda^3) \right]
 \end{aligned}$$

这个振幅显然是有限的, 而且不依赖于标度参量 μ 。

iv) 不同重正化点的差异

取重正化点为 $s = 4m^2, t = u = 0$

$$\Gamma_R^{(4)}(s, t, u) \Big|_{s=4m^2, t=u=0} = -i\lambda'$$
$$= -i \left[\lambda + \frac{3\lambda^2}{32\pi^2} \left(\frac{1}{3} A(s) - A(s_0) \right) + \mathcal{O}(\lambda^3) \right]$$

$$\lambda' = \lambda + \frac{3\lambda^2}{32\pi^2} \left(\frac{1}{3} A(4m^2) - A\left(\frac{4m^2}{3}\right) \right) + \mathcal{O}(\lambda^3)$$

即不同的重正化点给出不同的重正化耦合常数。

2.2 紫外发散费曼图的一般性讨论

- ϕ^4 理论在单圈水平上存在两种发散图——自能图和四线顶点函数；
- 处理好这两种发散图后，单圈水平上的重正化就可以完整地进行；
- 可重正的场论，微扰论的每一阶，发散图的数目是有限的；
- 费曼图是否发散——“表观发散度”（superficial divergence degree）。

$$D = (\text{分子上的内线动量幂次}) - (\text{分母上的内线动量幂次})$$

$$D > 0: \text{发散}; D = 0 \text{ 对数发散}; D < 0 \text{ 收敛}$$

1. 表观发散度 D 和可重正性

首先以 d 维时空的 ϕ^n 标量场理论为例，其拉氏量为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2 \phi^2 - \frac{1}{n!}\lambda \phi^n$$

$S = \int d^d x \mathcal{L}$ 无量纲（自然单位制），所以 \mathcal{L} 的质量量纲 $[\mathcal{L}] = d$ ，再利用 $[\partial_\mu] = 1$ ， $[m] = 1$ ，很容易得到

$$[\phi] = \frac{d-2}{2}, \quad [\lambda] = d - \frac{n(d-2)}{2}$$

a) 一个费曼图有 N 条外线, P 条内线传播子, V 个相互作用顶点, 则圈动量数为 $L = P - V + 1$ (这个结论和时空维数无关);

b) 由于每个顶点上有 n 条粒子线的汇聚, 所以有 $nV = N + 2P$

c) 动量空间的传播子的量纲为 -2

$$D(x, y) = \langle \Omega | T \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \tilde{D}(p) e^{-ip \cdot (x-y)}$$

$$[D(x, y)] = d - 2 \Rightarrow [\tilde{D}(p)] = -2$$

d) 费曼图表观发散度 D 的一个自然的定义

$$D = (\text{分子上的内线动量幂次}) - (\text{分母上的内线动量幂次})$$

$$= dL - 2P = d + \left[\frac{n(d-2)}{2} - d \right] V - \frac{d-2}{2} N$$

理论的可重正性和时空维数 d 以及 ϕ^n 的幂次 n 是密切相关的。
(微扰展开阶次由顶点数 V , 表达, 只有其系数小于等于零时, 理论才是可重正的)

- 当 $d = 2$ 时，理论是可重正的：这时 $D = 2 - 2V$ ，只和顶点数有关，而且只有 $V = 1$ 时 $D \geq 0$ ，而这时是树图贡献。
- 当 $d = 4$ 时： ϕ^n 理论在 $n = 3, 4$ 时是可重正的，但 $n > 4$ 时是不可重正的。

e) 相互作用耦合常数的维数 $[\lambda] = d - \frac{n(d-2)}{2}$

$$D = d - [\lambda]V - \frac{d-2}{2}N$$

当时空维数 $d \geq 2$ 时

- $[\lambda] > 0$ 时：即耦合常数有正的质量量纲，则理论是超可重正的，因为发散图只出现在微扰论的有限阶；
- $[\lambda] = 0$ 时：即耦合常数是无量纲的，理论是可重正的，因为发散图是有限的。
- $[\lambda] < 0$ 时：即耦合常数质量量纲为负，理论不可重正，因为随着微扰展开的阶次提高，发散的图会越来越多。

尽管上述结论是基于 ϕ^n 缠论模型得到的，但具有普遍性，对所有的场论都成立。

2. QED 中的紫外发散费曼图

a) QED 中的表观发散度



$$D = 4L - P_e - 2P_\gamma$$

内线电子传播子数 (P_e)，内线光子传播子数 (P_γ) 和动量积分数目 (L)

内线动量积分数 (L) 与内线传播子数和顶点数的关系为

$$L = P_e + P_\gamma - V + 1$$

每个电磁相互作用顶点有一条光子线，每个光子传播子连接两个顶点，每条光子外线连接一个顶点。另外，每个顶点有两条电子线，每个电子传播子连接两个顶点，一条外线电子线连接一个顶点。

外线电子数 (N_e)，外线光子数 (N_γ)

$$V = 2P_\gamma + N_\gamma = \frac{1}{2}(2P_e + N_e)$$

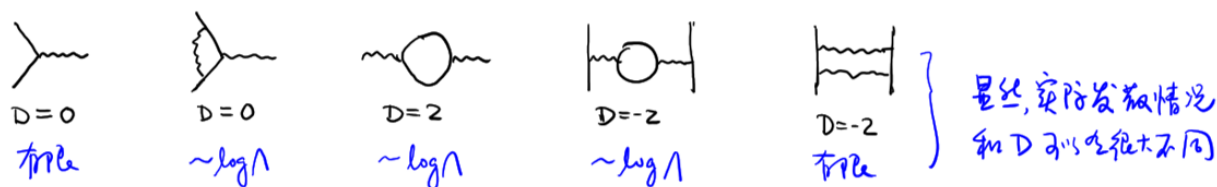
表观发散度 D 可以直接用光子外线和电子外线的数目来表示

$$D = 4 - N_\gamma - \frac{3}{2}N_e$$

b) QED中表观发散度 D 和实际发散度

费曼图的实际发散情况偏离表观发散度的情况一般有如下几种：

- 如果一个费曼图存在发散的子图，则实际发散度可能高于 D ；
- 如果存在对称性使某些项相消，则有可能降低或消除发散；
- 当 $D = 0$ 但同时 $L = 0$ ，则没有发散。



QED 表观发散度只依赖于外线粒子数，在QED中表观发散的图的类型是有限的，可重正。可能发散的图满足

$$N_\gamma \leq 4, \quad N_e \leq 2$$



$N_\gamma = 0, N_e = 0, D = 4$: 发散度最高，但只贡献真空能，不对 S 矩阵元贡献；



$N_\gamma = 1$, $N_e = 0$, $D = 3$: 光子外线必然连接到一个电磁顶点, 根据LSZ约化公式, 该振幅正比于

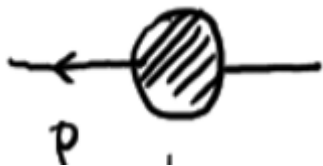
$$-ie \int d^4x e^{-iq \cdot x} \langle \Omega | T j_\mu(x) | \Omega \rangle$$

由于 $j_\mu(x)$ 是一个洛伦兹矢量, 其真空期望值为零。另外, C 宇称守恒也要求

$$\langle \Omega | T j_\mu(x) | \Omega \rangle = \langle \Omega | C^{-1} T C j_\mu(x) C^{-1} C | \Omega \rangle = - \langle \Omega | T j_\mu(x) | \Omega \rangle = 0$$



$N_\gamma = 3$, $N_e = 0$, $D = 1$: 这个图的贡献为零, 这由C宇称守恒决定 (Furry定理)。另外, 和上面的情况类似, 根据LSZ约化公式, 这种单粒子不可约图和三个矢量流编时乘积的真空期望值联系起来, 而后者为零。



$N_\gamma = 0$, $N_e = 2$, $D = 1$: 这是电子自能图，它是外动量 p 的函数。分析它的发散性之可以在 $p = 0$ 附近做泰勒展开

$$\Sigma(p) = A_0 + A_1 \gamma \cdot p + A_2 p^2 + \dots$$

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dp^n} \Sigma(p) \Big|_{p=0}$$

对电子自能图有贡献的图对外线动量 p 的依赖来自于传播子的分母部分，所以要计算 A_n ，可以先对传播子微商，比如对电子传播子的微商

$$\frac{d}{d(\gamma \cdot p)} \frac{1}{\gamma \cdot (k + p) - m + i\epsilon} = - \frac{1}{(\gamma \cdot (k + p) - m + i\epsilon)^2}$$

这样会降低图的表现发散度：

A_0 必然是线性发散的， A_1 是对数发散的（表现发散度为0）， A_n ($n \geq 2$) 是紫外有限的

- 对于电子自能，如果 $A_0 \propto \Lambda$ ，则电子质量修正就会包含一项正比于 Λ 。
- 手征对称性的要求：电子质量的辐射修正必须正比于电子质量（手征极限不会被辐射修正改变），所以 $A_0 = 0$ ，这样自能图应该是对数发散的

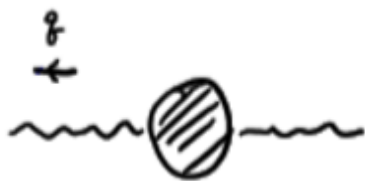
$$\Sigma(p) = (a_0 m + a_1 \gamma \cdot p) \ln \Lambda + \text{有限项}$$

$$\begin{aligned} \delta m &= m - m_0 = \Sigma(\gamma \cdot p = m) \approx \Sigma(\gamma \cdot p \approx m_0) \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} m_0 \int_0^1 dx (2-x) \ln \frac{\Lambda^2}{(1-x^2)m_0^2 + x\mu^2} \end{aligned}$$



$N_\gamma = 1$, $N_e = 2$, $D = 0$: 这是QED的顶角图。如果对三个外线动量做泰勒展开，会发现只有常数项是对数发散的，其它都是有限项，即

$$-ie\Gamma_\mu \propto -ie\gamma_\mu \ln \Lambda + \text{有限项}$$



$N_\gamma = 2$, $N_e = 0$, $D = 2$: 这是光子自能图 $\Pi^{\mu\nu}(p)$, 或者由称作真空极化图。根据Ward恒等式 $p_\mu \Pi^{\mu\nu}(p) = 0$, $\Pi^{\mu\nu}(p)$ 应该是纯横向的, 即具有如下的洛伦兹结构

$$\Pi^{\mu\nu}(p) = (g^{\mu\nu}p^2 - p^\mu p^\nu)\Pi(p^2)$$

如果将此表达式看成 p 的泰勒展开, 常数项和线性项都消失了, 实际的发散度自然降低, 唯一的发散来自 $\Pi(p^2)$ 的常数项 $\Pi(0)$, 实际计算表明是对数发散。



$N_\gamma = 4$, $N_e = 0$, $D = 0$: 这是四光子顶点 $T^{\mu\nu\rho\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4)$, 表观发散度为0 (是对数发散)。

Ward恒等式要求: 每个动量 k_i , 都有,

$$k_{i,\mu} T^{\mu\nu\rho\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4) = 0$$

则 $T^{\mu\nu\rho\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4) \propto g^{\mu\nu}k_i^\sigma - g^{\mu\sigma}k_i^\nu$

四个上面的因子, 实际发散度为 $D - 4 = -4$, 收敛!

2.3 重整化微扰论

可重正的量子场论中的发散不会在物理可观测量中出现。

计算含发散的图的可解：

①. 引入正则化方案 (regulator), 得到含物理参数 (m, e) 和紫外截断 Λ 的表达式。

②. 计算物理参数 (m, e) 到合理阶次。这些量也是 (m, e, Λ) 的函数。

③. 如果要计算 S-矩阵元, 还需要计算场论重整化常数 (Z)

④. 用 (m, e) 消去 (m, e, Λ) , 最终的表达式应该在 $\Lambda \rightarrow \infty$ 时是有限项。(重正化)

也可以这么做

裸微扰论 (bare renormalization theory). 这种计算方案在更复杂的单圈计算时显得更为合适。

1. ϕ^4 理论的重正化微扰论

拉氏量
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_0)^2 - \frac{1}{2}m_0^2 \phi_0^2 - \frac{1}{4!}\lambda_0 \phi_0^4$$

其中 ϕ_0 为裸场, m_0, λ_0 为裸参数 (裸参数不能直接测量)

当时空维数为 $d = 4$ 时, 理论是可重正的: $D = 4 - N$;

或者从拉氏量可以看出耦合常数 λ_0 是无量纲的, 满足可重正性条件

对称性: 变换 $\phi \rightarrow -\phi$ 下是不变的 \longrightarrow N 为偶数!

发散图: $N = 0, 2, 4$



a) 重正化参数和抵消项

全传播子（两点关联函数）进行 Källén-Lehmann 谱分解

$$\int d^4x \langle \Omega | T \phi_0(x) \phi_0(y) | \Omega \rangle = \frac{iZ}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + (p^2 = m^2 \text{ 处的正规项})$$

Z 是场的波函数重正化常数（或场强重正化常数）， m 为物理质量。

对场重新定义来消除 Z 因子： $\phi_0 = Z^{1/2} \phi$

拉氏量可以重新写作

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} Z (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m_0^2 Z \phi^2 - \frac{1}{4!} \lambda_0 Z^2 \phi^4 \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{1}{4!} \lambda^4 \phi^4 + \underbrace{\frac{1}{2} \delta_Z (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} \delta_m \phi^2 - \frac{1}{4!} \delta_\lambda \phi^4}_{\text{抵消项}} \\ &\equiv \mathcal{L}_R + \delta \mathcal{L} \end{aligned}$$

参数 $\delta_Z, \delta_m, \delta_\lambda$ （抵消项系数）的定义为 抵消项 (counter terms)

$$\delta_Z = Z - 1, \quad \delta_m = m_0^2 Z - m^2, \quad \delta_\lambda = \lambda_0 Z^2 - \lambda$$

实际上,在上述定义中,我们通过引入重正化的场和重正化参数,将原来的拉氏量分成了两部分:

- **第一部分称作重正化拉氏量**,形式和原初的拉氏量相同,但是用重正化量来表达;
- **第二部分是抵消项部分**,吸收了无穷大的、但不可观测的、物理参数和裸参数之间的偏离。

我们将重正化拉氏量中的相互作用部分和抵消项部分都看作相互作用项进行微扰展开。

原来的费曼规则
(参数为重正化参数)

$$\text{---}\overleftarrow{\text{---}}_p = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

$$\text{X} = -i\lambda$$

抵消项费曼规则

$$\text{---}\otimes\text{---} = i(p^2\delta_z - \delta m)$$

$$\text{---}\otimes\text{---} = i(p^2\delta_z - \delta m)$$

$$\text{X}\otimes = -i\delta_\lambda$$

b) 重正化条件和抵消项系数的确定

重正化的质量和耦合常数需要有明确的定义。如果采用在壳 (On-shell) 重正化, 则粒子的物理质量可以定义为全传播子的极点; **动量空间全传播子在物理极点处的留数为 1** 给出抵消项系数 δ_Z ; 重正化的耦合常数由零动量的散射振幅来定义, 从而确定 δ_λ 等。

i) 全传播子

$$D(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 - \Sigma(p^2) + i\epsilon} = \text{diagram} = \text{diagram} + \text{diagram} + \text{diagram} + \dots$$

在壳重正化条件: 极点给出物理质量, 则

$$\Sigma(p^2) \Big|_{p^2=m^2} = 0$$

$$p^2 - m^2 - \Sigma(p^2) = p^2 - m^2 - \Sigma(m^2) - (p^2 - m^2) \frac{d}{dp^2} \Sigma(p^2) \Big|_{p^2=m^2}$$

再利用 $\Sigma(m^2) = 0$

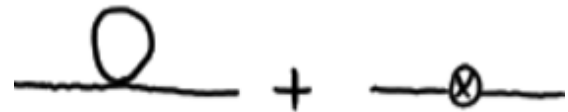
$$p^2 - m^2 - \Sigma(p^2) = (p^2 - m^2) \left(1 - \frac{d}{dp^2} \Sigma(p^2) \Big|_{p^2=m^2} \right)$$

$$D(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 - \Sigma(p^2) + i\epsilon} = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \left(1 + \frac{d}{dp^2} \Sigma(p^2) \Big|_{p^2=m^2} \right)$$

动量空间全传播子在物理极点处的留数为 1 给出第二个重正化条件：

$$\frac{d}{dp^2} \Sigma(p^2) \Big|_{p^2=m^2} = 0$$

在单圈水平上， $-i\Sigma(p^2)$ 包含两个图

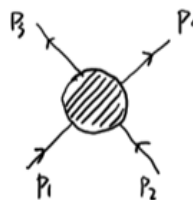


$$\begin{aligned} -i\Sigma(p^2) &= -i\lambda \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} + i(p^2 \delta_Z - \delta_m) \\ &= \frac{i\lambda m^2}{2(4\pi)^2} \left(\frac{1}{\epsilon} - \ln \frac{m^2}{\mu^2} + 1 \cdots + O(\epsilon) \right) + i(p^2 \delta_Z - \delta_m) \end{aligned}$$

- 第一项和 p^2 无关, 从而有 $\delta_Z = 0$;
- 再利用重正化条件 $\Sigma(m^2) = 0$, 可以得到

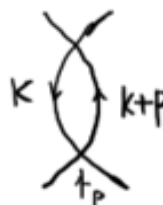
$$\delta_m = \frac{\lambda m^2}{32\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon} - \ln \frac{m^2}{\mu^2} + 1 + O(\epsilon) \right)$$

ii) 顶角函数和 δ_λ



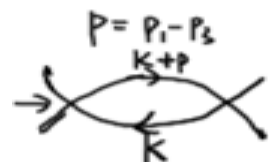
$$= i\mathcal{M}(p_1 p_2 \rightarrow p_3 p_4) = \text{tree} + \left(\text{loop1} + \text{loop2} + \text{loop3} \right) + \text{cross}$$

令 $p = p_1 + p_2$, $p^2 = s$



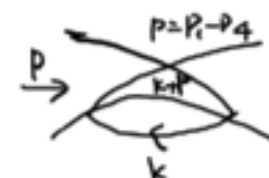
$$= \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2} \frac{i}{(k+p)^2 - m^2} \equiv (-i\lambda)^2 \cdot iV(p^2)$$

令 $p = p_1 - p_3$, $p^2 = t$



$$= \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2} \frac{i}{(k+p)^2 - m^2} \equiv (-i\lambda)^2 \cdot iV(t)$$

令 $p = p_1 - p_4$, $p^2 = u$



$$= \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2} \frac{i}{(k+p)^2 - m^2} \equiv (-i\lambda)^2 \cdot iV(u)$$

$$i\mathcal{M}(p_1 p_2 \rightarrow p_3 p_4) = -i\lambda + i(-i\lambda)^2 [V(s) + V(t) + V(u)] - i\delta_\lambda$$

选取重正化点和重正化条件 $i\mathcal{M}(p_1 p_2 \rightarrow p_3 p_4)|_{s=4m^2, u=t=0} = -i\lambda$

$$\delta_\lambda = -\lambda^2 [V(4m^2) + 2V(0)]$$

$V(p^2)$ 的具体计算 ($2\epsilon = 4 - d$, $\Delta = m^2 - x(1-x)p^2$)

$$V(p^2) = \frac{i}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2} \frac{i}{(k+p)^2 - m^2} = \frac{i}{2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{[l^2 - \Delta + i\epsilon]^2}$$

$$I_d(2, \Delta) = \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{[l^2 - \Delta + i\epsilon]^2} = \frac{i}{(4\pi)^2} \left(\frac{1}{\epsilon} - \ln \frac{\Delta}{\mu^2} + O(\epsilon) \right)$$

$$V(p^2) = -\frac{1}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left(\frac{1}{\epsilon} - \ln \frac{\Delta}{\mu^2} + O(\epsilon) \right)$$

这样，在单圈水平上的 δ_λ 为

$$\delta_\lambda = \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left(\frac{3}{\epsilon} - \ln \frac{\Delta(p^2 = 4m^2)}{\mu^2} - 2 \ln \frac{m^2}{\mu^2} + O(\epsilon) \right)$$

单圈修正的重整化的振幅为

$$i\mathcal{M}(p_1 p_2 \rightarrow p_3 p_4) = -i\lambda - \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left(\ln \frac{\Delta(p^2 = s)}{\Delta(p^2 = 4m^2)} + \ln \frac{\Delta(p^2 = t)}{m^2} + \ln \frac{\Delta(p^2 = u)}{m^2} \right)$$

振幅显然是有限的。从以上的计算可以看到，抵消项系数 δ_λ 所起的作用就是抵消振幅中的发散部分，这也是“抵消项”得名的原因。

c) 重正化微扰论的步骤

- 定义场**强重正化**，由场**强重正化**定义重正化的场；
- 将裸拉氏量（包含裸参数和裸场）用**重正化的场**来表示；
- 引入物理参数，定义裸参数对物理参数的偏离（如 $\delta_Z, \delta_m, \delta_\lambda$ ）；
- **拉氏量分成两部分**，即由物理参数表示的**拉氏量**部分（重正化拉氏量）和包含偏离量（ $\delta_Z, \delta_m, \delta_\lambda$ ）的部分，后者称作**抵消项**；
- 由这样的拉氏量可以得到新的费曼规则，这些费曼规则中包含的阐述为物理参数和偏离量；
- 对特定的振幅，利用上述新的费曼规则进行微扰计算，对于发散的全积分再用合适的正规化方案；
- 最终的表达式是偏离量 $\delta_Z, \delta_m, \delta_\lambda$ 和物理参数的函数；
- 选定**重正化条件**，调整抵消项 $\delta_Z, \delta_m, \delta_\lambda$ ，使得最终计算结果满足这些重正化体条件，最终结果式有限的，并与正规化方案无关。
- **重正化微扰论和裸微扰论式完全等价的。**

2. 重正化方案和标度的关系

前面我们采用的重正化方案（条件）是**在壳重正化**，但需要指出的是，重正化方案**并不限于在壳重正化**，重正化条件的选取有许多种。在重正化微扰论中，抵消项的选取应该遵守以下原则：

- **抵消项是厄米的**，并且应该保证重正化后的格林函数有限；
- **抵消项应该是定域的**，即在动量空间，抵消项系数（如前面的 $\delta_Z, \delta_m, \delta_\lambda$ ）**不依赖于外线动量**。
- $\delta_Z, \delta_m, \delta_\lambda$ 的选取可以采用不同的重正化条件，但是发散的动量积分的**正规化方案必须一致**；
- 不同重正化方案的物理参数之间的联系由裸参量决定，

$$\phi_0 = Z_{OS}^{1/2} \phi^{(OS)} = Z^{1/2} \phi$$

$$m_0^2 = m^2 + \delta m^2 = m'^2 + \delta m'^2$$

a) **最小减除重正化 (minimal subtraction scheme, \overline{MS} 方案)**

这种重正化方案是针对维数正规化的。

在维数正规化中，积分的发散项是以 $\frac{1}{\epsilon}$ 项的形式出现的

$$I(1, \Delta) = -\frac{i}{(4\pi)^2} \Delta \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi - \ln \frac{\Delta}{\tilde{\mu}^2} + 1 + O(\epsilon) \right)$$

$$I(2, \Delta) = \frac{i}{(4\pi)^2} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi - \ln \frac{\Delta}{\tilde{\mu}^2} + O(\epsilon) \right)$$

MS方案： 抵消项的选取只是抵消发散项中正比于 $\frac{1}{\epsilon}$ 的项。

\overline{MS} 方案： $\frac{1}{\epsilon}$ 总是和 $-\gamma + \ln 4\pi$ 同时出现的，如果选取合适的抵消项将 $\frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi$ 整体消除，就是 \overline{MS} 方案，这相当于取

$$\mu^2 = 4\pi\tilde{\mu}^2 e^{-\gamma}$$

在在壳重正化方案下， ϕ^4 理论的单圈微扰论中的抵消项系数 $\delta_Z, \delta_m, \delta_\lambda$

$$\delta_Z = 0 + O(\lambda^2),$$

$$\delta_m = Zm_0^2 - m^2 = \frac{\lambda m^2}{32\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon} - \ln \frac{m^2}{\mu^2} + 1 + O(\epsilon) \right) \approx m_0^2 - m^2$$

$$\delta_\lambda = \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \left(\frac{3}{\epsilon} - 3 \ln \frac{m^2}{\mu^2} - A(4m^2) + O(\epsilon) \right)$$

重正化点：
 $s_0 = 4m^2, t_0 = u_0 = 0$

\overline{MS} 方案中，按照定义很容易得到

$$\delta_Z = 0 + O(\lambda^2)$$

$$\delta_{m'} = Zm_0^2 - m'^2(\mu) = \frac{\lambda m'^2(\mu)}{32\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon} + O(\epsilon) \right) \approx m_0^2 - m'^2(\mu)$$

$$\delta_{\bar{\lambda}} = \frac{\bar{\lambda}^2(\mu)}{32\pi^2} \left(\frac{3}{\epsilon} + O(\epsilon) \right)$$

b) \overline{MS} 方案和在壳 (On-Shell) 重正化的关系

不同方案下的重正化质量： 根据 m_0^2 的重正化方案无关性

$$m_0^2 = m^2 + \frac{\lambda m^2}{32\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon} - \ln \frac{m^2}{\mu^2} + 1 + O(\epsilon) \right) + O(\lambda^2)$$

$$m_0^2 = m'^2(\mu) + \frac{\lambda m'^2(\mu)}{32\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon} + O(\epsilon) \right) + O(\lambda^2)$$

$$m^2 + \frac{\lambda m^2}{32\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon} - \ln \frac{m^2}{\mu^2} + 1 + O(\epsilon) \right) = m'^2(\mu) + \frac{\lambda m'^2(\mu)}{32\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon} + O(\epsilon) \right)$$

$$m'^2(\mu) = m^2 \left(1 - \frac{\lambda}{32\pi^2} \left(\ln \frac{m^2}{\mu^2} - 1 \right) + O(\lambda^2) \right)$$

不同方案下的重正化耦合常数：

$$\lambda_0 = Z_\lambda Z_\phi^{-2} \lambda = Z_{\bar{\lambda}} Z_{\bar{\phi}}^{-2} \bar{\lambda}, \quad Z_\phi \sim Z_{\bar{\phi}} \sim 1 + O(\lambda^2)$$

$$\lambda = \frac{Z_{\bar{\lambda}}}{Z_\lambda} \bar{\lambda} = \left(1 + \frac{\delta_{\bar{\lambda}}}{\bar{\lambda}} - \frac{\delta_\lambda}{\lambda} \right) \bar{\lambda}, \quad \left(Z_\lambda = 1 + \frac{\delta_\lambda}{\lambda} \right)$$

$$= \bar{\lambda}(\mu) + \frac{3\bar{\lambda}^2(\mu)}{32\pi^2} \left(\ln \frac{m^2}{\mu^2} + A(4m^2) + \dots \right)$$

由于 λ 与标度参量 μ 无关，上式两边对 μ 求偏导数得到：

$$0 = \mu \frac{d}{d\mu} \bar{\lambda}(\mu) \left(1 + \frac{3\bar{\lambda}(\mu)}{16\pi^2} \ln \frac{m^2}{\mu^2} \right) - \frac{3\bar{\lambda}^2(\mu)}{16\pi^2}$$

重正化群方程

$$\beta(\bar{\lambda}) \equiv \mu \frac{d}{d\mu} \bar{\lambda}(\mu) = \frac{3\bar{\lambda}^2(\mu)}{16\pi^2} (1 + O(\bar{\lambda}))$$

跑动耦合常数：

$$\bar{\lambda}(\mu) = \frac{\lambda_0}{1 - \frac{3\bar{\lambda}_0}{32\pi^2} \ln \frac{\mu^2}{\mu_0^2}}$$

在维数正规化中，我们会引入一个**标度参量** μ^2 ，这个参量虽然不同于紫外截断参数，但在后面我们会看到，它也是一个有物理意义的参量，它对应于具体物理过程的特征的能量标度。因此， **\overline{MS} 方案**中定义的**物理参数**是和**标度参量** μ^2 有关的。

3. QED 的重正化微扰论

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4}F_{0,\mu\nu}F^{0,\mu\nu} + \bar{\psi}_0(i\gamma \cdot \partial - m_0)\psi_0 - e_0\bar{\psi}_0\gamma^\mu\psi_0A_{0,\mu}$$

定义重正化后的场： $\psi_0 = Z_2^{1/2} \psi$, $A_0^\mu = Z_3^{1/2} A^\mu$

Z_2, Z_3 分别为电子场和电磁场的波函数重正化常数

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4}Z_3 F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + Z_2\bar{\psi}(i\gamma \cdot \partial - m_0)\psi - e_0Z_2Z_3^{1/2}\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$$

再引入**物理的电荷** e ，物理的电子质量 m ， e 和**裸电荷** e_0 满足如下关系

$$e_0Z_2Z_3^{1/2} = eZ_1$$

Z_1 为电磁相互作用顶点的重正化常数

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma \cdot \partial - m)\psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$$

$$-\frac{1}{4}\delta_3 F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\delta_2\gamma \cdot \partial - \delta m)\psi - e\delta_1\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$$

抵消项系数定义如下：

$$\delta_3 = Z_3 - 1, \quad \delta_2 = Z_2 - 1, \quad \delta_m = Z_2 m_0 - m,$$

$$\delta_1 = Z_1 - 1 = \frac{e_0}{e} Z_2 Z_3^{1/2} - 1$$

重正化微扰论中的费曼规则：

$$\mu \text{---} \overset{k}{\text{~~~~~}} \text{---} \nu = \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2} \quad (\text{Feynman 光子})$$

$$\text{---} \overset{p}{\leftarrow} \text{---} = \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon}$$

$$\text{---} \text{---} \overset{\mu}{\text{---}} \text{---} = -ie\gamma^\mu$$

$$\overset{\mu}{\text{---}} \otimes \text{---}^\nu = -i(g^{\mu\nu} \not{q}^2 - \not{q}^\mu \not{q}^\nu) \delta_3$$

$$\text{---} \otimes \text{---} = i(\not{p} \delta_2 - \delta_m)$$

$$\text{---} \text{---} \overset{\mu}{\text{---}} \text{---} = -ie\gamma^\mu \delta_1$$

为了确定抵消项系数，再在壳重正化方案下选取如下重正化条件：

1) 电子自能

$$-i\Sigma(\gamma \cdot p) = \text{diagram with a circle labeled } i\Pi \text{ on a fermion line} = \text{diagram with a loop on a fermion line} + \text{diagram with a counterterm circle}$$

重正化条件：

$$\Sigma(\gamma \cdot p = m) = 0, \quad \left. \frac{d}{d(\gamma \cdot p)} \Sigma(\gamma \cdot p) \right|_{\gamma \cdot p = m} = 0$$

单圈贡献部分：

$$-i\Sigma_2(p) = -i \frac{e^2 \tilde{\mu}^{2\epsilon}}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(\epsilon)}{\Delta^\epsilon} ((4 - 2\epsilon)m - (2 - 2\epsilon)x\gamma \cdot p)$$

$$\Delta = [(1 - x)m^2 + x\mu_\gamma^2 - x(1 - x)p^2], \quad \epsilon = 2 - d/2,$$

μ_γ 是为了处理可能的红外发散而引入的光子的“非零”。

$$\begin{aligned}
-i\Sigma_2(p) &= (-ie)^2 \tilde{\mu}^{2\epsilon} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \gamma^\mu \frac{i(\gamma \cdot k + m)}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma_\mu \frac{-i}{(p-k)^2 - \mu_\gamma^2 + i\epsilon} \\
&= -e^2 \tilde{\mu}^{2\epsilon} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{((\mathbf{2} - \mathbf{d})\gamma \cdot k + \mathbf{d}m)}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{(p-k)^2 - \mu_\gamma^2 + i\epsilon}
\end{aligned}$$

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = \delta_\mu^\mu = d, \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = \gamma^\mu \{\gamma^\nu, \gamma_\mu\} - \gamma^\mu \gamma_\mu \gamma^\nu = (2 - d)\gamma^\nu$$

$$\frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{(p-k)^2 - \mu_\gamma^2 + i\epsilon} = \int_0^1 dx \frac{1}{[l^2 - \Delta + i\epsilon]^2}$$

$$l = k - xp, \quad \Delta = [(1-x)m^2 + x\mu_\gamma^2 - x(1-x)p^2]$$

$$\begin{aligned}
-i\Sigma_2(p) &= -e^2 \tilde{\mu}^{2\epsilon} \int_0^1 dx \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{((2-d)\gamma \cdot (l+xp) + dm)}{[l^2 - \Delta + i\epsilon]^2} \\
&= -e^2 \tilde{\mu}^{2\epsilon} \int_0^1 dx \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{((d-2)x(\gamma \cdot p) + dm)}{[l^2 - \Delta + i\epsilon]^2} \\
&= -e^2 \tilde{\mu}^{2\epsilon} \int_0^1 dx ((4-2\epsilon)m - (2-2\epsilon)x\gamma \cdot p) I_d(2, \Delta)
\end{aligned}$$

$$I_d(2, \Delta) = \frac{i}{(4\pi)^2} (4\pi)^\epsilon \left(\frac{1}{\Delta}\right)^\epsilon \Gamma(\epsilon)$$

总的贡献：

$$\begin{aligned}
 -i\Sigma(p) &= -i\Sigma_2(p) + i(\gamma \cdot p \delta_2 - \delta_m) \\
 &= -i\Sigma(m) - i(\gamma \cdot p - m) \frac{d}{d(\gamma \cdot p)} \Sigma(\gamma \cdot p) \Big|_{\gamma \cdot p = m} + i(\gamma \cdot p \delta_2 - \delta_m)
 \end{aligned}$$

与 $\gamma \cdot p$ 无关的项对电子质量有贡献的，但重正化条件对质量的贡献为零

$$\begin{aligned}
 \delta_m &= -\Sigma_2(m) = -\frac{e^2 m \tilde{\mu}^{2\epsilon}}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(\epsilon)}{[(1-x)^2 m^2 + x \mu_\gamma^2]^\epsilon} (4 - 2x - 2\epsilon(1-x)) \\
 &= -\frac{e^2 m}{(4\pi)^2} \left[3 \left(\frac{1}{\epsilon} - \ln \frac{m^2}{\mu^2} \right) - 1 - \int_0^1 dx (4 - 2x) \ln \left((1-x)^2 + x \frac{\mu_\gamma^2}{m^2} \right) \right] \\
 &= -\frac{e^2 m}{(4\pi)^2} \left[3 \left(\frac{1}{\epsilon} - \ln \frac{m^2}{\mu^2} \right) + 4 \right] \quad (\mu_\gamma \rightarrow 0)
 \end{aligned}$$

类似地，

$$\delta_2 = \frac{d}{d(\gamma \cdot p)} \Sigma(\gamma \cdot p) \Big|_{\gamma \cdot p = m} = -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \left[\left(\frac{1}{\epsilon} - \ln \frac{m^2}{\mu^2} \right) + 4 + \ln \frac{\mu_\gamma^2}{m^2} \right]$$

$$A = \tilde{\mu}^{2\epsilon} (4\pi)^\epsilon \Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} + \ln \mu^2 + \mathcal{O}(\epsilon)$$

$$B = [(1-x)^2 m^2 + x \mu_\gamma^2]^\epsilon = m^{2\epsilon} \left[(1-x)^2 + x \frac{\mu_\gamma^2}{m^2} \right]^\epsilon$$

$$= (1 + \epsilon \ln m^2) \left(1 + \epsilon \left((1-x)^2 + x \frac{\mu_\gamma^2}{m^2} \right) \right)$$

$$A \times B = \frac{1}{\epsilon} - \ln \frac{m^2}{\mu^2} + \left((1-x)^2 + x \frac{\mu_\gamma^2}{m^2} \right)$$

$$A \times B \times (4 - 2x - 2\epsilon(1-x)) = \left(\frac{1}{\epsilon} - \ln \frac{m^2}{\mu^2} \right) (4 - 2x) - 2(1-x)$$

$$+ (4 - 2x) \left((1-x)^2 + x \frac{\mu_\gamma^2}{m^2} \right) + \mathcal{O}(\epsilon)$$

注*: 在对 δ_m 和 δ_2 的计算过程中, 如果不引入 μ_γ 会出现如下积分

$$\int_0^1 dx \frac{x(2-x)}{1-x} = \int_0^1 dx \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2} = \ln(1-x) \Big|_0^1 - \frac{1}{2}$$

其中第一项在取 $x \rightarrow 1$ 时是发散的。这个发散是一个**红外发散**, 不是来自于圈积分, 而是**来自于减除方案**。红外发散在计算格林函数和 S 矩阵元时是不可避免的, 但会在物理过程中相互抵消。一种比较快速、方便的处理红外发散的办法是引入一个小的“光子质量” μ_γ , 最终再取极限 $\mu_\gamma \rightarrow 0$ 。

我们可以把 μ_γ 看作对红外发散的正规化, 正如引入紫外截断来正规化紫外发散一样。当引入 μ_γ 时, 相关的积分为 ($\epsilon = \frac{\mu_\gamma^2}{m^2} \sim 0$)

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \frac{x(1-x)(2-x)}{(1-x)^2 + x\epsilon} &= -\frac{1}{2} + \int_0^1 dx \frac{1-x + O(\epsilon)}{(1-x)^2 + x\epsilon} \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_0^1 dt \frac{1}{t + \epsilon} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln \epsilon \end{aligned}$$

在 \overline{MS} 方案下, 抵消项系数为

$$\delta_m = -\frac{e^2 m}{(4\pi)^2} \frac{3}{\epsilon}, \quad \delta_2 = -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon}$$

2) 真空极化

$$\text{Diagram: } \mu \text{---} \text{wavy line} \text{---} \text{circle labeled } \Pi \text{---} \text{wavy line} \text{---} \nu = \text{wavy line} \text{---} \text{loop with fermion line} \text{---} \text{wavy line} \text{---} \nu + \text{wavy line} \text{---} \text{tadpole with cross} \text{---} \text{wavy line} \text{---} \nu$$

$$\begin{aligned} i\Pi^{\mu\nu}(q) &\equiv i\Pi(q^2)(g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu) = i\Pi_2^{\mu\nu}(q) + \left(-i(g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu)\right)\delta_3 \\ &= i(\Pi_2(q^2) - \delta_3)(g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu) \end{aligned}$$

$$\Pi_2(q^2) = -\frac{e^2 \tilde{\mu}^{2\epsilon}}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(\epsilon)}{(m^2 - x(1-x)q^2)^\epsilon} (8x(1-x))$$

选取重正化条件 $\Pi(q^2 = 0) = 0$

$$\begin{aligned}\delta_3 = \Pi_2(0) &= -\frac{e^2 \tilde{\mu}^{2\epsilon}}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(\epsilon)}{(m^2)^\epsilon} (8x(1-x)) \\ &= -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{1}{\epsilon} - \ln \frac{m^2}{\mu^2} + O(\epsilon) \right) \int_0^1 dx \, 8x(1-x) \\ &= -\frac{4e^2}{3(4\pi)^2} \left(\frac{1}{\epsilon} - \ln \frac{m^2}{\mu^2} + O(\epsilon) \right) \\ &= -\frac{\alpha}{3\pi} \left(\frac{1}{\epsilon} - \ln \frac{m^2}{\mu^2} + O(\epsilon) \right)\end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$$

3) 顶角函数 (单圈水平)

$$(-ie\Gamma^\mu(p,p'))_{\text{amp.}} = (-ie\Gamma_z^\mu(p,p')) + (-ie\gamma^\mu\delta_1)$$

$\Gamma^\mu(p, p')$ 的洛伦兹结构为

$$\Gamma^\mu(p, p') = \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} F_2(q^2), \quad q^2 = (p - p')^2$$

其中 $F_1(q^2) = 1 + \delta F_1(q^2) + \delta_1$ 为电形状因子, $F_2(q^2)$ 为磁形状因子。

利用维数正规化计算的单圈的 $\delta F_1(q^2)$ 为

$$\begin{aligned} \delta F_1(q^2) = & \frac{e^2 \tilde{\mu}^{2\epsilon}}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx dy dz \, \delta(x+y+z-1) \left\{ \frac{\Gamma(\epsilon)}{\Delta^\epsilon} 2(1-\epsilon)^2 \right. \\ & \left. + \frac{\Gamma(1+\epsilon)}{\Delta^{1+\epsilon}} [q^2(2(1-x)(1-y) - \epsilon xy) + m^2(2(1-4z+z^2) - \epsilon(1-z)^2)] \right\} \end{aligned}$$

其中 $\Delta = (1-z)^2 m^2 + z\mu^2 - xyq^2$, $\epsilon = 2 - d/2$ 。

选取重正化条件为

$$-i\Gamma^\mu(p = p' = 0) = -ie\gamma^\mu$$

$$\delta_1 = -\delta F_1(q^2 = 0)$$

可以自己验证,

$$\delta_1 = \delta_2 \longrightarrow Z_1 = Z_2$$

我们已经知道这是Ward-Takahashi 恒等式的要求，而Wark-Takahashi恒等式来自于**整体 $U(1)$ 对称性**。如果我们的正规化方案是规范不变的（如维数正规化），上述关系就是没有抵消项的顶点图所满足的W-I。

$Z_1 = Z_2$ 的物理意义还可以再如下讨论中看出：由 $Z_2 Z_3^{1/2} e_0 = Z_1 e$ 和 $Z_1 = Z_2$ ，我们可以得到 $e = Z_3^{1/2} e_0$ ，即**电荷重正化只依赖于电磁场的场强重正化——电荷的普适性**。