schwartz.14.Path-integrals.nb

initial

********************************* 万年不变的初始化单元

文件绝对路径

In[13]:=
```
filename=NotebookFileName[]
```

Out[13]= C:\note\qft\schwartz.14.Path-integrals.nb

单元对象：第一个单元

In[14]:=
```
cell`title=Cells[][[1]];
```

刷新第一个单元的名字

In[15]:=
```
NotebookWrite[cell`title,Cell[FileNameSplit[filename][[-1]],"Title"]]
```

打印笔记本

In[43]:=
```
Export[NotebookDirectory[] <> FileBaseName[filename] <> ".pdf", EvaluationNotebook[]]
       导出  当前笔记本的目录                 文件基本名                     运行的笔记本
```

Out[41]= C:\note\qft\schwartz.14.Path-integrals.pdf

笔记本字体设置

AbsoluteOptions[EvaluationNotebook[], StyleDefinitions];

In[42]:=
```
SetOptions[EvaluationNotebook[], StyleDefinitions → Notebook[{
设置选项     运行的笔记本                样式定义             笔记本
Cell[StyleData[StyleDefinitions → FrontEnd`FileName[{"Book"}, "Textbook.nb",
单元  样式数据    样式定义
CharacterEncoding → "UTF-8"]]],
字符编码
Cell[StyleData["Text"], FontFamily → "微软雅黑",
单元  样式数据   文本          字体系列
FontSize → 12, FontWeight → "Plain",
字体大小        字体粗细        普通字体
FontSlant → "Plain",
字体倾斜      普通字体
FontVariations → {"StrikeThrough" → False, "Underline" → False}]
字体变化                                 假                     假
}]];
```

*********************************** notebook 备忘录

Schwartz book note

introduction

用产生湮灭算符可以研究量子场论，也可以用路径积分代替。有公式曰

$$\langle\Omega|\,T[\phi[x1]*\cdots\phi[xn]]\,|\Omega\rangle=\frac{\int\mathcal{D}\phi*\phi[x1]*\cdots\phi[xn]*\mathrm{Exp}[I*S[\phi]]}{\int\mathcal{D}\phi*\mathrm{Exp}[I*S[\phi]]} \quad (0.1)$$

左边正是 time-ordered product，可以计算S-矩阵元。

右边的$\mathcal{D}\phi$其含义是

integrate over all possible classical field configurations $\phi[\vec{x}, t]$ with the phase given by the classical action evaluated in that field configuration.

14.1 introduction

something....

14.7 Schwinger-Dyson equation

One odd thing about the path integral is 只有经典场。量子力学哪儿去了？ non-commutativity 哪儿去了？

section 7.1 告诉我们，an efficient way 显示经典和量子理论区别的方法是 Schwinger-Dyson equation

$$\left(\Box_x + m^2\right) \left\langle \hat{\phi}[x] * \hat{\phi}[x1] \cdots \hat{\phi}[xn] \right\rangle = \left\langle \mathcal{L}\text{`int'}\left[\hat{\phi}[x1] \cdots \hat{\phi}[xn]\right] \right\rangle - I * \sum_i \delta^4[x - x_i] \left\langle \hat{\phi}[x1] \cdots \hat{\phi}[x_{i-1}] \hat{\phi}[x_{i+1}] \cdots \hat{\phi}[xn] \right\rangle \quad (0.2)$$

Here $\mathcal{L}\text{`int'}\left[\hat{\phi}[x1]\right] = \frac{\partial}{\partial\phi}\mathcal{L}\text{`int}[\phi]$ is the variational derivative of the interaction Lagrangian.

⟨⋯⟩是缩写，== ⟨Ω | T[⋯] | Ω⟩ time-ordered 相互作用真空的矩阵元

推导Schwinger-Dyson 方程需要：相互作用的量子场满足

$$\left(\Box + m^2\right) \phi = \mathcal{L}\text{`int'}[\phi] \quad (0.3)$$

和正则对易关系

$$\left[\hat{\phi}[x], \partial t.\hat{\phi}[y]\right] = I * \delta^3[x - y] \quad (0.4)$$

Schwinger-Dyson 方程断言，编时乘积的真空矩阵元满足经典运动方程，除了差若干 contact terms 。

They specify non-perturbative relations among correlation functions.

In fact, 本章可见到，它们足以确定一个量子理论。

路径积分也可以得到类似公式，所以路径积分和正则量子化是等价的。

牢记，路径积分中的classical fields 不满足 classical的运动方程。

在路径积分中，我们把所有可能的field configurations 进行积分，不管它们是否满足运动方程。

14.7.1 Contact terms

$$\int d^4 z \in [z] \left(\Box_z \int \mathcal{D}\phi * (\text{Exp}[I * S] * \phi[z] * \phi[x]) - \int \mathcal{D}\phi * \left(\text{Exp}[I * S] * \phi[x] * \mathcal{L}\text{`int'}[\phi[z]]\right) + I * \delta^4[z - x] * \int \mathcal{D}\phi * \text{Exp}[I * S]\right) = 0 \quad (0.5)$$

14.7.2 Schwinger-Dyson differential equation

generating functional

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi * \text{Exp}\left[I * S[\phi] + I * \int d^4 x\, J(x) * \phi[x]\right] \quad (0.6)$$

$$Z[0] = \int \mathcal{D}\phi * \text{Exp}\left[I * \int d^4 x\, \mathcal{L}[\phi[x]]\right] \quad (0.7)$$

****

$$-I * \Box_x . \frac{\partial Z[J]}{\partial J[x]} = \left(\mathcal{L}\text{`int'}\left[-I * \frac{\partial}{\partial J[x]}\right] + J[x]\right) * Z[J] \quad (0.8)$$

which is the **Schwinger-Dyson differential equation**.

The slick(圆滑的, 油滑的) 的记号 ($\mathcal{L}$`int'[$-I*\partial/\partial J[x]$] 意思是，泛函$\mathcal{L}$'[$X$]把 $X = -I*\partial/\partial J[x]$ 当作参数

14.8 Ward-Takahashi identity

类似于 section3.3 中推导 Noether's theorem, 拉格朗日具有global symmetry, 对 field 进行变分, 得到经典守恒流。
对路径积分进行类似变分，仿照推导Schwinger-Dyson 方程的步骤，
可以得到 Ward-Takahashi 恒等。特例是Ward恒等式，暗示了规范不变性，
并且是非微扰的关系，所以在QED重整化中也非常有用。

14.8.1 Schwinger-Dyson equations for a global symmetry

理论具有global symmetry under $\psi \to \text{Exp}[I*\alpha]*\psi$，考虑 ψ[x1].$\overline{\psi}$[x2] 的关联函数，

$$I[1,2] = \langle \psi[x1].\overline{\psi}[x2] \rangle = \int \mathcal{D}\psi.\mathcal{D}\overline{\psi} * \text{Exp}\left[I * \int d^4x\, \overline{\psi}(I*\gamma.\partial + m)\,\psi + \cdots\right] \psi[x1].\overline{\psi}[x2] \tag{0.9}$$

其中⋯代表任何具有global symmetric 的附加项。
我们不需要photon，但是你加上也无所谓。
the measure is invariant 测度不变，Lagrangian 是变的，因为我们可能没有包括光子（没有对Aμ进行变形）, instead

$$I*\overline{\psi}[x].\gamma.\partial.\psi[x] \to I*\overline{\psi}[x].\gamma.\partial.\psi[x] + \overline{\psi}[x].\gamma\mu.\psi[x]*\partial\mu.\alpha[x] \tag{0.10}$$

and

$$\psi[x1].\overline{\psi}[x2] \to \text{Exp}[-I*\alpha[x1]]*\text{Exp}[I*\alpha[x2]]*\psi[x1].\overline{\psi}[x2] \tag{0.11}$$

Since the path integral is an integral over all field configurations ψ and $\overline{\psi}$,
it is invariant under any redefinition, including the above one.(up to a Jacobian factor, which in this case is just 1)
因此，展开到α的第一阶，就像推导标量场的Schwinger-Dyson方程那样，

$$\begin{aligned} 0 = &\int D\psi.D\overline{\psi}.\text{Exp}[I*S]\left(I*\int d^4x\,\overline{\psi}[x].\gamma\mu.\psi[x]*\partial\mu.\alpha[x]\right).\left(\psi[x1].\overline{\psi}[x2]\right) \\ &+ \int D\psi.D\overline{\psi}.\text{Exp}[I*S]*\left(-I*\alpha[x1]*\psi[x1].\overline{\psi}[x2] + I*\alpha[x2].\psi[x1].\overline{\psi}[x2]\right) \end{aligned} \tag{0.12}$$

Which implies

$$\begin{aligned} &\int d^4x\,\alpha[x]*I*\partial x\mu.\int D\psi.D\overline{\psi}.\text{Exp}[I*S]*\overline{\psi}[x].\gamma\mu.\psi[x].\psi[x1].\overline{\psi}[x2] \\ &= \int d^4x\,\alpha[x]*(-I*\delta[x-x1]+I*\delta[x-x2])\int D\psi.D\overline{\psi}.\text{Exp}[I*S]*\psi[x1].\overline{\psi}[x2] \end{aligned} \tag{0.13}$$

对任意$\alpha[x]$成立，所以有

$$\partial x\mu.\langle j\mu[x].\psi[x1].\overline{\psi}[x2] \rangle = -\delta[x-x1]*\langle \psi[x1].\overline{\psi}[x2] \rangle + \delta[x-x2]*\langle \psi[x1].\overline{\psi}[x2] \rangle \tag{0.14}$$

where j$\mu[x] = \overline{\psi}[x].\gamma\mu.\psi[x]$ is the QED current.
This is the Schwinger-Dyson equation associated with charge conservation
correlation functions 的这个关系是非微扰的。
It has the same qualitative content as the other Schwinger-Dyson equations;
the classical equation of motion, in this case

$$\partial\mu.j\mu = 0 \tag{0.15}$$

hold within time-ordered correlation functions up to contact interactions
****

The generalization of this to higher-order correlation functions has one δ-function for each field ψi of charge Qi,
in the correlation function that jμ[x] could contract with

$$\begin{aligned} &\partial x\mu.\langle j\mu[x].\psi[x1].\overline{\psi}[x2]*A\nu[x3]*\overline{\psi}[x4]\cdots \rangle = \\ &(Q1*\delta[x-x1] - Q2*\delta[x-x2] - Q4*\delta[x-x4]+\cdots)\langle \psi[x1].\overline{\psi}[x2]*A\nu[x3]*\overline{\psi}[x4]\cdots \rangle \end{aligned} \tag{0.16}$$

Photon fields Aν have no effect since they are not charged and interaction $A\mu * \overline{\psi}[x].\gamma\mu.\psi[x]$ is invariant under local transformation.

更重要的是， photon的动能项 has no effect, 因此这些方程 are independent of gauge-fixing （规范固定）

14.8.2 Ward-Takahashi identity

p299

To better understand the implications of,

$$\partial x\mu.\langle j\mu[x].\psi[x1].\overline{\psi}[x2]\rangle = -\delta[x-x1]*\langle\psi[x1].\overline{\psi}[x2]\rangle + \delta[x-x2]*\langle\psi[x1].\overline{\psi}[x2]\rangle$$

进行傅里叶变换很有帮助。

首先定义一个函数 $M\mu[p, q1, q2]$ by the Fourier transform of the matrix element of the current with fields

$$M\mu[p, q1, q2] = \int d^4x\, d^4x1\, d^4x2\, \mathrm{Exp}[I\,p\,x]\, \mathrm{Exp}[I\,q1\,x1]\, \mathrm{Exp}[-I\,q2\,x2]\, \langle j\mu[x].\psi[x1].\overline{\psi}[x2]\rangle \tag{0.17}$$

通过选择正负号，动量表示是 $j[p] + e^-[q1] \to e^-[q2]$.

再定义，

$$M0[q1, q2] = \int d^4x1\, d^4x2\, \mathrm{Exp}[I\,q1\,x1]\, \mathrm{Exp}[-I\,q2\,x2]\, \langle\psi[x1].\overline{\psi}[x2]\rangle \tag{0.18}$$

其中的符号表示 $e^-[q1] \to e^-[q2]$

$$M0[q1+p, q2] = \int d^4x\, d^4x1\, d^4x2\, \mathrm{Exp}[I\,p\,x]\, \mathrm{Exp}[I\,q1\,x1]\, \mathrm{Exp}[-I\,q2\,x2]\, \delta^4[x-x1]\, \langle\psi[x1].\overline{\psi}[x2]\rangle$$

是式子右边第一项的傅里叶变换。

$$M0[q1, q2-p] = \int d^4x\, d^4x1\, d^4x2\, \mathrm{Exp}[I\,p\,x]\, \mathrm{Exp}[I\,q1\,x1]\, \mathrm{Exp}[-I\,q2\,x2]\, \delta^4[x-x2]\, \langle\psi[x1].\overline{\psi}[x2]\rangle \tag{0.19}$$

是式子右边第二项的傅里叶变换。

****

因此， $\partial x\mu.\langle j\mu[x].\psi[x1].\overline{\psi}[x2]\rangle = -\delta[x-x1]*\langle\psi[x1].\overline{\psi}[x2]\rangle + \delta[x-x2]*\langle\psi[x1].\overline{\psi}[x2]\rangle$ 变成，(分部积分)

$$-I * p\mu * M\mu[p, q1, q2] = -M0[q1+p, q2] + M0[q1, q2-p]$$

$$I * p\mu * M\mu[p, q1, q2] = M0[q1+p, q2] - M0[q1, q2-p] \tag{0.20}$$

This is known as a Ward-Takahashi identity.

它有很重要的暗示。在19.5章，我们会证明它暗示着电荷守恒能活过重整化，这可不同寻常。

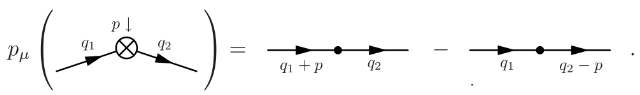
它如此牛掰的原因在于它不仅适用于S-矩阵元，也适用于一般的关联函数。

它也暗示了普通的Ward 恒等式，下面会证明。

****

我们可以用图示来表示Ward-Takahashi identity.

One can give a diagrammatic interpretation of Ward–Takahashi identity:



(14.144)

其中, ⊗表示由 current 插入的动量。

注意，这些不是S-matrix的费曼图，因为动量不在壳。

相互作用理论的场，构成的关联函数，变换到傅里叶空间，并不需要场的动量是on-shell 的，因为不同动量模式的算符有混合，有连续谱；也不需要单独一个场的动量守恒，因为场的动量可以传播给其他场\

instead，他们是关联函数的费曼图，有时候也称作 off-shell S-matrix elements.

相关的费曼规则是position空间费曼规则的傅里叶变换版本。

等价地， the rules are the usual momentum space Feynman rules with the *addition* of propagators for external lines and *without* the external polarizations (that is, without removing the stuff that the LSZ formula removes)

动量也不必守恒，因此可以q1+*p*进入，q2出射，而q1, *p*, q2是任意参数。

****

对于包含*f*个费米子和*b*个流的关联函数，矩阵元可以定义为

$$M[\mu, \nu 1, \cdots, \nu b; p, p1, \cdots, pb; q1, \cdots, qf] = \int d^4 x \, \mathrm{Exp}[I\, p\, x]\, \mathrm{Exp}[I\, p1\, x1]\, \mathrm{Exp}[-I\, q1\, y1] \cdots \langle j\mu[x].j\nu 1[x1] \cdots \bar{\psi}[y1] \cdots \rangle \quad (0.21)$$

流的动量：p1⋯pb进，或者说 流 的动量进入，

费米子的动量：q1⋯qf出，或者说 费米子的动量出去

收缩可以定义为

$$M[\nu 1, \cdots, \nu b; p + p1, \cdots, pb; q1, \cdots, qf] = \int d^4 x \, \mathrm{Exp}[I\, p\, x]\, \delta^4[x - x1]\, \mathrm{Exp}[I\, p1\, x1]\, \mathrm{Exp}[-I\, q1\, y1] \cdots \langle j\nu 1[x1] \cdots \bar{\psi}[y1] \cdots \rangle \quad (0.22)$$

那么，推广的Ward-Takahashi 恒等式是

$$I * p\mu.M[\mu, \nu 1, \cdots, \nu b; p, p1, \cdots, pb; q1, \cdots, qf] \quad (0.23)$$

$$= \sum_{\text{outgoing}}' Qi * M[\nu 1, \cdots, \nu n; p1, \cdots, qi - p\cdots, qf] \quad (0.24)$$

$$- \sum_{\text{incoming}} Qi * M[\nu 1, \cdots, \nu n; p1, \cdots, qi + p\cdots, qf] \quad (0.25)$$

求和遍历所有费米子动量，只要费米子线上面可以插进去这个流的动量。

但不包括流与流之间交换动量的项，因为$j\mu = \bar{\psi}[x].\gamma\mu.\psi[x]$是规范不变的，对Schwinger-Dyson方程没有贡献

14.8.3 Ward Identity

现在把 Ward-Takahashi恒等式转换成正常的Ward恒等式。

回忆一下，Ward恒等式要求，如果我们把S-矩阵元中的光子外线的极化矢量$\epsilon\mu$替换成$p\mu$, 那么，我们将得到0.

证明背后的基本想法是，

S-矩阵元涉及到类似的对象-- $\epsilon\mu * \Box\langle A\mu\rangle = \epsilon\mu\langle J\mu\cdots\rangle$;（由LSZ公式）

然后替换$\epsilon\mu \to p\mu$将给出0，由于$\partial\mu\langle J\mu\cdots\rangle = 0$ on-shell, by the Ward-Takahashi identity.

$\partial x\mu.\langle j\mu[x].\psi[x1].\bar{\psi}[x2]\rangle = -\delta[x - x1] * \langle \psi[x1].\bar{\psi}[x2]\rangle + \delta[x - x2] * \langle \psi[x1].\bar{\psi}[x2]\rangle$

证明的 tricky part 是说明Schwinger-Dyson方程和Ward-Takahashi恒等式中的所有接触项都不贡献。

****

由LSZ reduction 公式，带有两个极化矢量ϵ and ϵk 的S-matrix element 写出来是,

$$\langle \epsilon\cdots\epsilon k\cdots | S | \cdots \rangle \quad (0.26)$$

$$= \epsilon\mu\, \epsilon\alpha[k] \left(I^n \int d^4 x\, \mathrm{Exp}[I\, p\, x]\, \Box\mu\nu. \int d^4 xk\, \mathrm{Exp}[I\, pk\, xk]\, \Box[\alpha\beta, k] \int \cdots \right) \langle A\nu[x] * \cdots * A\beta[xk] \cdots \rangle, \quad (0.27)$$

其中 ⋯ 代表散射中涉及到的其他粒子。

$\Box\mu\nu$是光子动能项的缩写，例如，在斜边规范中

$$\Box\mu\nu = g\mu\nu * \Box - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial\mu * \partial\nu \quad (0.28)$$

光子是否进行了规范固定，不影响之后的论证

****

为了化简上式，我们利用光子的 Schwinger-Dyson方程：

$$\Box[\alpha\beta, k].\Box\mu\nu.\langle A\nu[x] * \cdots * A\beta[xk] \cdots \rangle = \Box[\alpha\beta, k].\left(\langle j\mu[x] * \cdots A\beta[xk] \cdots \rangle - I\, \delta^4[x - xk]\, g\mu\beta \langle \cdots \rangle\right) \quad (0.29)$$

$= \langle j\mu[x] * \cdots j\alpha[xk] \cdots \rangle + \square[\mu\alpha, k]\ \square DF[x, xk]\ \langle \cdots \rangle$ (0.30)

其中，利用了 $-I\,\delta^4[x-xk] = \square DF[x, xk]$，来链接到微扰展开，如同section 7.1

7.1.1 Position-space Feynman rules

The Schwinger–Dyson equations specify a completely non-perturbative relationship among correlation functions in the fully interacting theory. Some non-perturbative implications will be discussed in later chapters (in particular Sections 14.8 and 19.5). In this section, we will solve the Schwinger–Dyson equations in perturbation theory.

For efficiency, we write $\delta_{xi} = \delta^4(x - x_i)$ and $D_{ij} = D_{ji} = D_F(x_i, x_j)$. We will also set $m = 0$ for simplicity (the $m \neq 0$ case is a trivial generalization), and $\hbar = 1$. With this notation, the Green's function equation for the Feynman propagator can be written concisely as

$$\square_x D_{x1} = -i\delta_{x1}. \tag{7.13}$$

concisely as

$$\square_x D_{x1} = -i\delta_{x1}. \tag{7.13}$$

This relation can be used to rewrite correlation functions in a suggestive form. For example, the 2-point function can be written as

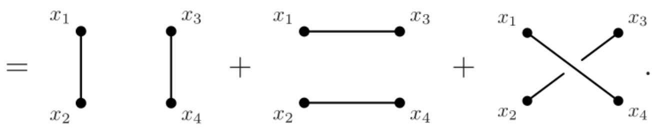
$$\langle\phi_1\phi_2\rangle = \int d^4x\, \delta_{x1}\langle\phi_x\phi_2\rangle = i\int d^4x\,(\square_x D_{x1})\,\langle\phi_x\phi_2\rangle = i\int d^4x\, D_{x1}\square_x\langle\phi_x\phi_2\rangle, \tag{7.14}$$

as expected. For a 4-point function, the expansion is similar:

$$\langle\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\rangle = i\int d^4x\, D_{x1}\square_x\langle\phi_x\phi_2\phi_3\phi_4\rangle$$
$$= \int d^4x\, D_{x1}\{\delta_{x2}\langle\phi_3\phi_4\rangle + \delta_{x3}\langle\phi_2\phi_4\rangle + \delta_{x4}\langle\phi_2\phi_3\rangle\}\,. \tag{7.16}$$

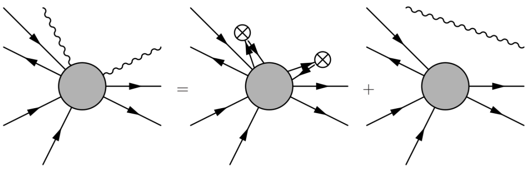
Collapsing the δ-functions and using Eq. (7.15), this becomes

$$\langle\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\rangle = D_{12}D_{34} + D_{13}D_{24} + D_{14}D_{23} \tag{7.17}$$



第一项表示把光子场换成流，

第二项表示两个外线光子的收缩，用图形来表示是，



(14.151)

where the ⊗ indicate current insertions。

由于两个外线光子的收缩给出一个不连接的费曼图，所以它对S-矩阵元没有贡献。因此，

$\square[\alpha\beta, k].\square\mu\nu.\langle A\nu[x] * \cdots * A\beta[xk] \cdots\rangle == \langle j\mu[x] * \cdots j\alpha[xk] \cdots\rangle$ (0.31)

这个结果是包含光子的费曼图的一个广泛而有用的特性

QED中包含光子的S-矩阵元，去掉光子的外部极化矢量之后，其值等于把流插入到编时乘积中的期望值

即使对于外部动量pi没有假设 on-shell 的 S-matrix element，（即还处于关联函数阶段）仍然成立

****

如果我们接着把极化矢量$\epsilon\mu$替换成相关光子的动量$p\mu$，(即插入偏导，利用分部积分)我们会发现

$$\langle p\cdots\epsilon k\cdots|S|\cdots\rangle = \left(I^n \int d^4x\, \mathrm{Exp}[I*p.x] \int d^4xk\, \mathrm{Exp}[I\, pk\, xk] \int d^4y\, \mathrm{Exp}[I\, q1\, y]\, (I*\gamma.\partial y + m1)\cdots\right) \times (-I*\partial x\mu).\langle j\mu[x]*\cdots j\alpha[x]\cdots*\psi[y]\cdots\rangle = ((\gamma.q1 - m1)\cdots).p\mu.M[\mu, \alpha, \cdots, \alpha b; p, p1\cdots pb, q1\cdots qf], \tag{0.32}$$

其中mi是费米子的质量$qi^2 = mi^2$,

$M[\mu, \alpha, \cdots, \alpha b\cdots]$由下式给出

$M[\mu, v1, \cdots, vb; p, p1, \cdots, pb; q1, \cdots, qf]$

$= \int d^4x\, \mathrm{Exp}[I\, p\, x]\, \mathrm{Exp}[I\, p1\, x1]\, \mathrm{Exp}[-I\, q1\, y1]\cdots\langle j\mu[x].jv1[x1]\cdots\overline{\psi}[y1]\cdots\rangle$

****

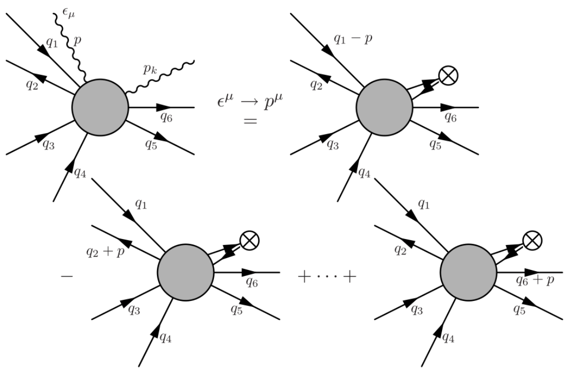
利用Ward-Takahashi恒等式,

$$I*p\mu.M[\mu, \nu1, \cdots, \nu b; p, p1, \cdots, pb; q1, \cdots, qf] = \sum_{\text{outgoing}}{}' Qi*M[\nu1, \cdots, \nu n; p1, \cdots, qi - p\cdots, qf] - \sum_{\text{incoming}} Qi*M[\nu1, \cdots, \nu n; p1, \cdots, qi + p\cdots, qf] \tag{0.33}$$

上式变成,

$$\langle p\cdots\epsilon k\cdots|S|\cdots\rangle = \pm e((\gamma.q1 - m1)\cdots).\sum_j Qi*M[\alpha\cdots\alpha b; p1, \cdots, qj\pm p, \cdots, qf] \tag{0.34}$$

用图来表示，我们会发现,



(14.155)

为了得到这些图，我们首先把外线光子换成流，然后remove跟极化矢量$\epsilon\mu$有关的流,

然后把它的动量填充到所有可能的外线费米子上，就像E.14.147里说的那样。

现在，这个求和式里的每一项的 pole 在 $(qi \pm p)^2$ 而不是在 mi^2 处了。

如果我们乘上$\gamma.qi - mi = (qi^2 - mi^2).(\gamma.qi + mi)^{-1}$的话，结果将为0，因为我们可以让 qi on-shell

因此得到了Ward恒等式。

注意这个证明是非微扰的，并且不依赖于光子外线动量是否满足$p^2 = 0$.

****

顺便一提，上述推导利用了光子和Noether流线性进行作用。

即是说，相互作用项为

$$\mathcal{L}[\text{int}] = e*j\mu.A\mu \tag{0.35}$$

但对于Scalar QED,

$$\mathcal{L}[\text{int}] = I\, e\, A\mu\, \left(\phi^*(\partial\mu\phi) - (\partial\mu\phi^*)\,\phi\right) + e^2 A\mu^2 * \mathrm{Abs}[\phi]^2 \tag{0.36}$$

因此在Scalar QED中，含有光子间收缩的项，不仅仅只对S-matrix 断开的部分有贡献。

Schwinger-Dyson方程因此产生了额外项，被称作 Schwinger terms。

你可以在 Problem 14.5 中研究这些项

14.5 Schwinger terms.
(a) What are the Schwinger–Dyson equations for photons and charged scalar fields in scalar QED? That is, give an equation for $\Box^{\mu\nu}\langle A_\nu A_\alpha \phi^\star \phi\rangle = ?$
(b) How is the current-conservation Schwinger–Dyson equation different in QED and scalar QED?

****

$$(\mathrm{qi} \pm p)^2 = \mathrm{qi}^2 + p^2 + 2\,\mathrm{qi}\cdot p == \mathrm{mi}^2 + \left(p^2 + 2\,\mathrm{qi}\cdot p\right) \quad (0.37)$$

需要

$$p.\left(p + 2\,\mathrm{qi}\right) == 0 \quad (0.38)$$

与 pμ 垂直的平面为 g$\mu\nu$−pμ*pν/p^2, so

$$\mathrm{p}\mu + 2\,\mathrm{qi}\mu \in \mathrm{g}\mu\nu - \mathrm{p}\mu * \mathrm{p}\nu / p^2 \quad (0.39)$$

$$\mathrm{k}\mu * \mathrm{k}\nu.\left(\mathrm{g}\mu\nu - \mathrm{p}\mu * \mathrm{p}\nu / p^2\right) == 0 \Rightarrow k^2 * p^2 - (k.p)^2 == 0\ ?? \quad (0.40)$$

** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ***