10. 非阿贝尔规范理论的路径积分量子化（续）

10.4 BRST对称性和BRST量子化（Becchi-Rouet-Stora-Tyutin）

Faddeev-Popov量子化后，在协变规范 $f^a[A] = \partial_\mu A^{a,\mu}(x)$ 下

$$\mathcal{L}_{eff} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a,\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} f^a[A] f^a[A] + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi + \bar{c}^a(-\partial^\mu D^{ab}_\mu)c^b$$

1. 引入辅助场（Nakanishi-Lautrup 场）$B^a(x)$

$$G^a[F^a] = \mathcal{N} \exp\left[-\frac{i}{2\xi}\int d^4x\, f^a[A] f^a[A]\right]$$
$$= \int DB \exp\left[\frac{i\xi}{2}\int d^4x\; B^a B^a + i\int d^4x\; f^a[A] B^a\right]$$

2. 有效拉氏量改写为

$$\mathcal{L}_{eff} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a,\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi$$
$$+ B^a f^a[A] + \frac{\xi}{2} B^a B^a + \bar{c}^a(-\partial^\mu D^{ab}_\mu)c^b$$

3. BRST 对称性：无穷小变换下不变

$$\delta_\lambda A_\mu^a(x) = \lambda D_\mu^{ab} c^b(x), \qquad \delta_\lambda \psi(x) = ig\lambda c^a(x) t^a \psi(x)$$

$$\delta_\lambda c^a(x) = -\frac{1}{2} g\lambda f^{abc} c^b(x) c^c(x),$$

$$\delta_\lambda \bar{c}^a(x) = \lambda B^a, \qquad \delta_\lambda B^a(x) = 0$$

其中，λ 是一个Grassmann 数。这个变换就称作BRST变换。

4. BSRT 变换的特征：

a) 原始的Yang-Mills拉氏量在 BSRT 变换下是不变的

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a,\mu\nu} + \bar{\psi}\left(i\gamma^\mu D_\mu - m\right)\psi$$

该变换是一个以参数为 $g\lambda c^a(x)$ 的定域非阿贝尔规范变换，自然 $\mathcal{L}_{YM}$ 在此变换下是不变的。

b) 规范固定条件在该变换下不变

$$\delta_\lambda(B^a B^a) = 0,$$

$$\delta_\lambda\left(B^a \partial_\mu A^{a,\mu}\right) = B^a \partial_\mu\left(\lambda D_\mu^{ab} c^b\right) = \lambda B^a \partial_\mu\left(D_\mu^{ab} c^b\right) = (\delta_\lambda \bar{c}^a)\left(\partial^\mu D_\mu^{ab}\right) c^b$$

$$\delta_\lambda\left(\bar{c}^a\left(-\partial^\mu D_\mu^{ab}\right) c^b\right) = (\delta_\lambda \bar{c}^a)\left(-\partial^\mu D_\mu^{ab}\right) c^b - \bar{c}^a \delta_\lambda\left(\partial^\mu D_\mu^{ab} c^b\right)$$

$$\delta_\lambda\left(D_\mu^{ab} c^b\right) = D_\mu^{ab} \delta_\lambda c^b + g f^{abc} \delta A_\mu^b c^c$$

$$= -\frac{1}{2} \lambda g \partial_\mu\left(f^{abc} c^b c^c\right) - \frac{1}{2} g^2 \lambda f^{abc} f^{cde} A_\mu^b c^d c^e$$

$$+ g \lambda f^{abc}\left(\partial_\mu c^b\right) c^c + g^2 \lambda f^{abc} f^{bde} A_\mu^d c^e c^c$$

$$= -\frac{1}{2} g^2 \lambda f^{abc} f^{cde}\left(A_\mu^b c^d c^e + A_\mu^d c^e c^b + A^e c^b c^d\right) = 0$$

利用鬼场的反对易性质，很显然有

$$-\frac{1}{2} \lambda g \partial_\mu\left(f^{abc} c^b c^c\right) + g \lambda f^{abc}\left(\partial_\mu c^b\right) c^c = 0$$

$$f^{abc}f^{cde}\left(A_\mu^b c^d c^e + A_\mu^d c^e c^b + A^e c^b c^d\right) = 0$$

证明:

$$\begin{aligned} f^{abc}f^{cde}A_\mu^d c^e c^b &= f^{ae'c}f^{cde}A_\mu^d c^e c^{e'} = f^{ae'c}f^{cb'e}A_\mu^{b'} c^e c^{e'} \\ &= f^{ae'c}f^{cb'd'}A_\mu^{b'} c^{d'} c^{e'} = f^{aec}f^{cbd}A_\mu^b c^d c^e \\ f^{abc}f^{cde}A_\mu^e c^b c^d &= f^{ad'c}f^{cde}A_\mu^e c^{d'} c^d = f^{ad'c}f^{ce'e}A_\mu^e c^{d'} c^{e'} \\ &= f^{ad'c}f^{ce'b'}A_\mu^{b'} c^{d'} c^{e'} = f^{adc}f^{ceb}A_\mu^b c^d c^e \end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned} &f^{abc}f^{cde}\left(A_\mu^b c^d c^e + A_\mu^d c^e c^b + A^e c^b c^d\right) \\ &= A_\mu^b c^d c^e\left(f^{abc}f^{cde} + f^{adc}f^{ceb} + f^{aec}f^{cbd}\right) \end{aligned}$$

根据Jacobi恒等式

$$\left[t^b,\left[t^d,t^e\right]\right] + \left[t^d,\left[t^e,t^b\right]\right] + \left[t^e,\left[t^b,t^d\right]\right] = 0$$

有

$$f^{abc}f^{cde} + f^{adc}f^{ceb} + f^{aec}f^{cbd} = 0$$

c） 泛函积分的积分测度也是不变的

- 物质场（费米场）的变换是一个幺正变换；
- 辅助场在BRST变换下不变；
- 鬼场部分的变换行列式为1；反鬼场是变换平移，行列式为1；
- 规范场的规范变换下的体积因子已经被分了出去；
- 可以证明，规范场的变换对应的Jacobi行列式为 1，令$\alpha(x)=\lambda c(x)$

$$\det\left[\frac{\delta A^{(\alpha),a,\mu}(x)}{\delta A^{b,\nu}(y)}\right]=\det\left[\frac{\delta}{\delta A^{b,\nu}(y)}\left(A^{a,\mu}(x)+\frac{1}{g}\partial^{\mu}\alpha^{a}(x)+f^{ab'c}A^{b',\mu}(x)\alpha^{c}(x)\right)\right]$$

$$=\det\left[\delta^{\mu}_{\nu}\delta^{4}(x-y)\left(\delta^{ab}+f^{abc}\alpha^{c}(x)\right)\right]$$

$$=\exp\left\{4\int d^{4}x\ f^{aac}\alpha^{c}(x)\right\}=1$$

$$\det\left[\frac{\delta c^{(\alpha),a}(x)}{\delta c^{b}(y)}\right]=\det\left[\frac{\delta}{\delta c^{b}(y)}\left(c^{a}(x)-\frac{1}{2}g\lambda f^{ade}c^{d}(x)c^{e}(x)\right)\right]$$

$$=\det\left[\delta^{4}(x-y)\left(\delta^{ab}+\frac{1}{2}g\lambda f^{abc}c^{c}(x)-\frac{1}{2}g\lambda f^{acb}c^{c}(x)\right)\right]$$

$$=\det\left[\delta^{4}(x-y)\right]\delta^{ab}]=1$$

10.5 BRST算符及其幂零性质

定义BRS算符 s： $\delta_\lambda \phi(x) = \lambda s \phi(x)$

s 算符的特点：

1） 它将玻色场变换为费米场，把费米场变换为玻色场；
2） λs 为玻色型线性算符 （s_ϕ 为场 ϕ 的自旋）：

$$\delta_\lambda(\phi_1\phi_2) = \delta_\lambda\phi_1\,\phi_2 + \phi_1\delta_\lambda\phi_2$$

$$s(\phi_1\phi_2) = (s\phi_1)\,\phi_2 + (-)^{2s_{\phi_1}}\,\phi_1\,s\phi_2$$

3）算符 s 具有幂零性（nilpotent） $s^2 O(x) = 0$

证明: 如果 $\phi_{1,2}$ 为 $A_\mu, B, \psi, c, \bar{c}$ 中的任意一个，可以证明 $s^2\phi_{1,2} = 0$

$$\delta_\lambda\big(s(\phi_1\phi_2)\big) = \delta_\lambda\Big(\big(s(\phi_1)\big)\phi_2 + (-)^{2s_{\phi_1}}\phi_1 s(\phi_2)\Big)$$

$$= \lambda\left((-)^{2s_{\phi_1}+1}\,s(\phi_1)s(\phi_2) + (-1)^{2s_{\phi_1}}s(\phi_1)s(\phi_2)\right) = 0$$

直验证非阿贝尔规范场FP量子化后的情形：

a) 物质场：

$$\delta_\lambda(s\psi) = ig\, t^a \delta_\lambda(c^a\psi) = igt^a(\delta_\lambda c^a)\psi + igt^a c^a\, \delta_\lambda \psi$$

$$= -\frac{1}{2} ig^2 \lambda f^{abc} t^a c^b c^c \psi + igt^a c^a \left(igt^b \lambda c^b\right)\psi$$

$$= -\frac{1}{2} ig^2 \lambda f^{abc} t^a c^b c^c \psi + \frac{1}{2} g^2 \lambda \left[t^a, t^b\right] c^a c^b \psi = 0 = \lambda(s^2\psi)$$

b) 规范场：

$$\delta_\lambda\left(sA_\mu^a\right) = \delta_\lambda\left(D_\mu^{ab} c^b\right) = 0 = \lambda(s^2 A_\mu^a)$$

c) 鬼场

$$\delta_\lambda(sc^a) = -\frac{1}{2} g f^{abc} \delta_\lambda\left(c^b c^c\right) = \frac{1}{4} g^2 f^{abc}(\lambda f^{bde} c^d c^e c^c + c^b \lambda f^{cde} c^d c^e)$$

$$= -\frac{1}{2} g^2 f^{acb} f^{bde} \lambda c^d c^e c^c$$

$$= -\frac{1}{6} g^2 \lambda c^d c^e c^c \left(f^{acb} f^{bde} + f^{aeb} f^{bcd} + f^{adb} f^{bec}\right)$$

$$= 0 = \lambda\left(s^2 c^a\right)$$

d) 反鬼场

$$\delta_\lambda(s\bar{c}^a) = \delta_\lambda B^a = 0 = \lambda(s^2 \bar{c}^a)$$

e） N-L场

$$\delta_\lambda(sB^a) = 0$$

10.6 BRST对称性的物理意义及其应用

$$\mathcal{L}_{eff} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a,\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi + B^a\left(f^a[A] + \frac{\xi}{2}B^a\right) + \bar{c}^a(-\partial^\mu D^{ab}_\mu)c^b$$

$$= \mathcal{L}_{YM} - \partial_\mu B^a A^{a,\mu} + \frac{\xi}{2}B^a B^a + \bar{c}^a(-\partial^\mu D^{ab}_\mu)c^b$$

1. 运动方程

a） 规范场的经典运动方程 $\frac{\partial \mathcal{L}_{eff}}{\partial A^a_\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_{eff}}{\partial(\partial_\mu A^a_\nu)} = 0$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{YM}}{\partial A^a_\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_{YM}}{\partial(\partial_\mu A^a_\nu)} = D^{ab}_\mu F^{b,\mu\nu} + g j^{a,\nu}_M, \qquad j^{a,\nu}_M = \bar{\psi}\gamma^\nu t^a \psi$$

再考虑规范固定（和补偿项）部分的贡献，

$$D^{ab}_\mu F^{b,\mu\nu} + g j^{a,\nu}_M = \partial^\nu B^a + g f^{abc}(\partial^\nu \bar{c}^b)c^c$$

b） 物质场的运动方程 $(i\gamma \cdot D - m)\psi = 0$

c） 辅助场：

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{eff}}{\partial B^a} = \partial_\mu A^{a,\mu} + \xi B^a = 0$$

d） 鬼场：

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{eff}}{\partial c^a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_{eff}}{\partial(\partial_\mu c^a)} = g f^{bac} A_\mu^c\, \partial^\mu \bar{c}^b + \partial^2 \bar{c}^a$$

$$= \partial^2 \bar{c}^a + g f^{abc} A_\mu^b \partial^\mu \bar{c}^c = 0$$

e） 反鬼场：

$$-\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_{eff}}{\partial(\partial_\mu \bar{c}^a)} = -\partial^\mu D_\mu^{ab} c^b = 0$$

2. 诺特荷

$$\lambda\, j_\mu^{BRS} = \frac{\partial \mathcal{L}_{eff}}{\partial(\partial^\mu \phi_n)} \delta_\lambda \phi_n$$

$$= \lambda\left(-F_{\mu\nu}^a D^{\nu,ab} c^b - g j_{M,\mu}^a c^a + \frac{1}{2} g(\partial_\mu \bar{c}^a) f^{abc} c^b c^c + (D_\mu^{ab} c^b) B^a\right)$$

$$= \lambda\left(B^a D_\mu^{ab} c^b - (\partial_\mu B^a) c^a - \frac{1}{2} g f^{abc} (\partial_\mu \bar{c}^a) c^b c^c - \partial^\nu (F_{\mu\nu}^a c^a)\right)$$

其中 $\phi_n = A^a, B^a, \psi, c^a, \bar{c}^a$。诺特流是 Grassmann 型算符。

相应的BRS守恒荷为 $$Q^{BRS}=\int d^3\vec{x}\; j_0^{BRS}(x)$$

可以证明，

$$\delta_\lambda\phi=\lambda\, s\phi=i\left[\lambda Q^{BRS},\phi\right],\qquad \left(Q^{BRS}\right)^2=0$$

- s 算符和BRS 荷是费米性的；
- 对于玻色型算符 ϕ，有 $s\phi=i\left[Q^{BRS},\phi\right]$；
- 对于费米型算符 ψ，有 $s\psi=i\left\{Q^{BRS},\psi\right\}$；
- 为了方便，我们再下面的推导中，暂时略去BST荷 Q^{BRS} 的上标，

$$0=s^2\phi=s(s\phi)=-\{Q,[Q,\phi]\}=-[Q^2,\phi]$$
$$0=s^2\psi=s(s\psi)=-[Q,\{Q,\psi\}]=-[Q^2,\psi]$$

- 对所有的算符 ϕ，都有 $\left[Q^2,\phi\right]=0$，
- 则充要条件为 $Q^2=I$，或者 $Q^2=0$。
- 但是，Q 的鬼数为1，所以 $Q^2\neq 1$，只能有 $Q^2=0$。

3. Schwinger-Dyson方程和 Ward-Takahashi恒等式

在经典理论中的经典运动方程，在量子理论中则表现为格林函数满足的Schwinger-Dyson方程，即量子理论中格林函数对经典场方程的偏离表现为一系列接触项（即Schwinger项）

$$\left\langle \Omega \middle| T^* \frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi_n(x)} \phi_{n_1}(x_1)\phi_{n_2}(x_2)\cdots\phi_{n_k}(x_k) \middle| \Omega \right\rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{k} i\delta_{nn_j}\delta^4(x-x_j)\left\langle \Omega \middle| T^* \phi_{n_1}(x_1)\cdots\phi_{n_{j-1}}(x_{j-1})\phi_{n_{j+1}}(x_{j+1})\cdots\phi_{n_k}(x_k) \middle| \Omega \right\rangle$$

在量子理论中，作用量的对称性则表现为格林函数满足的一系列恒等式。对于整体的对称变换，这些恒等式就是Ward-Takahashi恒等式

$$\sum_{j=1}^{k}\left\langle \Omega \middle| T^* \phi_{n_1}(x_1)\cdots\phi_{n_{j-1}}(x_{j-1})F_{n_j}[\phi_n; x_j]\phi_{n_{j+1}}(x_{j+1})\cdots\phi_{n_k}(x_k) \middle| \Omega \right\rangle = 0$$

这里 $\phi_n = A^a, B^a, \psi, c^a, \bar{c}^a$。

利用Shwinger-Dyson方程和Ward-Takahashi恒等式，我们可以得到许多重要的结论，这些结论的导出不依赖于微扰论，所以在微扰论的所有阶都成立。

4. BRST 对称性的应用：规范玻色子传播子的纵向部分没有微扰论的高阶修正。

规范场的全传播子为

$$\langle\Omega|TA_\mu^a(x)A_\nu^b(y)|\Omega\rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, G_{\mu\nu}^{ab}(k)e^{-ik\cdot(x-y)}$$

$$G_{\mu\nu}^{ab}(k) = \left[A(k^2)\left(-g_{\mu\nu}+\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) - B(k^2)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right]\frac{i\,\delta^{ab}}{k^2+i\epsilon}$$

在树图水平上（自由传播子）有 $A(k^2)=1, B(k^2)=\xi$，微扰展开形式为

$$A(k^2) = 1+O(g^2), \qquad B(k^2)=\xi+O(g^2)$$

命题：在微扰论的任意阶，都有 $B(k^2)=\xi$。

证明：根据辅助场 B^a 的Schwinger-Dyson 方程

$$\left\langle\Omega\left|T^*\frac{\delta S_{eff}}{\delta B^a(x)}\partial^\mu_{(y)}A_\mu^b(y)\right|\Omega\right\rangle \equiv \left\langle\Omega\left|T^*\left(\partial^\nu_{(x)}A_\nu^a(x)+\xi B^a(x)\right)\,\partial^\mu_{(y)}A_\mu^b(y)\right|\Omega\right\rangle = 0$$

利用 T^* 算符的性质及 $\delta_\lambda \bar{c}^a(x) = \lambda\, s\big(\bar{c}^a(x)\big) = \lambda B^a(x)$, $\quad \big(B^a(x) = s\big(\bar{c}^a(x)\big)\big)$

$$\partial^\nu_{(x)}\partial^\mu_{(y)}\langle\Omega|T A^a_\nu(x) A^b_\mu(y)|\Omega\rangle = -\xi\left\langle\Omega\right|T^* B^a(x)\partial^\mu_{(y)}A^b_\mu(y)\Big)\left|\Omega\right\rangle$$

$$= -\xi\left\langle\Omega\right|T^* s(\bar{c}^a(x))\partial^\mu_{(y)}A^b_\mu(y)\Big)\left|\Omega\right\rangle$$

利用Ward-Takahashi恒等式

$$s\left\langle\Omega\right|T^*\,\big(\bar{c}^a(x)\big)\partial^\mu_{(y)}A^b_\mu(y)\Big)\left|\Omega\right\rangle = 0$$

$$\left\langle\Omega\right|T^* s(\bar{c}^a(x))\partial^\mu_{(y)}A^b_\mu(y)\Big)\left|\Omega\right\rangle = \left\langle\Omega\right|T^*\bar{c}^a(x)\; s\left[\partial^\mu_{(y)}A^b_\mu(y)\right]\left|\Omega\right\rangle$$

$$= \left\langle\Omega\right|T^*\bar{c}^a(x)\;\partial^\mu\left(D^{bc}_\mu\, c^c(y)\right)\left|\Omega\right\rangle$$

$$= \left\langle\Omega\right|T^*\frac{\delta S_{eff}}{\delta\bar{c}^b(y)}\bar{c}^a(x)\left|\Omega\right\rangle$$

$$= i\delta^4(x-y)\delta^{ab}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\delta_\lambda A^a_\mu(x) &= \lambda s A_\mu(x)\\ &= \lambda D^{ab}_\mu c^b(x)\end{aligned}}$$

$$\boxed{\frac{\delta S_{eff}}{\delta\bar{c}^b(y)} = -\partial^\mu D^{ab}_\mu c^b}$$

最后，我们得到

$$\partial^{\mu}_{(x)}\partial^{\nu}_{(y)}\langle\Omega\left|TA^{a}_{\mu}(x)A^{b}_{\nu}(y)\right|\Omega\rangle = -i\xi\delta^{4}(x-y)\delta^{ab}$$

动量空间的表达式为

$$(-ik^{\mu})(ik^{\nu})G^{ab}_{\mu\nu}(k) = -i\xi\delta^{ab}$$

利用 $G^{ab}_{\mu\nu}(k)$ 的洛伦兹结构表达式，有

$$(-ik^{\mu})(ik^{\nu})G^{ab}_{\mu\nu}(k) = -iB\left(k^{2}\right)\delta^{ab}$$

$$B\left(k^{2}\right) \equiv \xi$$

- 这个结论不依赖于微扰论，所以在微扰论的任意阶都成立；它表明，规范场的四维纵向部分不会被辐射修正改变，也即规范固定项不需要重正（没有额外发散），从而有 $Z_{\xi} = Z_{3}$；
- 相应地，规范场的两点单粒子不可约图（规范玻色子自能图）必须是四维横向的。

10.7 非阿贝尔规范理论BRST量子化下的幺正性

S 矩阵的幺正性要求

$$SS^{+} = S^{+}S = 1, \qquad \text{或者} \qquad \sum_c S_{ac}S_{bc}^{*} = \delta_{ab}$$

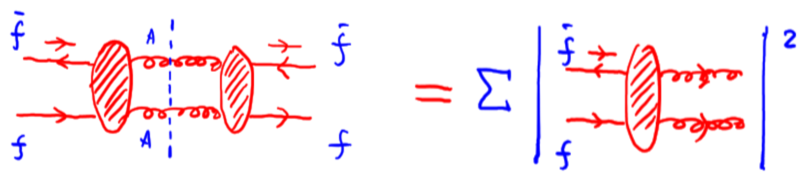
考虑 S 矩阵元和散射振幅的关系 $\quad S_{ab} = \delta_{ab} + i(2\pi)^4\delta(p_a - p_b)T_{ab}$

则 S 矩阵的幺正性给出光学定理

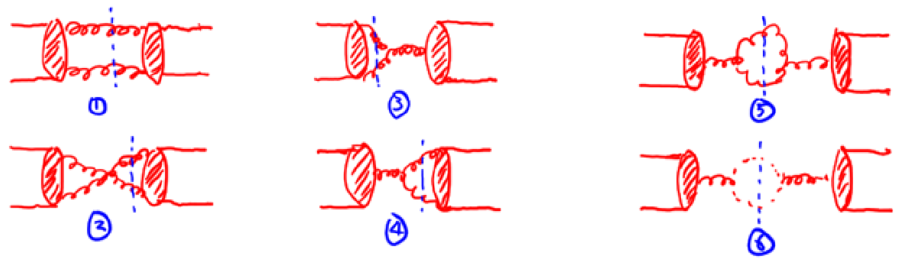
$$\mathrm{Im}\, T_{ab} = \frac{1}{2}\sum_c T_{ac}T_{bc}^{*}\,(2\pi)^4\delta^4(p_a - p_b)$$

物理含义是：散射振幅 T_{ab} 的虚部与初末态（b,a）到所有可能末态（c）的散射振幅（在保证能动量守恒的前提下）的振幅之间有直接的联系，其中所有的末态都应该是物理态。

考虑正反费米子对通过中间态为两个规范玻色子的向前散射振幅 $T(f\bar{f} \to f\bar{f})$



利用Cutkosky的cutting rule （参见Peskin&Schroeder， Chap.7.3），散射振幅 $T(f\bar{f}\to f\bar{f})$ 的虚部可以通过对内线规范玻色子取在壳条件来计算。但是实际上，在利用cutting rule时，还必须考虑鬼粒子的贡献。使用cutting rule的圈图贡献为



这些cut的结果涉及到四个振幅（令 $a=f\bar{f}, b=gg$ 或者 $c\bar{c}$）

$T^{(1)ab}_{\mu\nu} =$ 

$T^{(2)ab}_{\mu\nu} =$ 

$T^{(3)ab}_{\mu\nu} =$ 

$S^{ab} =$ 

$$T^{ab}_{\mu\nu} = T^{(1)ab}_{\mu\nu} + T^{(2)ab}_{\mu\nu} + T^{(3)ab}_{\mu\nu}$$

其中 $T^{ab}_{\mu\nu}$ 代表 $T(f\bar{f}\to gg)$，S^{ab} 代表 $f\bar{f}\to \bar{c}^a c^b$

利用Cutkosky的cutting rule，散射振幅的虚部可以通过将中间态的传播子用它们的虚部来代替，即乘以在壳的振幅 $T(f\bar{f}\to gg)\cdot T^*(gg\to f\bar{f})$。当取费曼规范 $\xi=1$，规范场的传播子为（其中的 $\theta(k^0)$ 是要求规范玻色子和鬼粒子在相同的物理区域）

$$G_{\mu\nu}^{ab}(k)=-\frac{ig_{\mu\nu}}{k^2+i\epsilon}\delta^{ab}\ \Longrightarrow 2\pi i\,\delta^{ab}g_{\mu\nu}\delta(k^2)\theta(k^0)$$

相应地，鬼场的传播子做替换

$$G^{ab}(k)=\frac{i\delta^{ab}}{k^2+i\epsilon}\Longrightarrow\ -i2\pi\delta^{ab}\delta(k^2)\theta(k^0)$$

则根据Cutting rule，可以得到

$$2\mathrm{Im}\,T^{aa}=\int d\Phi_2\left[\frac{1}{2}T_{\mu\nu}^{ab}T_{\mu'\nu'}^{ab*}g^{\mu\mu'}g^{\nu\nu'}-S^{ab}S^{ab*}\right]$$

$$=\int d\Phi_2\left[\left(T_{\mu\nu}^{(1)ab}T_{\mu'\nu'}^{(1)ab*}+T_{\mu\nu}^{(2)ab}T_{\mu'\nu'}^{(1)ab*}+T_{\mu\nu}^{(1)ab}T_{\mu'\nu'}^{(3)ab*}\right.\right.$$

$$\left.\left.+T_{\mu\nu}^{(2)ab}T_{\mu'\nu'}^{(3)ab*}+\frac{1}{2}T_{\mu\nu}^{(3)ab}T_{\mu'\nu'}^{(3)ab*}\right)g^{\mu\mu'}g^{\nu\nu'}-S^{ab}S^{ab*}\right]$$

根据光学定理，

$$2\mathrm{Im}\,T^{aa}=\frac{1}{2}\int d\Phi_2\left[T^{ab}_{\mu\nu}T^{ab*}_{\mu'\nu'}P^{\mu\mu'}(k_1)P^{\nu\nu'}(k_2)\right]$$

其中$\frac{1}{2}$来自全同粒子末态，$P^{\mu\mu'}(k)$ 代表规范玻色子物理的极化矢量的求和

$$P^{\mu\mu'}(k)=\sum_{\lambda=1,2}\epsilon_\lambda^{\mu*}(k)\,\epsilon_\lambda^{\mu'}(k)$$

需要证明的是：Cutting rule的结果和光学定理（幺正性）的结果是一致的。

首先，我们选取规范玻色子的极化矢量：

- 极化矢量有四个分量，其完备性要求有四个独立的洛伦兹矢量构成完备基；
- 一个是规范玻色子的动量 k^μ；两个横向极化的矢量为 $\epsilon_i^\mu(k)$， $i=1,2$满足横向条件 $k\cdot\epsilon_i(k)=0$ 和归一化条件 $\epsilon_i^2=-1$；
- 第四个极化矢量 η^μ 应该满足

$$\eta\cdot k\neq 0,\ \ \eta\cdot\epsilon_i(k)=0$$

- 它们满足完备性条件

$$\epsilon_1^{\mu*}(k)\epsilon_1^\nu(k)+\epsilon_2^{\mu*}(k)\epsilon_2^\nu(k)-Q^{\mu\nu}(k,\eta)=P^{\mu\nu}(k)-Q^{\mu\nu}(k,\eta)=-g^{\mu\nu}$$

可以证明，
$$Q^{\mu\nu}(k,\eta)=\frac{\left[(k\cdot\eta)(k^\mu\eta^\nu+k^\nu\eta^\mu)-\eta^2\,k^\mu k^\nu\right]}{(k\cdot\eta)^2}$$

令
$$Q^{\mu\nu}(k,\eta)=F\left(k\cdot\eta,\eta^2\right)k^\mu k^\nu+G\left(k\cdot\eta,\eta^2\right)(k^\mu\eta^\nu+k^\nu\eta^\mu)$$
$$+H\left(k\cdot\eta,\eta^2\right)\eta^\mu\eta^\nu$$

由于 $P^{\mu\nu}(k)=-g^{\mu\nu}+Q^{\mu\nu}(k,\eta)$， 有

$$P^{\mu\nu}(k)k_\mu k_\nu=0\ \Longrightarrow\ H\left(k\cdot\eta,\eta^2\right)(k\cdot\eta)^2=0\ \Longrightarrow\ H\left(k\cdot\eta,\eta^2\right)=0$$
$$P^{\mu\nu}(k)k_\mu\eta_\nu=0\ \Longrightarrow\ G\left(k\cdot\eta,\eta^2\right)(k\cdot\eta)^2-k\cdot\eta=0$$
$$\Longrightarrow G\left(k\cdot\eta,\eta^2\right)=k\cdot\frac{\eta}{(k\cdot\eta)^2}$$
$$P^{\mu\nu}(k)\eta_\mu\eta_\nu=0\ \Longrightarrow\ F\left(k\cdot\eta,\eta^2\right)(k\cdot\eta)^2+\ G\left(k\cdot\eta,\eta^2\right)(k\cdot\eta)\eta^2=0$$
$$\Longrightarrow\ \ F\left(k\cdot\eta,\eta^2\right)=-\frac{\eta^2}{(k\cdot\eta)^2}$$

考虑四点格林函数

$$G^{ab}_{4,\mu}(x_1,x_2,x_3,x_4) \equiv \left\langle \Omega \middle| T^* \left(\bar{c}^a(x_1) A^b_\mu(x_2) \bar{\psi}(x_3) \psi(x_4) \right) \middle| \Omega \right\rangle$$

在BRST变换下，

$$\begin{aligned} 0 \equiv \delta_\lambda G^{ab}_{4,\mu}(x_1,x_2,x_3,x_4) = & \left\langle \Omega \middle| T^* \left(\delta_\lambda \bar{c}^a(x_1) A^b_\mu(x_2) \bar{\psi}(x_3) \psi(x_4) \right) \middle| \Omega \right\rangle \\ & + \left\langle \Omega \middle| T^* \left(\bar{c}^a(x_1) \delta_\lambda A^b_\mu(x_2) \bar{\psi}(x_3) \psi(x_4) \right) \middle| \Omega \right\rangle \\ & + \left\langle \Omega \middle| T^* \left(\bar{c}^a(x_1) A^b_\mu(x_2) \delta_\lambda \bar{\psi}(x_3) \psi(x_4) \right) \middle| \Omega \right\rangle \\ & + \left\langle \Omega \middle| T^* \left(\bar{c}^a(x_1) A^b_\mu(x_2) \bar{\psi}(x_3) \delta_\lambda \psi(x_4) \right) \middle| \Omega \right\rangle \end{aligned}$$

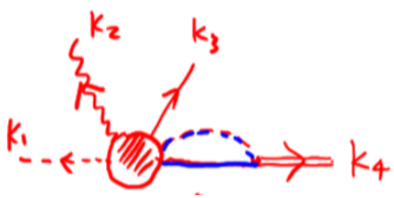
$$\delta_\lambda \bar{c}^a = \lambda B^a, \qquad \delta_\lambda A^a_\mu = \lambda D^{ab}_\mu c^b,$$

$$\delta_\lambda \psi = ig\lambda t^a c^a \psi, \qquad \delta_\lambda \bar{\psi} = -ig\bar{\psi}\lambda t^a c^a$$

当考虑 $\psi(x_3)$ 和 $\bar{\psi}(x_4)$ 对应在壳的费米子时（在LSZ约化公式的意义上），$\delta_\lambda\psi$ 和 $\delta_\lambda\bar{\psi}$ 中包含的组合算符没有对应的极点，所以对于相应的振幅没有贡献，例如上面的第四项为

$$\left\langle\Omega\left|T^*\left(\bar{c}^a(x_1)A_\mu^b(x_2)\bar{\psi}(x_3)\delta_\lambda\psi(x_4)\right)\right|\Omega\right\rangle$$

$$= ig\lambda\left\langle\Omega\left|T^*\left(\bar{c}^a(x_1)A_\mu^b(x_2)\bar{\psi}(x_3)t^c c^c(x_4)\psi(x_4)\right)\right|\Omega\right\rangle$$



- 根据LSZ约化公式，考虑两个外线费米子在壳的振幅时，我们需要对动量空间的相应格林函数（如右上图所示）截去费米子外腿；
- 这实际上是乘以费米子全传播子的逆，对于外线动量为 k_4 的腿，我们要乘以 $(\gamma\cdot k_4-m)$，
- 但显然这个图没有 $\frac{i}{\gamma\cdot k_4-m}$型的极点，因为鬼场和费米子的传播子的四动量和才是 k_4；
- 因此，当取 $\gamma\cdot k_4\to m$ 的极限时，这个图对两个在在壳费米子的振幅的贡献为零 （在乘以 $(\gamma\cdot k_4-m)$ ）之后。

所以，在取 $\gamma \cdot k_4 \to m$ 极限下

$$\delta_\lambda \bar{c}^a = \lambda B^a$$
$$\delta_\lambda A_\mu^a = \lambda D_\mu^{ab} c^b$$

$$\left\langle \Omega \left| T^* \left(B^a(x_1) A_\mu^b(x_2) \bar{\psi}(x_3) \psi(x_4) \right) \right| \Omega \right\rangle$$
$$= \left\langle \Omega \left| T^* \left(\bar{c}^a(x_1) D_\mu^{bc} c^c(x_2) \bar{\psi}(x_3) \delta_\lambda \psi(x_4) \right) \right| \Omega \right\rangle$$
$$= \left\langle \Omega \left| T^* \left(\bar{c}^a(x_1) \partial_\mu c^b(x_2) \bar{\psi}(x_3) \delta_\lambda \psi(x_4) \right) \right| \Omega \right\rangle$$

上面的第二个等式我们利用了这个性质：如果我们要取所有的外线动量都在壳，只有那些线性外线场的格林函数才有贡献（它们具有对应外线粒子的极点）。

根据 $B^a(x)$ 满足的Schwinger-Dyson方程

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{eff}}{\partial B^a} = \partial_\mu A^{a,\mu} + \xi B^a$$

$$\langle \Omega | T^* (\xi B^a + \partial_\nu A^{a\nu})(x) \bar{\psi}(x_3) \psi(x_4) | \Omega \rangle = 0$$

$$\left\langle \Omega \left| T^* \left(B^a(x_1) A_\mu^b(x_2) \bar{\psi}(x_3) \psi(x_4) \right) \right| \Omega \right\rangle$$
$$= -\frac{1}{\xi} \left\langle \Omega \left| T^* \left(\partial_\nu A^{a\nu}(x_1) A_\mu^b(x_2) \bar{\psi}(x_3) \delta_\lambda \psi(x_4) \right) \right| \Omega \right\rangle$$

当取Feynman规范 （$\xi=1$）时，有

$$\left\langle \Omega \left| T^{*}\left(\partial_{\nu} A^{a\nu}(x_1) A_{\mu}^{b}(x_2) \bar{\psi}(x_3) \psi(x_4)\right) \right| \Omega \right\rangle$$

$$= -\left\langle \Omega \left| T^{*}\left(\bar{c}^{a}(x_1) \partial_{\mu} c^{b}(x_2) \bar{\psi}(x_3) \psi(x_4)\right) \right| \Omega \right\rangle$$

引入动量空间的格林函数 $G_{\mu\nu}^{ab}(k_1,k_2,k_3,k_4)$ 和 $R^{ab}(k_1,k_2,k_3,k_4)$

$$(2\pi)^4 \delta^4(k_1+k_2-k_3-k_4) G_{\mu\nu}^{ab}(k_1,k_2,k_3,k_4)$$

$$= \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4\, e^{ik_1\cdot x_1+ik_2\cdot x_2-ik_3\cdot x_3-ik_4\cdot x_4}$$

$$\times \left\langle \Omega \left| T^{*}\left(A^{a\nu}(x_1) A_{\mu}^{b}(x_2) \bar{\psi}(x_3) \psi(x_4)\right) \right| \Omega \right\rangle$$

$$(2\pi)^4 \delta^4(k_1+k_2-k_3-k_4) R^{ab}(k_1,k_2,k_3,k_4)$$

$$= \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4\, e^{ik_1\cdot x_1+ik_2\cdot x_2-ik_3\cdot x_3-ik_4\cdot x_4}$$

$$\times \left\langle \Omega \left| T^{*}\left(\bar{c}^{a}(x_1) c^{b}(x_2) \bar{\psi}(x_3) \psi(x_4)\right) \right| \Omega \right\rangle$$

在动量空间有

$$k_1^\mu G_{\mu\nu}^{ab}(k_1,k_2,k_3,k_4)=k_{2\nu}R^{ab}(k_1,k_2,k_3,k_4)$$

我们只考虑 $G_{\mu\nu}^{ab}$ 和 R^{ab} 中连通图的贡献，它们可以表示为截腿格林函数和传播子的乘积。根据前面鬼场传播子和Feynman规范下胶子的传播子（它们只相差一个$-g_{\mu\nu}$），则相应地有截腿格林函数的关系

$$k_1^\mu g_\mu^\rho G_{\rho\sigma}^{(amp)ab}(k_1,k_2,k_3,k_4)g_\nu^\sigma=k_{2\nu}R^{(amp)ab}(k_1,k_2,k_3,k_4)$$

截腿格林函数和振幅有直接的关系（我们这里略去了对初态正反费米子的约化，对于这两个格林函数所对应的过程的费米初态是完全相同的）

$$T_{\mu\nu}^{ab}=G_{\mu\nu}^{(amp)ab},\qquad S^{ab}=iR^{(amp)ab}$$

第二个等式中多出来的 i 因子是由于鬼粒子和反鬼粒子对的动量空间波函数为 i。最终，有如下 Ward 恒等式

$$k_1^\mu T_{\mu\nu}^{ab}(k_1,k_2,k_3,k_4)=-iS^{ab}k_{2\nu}$$

同理可证

$$k_2^\mu T_{\mu\nu}^{ab}(k_1,k_2,k_3,k_4)=-iS^{ab}k_{1\nu}$$

这是非阿贝尔规范理论中的Ward恒等式的一种，由它可以直接推出

$$k_1 \cdot T \cdot k_2 = 0\,, \qquad k_2 \cdot T \cdot k_1 = 0\,, \qquad 当 \quad k_1^2 = k_2^2 = 0$$

光学定理要求

$$2\mathrm{Im}\, T^{aa} = \frac{1}{2}\int d\Phi_2 \left[T^{ab}_{\mu\nu} T^{ab*}_{\mu'\nu'} P^{\mu\mu'}(k_1) P^{\nu\nu'}(k_2)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\int d\Phi_2 \left[T^{ab}_{\mu\nu} T^{ab*}_{\mu'\nu'} \left(-g^{\mu\mu'} + Q^{\mu\mu'}(k_1,\eta_1)\right)\left(-g^{\nu\nu'} + Q^{\nu\nu'}(k_2,\eta_2)\right)\right]$$

由于 η 的任意性，我们取 $\eta^2 = 0$ （类光矢量）。这样上式右边被积函数的四项分别为：

第一项： $T^{ab}_{\mu\nu} T^{ab*}_{\mu'\nu'} g^{\mu\mu'} g^{\nu\nu'}$

第二项：

$$-g^{\mu\mu'} Q^{\nu\nu'}(k_2) T^{ab}_{\mu\nu} T^{ab,*}_{\mu'\nu'} = -g^{\mu\mu'}\left[(k_2\cdot\eta_2)^{-1}\left(k_2^{\nu}\eta_2^{\nu'} + k_2^{\nu'}\eta_2^{\nu}\right)\right] T^{ab}_{\mu\nu} T^{ab,*}_{\mu'\nu'}$$

$$= -(k_2\cdot\eta_2)^{-1}\left[\left(T^{ab}\cdot k_2\right)\cdot\left(T^{ab,*}\cdot\eta_2\right) + \left(T^{ab}\cdot\eta_2\right)\cdot\left(T^{ab,*}\cdot k_2\right)\right]$$

$$= -(k_2\cdot\eta_2)^{-1}\left[-iS^{ab} k_1\cdot T^{ab,*}\cdot\eta_2 + iS^{ab,*} k_1\cdot T\cdot\eta_2\right]$$

$$= -2(k_2\cdot\eta_2)^{-1}\left[S^{ab} S^{ab,*} k_2\cdot\eta_2\right] = -2S^{ab}S^{ab,*}$$

第三项：可以类似证明，结果和第二项相同。

第四项：

$$
\begin{aligned}
& Q^{\mu\mu'}(k_1,\eta_1)Q^{\nu\nu'}(k_2,\eta_2)T^{ab}_{\mu\nu}T^{ab,*}_{\mu'\nu'} \\
&= (k_1\cdot\eta_1)^{-1}(k_2\cdot\eta_2)^{-1}\left[\left(k_1^{\mu}\eta_1^{\mu'}+\eta_1^{\mu}k_1^{\mu'}\right)T^{ab}_{\mu\nu}T^{ab,*}_{\mu'\nu'}\left(k_2^{\nu}\eta_2^{\nu'}+\eta_2^{\nu}k_2^{\nu'}\right)\right] \\
&= (k_1\cdot\eta_1)^{-1}(k_2\cdot\eta_2)^{-1}\left[\left(k_1\cdot T^{ab}\cdot k_2\right)\left(\eta_1\cdot T^{ab,*}\cdot\eta_2\right)\right. \\
&\qquad +\left(k_1\cdot T^{ab}\cdot\eta_2\right)\left(\eta_1\cdot T^{ab,*}\cdot k_2\right) \\
&\qquad +\left(\eta_1\cdot T^{ab}\cdot k_2\right)\left(k_1\cdot T^{ab,*}\cdot\eta_2\right) \\
&\qquad \left.+\left(\eta_1\cdot T^{ab}\cdot\eta_2\right)\left(k_1\cdot T^{ab,*}\cdot k_2\right)\right] \\
&= 2(k_1\cdot\eta_1)^{-1}(k_2\cdot\eta_2)^{-1}\left[S^{ab}S^{ab,*}(k_2\cdot\eta_2)(\eta_1\cdot k_1)\right] = 2S^{ab}S^{ab,*}
\end{aligned}
$$

最终，我们得到

$$
\begin{aligned}
2\mathrm{Im}\,T^{aa} &= \frac{1}{2}\int d\Phi_2\left[T^{ab}_{\mu\nu}T^{ab*}_{\mu'\nu'}P^{\mu\mu'}(k_1)P^{\nu\nu'}(k_2)\right] \\
&= \int d\Phi_2\left[\frac{1}{2}T^{ab}_{\mu\nu}T^{ab*}_{\mu'\nu'}g^{\mu\mu'}g^{\nu\nu'} - S^{ab}S^{ab,*}\right]
\end{aligned}
$$

和 cutting rule 结果相同。

在这里我们看到，在证明非物理的自由度之间的相消关系时（规范玻色子的非物理极化态和鬼粒子的贡献正好抵消），Ward恒等式的重要性。需要强调的是，这里的证明与微扰论无关。

当有对称性自发破缺时，还会有Goldstone粒子，我们必须证明，在微扰各阶，它们不出现在物理末态。Ward恒等式在这些证明中是十分重要的。Ward恒等式来自于理论的对称性，因此我们在采用正规化方案时，一定要保证物理的对称性。

11. 非阿贝尔规范理论的正则量子化

11.1 基本自由度和正则变量

- 费曼规范：（$\xi = 1$）

$$\mathcal{L}_{eff} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a,\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma\cdot D - m)\psi - (\partial^\mu B^a)A^a_\mu + \frac{1}{2}B^aB^a + (\partial^\mu \bar{c}^a)D^{ab}_\mu c^b$$

- 正则共轭动量： $\Pi^{a,\mu} = F^{a,\mu 0}, \qquad \Pi_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}_{eff}}{\partial(D_0\psi)} = i\psi^+,$

$$\Pi^a_B = -A^a_0, \qquad \Pi^a_c = \partial^0\bar{c}^a, \qquad \Pi^a_{\bar{c}} = -D^{ab}_0 c^b$$

- 正则对易关系：

$$\left[A^a_i(\vec{x},t), F^{b,j0}(\vec{y},t)\right] = i\delta^{ab}\delta^j_i\delta^3(\vec{x}-\vec{y})$$
$$\left[B^a(\vec{x},t), -A^{b,0}(\vec{y},t)\right] = i\delta^{ab}\delta^3(\vec{x}-\vec{y})$$
$$\left\{\psi_i(\vec{x},t), i\psi^+_j(\vec{y},t)\right\} = i\delta_{ij}\delta^3(\vec{x}-\vec{y})$$
$$\left\{c^a(\vec{x},t), \partial^0\bar{c}^b(\vec{y},t)\right\} = i\delta^{ab}\delta^3(\vec{x}-\vec{y})$$
$$\left\{\bar{c}^a(\vec{x},t), -(D_0c)^b(\vec{y},t)\right\} = i\delta^{ab}\delta^3(\vec{x}-\vec{y})$$

- 自由场：$g = 0$

$$\partial^2 A^a_\mu = 0, \qquad \partial^2 c^a = 0, \qquad \partial^2 \bar{c}^a = 0,$$
$$\partial^\mu A^a_\mu = -B^a$$

- 自由场（渐近场）的正则对易关系：

$$\left[A_\mu^a(\vec{x},t),\dot{A}_\nu{}^b(\vec{y},t)\right]=-i\delta^{ab}g_{\mu\nu}\delta^3(\vec{x}-\vec{y})$$
$$\left[\partial^\mu A_\mu^a(\vec{x},t),A^{b,0}(\vec{y},t)\right]=i\delta^{ab}\delta^3(\vec{x}-\vec{y})$$
$$\left\{c^a(\vec{x},t),\partial^0\bar{c}^b(\vec{y},t)\right\}=i\delta^{ab}\delta^3(\vec{x}-\vec{y})$$
$$\left\{\bar{c}^a(\vec{x},t),\partial^0 c^b(\vec{y},t)\right\}=-i\delta^{ab}\delta^3(\vec{x}-\vec{y})$$

11.2 规范场的平面波展开和规范玻色子的Fock态

- 平面波展开：

$$A_\mu^a(x)=\sum_{\lambda=0}^{3}\int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_{\vec{k}}}\left(\epsilon_\mu^{(\lambda)}(k)a_{\vec{k}}^{a(\lambda)}e^{-ik\cdot x}+\epsilon_\mu^{(\lambda)*}(k)a_{\vec{k}}^{a(\lambda)+}e^{ik\cdot x}\right)$$

- 取极化矢量：

两个横向极化 $\epsilon_\mu^{(i)}(k)=\left(0,-\vec{\epsilon}^{(i)}(k)\right),\qquad \vec{\epsilon}^{(i)}(k)\cdot\vec{\epsilon}^{(j)}(k)=\delta_{ij},$

$\vec{k}\cdot\vec{\epsilon}^{(i)}(k)=0,\qquad i=1,2;$

非物理的极化矢量选为标量极化 $\epsilon_\mu^{(0)}(k)$ 和纵向极化 $\epsilon_\mu^{(3)}(k)$

$$\epsilon_\mu^{(0)}(k) = \left(1, \vec{0}\right), \qquad \epsilon_\mu^{(3)}(k) = \left(0, -\frac{\vec{k}}{\left|\vec{k}\right|}\right)$$

可以得到产生、湮灭算符 $a_{\vec{k}}^{a(\lambda)+}$和 $a_{\vec{k}}^{a(\lambda)}$满足的对易关系

$$\left[a_{\vec{k}}^{a(\lambda)}, a_{\vec{k}'}^{b(\lambda')+}\right] = -g_{\lambda\lambda'}\delta^{ab}2E_{\vec{k}}(2\pi)^3\delta^3\left(\vec{k}-\vec{k}'\right)$$

相应的单粒子Fock态可以定义为

$$|g(k,\lambda,a)\rangle = a_{\vec{k}}^{a(\lambda)+}|0\rangle$$

$$\langle g(k,\lambda,a)|g(k',\lambda',b)\rangle = -g_{\lambda\lambda'}\delta^{ab}2E_{\vec{k}}(2\pi)^3\delta^3\left(\vec{k}-\vec{k}'\right)$$

可以看出，标量极化态 $|g(k,0,a)\rangle$ 是负模态，

$$\langle g(k,0,a)|g(k',0,b)\rangle = -\delta^{ab}2E_{\vec{k}}(2\pi)^3\delta^3\left(\vec{k}-\vec{k}'\right)$$

也就是说，在这种量子化方案中，Fock态空间的度规是非正定的度规。

11.3 鬼场的平面波展开和鬼场的Fock态

- 在有效拉氏量 $\mathcal{L}_{eff}$ 中，鬼场 $c^a(x)$ 和反鬼场 $\bar{c}^a(x)$ 是独立的动力学变量，而且 $c^a(x)$ 是反厄米的，$\bar{c}^a$ 是厄米的，即 $c^{a+} = -c^a, \bar{c}^{a+} = \bar{c}^a$。
- 它们满足反对易关系，但它们的自由传播子则表现为标量粒子的形式，不满足通常的费米子和玻色子的自旋统计关系，因此物理的自洽性要求它们的粒子激发（鬼粒子和反鬼粒子）不出现在物理过程的末态中。

鬼场和反鬼场分别做如下平面波展开：

$$c^a(x) = -i\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_{\vec{k}}}\left(c^a_{\vec{k}}e^{-ik\cdot x} + c^{a+}_{\vec{k}}e^{ik\cdot x}\right)$$

$$\bar{c}\,^a(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_{\vec{k}}}\left(\bar{c}^a_{\vec{k}}e^{-ik\cdot x} + \bar{c}^{a+}_{\vec{k}}e^{ik\cdot x}\right)$$

- $c^a_{\vec{k}}$ 和 $c^{a+}_{\vec{k}}$ 为鬼粒子的湮灭和产生算符；
- $c^a(x)$是反厄米的，平面波展开的（$-i$）保证 $c^a_{\vec{k}}$ 和 $c^{a+}_{\vec{k}}$ 互为厄米共轭；
- $\bar{c}^a_{\vec{k}}$ 和 $\bar{c}^{a+}_{\vec{k}}$ 为反鬼粒子的湮灭和产生算符，互为复共轭；
- $c^a_{\vec{k}}$ 和 $\bar{c}^a_{\vec{k}}$ 没有直接联系。

- 产生湮灭算符的对易关系：

$$\left\{c_{\vec{k}}^{a}, c_{\vec{k}'}^{b+}\right\} = \left\{\bar{c}_{\vec{k}}^{a}, \bar{c}_{\vec{k}'}^{b+}\right\} = \left\{c_{\vec{k}}^{a}, c_{\vec{k}'}^{b}\right\} = \left\{\bar{c}_{\vec{k}}^{a}, \bar{c}_{\vec{k}'}^{b}\right\} = 0$$

$$\left\{c_{\vec{k}}^{a}, \bar{c}_{\vec{k}'}^{b+}\right\} = \quad i\delta^{ab} 2E_{\vec{k}} (2\pi)^3 \delta^3\left(\vec{k} - \vec{k}'\right)$$

只有鬼场的产生（湮灭）算符和反鬼场的湮灭（产生）算符之间的反对易子不为零。

- 鬼粒子与反鬼粒子态：

$$|gh(k,a)\rangle = i c_{\vec{k}}^{a+}|0\rangle, \qquad \left|\overline{gh}(k,a)\right\rangle = \bar{c}_{\vec{k}}^{a+}|0\rangle$$

$$\langle gh(k,a)|gh(k',b)\rangle = \left\langle\overline{gh}(k,a)\middle|\overline{gh}(k',b)\right\rangle = 0;$$

$$\left\langle gh(k,a)\middle|\overline{gh}(k',b)\right\rangle = \left\langle\overline{gh}(k,a)\middle|gh(k',b)\right\rangle = \delta^{ab}(2\pi)^3\delta^3\left(\vec{k} - \vec{k}'\right)$$

鬼粒子和反鬼粒子的Fock态都是零模的，即单个鬼粒子或反鬼粒子的产生几率为零。

鬼粒子和反鬼粒子必须成对出现。

- 鬼粒子反鬼粒子对Fock态：

$$\left|gh(k_1,a),\overline{gh}(k_2,b)\right\rangle = |gh(k_1,a)\rangle\left|\overline{gh}(k_2,b)\right\rangle = \left(ic^{a+}_{\vec{k}_1}\right)\bar{c}^{b+}_{\vec{k}_2}|0\rangle$$

鬼粒子反鬼粒子对的动量空间波函数为i。

$$\left\langle gh(k_1,a),\overline{gh}(k_2,b)\middle|gh(k_1',b'),\overline{gh}(k_2',a')\right\rangle$$

$$= -(2\pi)^6 2E_{\vec{k}_1} 2E_{\vec{k}_2} \delta^{aa'}\delta^{bb'}\delta^3(\vec{k}_1-\vec{k}_1')\delta^3(\vec{k}_2-\vec{k}_2')$$

- 鬼粒子和反鬼粒子是成对出现的；
- 产生鬼粒子和反鬼粒子对的“几率”为“负”；
- 正反鬼粒子对的动量空间波函数为 i

11.4 物理Hilbert空间的条件和S矩阵的幺正性

BRST变换（BSRT荷 Q^{BRS}）将Yang-Mills理论的Hilbert态空间 $\mathcal{V}$ 划分为三部分，

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \mathcal{V}_0,$$

$\mathcal{V}_1$、$\mathcal{V}_2$、$\mathcal{V}_0$ 分别定义为

$$\mathcal{V}_1 = \left\{|\psi_1\rangle:\ Q^{BRS}|\psi_1\rangle \neq 0\right\};$$

$$\mathcal{V}_2 = \left\{|\psi_2\rangle:\ \exists|\psi_1\rangle \in \mathcal{V}_1, |\psi_2\rangle = Q^{BRS}|\psi_1\rangle \neq 0\right\}$$

$$\mathcal{V}_0 = \left\{|\psi_0\rangle:\ Q^{BRS}|\psi_0\rangle \equiv 0, |\psi_0\rangle \notin \mathcal{V}_2\right\}$$

- Hilbert 空间的 $\mathcal{V}_1$ 子空间包含 Q^{BRS} 荷不为零的态(用 $|\psi_1\rangle$ 表示)；$\mathcal{V}_2$ 子空间中的态都可以表示为 $|\psi_2\rangle = Q^{BRS}|\psi_1\rangle$，也就是说，对于任意一个 $\mathcal{V}_2$ 的态，都存在一个 $|\psi_1\rangle \in \mathcal{V}_1$， 使得 $|\psi_2\rangle$ 为 Q^{BRS} 荷作用在其上的结果；
- 根据 Q^{BRS} 荷的幂零性质（nilpotent），$\left(Q^{BRS}\right)^2 \equiv 0$，$|\psi_2\rangle$ 的 Q^{BRS} 荷为零，$Q^{BRS}|\psi_2\rangle = 0$；
- 子空间 $\mathcal{V}_0$ 中的态 $|\psi_0\rangle$ 的 Q^{BRS} 荷为零， 即 $Q^{BRS}|\psi_0\rangle = 0$，但和 $\mathcal{V}_2$ 的态 $|\psi_2\rangle$ 不同。

$\mathcal{V}_2$ 中的态都是零模的而且与 $\mathcal{V}_0$ 中的态正交：

$$\langle\psi_{2a}|\psi_{2b}\rangle = \langle\psi_{1a}|Q^{BRS}|\psi_{2b}\rangle = \left\langle\psi_{1a}\left|\left(Q^{BRS}\right)^2\right|\psi_{2b}\right\rangle = 0$$

$$\langle\psi_{2a}|\psi_0\rangle = \langle\psi_{1a}|Q^{BRS}|\psi_0\rangle = 0$$

Kugo-Ojima 判据：根据 Q^{BRS} 荷和鬼粒子数 Q_c ，物理态 $|phy\rangle$ 满足的 Q^{BRS} 荷和鬼粒子数 Q_c 都为零，即

$$Q^{BRS}|phy\rangle = 0, \qquad Q_c|phy\rangle = 0$$

很容易看到，物理态 $|phy\rangle$ 处于子空间 $\mathcal{V}_0$。

S 矩阵BRST不变性： $\left[Q^{BRS}, H\right] = 0, \qquad \left[Q^{BRS}, S\right] = 0$

$$Q^{BRS}S|phy\rangle = SQ^{BRS}|phy\rangle = 0$$

$$S|phy\rangle = |phys\rangle + |\psi_2\rangle, \qquad |\psi_2\rangle \in \mathcal{V}_2$$

物理意义是，物理态经过散射之后，会转化为物理态和 $\mathcal{V}_2$ 空间的态。

- 令 $|i;phy\rangle$ 代表初始的物理态，$|n\rangle$ 代表任意的中间态；
- 物理态的 Q^{BRS} 荷为零，Q^{BRS} 守恒要求 $|n\rangle$ 只包含物理态和 $|\psi_2\rangle \in \mathcal{V}_2$ ；
- $\mathcal{V}_2$ 空间中的态 $|\psi_2\rangle$ 是零模的，而且和 $\mathcal{V}_0$ 中的态正交。

$$\langle n|S|i;phy\rangle = \langle n|phys\rangle + \langle n|\psi_{2i}\rangle = \langle n,phy|phy\rangle \equiv \langle n,phy|S|i;phy\rangle$$

$$\langle f;phy|i;phy\rangle = \langle f;phy|S^{+}S|i;phy\rangle = \sum_{all\,n}\langle f;phy|S^{+}|n\rangle\langle n|\,S|i;phy\rangle$$

$$= \sum_{n}\langle f;phy|S^{+}|n;phy\rangle\langle n;phy\,|S|i;phy\rangle$$

中间态只对物理态求和——幺正性得证。

11.5 YM 理论中的单粒子态的分类

规范粒子非物理极化矢量——标量极化 $\epsilon_{\mu}^{(0)}(k)$ 和 纵向极化 $\epsilon_{\mu}^{(3)}(k)$
进行线性组合——向前（+）和向后极化态（−）

$$\epsilon_{\mu}^{(\pm)}(k) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\epsilon_{\mu}^{(0)}(k) \mp \epsilon_{\mu}^{(3)}(k)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1, \mp\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}\right)$$

$$k\cdot\epsilon^{(+)}(k)=0,\qquad k\cdot\epsilon^{(-)}(k)=\sqrt{2}k^0\neq 0,$$
$$\epsilon^{(+)*}(k)\cdot\epsilon^{(-)}(k)=1,\qquad \epsilon^{(i)*}(k)\cdot\epsilon^{(\pm)}(k)=0$$

在自由的情形 （$g=0$），各种场的BRST变换关系为

a) 费米场：$\delta_\lambda\psi(x)=0$,

$$\{Q^{BRS},\psi\}=0\quad\Longrightarrow Q^{BRS}|f\rangle=0\ \Longrightarrow |f\rangle\in\mathcal{V}_0$$

即费米子属于物理空间 $\mathcal{V}_0$。

b）规范场：

$$\delta_\lambda A_\mu^a(x)=\lambda\partial_\mu c^a(x),\ \ i\left[Q^{BRS},A_\mu^a(x)\right]=\partial_\mu c^a(x)$$

$$iQ^{BRS}\sum\nolimits_\lambda a_{\vec{k}}^{a(\lambda)+}\epsilon_\mu^{(\lambda)*}(k)|0\rangle=iQ^{BRS}\sum\nolimits_\lambda\epsilon_\mu^{(\lambda)*}(k)|k,\lambda,a\rangle$$

$$=\ ik_\mu(-i)c_{\vec{k}}^{a+}|0\rangle=k_\mu|gh(k,a)\rangle$$

对横向极化 $\epsilon_\mu^{(i)}(k)$ 做内积，有 $\quad iQ^{BRS}|k,i,a\rangle=k\cdot\epsilon^{(i)}|gh(k,a)\rangle=0$

而且由于横向极化态的模不为零，所以属于物理态空间 $\mathcal{V}_0$。

如果对向前极化 $\epsilon_\mu^{(+)}(k)$ 做内积，则有

$$iQ^{BRS}|k,-,a\rangle = k\cdot\epsilon^{(+)}|gh(k,a)\rangle = 0$$

这说明向后极化态 $|k,-,a\rangle \notin \mathcal{V}_1$，但还要进一步确定它是属于$\mathcal{V}_0$ 还$\mathcal{V}_2$ 。

如果对向后极化 $\epsilon_\mu^{(-)}(k)$ 做内积，则有

$$iQ^{BRS}|k,+,a\rangle = k\cdot\epsilon^{(-)}|gh(k,a)\rangle = \sqrt{2}k^0|gh(k,a)\rangle \neq 0$$

这说明向前极化态 $|k,+,a\rangle \in \mathcal{V}_1$

c) 反鬼场

$$\delta_\lambda \bar{c}^a(x) = \lambda B^a(x) = -\lambda \partial^\mu A_\mu(x) = i\lambda\left\{Q^{BRS}, \bar{c}^a(x)\right\}$$

在这里我们应用了Feynman 规范下（$\xi = 1$）的自由场方程 $B^a = -\partial^\mu A_\mu(x)$

$$\begin{aligned} iQ^{BRS}\bar{c}_{\vec{k}}^{a+}|0\rangle &= Q^{BRS}\left|\overline{gh}(k,a)\right\rangle \\ &= -i\sum_\lambda k\cdot\epsilon^{(\lambda)*}(k)\, a_{\vec{k}}^{a(\lambda)+}|0\rangle = -i\left(\sqrt{2}k^0\right)|k,-,a\rangle \neq 0 \end{aligned}$$

所以，反鬼粒子态 $\left|\overline{gh}(k,a)\right\rangle \in \mathcal{V}_1$。同时，我们也得到

$$|k,-,a\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}k^0} Q^{BRS}\left|\overline{gh}(k,a)\right\rangle$$

可以确定向后极化态 $|k,-,a\rangle \in \mathcal{V}_2$。

d) 鬼场：

$$\delta_\lambda c^a(x) = 0, \quad i\lambda\{Q^{BRS}, \bar{c}^a(x)\} = 0$$

$$Q^{BRS} c_{\vec{k}}^{a+}|0\rangle = Q^{\mathrm{BRS}}|gh(k,a)\rangle = 0$$

$$iQ^{BRS}|k,+,a\rangle = k\cdot\epsilon^{(-)}|gh(k,a)\rangle = \sqrt{2}k^0|gh(k,a)\rangle \neq 0$$

$$|gh(k,a)\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}k^0}\, Q^{BRS}|k,+,a\rangle$$

而且 $|k,+,a\rangle \in \mathcal{V}_1$，我们立即知道鬼粒子态 $|gh(k,a)\rangle \in \mathcal{V}_2$。

综合上面的讨论，我们得到如下结论：

- 费米子、规范玻色子的横向极化态 $|k,i,a\rangle$ 都是物理态，属于 $\mathcal{V}_0$ 空间；
- 规范玻色子的向前极化态 $|k,+,a\rangle$ 和 反鬼粒子态 $|\overline{gh}(k,a)\rangle$ 属于 $\mathcal{V}_1$ 空间；
- 规范玻色子的向后极化态 $|k,-,a\rangle$ 和 鬼粒子态 $|gh(k,a)\rangle$ 属于 $\mathcal{V}_2$ 空间。

S矩阵的规范不变性：

$$[Q^{\mathrm{BRS}}, H] = 0\,, \quad [Q^{\mathrm{BRS}}, S] = 0\,,$$

$$\Rightarrow \quad Q^{\mathrm{BRS}} S|\text{物理态}\rangle = 0\,,$$

$$\Rightarrow \quad S|\text{物理态}\rangle = |\text{物理态}\rangle + |\psi_2\rangle$$

这是我们前面取得极化矢量约定

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_\mu(k,i) = (0, -\vec{\varepsilon}(k,i))\,, \quad \vec{\varepsilon}(k,i)\cdot\vec{\varepsilon}(k,j) = \delta_{ij}\,,\\
&\vec{k}\cdot\vec{\varepsilon}(k,i) = 0\,, \quad i = 1,2\,,\\
&\varepsilon_\mu(k,0) = (1,\vec{0})\,, \quad \varepsilon_\mu(k,3) = (0, -\vec{k}/|\vec{k}|)\,,\\
&\sum_{\lambda=0}^{3}(-1)^{\delta_{\lambda 0}}\varepsilon^*_\mu(k,\lambda)\varepsilon_\nu(k,\lambda) = -g_{\mu\nu}\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^\mu(k,\lambda)\,, \quad \lambda = 1,2 \quad (\text{transverse})\,,\\
&\varepsilon^\mu(k,\pm) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon^\mu(k,0) \mp \varepsilon^\mu(k,3)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, \mp\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|})\,,\\
&k\cdot\varepsilon(k,+) = 0\,, \quad k\cdot\varepsilon(k,-) = \sqrt{2}k^0 \neq 0\,.
\end{aligned}$$

$$\text{非物理态：} \begin{cases} |\overline{\mathrm{gh}}(k,A)\rangle, & |g(k,+,A)\rangle \in V_1\,,\\ |\mathrm{gh}(k,A)\rangle, & |g(k,-,A)\rangle \in V_2\,, \end{cases}$$

$$\text{物理态：} \quad |g(k,\mathrm{tr},A)\rangle \in V_0\,.$$

反鬼粒子和纵向极化规范玻色子

鬼粒子和沿空间运动相反方向极化的规范玻色子