



中国科学院大学

University of Chinese Academy of Sciences

博士学位论文

质子奇异夸克分布在SU(3)非定域手征微扰理论中的研究

作者姓名 玉苏普江·萨拉木

指导教师 王平 研究员

中国科学院高能物理研究所

学位类别 理学博士

学科专业 理论物理

培养单位 中国科学院高能物理研究所

2019年5月

Typeset by L^AT_EX 2_ε at June 3, 2019

With package C^ASthesis v0.2 of C^TE_X.ORG

Study of strange quark distribution of proton in nonlocal $SU(3)$ chiral effective theory

By

Yusupujang Salamu

A Dissertation Submitted to
University of Chinese Academy of Sciences
In partial fulfillment of the requirement
For the degree of
PhD of Theoretical Physics

Institute of High Energy Physics
Chinese Academy of Sciences

June, 2019

中国科学院大学 学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文是本人在导师的指导下独立进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的研究成果。对论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明或致谢。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

作者签名：

日 期：

中国科学院大学 学位论文授权使用声明

本人完全了解并同意遵守中国科学院大学有关保存和使用学位论文的规定，即中国科学院大学有权保留送交学位论文的副本，允许该论文被查阅，可以按照学术研究公开原则和保护知识产权的原则公布该论文的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存、汇编本学位论文。

涉密及延迟公开的学位论文在解密或延迟期后适用本声明。

作者签名：

日 期：

导师签名：

日 期：

摘 要

质子奇异夸克对称性破缺,跟味道对称性破缺一样跟质子在低能区域内的非微扰结构有关。在低能区域内,质子原来的自由度(夸克和胶子)被冻结并产生新的粒子(赝标量介子)。用数学语言来说,物理核子波函数可以展开为赝标量介子和重子Fock态之和,其中展开系数代表在物理质子中出现介子-重子Fock态的概率并叫做分裂函数。由于手征微扰理论支配赝标量介子-重子相互作用,分裂函数由手征微扰理论给出。但是一般的定域手征微扰理论给出的结果是紫外发散的,为了消除圈图的紫外发散,我们采用了两种不同的正规化方案:非定域正规化和Pauli-Villars正规化。在非定域正规化中,将定域拉氏量中的定域介子场算符替换为非定域算符并引进相应的规范连接算符。跟这些规范连接算符一起,新构造出来的非定域手征拉氏量满足U(1)规范对称性并且由它产生的介子圈图积分是收敛的。除此之外,由于规范连接算符跟规范场有关,非定域拉氏量还产生额外的介子单圈费曼图。非定域拉氏量还包含反映介子非定域效应的正规化因子,其满足洛伦兹不变性。为了更好的观察不同正规化方案的区别,我们首先给出了Pauli-Villars正规化的质子到赝标量介子+八重态SU(3)重子的分裂函数。在Pauli-Villars正规化中,分裂函数仍然依赖于两个非物理截断参数 μ_1 和 μ_2 。然后计算了在非定域框架中的质子分裂成赝标量介子+八重态和赝标量介子+十重态SU(3)重子的分裂函数。计算结果显示,非定域框架中的分裂函数只依赖于一个截断参数 Λ 。作为验证,我们还分析了介子圈图的领头阶非解析项(LAN),由于它们跟正规化方案无关,Pauli-Villars和非定域正规化给出的领头阶非解析项(LAN)一样。数值分析中,Pauli-Villars正规化的分裂函数的截断参数 μ_1 和 μ_2 由K介子交换过程中 Λ 超子单举产生 $pp \rightarrow \Lambda X$ 的微分截面和奇异夸克分布的非微扰成分定出。通过拟合得出 $(\mu_1, \mu_2) = (545, 600)\text{MeV}$ 和 $(\mu_1, \mu_2) = (526, 894)\text{MeV}$ 。这时候的质子奇异夸克对称性破缺为 $0.42 \times 10^{-3} < S^- < 1.12 \times 10^{-3}$,总奇异夸克分布的2阶Mellin矩为 $7.84 \times 10^{-3} < S^+ < 11.78 \times 10^{-3}$ 。在非定域框架中, π 介子交换有关的单举产生的过程 $pp \rightarrow nX$ 和 $pp \rightarrow \Delta X$ 给出的 π 介子截断参数分别为 $\Lambda_{\pi N} = 0.99 \pm 0.1 \text{ GeV}$, $\Lambda_{\pi \Delta} = 0.89 \pm 0.058 \text{ GeV}$,同样地,由K介子交换过程 $pp \rightarrow \Lambda X$ 和 $pp \rightarrow \Sigma^* X$ 单举产生散射截面拟合出的截断参数分别

为 $\Lambda_{K\Lambda} = 1.12 \pm 0.0275 \text{ GeV}$, $\Lambda_{K\Sigma^*} = 0.84 \pm 0.03 \text{ GeV}$ 。由 π 介子交换过程给出的截断参数得出的质子味道对称性破缺的积分值为 $0.087 < (\bar{D} - \bar{U}) < 0.165$ 。味道对称性破缺分布 $\bar{d}(x) - \bar{u}(x)$ 和它的积分值跟实验和格点数据吻合。质子奇异夸克分布 $x[s(x) - \bar{s}(x)]$ 基本上跟实验数据符合并且奇异夸克对称性破缺 S^- 位于 $0.98 \times 10^{-3} < S^- < 1.56 \times 10^{-3}$ 区域内, 这跟以前的模型计算结果和实验约束一致。此外质子总奇异夸克分布的2阶Mellin矩 S^+ 等于 $4.97 \times 10^{-3} < S^+ < 6.33 \times 10^{-3}$ 。由于实验给出的总奇异夸克分布的2阶Mellin矩 S^+ 还包含QCD微扰成分, 无论Pauli-Villars 正规化还是非定域正规化给出的 S^+ 只占实验值的(16-44) %。

关键词： 手征微扰理论, 非定域正规化, Pauli-Villars 正规化, 分裂函数, 奇异夸克对称性破缺

Abstract

Nucleon strange quark asymmetry, similar to flavour asymmetry, is related to the low energy structure of Nucleon. In the low energy scale, original freedoms(quarks and gluons) of Nucleon are frozen and new freedoms(pseudo scalar mesons) are generated. Using mathematical language, physical Nucleon wave function can be expanded in terms of meson -baryon Fock states, where the coefficients of expansion are related to probability amplitude of Fock states appearing in the physical Nucleon and are called splitting function. Since the interactions of mesons and baryons are described by the Chiral Perturbation Theory, splitting functions can be obtained from Chiral Perturbation Theory, however the splitting functions from the local Lagrangian are UV divergent. In order to regularize UV divergency, we applied two different regularization techniques: nonlocal and Pauli-Villars regularization. In the nonlocal regularization, local meson field operator in the local Lagrangian is replaced by the nonlocal one and introduce appropriate gauge link operators. With these operators, new constructed nonlocal Chiral Lagrangian satisfies U(1) symmetry and meson loop integrals from it are converged. In addition, due to the gauge link operators which includes a gauge field, nonlocal Lagrangian also generates additional Feynman diagrams. Nonlocal Lagrangian also includes covariant regulator which expresses the nonlocal effect. In order to observe the effects of different regularization methods, we firstly presented the pseudo scalar mesons+octet and decuplet SU(3) baryons splitting functions. The Pauli-Villars regularized splitting functions depend on two cut-off parameters μ_1 and μ_2 . In comparison with Pauli-Villars splitting functions, in nonlocal frame the splitting functions is function of a parameter Λ . As a check, we analyse the leading nonanalytic (LNA) terms of loop integrals. Since the LNA are independent of regularization methods, it is the same within the nonlocal and Pauli-Villars regularization. In the numerical calculation, cut-off mass of Pauli-Villars regularized splitting functions μ_1 and μ_2 are fitted to the differential cross section of inclusive production of Λ hyperon

$pp \rightarrow \Lambda X$ in one K exchange processes and nonperturbative component of total strange quark distribution. After fitting we obtain $(\mu_1, \mu_2) = (545, 600)\text{MeV}$ and $(\mu_1, \mu_2) = (526, 894)\text{MeV}$, this gives the Nucleon strange quark asymmetry as $0.42 \times 10^{-3} < S^- < 1.12 \times 10^{-3}$, and gives 2-th moment of total strange quark distribution as $7.84 \times 10^{-3} < S^+ < 11.78 \times 10^{-3}$. In nonlocal frame, form the inclusive production of $pp \rightarrow nX$ and $pp \rightarrow \Delta X$ with π meson exchange cut-off parameters are obtained as $\Lambda_{\pi N} = 0.99 \pm 0.1 \text{ GeV}$, $\Lambda_{\pi \Delta} = 0.89 \pm 0.058 \text{ GeV}$. Similarly, cut-off parameters for the K exchange processes $pp \rightarrow \Lambda X$ and $pp \rightarrow \Sigma^* X$ are obtained as $\Lambda_{K\Lambda} = 1.12 \pm 0.0275 \text{ GeV}$, $\Lambda_{K\Sigma^*} = 0.84 \pm 0.03 \text{ GeV}$. Using the fitted values of parameters for the π meson exchange processes, we obtain the Nucleon flavour asymmetry as $0.087 < (\bar{D} - \bar{U}) < 0.165$. Together with its distribution $\bar{d}(x) - \bar{u}(x)$, they are consistent with data and Lattice results. The distribution of strange quark asymmetry $x[s(x) - \bar{s}(x)]$ is consistent with data and the strange quark assmetry S^- lies in the region $0.98 \times 10^{-3} < S^- < 1.56 \times 10^{-3}$, this also is consistent with data and other model results. In addition, 2-th moment of total strange quark distribution equals to S^+ $4.97 \times 10^{-3} < S^+ < 6.33 \times 10^{-3}$. Since the experimental 2-th moment of total strange quark distribution S^+ includes perturbative QCD component, Pauli-Villars or nonlocal regularization only contribute to the (10-30) % of experimental S^+ .

Keywords: chiral Perturbation Theory, nonlocal regularization, Pauli-Villars regularization, splitting function, strange quark asymmetry.

目 录

摘要	iii
Abstract	v
目录	vii
第一章 引言	1
第二章 非定域手征微扰理论	7
2.1 手征对称性与手征拉氏量	7
2.2 非定域手征微扰理论	15
2.2.1 本章总结	19
第三章 分裂函数	21
3.1 分裂函数	22
3.2 Pauli-Villars 正规化	28
3.3 偶极子正规化因子	33
3.3.1 领头阶非解析项	45
3.3.2 分裂函数的数值分析	47
3.3.3 本章总结	53
第四章 核子奇异夸克对称性破缺	55
4.1 中间态强子夸克分布	55
4.2 输入部分子分布函数	57
4.2.1 重子和介子的夸克分布	66
4.3 Pauli-Villars 数值计算	69
4.3.1 截断参数 μ_1 和 μ_2 的约束	69

4.3.2	质子奇异夸克对称性破缺	71
4.4	非定域数值计算	75
4.4.1	核子味道对称性破缺 $\bar{d} - \bar{u}$	75
4.4.2	奇异夸克对称性破缺 $s - \bar{s}$	79
4.4.3	非定域和Pauli-Villars 正规化的比较	84
4.4.4	本章总结	85
第五章	总结与评价	87
附录 A	光锥动量和留数积分	91
参考文献	95
发表文章目录	105
致谢	107

第一章 引言

强子夸克分布是在强子物理中的重要课题，它不仅提供跟强子内部结构有关的信息，还能更明显的描述强子微观图景。轻子-核子深度非弹性散射实验(DIS)是探测强子结构函数与夸克分布函数的重要工具，深度非弹性散射实验成功的证明了部分子模型的正确性并展示了QCD机制在核子内部的运行过程。虽然目前还无法确定所有强子的结构函数和夸克分布函数，但是核子-轻子深度非弹散射实验数据足够于确定核子夸克和胶子分布函数。电子-核子深度非弹性散射过程示于图(1.4)中，图中 k, k' 分别代表初态和末态电子的四动量, E, E' 是它们的能量， p 是核子四动量， q 为转移动量， X 代表末态强子，其不变质量为 $M_X^2 = p'^2$ 。

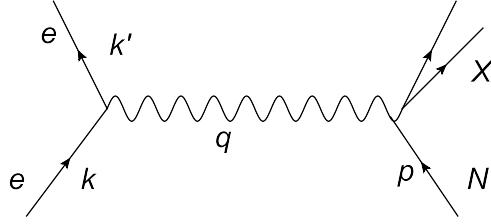


图 1.1: 轻子-核子深度非弹性散射演示图。

通过计算得到的深度非弹散射截面为

$$\frac{d^2\sigma}{dE'd\Omega} = \frac{4\alpha^2}{q^4} \left[\frac{F_2}{\nu} \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2 \frac{F_1}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \quad (1.1)$$

其中 $Q^2 = -q^2$ ， $\alpha^2 \equiv \frac{e^2}{4\pi}$ ， $\nu = E' - E$ ， F_1 和 F_2 叫做核子电磁结构函数，它们是 x 和 Q^2 的函数。在深度非弹性散射过程中，如果 ν 和 Q^2 非常大，结构函数 F_1 和 F_2 不再同时 ν 和 Q^2 的函数，而是重新标度后的单一变量 $x = Q^2/2M\nu$ 的函数。这时候结构函数 F_1 和 F_2 可以参数化为

$$F_2(x) = \sum_q e_q^2 [q(x) + \bar{q}(x)], F_1(x) = 2xF_2(x) \quad (1.2)$$

其中 e_q 代表部分子电荷， $q(x)$ 是部分子非极化分布函数。显然，(1.2) 式中的参数化对任何自旋为 $\frac{1}{2}$ 的重子结构函数都成立，比如对于质子与中子，它的结构

函数们可以参数化为

$$\begin{aligned} F_2^p(x) &= \frac{4}{9}[u_p(x) + \bar{u}_p(x)] + \frac{1}{9}[d_p(x) + \bar{d}_p(x)] + \frac{1}{9}[s_p(x) + \bar{s}_p(x)] + \dots \\ F_2^n(x) &= \frac{4}{9}[u_n(x) + \bar{u}_n(x)] + \frac{1}{9}[d_n(x) + \bar{d}_n(x)] + \frac{1}{9}[s_n(x) + \bar{s}_n(x)] + \dots \end{aligned} \quad (1.3)$$

其中 $q(x)$ 和 $\bar{q}(x)$ 分别代表正反夸克分布函数。强子除了颜色空间中的SU(3)对称性之外，还体现出更多的对称性，比如在强相互作用过程中夸克不改变味道，这导致在相互作用过程中正反夸克的产生和消灭保持味道对称性。换句话说，在QCD演化过程中，夸克反夸克数目保持不变的，这种对称性可以用定域U(1)对称性表示，由于夸克质量破坏手征对称性，不考虑u和d夸克质量之差，u-d夸克体系还满足同位旋SU(2)对称性。价夸克是核子的净夸克，换句话说，价夸克发射的胶子分裂成一对正反夸克。因为u, d, s夸克质量与非弹性散射能量比，小得多，胶子分裂成正反d夸克和正反u夸克的过程等价的，所以可以假定在核子海中正反夸克等比例的出现。如果核子夸克海满足同位旋对称性即 $\bar{d}_p(x) = \bar{u}_p(x)$ ，质子中子结构函数 $F_2^p(x)$ 和 $F_2^n(x)$ 满足Gottfried求和规则：

$$S_G = \int_0^1 \frac{dx}{x} [F_2^p(x) - F_2^n(x)] = \frac{1}{3}. \quad (1.4)$$

式中我们假设核子奇异海夸克分布满足 $s_n(x) = s_p(x)$ 。但是NMC实验发现 $S_G = 0.235 \pm 0.026$ ($Q^2 = 4\text{GeV}^2$) [1, 2]。随后，在CERN [3] 和Fermilab [4]中质子和质子和质子-氘核Drell-Yan实验都证实了Gottfried求和规则的破坏，这进一步证明了核子与氘核靶的单举或半单举深度非弹性散射实验间接暗示的核子味道对称性破缺的存在。这说明核子夸克分布不满足味道对称性即 $\int_0^1 dx [\bar{d}_p(x) - \bar{u}_p(x)] \neq 0$ 。这引起了人们对核子海夸克分布的研究兴趣。另一个有趣的现象是由NuTev发现的奇异夸克对称破缺。在NuTev实验中通过Paschos-Wolfenstein关系式来确定电弱混合角 θ_W ，即

$$R_N^- = \frac{\sigma_{NC}^{\nu N} - \sigma_{NC}^{\bar{\nu} N}}{\sigma_{CC}^{\nu N} - \sigma_{CC}^{\bar{\nu} N}} = R^- \quad (1.5)$$

但是由NuTev实验定出的实验值为

$$\sin^2(\theta_W) = 0.2277 \pm 0.0013 \pm 0.0006 \pm 0.0006 \quad (1.6)$$

这跟普遍被认同的电弱混合角值 $\sin^2(\theta_W) = 0.2228 \pm 0.0004$ 之间有 3σ 的误差 [5]。应当注意的是在推导(1.5)式的过程中假设了核子海奇异夸克分布满足奇异夸克对称性，如果奇异夸克对称性破坏，(1.5)式中引入修正项，即 [6]

$$R_N^- = \frac{\sigma_{NC}^{\nu N} - \sigma_{NC}^{\bar{\nu} N}}{\sigma_{CC}^{\nu N} - \sigma_{CC}^{\bar{\nu} N}} = R^- - \delta R_S^- \quad (1.7)$$

其中 $R^- = \frac{\sigma_{NC}^{\nu N} - \sigma_{NC}^{\bar{\nu} N}}{\sigma_{CC}^{\nu N} - \sigma_{CC}^{\bar{\nu} N}} = \frac{1}{2} - \sin^2(\theta_W)$ 是原来的奇异夸克对称部分, $\delta R_S^- = [1 - \frac{7}{3}\sin^2(\theta_W)] \frac{S^-}{S^- + Q_v}$ 是奇异夸克对称性破缺部分, 其中 $S^- = \int dx x [s - \bar{s}]$, $Q_v = \int dx x [u_v + d_v]$ 。根据他们的结果论核子夸克海里面的奇异夸克对核子结构有一定的贡献。随着实验数据的丰富, 人们发现了更多的核子海中对称性破缺现象, 比如极化的味道对称性破缺 $\Delta \bar{d} - \Delta \bar{u}$ [12] 和粲夸克对称性破缺 [7]。虽然这种效应的贡献不大, 但它体现出关于核子海夸克分布的更多信息。根据夸克模型质子价奇异夸克数为零, 甚至在QCD 演化过程中质子海夸克分布保持奇异中性。传统低能强子物理和核物理的局限性和QCD 与手征对称性的关系在高能实验中更加突出, 因为在高能过程中强子部分子分布同样满足手征和其他对称性, 但可以肯定的是, 这种效应在QCD框架下无法得到解释, 因为核子海中的味道对称性破缺跟QCD 微扰演化无关。核子海夸克可以看成来自于胶子分裂成正反海夸克对, 此过程满足CP 对称性, 因此不会出现味道对称性和奇异夸克对称性破缺现象。那么最有可能的是, 味道对称性破缺和奇异夸克对称性破缺跟核子束缚态的非微扰机制有关。随着能量的增大, 胶子分裂成正反夸克对的过程仍然满足味道对称性, 但最初的对称性破缺保留。因此人们提出了各种跟海夸克对称性破缺机制有关的假设, 其中最重要的是泡利(Pauli)阻碍模型。根据夸克模型, 由于质子包含两个 u_v 和一个 d_v 而且受泡利不相容原理的限制, 在QCD 演化过程中产生的海上夸克对 $\bar{u}u$ 的个数少于海下夸克对 $\bar{d}d$ 的个数, 因而体现出味道对称性破缺。但是泡利阻碍模型给出的核子味道对称性 $\int_0^1 dx [\bar{d}_p(x) - \bar{u}_p(x)]$ 无法解释全部实验数据 [8, 9]。另一方面, 介子云(Meson cloud)在深度非弹性散射过程中的作用不可忽略 [11], 尤其是在核子长距离结构中它的作用显得更重要。介子云模型的主要观点是核子外部结构由赝标量介子云组成因而对散射过程有贡献。介子云模型成功地解释了核子味道对称性破缺 [10], 介子云模型还建议手征对称性破缺也可以在其他种类的夸克分布中发现 [13–20]。但是这些工作中他们主要讨论了中间态粒子的在壳效应对味道对称性破缺以及其他非微扰夸克分布的贡献。随着非微扰模型方面经验的累积, 计算手征对称性破缺效应对夸克分布的影响成了一个问题。其中一个重要的问题是如何建立夸克分布的Mellin 矩与QCD 的关系。正如 [21] 所发现, 可以从手征微扰理论得到非单态夸克分布的领头阶非解析项(LNA)。它跟QCD 一

样具有相同的手征对称性 [22–24]。格点QCD除了证明当 π 介子质量很大的时候的夸克分布的Mellin 矩和其他观测量都能拟合到物理点之外 [25]，格点QCD还证实了QCD红外端的行为直接导致不为零的 $\bar{d} - \bar{u}$ [21]。后续工作 [26–28] 中计算了赝标量介子对夸克分布函数 $q(x)$ 及其Mellin 矩的领头阶贡献。各种费曼图对领头阶非解析项的贡献在不同的模型中独立的存在而且依赖于红外端行为。但是，计算全振幅过程中，需要选取具体的正规化方案来处理紫外发散。文献中，不同的正规化方案被采用，比如横向动量锐截断，Pauli-Villars正规化和维数正规化以及有效形状因子方法。后者考虑强子的有限大小和非定域性，其他的反而符合于把强子看成点粒子的理论。实际上，核子和其他重子的延伸结构在传统强子物理应用中显得更重要。在非协变正规化中，如果正规化因子是三维动量的函数的话电荷是守恒的，因为电荷守恒与守恒流的时间分量有关。另一方面，协变计算中，协变或相对论性正规化因子导致电荷守恒明显破缺。理论上这些问题通过定域规范不变的拉氏量中引入非定域相互作用来解决电荷守恒破缺。构造非定域拉氏量的过程被介绍在 [30]，这种方法最早在Willson [31] 和Bloch 的早期工作中 [32]根据路径顺序指数引入的。与非定域模型相同的方法被采用在奇异矢量形状因子和核子的其他矩阵元的计算中 [33–35]。 σ 介子的特性通过规范不变的相对论性的非定域夸克模型来体现，非定域拉氏量中规范连接算符的出现使得保证非定域相互作用规范不变性并且产生额外的费曼图。跟这些额外费曼图一起质子与中子的电荷不受介子圈图贡献的影响，除此之外额外费曼图使得核子奇异数为零。这些基本特点当我们强制性的引入一个协变正规化因子的时候破坏，但是在非定域模型中这些特点以更自洽的方式出现而且满足电荷守恒与Ward 恒等式。本文中，我们主要讨论在Pauli-Villars 和非定域正规化中的味道和奇异夸克对称性破缺。与Pauli-Villars 正规化不同的是，非定域正规化跟定域手征拉氏量及其对称性有关，因此需要回顾手征对称性和手征拉氏量。我们为了计算介子圈图对夸克分布函数的贡献，第一次把非定域正规化方法扩展到SU(3) 手征微扰理论中去并集中讨论非单态夸克组合 $\bar{d} - \bar{u}$ 和 $s - \bar{s}$ 分布。因为它们能更好的展示非微扰圈图效应。我们的计算包括SU(3) 八重态和十重态重子贡献，选取一个满足洛伦兹不变性和规范不变的协变正规化因子使得圈图贡献收敛。除此之外，为了更直观的解释不同正规化方法之间的区别及其所限制的物理量结果之间的差别，我们还会讨论Pauli-Villars 正规化的SU(3)八重态分裂函数及其对核子奇异夸克对称性破缺的贡献。本文结构如下，下一章简单的介绍手征对称性和手征微扰理论的构造过程，随后介绍非

定域拉氏量的基本思想和构造过程，第三章介绍在非定域和Pauli-Villars 正规化中质子到重子(包括八重态和十重态)+ 赝标量介子的分裂函数，第四章推导中间态介子和重子夸克分布，最后对核子奇异夸克分布进行数值计算，最后一章我们总结理论计算结果，评价计算结果并提出所面临的挑战。

第二章 非定域手征微扰理论

众所周知，紫外和红外发散的消除是在定域量子场论中的重要话题，因此为了消除发散不同的正规化方案被采用，比如维数正规化和Pali-Villars 正规化等。通过正规化我们虽然得到一个有限的物理结果，但是这些方法更像是数学技巧而且没有任何物理意义。更重要的是这些正规化/重整化方案只对包含有限个物理参数的理论有效，因为圈图的发散最终被这些耦合参数吸收掉。当标准模型中的重整化方案推广到量子引力场的时候无法得到重整化的结果，因为量子化后的引力场中出现无穷多个参数。另一方面，非定域（或有限微分）量子化后，超弦理论中的发散自然消失，这引起了人们的注意。虽然超弦理论含有无穷多个参数，非定域量子化后反而变为超重重整化理论 [36, 38, 49]。这结论提供了另一种正规化方案—非定域正规化。从这个意义上讲，非定域正规化可以扩展到任何一个理论中去。早期类似于非定域正规化思想是首先由Yukawa 提出的 [39, 40]，但是他的出发点不是超弦理论，而是量子场论的正规化。随后一系列研究讨论了非定域正规化的理论框架和特点 [41–44]，非定域正规化在QCD 和QED中的应用可以参阅 [45–53, 55]。除此之外正如前面所说，由定域拉氏量得出的分裂函数还需要用其他正规化因子来消除紫外发散。为了解决这个问题，作为重要的研究对象，我们需要构造出一个即满足规范不变性又能使得圈图收敛的非定域手征拉氏量。为了更好的理解从定域手征拉氏量过度到非定域拉氏量的过程，我们首先回顾定域手征对称性以及手征拉氏量。

2.1 手征对称性与手征拉氏量

作为标准模型的重要组成部分，量子色动力学支配强子内部组成部分之间的相互作用。胶子场是非对易的规范场，因此QCD 具有渐进自由的特性，即QCD耦合常数随能量的增大而减少，因此在高能区域内可以做微扰展开。但在低能区域微扰QCD无法使用，比如QCD 无法描写静止核子的特点，因为核物理的研究能标远小于QCD 能标。随着能量减小QCD原有的自由（胶子和夸克）被冻结并且新的自由度（强子）出现，但是新出现的强子态的属性跟原有的对称性破缺有关。另一方面已知的强子谱展示一些有趣的特征，比如除了赝

标量介子之外，其他基态强子的质量基本在1GeV左右。这暗示着赝标量介子产生机制与对称性的关系。为了更好的说明新旧自由度之间关系我们首先观察QCD在味道空间中的对称性及其破缺 [56–59]。我们从无质量的QCD拉氏量入手讨论手征对称性与手征拉氏量。三代夸克根据它们的质量可分为轻夸克和重夸克，因为它们的质量满足以下关系

$$m_u, m_d, m_s \ll 1\text{GeV} \ll m_c, m_b, m_t \quad (2.1)$$

当能量低于1GeV时，重夸克(c,b,t)传播子可视为静止，轻夸克(u,d,s)因而成为QCD拉氏量的有效自由度，因此我们用三个轻夸克拉氏量代替所有夸克拉氏量，另外轻夸克质量远远小于1GeV，因此把夸克质量近似为零(这叫做手征极限)，在手征极限下QCD拉氏量可写为

$$\mathcal{L}^{\text{QCD}}(x) = \sum_{f=u,d,s} \bar{q}_f(x) i \not{D} q_f(x) - \frac{1}{4} G_{\mu\nu,a}(x) G^{\mu\nu,a}(x). \quad (2.2)$$

其中夸克场算符 $q_f(x)$ 携带三种颜色 $q_f(x) = [q_{f,r}(x), q_{f,b}(x), q_{f,g}(x)]^T$ ， $G^{\mu\nu,a}$ 是胶子场强张量。用手征矩阵 γ^5 来定义左右手投影算符：

$$P_R = \frac{1}{2} (1 + \gamma^5), P_L = \frac{1}{2} (1 - \gamma^5). \quad (2.3)$$

用左右手投影算，狄拉克场 $q_f(x)$ 可分解为两个手征分量 $q_{f,L}(x)$ 和 $q_{f,R}(x)$ ，

$$q_{f,L}(x) = P_L q_f(x), q_{f,R}(x) = P_R q_f(x). \quad (2.4)$$

P_L, P_R 之所以叫做左右手投影算符，是因为在极端的相对论性情况下，旋度和手征性等价的。利用上式，拉氏量(2.2)式可写成左右手征分量场的形式，

$$\mathcal{L}^{\text{QCD}}(x) = \sum_{f=u,d,s} \bar{q}_{f,L}(x) i \not{D} q_{f,L}(x) + \sum_{f=u,d,s} \bar{q}_{f,R}(x) i \not{D} q_{f,R}(x) - \frac{1}{4} G_{\mu\nu,a}(x) G^{\mu\nu,a}(x). \quad (2.5)$$

从上式可以看出左右手征态不混合的，因此拉氏量 $\mathcal{L}^{\text{QCD}}(x)$ 在以下独立的定域规范变换下不变的

$$q_L(x) \rightarrow U_L q_L(x), q_R(x) \rightarrow U_R q_R(x), \quad (2.6)$$

其中 U_L, U_R 3×3 么正矩阵，并作用到味道空间。 U_L, U_R 的具体表示如下：

$$U_L = \exp \left(-i \sum_{a=1}^8 \frac{\lambda_a^L}{2} \theta_a^L \right) \exp(-i\theta^L), U_R = \exp \left(-i \sum_{a=1}^8 \frac{\lambda_a^R}{2} \theta_a^R \right) \exp(-i\theta^R), \quad (2.7)$$

其中 θ^L , θ^R , θ_a^L 和 θ_a^R 是18个实参数。这说明无质量的 $\mathcal{L}^{QCD}(x)$ 具有经典 $U_L(3) \times U_R(3)$ 整体对称性, 根据Noether 定理, 这样的对称性, 对应于18 个守恒流,

$$\begin{aligned} L^{\mu,a} &= \bar{q}_L(x) \gamma^\mu \frac{\lambda^a}{2} q_L(x), \quad R^{\mu,a} = \bar{q}_R(x) \gamma^\mu \frac{\lambda^a}{2} q_R(x) \\ L^\mu &= \bar{q}_L(x) \gamma^\mu q_L(x), \quad R^\mu = \bar{q}_R(x) \gamma^\mu q_R(x), \end{aligned} \quad (2.8)$$

实际讨论中我们经常以矢量流和轴矢流的形式进行讨论, 因此可以定义如下矢量和轴矢量流

$$\begin{aligned} V^{\mu,a} &\equiv L^{\mu,a} + R^{\mu,a} = \bar{q}(x) \gamma^\mu \frac{\lambda^a}{2} q(x) \\ A^{\mu,a} &\equiv L^{\mu,a} - R^{\mu,a} = \bar{q}(x) \gamma^\mu \gamma^5 \frac{\lambda^a}{2} q(x) \\ V^\mu &\equiv L^{\mu,a} + R^{\mu,a} = \bar{q}(x) \gamma^\mu q(x) \\ A^\mu &\equiv L^{\mu,a} - R^{\mu,a} = \bar{q}(x) \gamma^\mu \gamma^5 q(x). \end{aligned} \quad (2.9)$$

对于单态矢量流 V^μ 来说, 量子化后单态矢量流仍然是守恒的, 这对应于重子数守恒, 至于单态轴矢量流 A^μ , 即使在手征极限下, 量子化后出现反常并破坏轴矢量流守恒。对于八重态矢量流和单态矢量流, 对应的守恒电荷为

$$\begin{aligned} Q_V^a &= \int d\vec{x}^3 \bar{q}^\dagger(x) \frac{\lambda^a}{2} q(x), a = 1 \dots 8 \\ Q_A^a &= \int d\vec{x}^3 \bar{q}^\dagger(x) \frac{\lambda^a}{2} \gamma^5 q(x), a = 1 \dots 8 \\ Q_V &= \int d\vec{x}^3 \bar{q}^\dagger(x) q(x). \end{aligned} \quad (2.10)$$

根据以上讨论, 量子化后, 在手征极限下QCD拉氏量的对称群是 $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$ 。如果拉氏量的对称性不是体系基态的对称性, 叫做对称性自发破缺, 并产生无质量的Goldstone 玻色子。在手征极限下, 当手征对称群 $SU(3)_R \times SU(3)_L$ 降低到 $SU(3)_V$ 时, 对称性自发破缺。实验数据表示, $J^P = 0^-$ 的赝标量介子八重态: $\pi^\pm, \pi^0, K^\pm, K^0, \bar{K}^\pm, \eta$ 的质量都比较轻, 而且内部宇称都相同。我们猜测实际的QCD 整体对称性发生了自发破缺, 而且自发破缺方式为 $SU(3)_L \times SU(3)_R \rightarrow SU(3)_V$ 。这表明 $SU(3)_A$ 对称性自发破缺, 但保留了 $SU(3)_V$ 对称性, 因此有:

$$Q_V^a |0\rangle = 0, Q_A^a |0\rangle \neq 0 \quad (2.11)$$

根据Goldstone 定理, 自发破缺后产生八个与破缺生成元 Q_A^a 相对应Goldstone 玻色子, 而且这些玻色子的量子数与被破缺的轴矢量对称性的量子数一

样 [60–64], 比如由手征对称性破缺产生的Goldstone 玻色子也具有负宇称。到目前为止我们只讨论了在手征极限下的情况, 实际上QCD拉氏量包含夸克质量项,

$$L_M = -(\bar{q}_R M q_L + \bar{q}_L M q_R) \quad (2.12)$$

式中M为夸克质量矩阵,

$$M = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

显然质量项明显破缺 $SU(3)_R \times SU(3)_L$ 对称性, 实际上把轻夸克的质量项可视为八个Goldstone 玻色子质量的来源。另一方面, 守恒流的变化与夸克质量有关, 由于轻夸克的质量非常小, 可以把它视为微扰项。正如上述, 无质量的轻夸克的手征对称性自发破缺并且产生无质量的Goldstone 粒子。但是如何用拉氏量来描述对称性自发破缺过程是一个实际性问题 [65, 66]。另一方面, 赝标量介子在手征变换下不是不变的, 但是SU(3) 赝标量介子(用 ϕ 表示)和SU(3) 标量介子(用 σ 表示)的线性组合 $U = \sigma + i\phi$ 在手征变换下不变的,

$$U' = U_L U U_R^\dagger \quad (2.14)$$

我们容易验证标量介子基态 $U_0 = 1$ 在矢量变换 $U_L = U_R$ 下不变的, 但是破坏 $U_L = U_R^\dagger$ 轴矢量变换。至于物质场和赝标量介子的相互作用, 试探性地用线性 σ 模型来描述它们之间的相互作用 [54],

$$\mathcal{L}^{(\sigma)} \propto \text{Tr}(\bar{\psi}_L U \psi_R) + \text{Tr}(\bar{\psi}_R U^\dagger \psi_L) \quad (2.15)$$

但是线性 σ 模型无法描述真实世界, 因为线性 σ 模型中物质场和赝标量介子相互作用不包含赝标量场的动量项, 除此之外, 实验上无法找到 σ 对应的标量介子。在这种情况下, 赝标量介子动量趋于零的时候核子- π 介子散射振幅为零 [56–59]。重新定义物质场后 $B \equiv U^{1/2}\psi$, 把模型依赖的相互作用和独立于模型的相互作用(自相互作用和运动学项)分解出来, 这样赝标量介子获得动量并且仍然满足手征对称性 [67]。这时候, 在手征变换下物质场(八重态和十重态重子)变换为

$$B'(x) = h B h^\dagger, T_{abc}' = h_{ad} h_{be} h_{cf} T_{def}^\mu, \quad (2.16)$$

其中变换算符 h 满足 $U_L u h^+ = h u U_R^+$ ，新算符 u 定义为 $u^2 = U$ 。值得注意的是，(2.16)式中 h 不是手征变换群的元素而是手征变换群的子群 $SU_V(3)$ 的元素而且跟赝标量介子无关。总结以上讨论可以得到满足手征对称性 $SU(3)_L \times SU(3)_R$ 的领头阶拉氏量。根据参考文献 [69, 70] 中的约定，重子八重态，十重态，赝标量介子相互作用拉氏量由下式给出

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \text{Tr}[\bar{B}(i \not{D} - M_B)B] + D \text{Tr}[\bar{B}\gamma^\mu \gamma_5 \{u_\mu, B\}] + F \text{Tr}[\bar{B}\gamma^\mu \gamma_5 [u_\mu, B]] \\ & + \bar{T}_\mu^{ijk} (i\gamma^{\mu\nu\alpha} D_\alpha - M_T \gamma^{\mu\nu}) T_\nu^{ijk} + \mathcal{C} \left[\epsilon^{ijk} \bar{T}_\mu^{ilm} \Theta^{\mu\nu} (u_\nu)^{lj} B^{mk} + \text{h.c.} \right] \\ & - \mathcal{H} \bar{T}_\mu^{ijk} \gamma^{\mu\nu\alpha} \gamma_5 (u_\alpha)^{kl} T_\nu^{ijl} + \frac{f^2}{4} \text{Tr}[D_\mu U (D^\mu U)^\dagger], \end{aligned} \quad (2.17)$$

其中 M_B 和 M_T 分别代表八重态和十重态重子质量， D ， F 是八重态重子轴矢量电荷， \mathcal{C} ， \mathcal{H} 分别代表八重态-十重态轴矢量跃迁和十重态轴矢量电荷，‘h.c.’代表厄米共轭。介子衰变常数 f ，我们取 $f = 93 \text{ MeV}$ 。张量 ϵ^{ijk} 是味道空间中的反对称张量，十重态自由拉氏量包括矩阵 $\gamma^{\mu\nu}$ 和 $\gamma^{\mu\nu\alpha}$ ，其定义为 $\gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ ， $\gamma^{\mu\nu\alpha} = \frac{1}{2}\{\gamma^{\mu\nu}, \gamma^\alpha\}$ 。八重态-十重态相互作用顶角 $\Theta^{\mu\nu}$ 定义为

$$\Theta^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - Z \gamma^\mu \gamma^\nu \quad (2.18)$$

其中 Z 代表十重态离壳参数，至于它的值目前还没有统一的观点，一般其取值范围为 $Z \in (0, 1)$ ，另一方面十重态重子传播子也依赖于离壳参数 Z ，当 $Z = 1$ 的时候十重态重子回到最简单的形式 [71]。 B^{ij} 的不同的分量代表不同八重态重子， B^{ij} 包括 $N (= p, n)$ ， $\Lambda, \Sigma^{\pm, 0}$ ， $\Xi^{-, 0}$ 。将 B^{ij} 可以写成如下矩阵形式

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda & n \\ \Xi^- & \Xi^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\Lambda \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

十重态重子包括 Δ ， Σ^* ， Ξ^* Ω^- ，反对称张量 T_μ^{ijk} 的不同分量代表不同十重态重子

$$\begin{aligned} T^{111} &= \Delta^{++}, \quad T^{112} = \frac{1}{\sqrt{3}}\Delta^+, \quad T^{122} = \frac{1}{\sqrt{3}}\Delta^0, \quad T^{222} = \Delta^-, \\ T^{113} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\Sigma^{*+}, \quad T^{123} = \frac{1}{\sqrt{6}}\Sigma^{*0}, \quad T^{223} = \frac{1}{\sqrt{3}}\Sigma^{*-}, \\ T^{133} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\Xi^{*0}, \quad T^{233} = \frac{1}{\sqrt{3}}\Xi^{*-}, \\ T^{333} &= \Omega^-. \end{aligned} \quad (2.20)$$

(2.17)式中算符 U 跟赝标量介子矩阵 ϕ 有关, 即

$$U = u^2, \quad u = \exp \left(i \frac{\phi}{\sqrt{2}f} \right), \quad (2.21)$$

其中赝标量介子矩阵包含 ϕ π , K η 介子, 其定义为

$$\phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\eta \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

赝标量介子以矢量和轴矢量的形式与八重态重子, 十重态重子耦合, 即

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{2} (u \partial_\mu u^\dagger + u^\dagger \partial_\mu u) - \frac{i}{2} (u \lambda^a u^\dagger + u^\dagger \lambda^a u) v_\mu^a, \quad (2.23)$$

$$u_\mu = \frac{i}{2} (u \partial_\mu u^\dagger - u^\dagger \partial_\mu u) + \frac{1}{2} (u \lambda^a u^\dagger - u^\dagger \lambda^a u) v_\mu^a, \quad (2.24)$$

其中 v_μ^a 代表矢量外场, λ^a ($a = 1, \dots, 8$)代表Gell-Mann 矩阵。(2.17)式中八重态协变导数定义为 [72, 73]

$$D_\mu B = \partial_\mu B + [\Gamma_\mu, B] - i \langle \lambda^0 \rangle v_\mu^0 B, \quad (2.25)$$

$$D_\mu T_\nu^{ijk} = \partial_\mu T_\nu^{ijk} + (\Gamma_\mu, T_\nu)^{ijk} - i \langle \lambda^0 \rangle v_\mu^0 T_\nu^{ijk}, \quad (2.26)$$

其中 v_μ^0 代表矢量单态外场, λ^0 代表单位矩阵, 符号 $\langle \dots \rangle$ 代表对味道空间求迹。十重态协变导数, 其定义为

$$(\Gamma_\mu, T_\nu)^{ijk} = (\Gamma_\mu)_l^i T_\nu^{ljk} + (\Gamma_\mu)_l^j T_\nu^{ilk} + (\Gamma_\mu)_l^k T_\nu^{ijl}. \quad (2.27)$$

介子协变导数定义为

$$D_\mu U = \partial_\mu U + (iU\lambda^a - i\lambda^a U) v_\mu^a. \quad (2.28)$$

展开(2.17)式中的定域拉氏量后, 我们得到重子-介子相互作用

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{int}} = & \frac{(D+F)}{2f} \left(\bar{p} \gamma^\mu \gamma^5 p \partial_\mu \pi^0 + \sqrt{2} \bar{p} \gamma^\mu \gamma^5 n \partial_\mu \pi^+ \right) - \frac{(D+3F)}{\sqrt{12}f} \bar{p} \gamma^\mu \gamma^5 \Lambda \partial_\mu K^+ \\
& + \frac{(D-F)}{2f} \left(\sqrt{2} \bar{p} \gamma^\mu \gamma^5 \Sigma^+ \partial_\mu K^0 + \bar{p} \gamma^\mu \gamma^5 \Sigma^0 \partial_\mu K^+ \right) - \frac{D-3F}{\sqrt{12}f} \bar{p} \gamma^\mu \gamma^5 p \partial_\mu \eta \\
& + \frac{\mathcal{C}}{\sqrt{12}f} \left(-2 \bar{p} \Theta^{\nu\mu} \Delta_\mu^+ \partial_\nu \pi^0 - \sqrt{2} \bar{p} \Theta^{\nu\mu} \Delta_\mu^0 \partial_\nu \pi^+ + \sqrt{6} \bar{p} \Theta^{\nu\mu} \Delta_\mu^{++} \partial_\nu \pi^- \right. \\
& \quad \left. - \bar{p} \Theta^{\nu\mu} \Sigma_\mu^{*0} \partial_\nu K^+ + \sqrt{2} \bar{p} \Theta^{\nu\mu} \Sigma_\mu^{*+} \partial_\nu K^0 + \text{h.c.} \right) \\
& + \frac{i}{4f^2} \bar{p} \gamma^\mu p \left[(\pi^+ \partial_\mu \pi^- - \pi^- \partial_\mu \pi^+) + 2(K^+ \partial_\mu K^- - K^- \partial_\mu K^+) \right. \\
& \quad \left. + (K^0 \partial_\mu \bar{K}^0 - \bar{K}^0 \partial_\mu K^0) \right].
\end{aligned} \tag{2.29}$$

其中我们忽略了跟 \mathcal{H} 有关的项, 因为它们跟我们的计算无关。根据(2.17)式我们可以算出强子层次上的夸克流 v_μ^a ,

$$\begin{aligned}
J_a^\mu = & \frac{1}{2} \text{Tr} [\bar{B} \gamma^\mu [u \lambda^a u^\dagger + u^\dagger \lambda^a u, B] + \frac{D}{2} \text{Tr} [\bar{B} \gamma^\mu \gamma_5 \{u \lambda^a u^\dagger - u^\dagger \lambda^a u, B\}] \\
& + \frac{F}{2} \text{Tr} [\bar{B} \gamma^\mu \gamma_5 [u \lambda^a u^\dagger - u^\dagger \lambda^a u, B]] \\
& + \frac{1}{2} \bar{T}_\nu \gamma^{\nu\alpha\mu} (u \lambda^a u^\dagger + u^\dagger \lambda^a u, T_\alpha) + \frac{\mathcal{C}}{2} (\bar{T}_\nu \Theta^{\nu\mu} (u \lambda^a u^\dagger - u^\dagger \lambda^a u) B + \text{h.c.}) \\
& + \frac{f^2}{4} \text{Tr} [\partial^\mu U (U^\dagger i \lambda^a - i \lambda^a U^\dagger) + (U i \lambda^a - i \lambda^a U) \partial^\mu U^\dagger].
\end{aligned} \tag{2.30}$$

除此之外SU(3) 味道单态流 v_μ^0 定义为

$$J_0^\mu = \langle \lambda^0 \rangle \text{Tr} [\bar{B} \gamma^\mu B] + \langle \lambda^0 \rangle \bar{T}_\nu \gamma^{\nu\alpha\mu} T_\alpha, \tag{2.31}$$

其中 λ^0 代表 3×3 单位矩阵, $\langle \rangle$ 代表对味道空间求迹。八重态, 三重态和单态流的线性组合给出三个轻夸克矢量流

$$J_u^\mu = \frac{1}{3} J_0^\mu + \frac{1}{2} J_3^\mu + \frac{1}{2\sqrt{3}} J_8^\mu, \tag{2.32a}$$

$$J_d^\mu = \frac{1}{3} J_0^\mu - \frac{1}{2} J_3^\mu + \frac{1}{2\sqrt{3}} J_8^\mu, \tag{2.32b}$$

$$J_s^\mu = \frac{1}{3} J_0^\mu - \frac{1}{\sqrt{3}} J_8^\mu. \tag{2.32c}$$

利用(2.30), (2.31) 和(2.32)式, 得出强子层次上的夸克流 J_u^μ , J_d^μ 和 J_s^μ ,

$$\begin{aligned}
J_u^\mu = & 2\bar{p}\gamma^\mu p + \bar{n}\gamma^\mu n + \bar{\Lambda}\gamma^\mu \Lambda + 2\bar{\Sigma}^+ \gamma^\mu \Sigma^+ + \bar{\Sigma}^0 \gamma^\mu \Sigma^0 \\
& + 3\bar{\Delta}_\alpha^{++} \gamma^{\alpha\beta\mu} \Delta_\beta^{++} + 2\bar{\Delta}_\alpha^+ \gamma^{\alpha\beta\mu} \Delta_\beta^+ + \bar{\Delta}_\alpha^0 \gamma^{\alpha\beta\mu} \Delta_\beta^0 + 2\bar{\Sigma}_\alpha^{*+} \gamma^{\alpha\beta\mu} \Sigma_\beta^{*+} \\
& + \bar{\Sigma}_\alpha^{*0} \gamma^{\alpha\beta\mu} \Sigma_\beta^{*0} + i(\pi^- \partial^\mu \pi^+ - \pi^+ \partial^\mu \pi^-) + i(K^- \partial^\mu K^+ - K^+ \partial^\mu K^-) \\
& - \frac{i(D+F)}{\sqrt{2}f} \bar{p}\gamma^\mu \gamma^5 n \pi^+ + \frac{i(D+3F)}{\sqrt{12}f} \bar{p}\gamma^\mu \gamma^5 \Lambda K^+ - \frac{i(D-F)}{2f} \bar{p}\gamma^\mu \gamma^5 \Sigma^0 K^+ \\
& + \frac{\mathcal{C}}{\sqrt{12}f} \left(i\sqrt{6} \bar{p} \Theta^{\mu\nu} \Delta_\nu^{++} \pi^- + i\sqrt{2} \bar{p} \Theta^{\mu\nu} \Delta_\nu^0 \pi^+ + i\bar{p} \Theta^{\mu\nu} \Sigma_\nu^{*0} K^+ + \text{h.c.} \right) \\
& - \frac{1}{2f^2} (\bar{p}\gamma^\mu p \pi^+ \pi^- + 2\bar{p}\gamma^\mu p K^+ K^-), \tag{2.33a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_d^\mu = & \bar{p}\gamma^\mu p + 2\bar{n}\gamma^\mu n + 2\bar{\Sigma}^- \gamma^\mu \Sigma^- + \bar{\Sigma}^0 \gamma^\mu \Sigma^0 + \bar{\Lambda}\gamma^\mu \Lambda + \bar{\Delta}_\alpha^+ \gamma^{\alpha\beta\mu} \Delta_\beta^+ \\
& + 2\bar{\Delta}_\alpha^0 \gamma^{\alpha\beta\mu} \Delta_\beta^0 + 3\bar{\Delta}_\alpha^- \gamma^{\alpha\beta\mu} \Delta_\beta^- + \bar{\Sigma}_\alpha^{*0} \gamma^{\alpha\beta\mu} \Sigma_\beta^{*0} + 2\bar{\Sigma}_\alpha^{*0-} \gamma^{\alpha\beta\mu} \Sigma_\beta^{*-} \\
& - i(\pi^- \partial^\mu \pi^+ - \pi^+ \partial^\mu \pi^-) + i(\bar{K}^0 \partial^\mu K^0 - K^0 \partial^\mu \bar{K}^0) \\
& + \frac{i(D+F)}{\sqrt{2}f} \bar{p}\gamma^\mu \gamma^5 n \pi^+ - \frac{i(D-F)}{\sqrt{2}f} \bar{p}\gamma^\mu \gamma^5 \Sigma^+ K^0 \\
& - \frac{\mathcal{C}}{\sqrt{6}f} \left(i\sqrt{3} \bar{p} \Theta^{\mu\nu} \Delta_\nu^{++} \pi^- + i\bar{p} \Theta^{\mu\nu} \Delta_\nu^0 \pi^+ + i\bar{p} \Theta^{\mu\nu} \Sigma_\nu^{*+} K^0 + \text{h.c.} \right) \\
& + \frac{1}{2f^2} (\bar{p}\gamma^\mu p \pi^+ \pi^- - \bar{p}\gamma^\mu p \bar{K}^0 K^0), \tag{2.33b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_s^\mu = & \bar{\Sigma}^+ \gamma^\mu \Sigma^+ + \bar{\Sigma}^0 \gamma^\mu \Sigma^0 + \bar{\Lambda}\gamma^\mu \Lambda + \bar{\Sigma}_\alpha^{*+} \gamma^{\alpha\beta\mu} \Sigma_\beta^{*+} + \bar{\Sigma}_\alpha^{*0} \gamma^{\alpha\beta\mu} \Sigma_\beta^{*0} \\
& - i(K^- \partial^\mu K^+ - K^+ \partial^\mu K^-) - i(\bar{K}^0 \partial^\mu K^0 - K^0 \partial^\mu \bar{K}^0) \\
& + \frac{i(D-F)}{\sqrt{2}f} \bar{p}\gamma^\mu \gamma^5 \Sigma^+ K^0 + \frac{i(D-F)}{2f} \bar{p}\gamma^\mu \gamma^5 \Sigma^0 K^+ - \frac{i(D+3F)}{\sqrt{12}f} \bar{p}\gamma^\mu \gamma^5 \Lambda K^+ \\
& + \frac{\mathcal{C}}{\sqrt{12}f} \left(-i\bar{p} \Theta^{\mu\nu} \Sigma_\nu^{*0} K^+ + i\sqrt{2} \bar{p} \Theta^{\mu\nu} \Sigma_\nu^{*+} K^0 + \text{h.c.} \right) \\
& + \frac{1}{2f^2} (2\bar{p}\gamma^\mu p K^+ K^- + \bar{p}\gamma^\mu p \bar{K}^0 K^0), \tag{2.33c}
\end{aligned}$$

以上表达式中我们忽略了 $\Xi^{0,-}$ 和 $\Xi^{*0,-}$ 有关的夸克流, 因为它们跟我们的计算无关。以上我们讨论了手征对称性和手征拉氏量以及强子层次上的夸克守恒流。为了消除圈图贡献的紫外发散, 下一节我们讨论非定域正规化方案及其在手征微扰理论中的应用。

2.2 非定域手征微扰理论

定域手征拉氏量的重整化不同于标准模型的重整化因为它破坏幂数求和(power counting)规则, 因此采用红外减除或重重子重整化方案。但是光锥坐中无法采用这些方案 [74]。我们很容易证明定域手征拉氏量给出的分裂函数仍然需要用截断参数来正规化, 此外它还包含其他非物理参数 [29]。以前的唯象学计算中有效顶角形状因子方法被普遍采用, 但是这些形状因子被手动加进去的。比如以前的质子到重子+ 介子的分裂函数中以 t 或 s 为函数(s 和 t 是横向动量 k_\perp^2 的函数)的有效形状因子来消除发散 [75–81, 83–85]。虽然这些形状因子在某种程度上反映强子的非定域(或延伸)结构, 但是引入这样的非协变正规化因子, 无论是 t 的函数还是 s 的函数都导致一些基本对称性的破坏, 比如电荷守恒和动量守恒。因为这些非协变正规化因子本身与描述相作用的拉氏量无关而且无法体现拉氏量的规范对称性。正如上节所述非定域正规化跟粒子自身特点有关, 从微观上讲之所以出现紫外发散是因为参与相互作用的粒子被看成为点粒子 [43, 86]。另一方面在低能区域内不能把强子看成为点粒子因为低能光子无法探测强子的全部内部结构。非定域模型的基本思想是把原来相互作用在一个点上的场算符放在不同的时空点上并考虑的它们原有的对称性。虽然非定域相互作用拉氏量的形式跟定域拉氏量不同, 但它应该满足定域拉氏量应有的对称性, 因此需要引入规范链接函数。除此之外非定域拉氏量还包含能体现粒子内禀大小的形状因子(或正规化因子), 它反映未知的高阶修正效应。利用早期的非定域场有关的研究, 我们能构造出相应的非定域拉氏量。因为我们的研究对象是强子的电磁结构并且强子满足严格 $U(1)$ 对称性, 所以把(2.17)式中的包含强相互作用和电磁相互作用的拉氏量可以写成如下形式

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{(\text{local})}(x) = & \bar{B}(x)(i\gamma^\mu D_{\mu,x} - M_B)B(x) + \frac{C_{B\phi}}{f} [\bar{p}(x)\gamma^\mu\gamma^5 B(x) D_{\mu,x}\phi(x) + \text{h.c.}] \\
& + \bar{T}_\mu(x)(i\gamma^{\mu\nu\alpha} D_{\alpha,x} - M_T\gamma^{\mu\nu}) T_\nu(x) + \frac{C_{T\phi}}{f} [\bar{p}(x)\Theta^{\mu\nu} T_\nu(x) D_{\mu,x}\phi(x) \\
& + \text{h.c.}] + \frac{iC_{\phi\phi^\dagger}}{2f^2} \bar{p}(x)\gamma^\mu p(x) [\phi(x)(D_{\mu,x}\phi)^\dagger(x) - D_{\mu,x}\phi(x)\phi^\dagger(x)] \\
& + D_{\mu,x}\phi(x)(D_{\mu,x}\phi)^\dagger(x) + \cdots, \tag{2.34}
\end{aligned}$$

其中协变导数定义为,

$$D_{\mu,x}B(x) = [\partial_\mu - ie_B^q A_\mu(x)] B(x), \quad (2.35a)$$

$$D_{\mu,x}T^\nu(x) = [\partial_\mu - ie_T^q A_\mu(x)] T^\nu(x), \quad (2.35b)$$

$$D_{\mu,x}\phi(x) = [\partial_\mu - ie_\phi^q A_\mu(x)] \phi(x), \quad (2.35c)$$

其中 e_B^q , e_T^q 和 e_ϕ^q 分别表示八重态重子 B , 十重态重子 T 和赝标量介子 ϕ 的夸克电荷, 比如对质子来说 $e_p^u = 2e_p^d = 2$, $e_p^s = 0$, Σ^+ 超子的夸克电荷 $e_{\Sigma^+}^u = 2e_{\Sigma^+}^s = 2$, $e_{\Sigma^+}^d = 0$, (2.34)式中 $C_{B\phi}$, $C_{\phi^\dagger\phi}$ 和 $C_{T\phi}$ 分别代表八重态重子-介子, 十重态重子-介子和量介子-核子相互作用耦合常数并被列在表 2.1中。从(2.34)式我们很容易可以算出前一节所给出的轻夸克电磁流以及相应相互作用。

表 2.1: 衰变模型所允许的相互作用有效耦合常数 $C_{B\phi}$, $C_{T\phi}$ 和 $C_{\phi\phi^\dagger}$ 。

$B\phi$	$p\pi^0$	$n\pi^+$	Σ^+K^0	Σ^0K^+	ΛK^+
$C_{B\phi}$	$\frac{1}{2}(D+F)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(D+F)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(D-F)$	$\frac{1}{2}(D-F)$	$-\frac{1}{\sqrt{12}}(D+3F)$
$T\phi$	$\Delta^0\pi^+$	$\Delta^+\pi^0$	$\Delta^{++}\pi^-$	$\Sigma^{*+}K^0$	$\Sigma^{*0}K^+$
$C_{T\phi}$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}\mathcal{C}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathcal{C}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{C}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}\mathcal{C}$	$-\frac{1}{\sqrt{12}}\mathcal{C}$
$\phi\phi^\dagger$	$\pi^+\pi^-$	$K^0\bar{K}^0$	K^+K^-		
$C_{\phi\phi^\dagger}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1		

由于赝标量介子质量小于八重态和十重态重子质量, 我们首先考虑赝标量介子的非定域性。定域相互作用中赝标量介子-重子相互作用于同一个时空点 x 上, 在非定域情况下, 我们将赝标量介子移到 $x+a$ 点上。考虑对称性后非

定域拉氏可以写成

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{(\text{nonloc})}(x) = & \bar{B}(x)(i\gamma^\mu D_{\mu,x} - M_B)B(x) + \bar{T}_\mu(x)(i\gamma^{\mu\nu\alpha} D_{\alpha,x} - M_T\gamma^{\mu\nu})T_\nu(x) \\
& + \bar{p}(x) \left[\frac{C_{B\phi}}{f} \gamma^\mu \gamma^5 B(x) + \frac{C_{T\phi}}{f} \Theta^{\mu\nu} T_\nu(x) \right] \\
& \times \int d^4a \mathcal{G}_\phi^q(x, x+a) F(a) D_{\mu,x+a} \phi(x+a) + \text{h.c.} \\
& + \frac{iC_{\phi\phi^\dagger}}{2f^2} \bar{p}(x) \gamma^\mu p(x) \int d^4a \int d^4b \mathcal{G}_\phi^q(x+b, x+a) F(a) F(b) \\
& \times [\phi(x+a)(D_{\mu,x+b}\phi)^\dagger(x+b) - D_{\mu,x+a}\phi(x+a)\phi^\dagger(x+b)] \\
& + D_{\mu,x}\phi(x)(D_{\mu,x}\phi)^\dagger(x) + \dots, \tag{2.36}
\end{aligned}$$

其中 \mathcal{G}_ϕ^q 叫做规范链接函数，为了保持非定域拉氏量的规范不变性，规范链接函数可以写为

$$\mathcal{G}_\phi^q(x, y) = \exp \left[-ie_\phi^q \int_x^y dz^\mu A_\mu(z) \right], \tag{2.37}$$

跟规范链接函数一起我们能验证(2.36)式保证规范不变性。除此之外 $F(a)$ 是时空坐标中正规化因子，其具体形式是随意的但是满足一些限制条件，比如全解析性等，感兴趣者可以参阅 [41, 87]。在定域极限下， $F(a) = \delta^4(a)$ (动量空间中的定域极限是截断参数 $\Lambda \rightarrow \infty$)，非定域拉氏回到定域拉氏量。我们很容易证明定域和非定域拉氏量(2.36)和(2.34)在以下规范变化下不变的

$$B(x) \rightarrow B'(x) = B(x) \exp [ie_B^q \theta(x)], \tag{2.38a}$$

$$T_\mu(x) \rightarrow T'_\mu(x) = T_\mu(x) \exp [ie_T^q \theta(x)], \tag{2.38b}$$

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) \exp [ie_\phi^q \theta(x)], \tag{2.38c}$$

规范不变性要求规范矢量场满足

$$A^\mu(x) \rightarrow A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu \theta(x) \tag{2.38d}$$

其中 $\theta(x)$ 是任意标量函数。对规范连接函数做泰勒展开后得到

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_\phi^q(x+b, x+a) &= \exp \left[-ie_\phi^q (a-b)^\mu \int_0^1 dt A_\mu(x+at+b(1-t)) \right] \\
&= 1 + \delta\mathcal{G}_\phi^q + \mathcal{O}(e_\phi^q), \tag{2.39}
\end{aligned}$$

其中 $\mathcal{O}(e_\phi^q)$ 是高阶相互作用项，

$$\delta\mathcal{G}_\phi^q = -ie_\phi^q (a-b)^\mu \int_0^1 dt A_\mu(x+at+b(1-t)) \tag{2.40}$$

以上公式中我们对 z 做了替换 $z^\mu \rightarrow x^\mu + a^\mu t + b^\mu (1 - t)$ 。最后将非定域拉氏 $\mathcal{L}^{(\text{nonloc})}$ 可以写成纯强相互作用拉氏量 $L_{\text{had}}^{(\text{nonloc})}$ ，电磁相互作用($\mathcal{L}_{\text{em}}^{(\text{nonloc})}$)和($\mathcal{L}_{\text{link}}^{(\text{nonloc})}$)规范连接项之和。(2.39)式的强相互作用部分给出

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{had}}^{(\text{nonloc})}(x) &= \bar{p}(x) \left[\frac{C_{B\phi}}{f} \gamma^\mu \gamma^5 B(x) + \frac{C_{T\phi}}{f} \Theta^{\mu\nu} T_\nu(x) \right] \int d^4 a F(a) \partial_\mu \phi(x+a) \\ &+ \text{h.c.} + \frac{iC_{\phi\phi^\dagger}}{2f^2} \bar{p}(x) \gamma^\mu p(x) \int d^4 a \int d^4 b F(a) F(b) \\ &\quad \times [\phi(x+a) \partial_\mu \phi^\dagger(x+b) - \partial_\mu \phi(x+a) \phi^\dagger(x+b)], \quad (2.41) \end{aligned}$$

除此之外，电磁相互作用部分给出

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{em}}^{(\text{nonloc})}(x) &= e_B^q \bar{B}(x) \gamma^\mu B(x) A_\mu(x) + e_T^q \bar{T}_\mu(x) \gamma^{\mu\nu\alpha} T_\nu(x) A_\alpha(x) \\ &+ ie_\phi^q [\partial^\mu \phi(x) \phi^\dagger(x) - \phi(x) \partial^\mu \phi^\dagger(x)] A_\mu(x) \\ &- ie_\phi^q \bar{p}(x) \left[\frac{C_{B\phi}}{f} \gamma^\mu \gamma^5 B(x) + \frac{C_{T\phi}}{f} \Theta^{\mu\nu} T_\nu(x) \right] \\ &\quad \times \int d^4 a F(a) \phi(x+a) A^\mu(x+a) + \text{h.c.} \\ &- \frac{e_\phi^q C_{\phi\phi^\dagger}}{2f^2} \bar{p}(x) \gamma^\mu p(x) \int d^4 a F(a) \int d^4 b F(b) \\ &\quad \times \phi(x+a) \phi^\dagger(x+b) [A^\mu(x+a) + A^\mu(x+b)], \quad (2.42) \end{aligned}$$

最后 $\delta\mathcal{G}_\phi^q$ 项产生额外的电磁相互作用，其表达式为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{link}}^{(\text{nonloc})}(x) &= -ie_\phi^q \bar{p}(x) \left[\frac{C_{B\phi}}{f} \gamma^\rho \gamma^5 B(x) + \frac{C_{T\phi}}{f} \Theta^{\rho\nu} T_\nu(x) \right] \\ &\quad \times \int_0^1 dt \int d^4 a F(a) a^\mu \partial_\rho \phi(x+a) A_\mu(x+at) + \text{h.c.} \\ &+ \frac{e_\phi^q C_{\phi\phi^\dagger}}{2f^2} \bar{p}(x) \gamma^\rho p(x) \int_0^1 dt \int d^4 a \int d^4 b F(a) F(b) (a-b)^\mu \\ &\quad \times [\phi(x+a) \partial_\rho \phi^\dagger(x+b) - \partial_\rho \phi(x+a) \phi^\dagger(x+b)] \\ &\quad \times A_\mu(x+at+b(1-t)). \quad (2.43) \end{aligned}$$

显然这种类型的相互作用成正比于粒子之间的相对距离 a 和 b ，如果介子场是定域

场，额外电磁相互作用项消失。从非定域拉氏量可以得到非定域夸克流 $J_{\text{em}}^{\mu,q}$

$$\begin{aligned}
J_{q,\text{em}}^{\mu}(x) &\equiv \frac{\delta \int d^4y \mathcal{L}_{\text{em}}^{(\text{nonloc})}(y)}{\delta A_{\mu}(x)} \\
&= e_B^q \bar{B}(x) \gamma^{\mu} B(x) + e_T^q \bar{T}_{\alpha}(x) \gamma^{\alpha\nu\mu} T_{\nu}(x) + i e_{\phi}^q [\partial^{\mu} \phi(x) \phi^{\dagger}(x) - \phi(x) \partial^{\mu} \phi^{\dagger}(x)] \\
&\quad - i e_{\phi}^q \int d^4a F(a) \bar{p}(x-a) \left[\frac{C_{B\phi}}{f} \gamma^{\mu} \gamma^5 B(x-a) + \frac{C_{T\phi}}{f} \Theta^{\mu\nu} T_{\nu}(x-a) \right] \phi(x) \\
&\quad + \text{h.c.} - \frac{e_{\phi}^q C_{\phi\phi^{\dagger}}}{2f^2} \int d^4a F(a) \int d^4b F(b) \left[\bar{p}(x-a) \gamma^{\mu} p(x-a) \phi(x) \phi^{\dagger}(x+b-a) \right. \\
&\quad \left. + \bar{p}(x-b) \gamma^{\mu} p(x-b) \phi(x+a-b) \phi^{\dagger}(x) \right], \tag{2.44}
\end{aligned}$$

采用同样方法可以得到规范链接流

$$\begin{aligned}
\delta J_q^{\mu}(x) &\equiv \frac{\delta \int d^4y \mathcal{L}_{\text{link}}^{(\text{nonloc})}(y)}{\delta A_{\mu}(x)} \\
&= -i e_{\phi}^q \int_0^1 dt \int d^4a F(a) a^{\mu} \bar{p}(x-at) \left[\frac{C_{B\phi}}{f} \gamma^{\rho} \gamma^5 B(x-at) + \frac{C_{T\phi}}{f} \Theta^{\rho\nu} T_{\nu}(x-at) \right] \\
&\quad \times \partial_{\rho} \phi(x+a(1-t)) + \text{h.c.} \\
&\quad + \frac{e_{\phi}^q C_{\phi\phi^{\dagger}}}{2f^2} \int_0^1 dt \int d^4a F(a) \int d^4b F(b) (a-b)^{\mu} \bar{p}(x-at-b(1-t)) \\
&\quad \times \gamma^{\rho} p(x-at-b(1-t)) \\
&\quad \times \left[\phi(x+(a-b)(1-t)) \partial_{\rho} \phi^{\dagger}(x-(a-b)t) \right. \\
&\quad \left. - \partial_{\rho} \phi(x+(a-b)(1-t)) \phi^{\dagger}(x-(a-b)t) \right], \tag{2.45}
\end{aligned}$$

从(2.45)式可以看出规范连接流 $\delta J_q^{\mu}(x)$ 成正比于 a^{μ} ，这跟定域守恒流的洛伦兹结构不一样，并在定域极限下 $a \rightarrow 0$ ，额外电磁流 $\delta J_q^{\mu}(x)$ 为零。此外额外守恒流 $\delta J_q^{\mu}(x)$ 引入一些额外的费曼图，它们使得规范不变性保持不变。

2.2.1 本章总结

这一章我们主要讨论了手征对称性与手征拉氏量，并阐述了非定域手征拉氏量的构造过程。为了消除圈图计算中出现的紫外发散，引进了非定域正规化方案。跟其他正规化不同的是，非定域正规化在拉氏量层次上消除紫发散。为了保持规范不变性，非定域拉氏量中引入规范连接算符，因此产生额外的守恒

流。除此之外，非定域手征拉氏量包含正规化因子 $F(a)$ ，它反映非定域化粒子的非定域效应。原来的拉氏量非定域化后圈积分是超重整的。利用这些非定域手征量，下一章我们研究在两种正规化方案(非定域正规和Pauli-Villars 正规化)中的八重态重子和十重态分重子分裂函数。

第三章 分裂函数

核子海中正反夸克不断的产生和湮灭，最终显示出三个组成夸克的统计效应并在QCD演化过程中保持不变，比如，对核子来说奇异(或其他味道的海夸克分布)海夸克分布 $s(x)$ 和 $\bar{s}(x)$ 显示出奇异中性。但是奇异夸克分布 $s(x)$ 和反奇异夸克分布 $\bar{s}(x)$ 的形状不一样，这导致奇异夸克对称性破缺。无论核子味道对称性破缺还是奇异夸克对称性破缺都无法在微扰QCD中得到解释。这引导我们去探索核子在非微扰QCD区域内的结构。在非微扰区域内核子被周围介子云包围因而对核子结构有贡献。在这种情况下，在深度非弹性散射过程中虚光子和核子周围的介子相互作用并把介子打碎成很多碎片 [76]。参与相互作用的介子可能包含赝标量介子和矢量介子并且它们对核子结构的贡献在实验中体现出来。这些介子不仅对核子的介子交换势有贡献，而且对核子低能结构也有贡献，比如核子电磁形状因子。在低能区域内，介子云模型成功地描述核子的很多物理特点，比如核子味道对称性破缺 $\bar{d}(x) - \bar{u}(x)$ 在介子云模型中得到很好的解释 $\bar{d} - \bar{u}$ [75, 77–81, 83–85]。介子云模型中核子波函数可展开为中间态重子和介子Fock态之和，即 [81, 88]

$$|N\rangle_{phy} = \sqrt{Z}|N\rangle_{bare} + \sum_{MB} \int dy d^2\vec{k}_\perp \phi_{BM}(y, k_\perp^2); \left| B(1-y, -\vec{k}_\perp), M(y, \vec{k}_\perp) \right\rangle \quad (3.1)$$

其中第一项是裸核子波函数， \sqrt{Z} 是裸核子在核子中出现的概率振幅，M和B分别代表中间态赝标量介子和重子(它们包括SU(3)八重态重子和十重态重子)， $\phi_{BM}(y, k_\perp^2)$ 代表在MB Fock态在核子中出现的概率振幅， y 是介子动量比例，它定义为 $y = k^+/p^+$ ，其中 p^+ 和 k^+ 分别是介子和核子动量的光锥分量， k_\perp 是介子横向动量。对于一个四矢量 a^μ 来说，它的光锥分量定义为 $k^\pm = k_0 \pm k_3$ ， $\vec{k}_\perp = k_1 + k_2$ ，更多的讨论请参阅A。本文中的最重要概念—分裂函数 $f_{BM}(y)$ (代表Fock态在核子中出现的概率)由概率振幅 $\phi_{BM}(y, k_\perp^2)$ 给出 [89, 90]，

$$f_{BM}(y) \equiv \int d^2\vec{k}_\perp |\phi_{BM}(y, k_\perp^2)|^2 \quad (3.2)$$

唯象学中分裂函数由核子—介子—重子相互作用顶角确定。另一方面，根据概

率守恒性, Fock 态对波函数重整化常熟 Z 的贡献为 [26]

$$\int_0^1 dy f_{BM}(y) = Z_{BM}, \quad (3.3)$$

在协变框架中波函数重整化常数 Z_{BM} 跟每个由中间态介子+重子构成的圈图对应的电磁形状因子 $F_1(q=0)$ 有关。以前的研究中核子- π 介子赝标量耦合来描述核子-介子-核子相互作用顶角 [95]。但是正如第二章所介绍, 核子-介子-核子赝标量耦合或者线性 σ 模型无法描述真实物理世界并且在强子谱中没有标量介子 σ 对应的粒子。因此下一节我们采用第二章所给出的手征重子-赝标介子赝矢量耦合来讨论每个圈图对应的电磁形状因子顶角算符和分裂函数。

3.1 分裂函数

这一节我们详细地推导质子到赝标量介子+八重态(十重态)重子的分裂函数。首先给出每个费曼图对应的电磁相互作用顶角, 然后选择具体的正规化方案: Pauli-Villars 和非定域正规化, 最后给出在不同正规化方案中的分裂函数。如图 3.1 所示, 我们的计算包括八重态和十重态贡献。费曼图 3.1(a)–3.1(c), 3.1(e), 3.1(f), 3.1(h)–3.1(j) 对应于定域电磁相互作用, 费曼图 3.1(d), 3.1(g), 3.1(k)代表(2.41)–(2.43) 式中的非定域电磁相互作用。最后我们把物理核夸克分布用分裂函数与裸强子价夸克分布的卷积积分形式表示出来, 相关讨论留在 4.2 节。这些费曼图用于计算赝标量介子对核子PDF 的贡献, 尤其是我们通过计算能预言介子圈图对非单态PDF的贡献, 因为正反夸克的微扰QCD 效应很大程度上相互抵消。比如核子味道对称性破缺 $\bar{d} - \bar{u}$, 奇异夸克对称性破缺 $s - \bar{s}$, 还有核子重夸克对称性破缺。相对于裸核子, 物理核子直接获得来自费曼图(3.1) 的贡献。在光锥坐标中非极化分裂函数可以用电形状因子 $F_1(0)$ 来表示 [89, 91], 因此我们首先写出在光锥坐标中的电磁顶角算符。介子彩虹图[费曼图3.1(a)] 的电磁相互作用顶角算符定义为 [92]

$$\begin{aligned} \Gamma_{\phi B}^\mu (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p-p) &= \langle p | i^2 \int d^4x d^4y d^4z \mathcal{L}_{\text{had}(B)}^{(\text{nonloc})}(x) J_{q,\text{em}}^\mu(y) \mathcal{L}_{\text{had}(B)}^{(\text{nonloc})}(z) | p \rangle \\ &= \frac{i^2 C_{B\phi}^2}{f^2} \langle p | \int d^4x d^4y d^4z \int d^4a F(a) \int d^4b F(b) \bar{p}(x) \gamma^\nu \gamma^5 B(x) \\ &\quad \partial_\nu \phi(x+a), (-i[\phi(y) \partial^\mu \phi^\dagger(y) - \phi^\dagger(y) \partial^\mu \phi(y)]) \bar{B}(z) \gamma^\rho \gamma^5 p(z) \\ &\quad \partial_\rho \phi^\dagger(z+b) | p \rangle, \end{aligned} \quad (3.4)$$

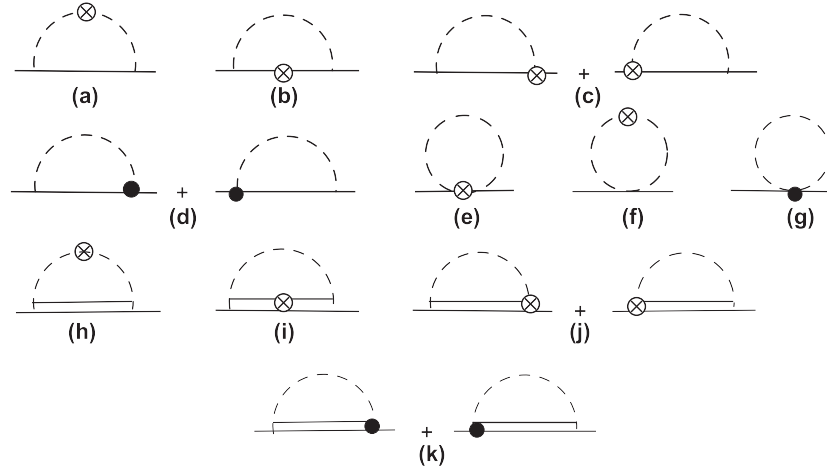


图 3.1: 图中虚线代表赝标介子, 实线代表八重态重子, 双重线代表十重态重子, 环叉表示强子-光子耦合, 黑点表示规范链接耦合。

其中 $\mathcal{L}_{\text{had}(B)}^{(\text{nonloc})}$ 代表(2.41) 式中的非定域强相互作用拉氏量。对 x, y, z 积分后得到

$$\begin{aligned} \Gamma_{\phi B}^{\mu} = & \frac{C_{B\phi}^2}{f^2} \bar{u}(p) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int d^4 a F(a) \int d^4 b F(b) (\not{k} \gamma^5) \frac{i[(\not{p} - \not{k}) + M_B]}{D_B} (\gamma^5 \not{k}) \\ & \times \frac{i}{D_{\phi}} 2k^{\mu} \frac{i}{D_{\phi}} u(p) \exp[-ik \cdot (a - b)], \end{aligned} \quad (3.5)$$

其中狄拉克旋子 u 归一化为 $\bar{u}u = 1$ 。 D_{ϕ} 和 D_B 分别表示中间态重子和介子的传播子因子,

$$D_{\phi} = k^2 - m_{\phi}^2 + i\varepsilon, \quad (3.6a)$$

$$D_B = (p - k)^2 - M_B^2 + i\varepsilon, \quad (3.6b)$$

其中 m_{ϕ} 和 M_B 分别代表介子和重子质量。对 $F(a)$ 进行傅里叶变化后得到动量空间中的正规化因子

$$\tilde{F}(k) \equiv \int d^4 a \exp[-ia \cdot k] F(a), \quad (3.7)$$

利用上式, (3.5)式可以进一步写成

$$\begin{aligned} \Gamma_{\phi B}^{\mu} = & \frac{C_{B\phi}^2}{f^2} \bar{u}(p) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (\not{k} \gamma^5) \tilde{F}(k) \frac{i[(\not{p} - \not{k}) + M_B]}{D_B} \frac{i}{D_{\phi}} 2k^{\mu} \frac{i}{D_{\phi}} (\gamma^5 \not{k}) \tilde{F}(-k) u(p) \\ \equiv & \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{\Gamma}_{\phi B}^{\mu}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

根据(3.3)式, 取电磁顶角算符 $\tilde{\Gamma}_{\phi B}^\mu$ 的+光锥分量, 定义重子八重态介子彩虹图[图3.1(a)]的分裂函数 $f_{\phi B}^{(\text{rbw})}(y)$

$$f_{\phi B}^{(\text{rbw})}(y) = \frac{M}{p^+} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{\Gamma}_{\phi B}^+ \delta\left(y - \frac{k^+}{p^+}\right), \quad (3.9)$$

其中介子动量的光锥分量 k^+ 定义为 $k^+ = k^0 + k^z$, M 代表核子质量。根据上式, 从(3.8)式和(3.8)式得到介子彩虹图[图3.1(a)]分裂函数

$$\begin{aligned} f_{\phi B}^{(\text{rbw})}(y) &= \frac{C_{B\phi}^2}{f^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p)(\not{k} \gamma^5) \frac{i[(\not{p} - \not{k}) + M_B]}{D_B} \frac{i}{D_\phi}(2k^+) \frac{i}{D_\phi}(\gamma^5 \not{k}) \\ &\quad \times \tilde{F}^2(k) u(p) \frac{M}{p^+} \delta\left(y - \frac{k^+}{p^+}\right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

用同样的方法, 八重态重子彩虹图[图3.1(b)]和Kroll-Ruderman图[图3.1(c)]对应的分裂函数分别定义为

$$\begin{aligned} f_{B\phi}^{(\text{rbw})}(y) &= \frac{C_{B\phi}^2}{f^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p)(\not{k} \gamma^5) \frac{i[(\not{p} - \not{k}) + M_B]}{D_B} \gamma^+ \frac{i[(\not{p} - \not{k}) + M_B]}{D_B} (\gamma^5 \not{k}) \\ &\quad \times \frac{i}{D_\phi} \tilde{F}^2(k) u(p) \frac{M}{p^+} \delta\left(y - \frac{k^+}{p^+}\right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} f_{B\phi}^{(\text{KR})}(y) &= \frac{C_{B\phi}^2}{f^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p) \left\{ (i\gamma^+ \gamma^5) \frac{i[(\not{p} - \not{k}) + M_B]}{D_B} (\gamma^5 \not{k}) \right. \\ &\quad \left. + (\not{k} \gamma^5) \frac{i[(\not{p} - \not{k}) + M_B]}{D_B} (i\gamma^5 \gamma^+) \right\} \\ &\quad \times \frac{i}{D_\phi} \tilde{F}^2(k) u(p) \frac{M}{p^+} \delta\left(y - \frac{k^+}{p^+}\right), \end{aligned} \quad (3.12)$$

正如2.2节所述, 额外守恒流[(2.45)式]产生额外的规范链接图: 八重态Kroll-Ruderman 规范连接图[图3.1(d)], 蝌蚪规范连接图[图3.1(g)]和十重态Kroll-Ruderman规范连接图[图3.1(k)]。八重态Kroll-Ruderman 规范连接图[图3.1(d)]对应的电磁顶角算符定义为

$$\begin{aligned} \delta \Gamma_{B\phi}^\mu (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p-p) &= \langle p | i \int d^4 y d^4 z \left(\mathcal{L}_{\text{had}(B)}^{(\text{nonloc})}(y) \delta J_q^\mu(z) + \delta J_q^\mu(y) \mathcal{L}_{\text{had}(B)}^{(\text{nonloc})}(z) \right) \\ &= \frac{iC_{B\phi}^2}{f^2} \int_0^1 dt \langle p | \int d^4 y d^4 z \int d^4 a F(a) \int d^4 b F(b) \\ &\quad \times \left[-i b^\mu \bar{p}(y) \gamma^\nu \gamma^5 B(y) \partial_\nu \phi(y+a) \bar{B}(z-bt) \gamma^\rho \gamma^5 p(z-bt) \partial_\rho \phi^\dagger(z+b(1-t)) \right. \\ &\quad \left. + i a^\mu \bar{p}(y-at) \gamma^\nu \gamma^5 B(y-at) \partial_\nu \phi(y+t(1-a)) \bar{B}(z) \gamma^\rho \gamma^5 p(z) \partial_\rho \phi^\dagger(z+b) \right] | p \rangle, \end{aligned} \quad (3.13)$$

Wick 收缩并对 x, y, z 积分后得到

$$\begin{aligned} \delta \Gamma_{B\phi}^\mu &= \frac{iC_{B\phi}^2}{f^2} \bar{u}(p) \int d^4a F(a) \int d^4b F(b) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \\ &\times \left\{ -ib^\mu (\not{k} \gamma^5) \frac{i[(\not{p} - \not{k}) + M_B]}{D_B} (\not{k} \gamma^5) \frac{i}{D_\phi} + ia^\mu (\not{k} \gamma^5) \frac{i}{D_\phi} \frac{i[(\not{p} - \not{k}) + M_B]}{D_B} (\not{k} \gamma^5) \right\} \\ &\times u(p) \exp[-ik \cdot (a - b)]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

对时空坐标 a 和 b 积分后得到

$$\begin{aligned} \delta \Gamma_{B\phi}^\mu &= \frac{iC_{B\phi}^2}{f^2} \bar{u}(p) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ -\frac{\partial \tilde{F}(-k)}{\partial k^\mu} \tilde{F}(k) (\not{k} \gamma^5) \frac{i[(\not{p} - \not{k}) + M_B]}{D_B} (\not{k} \gamma^5) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial \tilde{F}(k)}{\partial k^\mu} \tilde{F}(-k) (\not{k} \gamma^5) \frac{i[(\not{p} - \not{k}) + M_B]}{D_B} (\not{k} \gamma^5) \right\} \frac{i}{D_\phi} u(p). \end{aligned} \quad (3.15)$$

用(3.8)式中的定义, 规范链接图3.1(d)对应的分裂函数可以写成

$$\begin{aligned} \delta f_{B\phi}^{(\text{KR})}(y) &= \frac{2C_{B\phi}^2}{f^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p) (i \not{k} \gamma^5) \frac{i[(\not{p} - \not{k}) + M_B]}{D_B} \frac{i}{D_\phi} (-\not{k} \gamma^5) u(p) \\ &\quad \times \frac{\partial \tilde{F}^2(k)}{\partial k^-} \frac{M}{p^+} \delta\left(y - \frac{k^+}{p^+}\right). \end{aligned} \quad (3.16)$$

从(3.16)式可以看出, 规范链接图的分裂函数正比于 \tilde{F} 的导数, 在定域极限下 $\tilde{F} = 1$, 规范连接图的贡献为零。介子蝌蚪图[图3.1(e)]的分裂函数由下式给出

$$f_\phi^{(\text{tad})}(y) = \frac{C_{\phi\phi^\dagger}}{f^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p) \gamma^+ \frac{i}{D_\phi} u(p) \tilde{F}^2(k) \frac{M}{p^+} \delta\left(y - \frac{k^+}{p^+}\right), \quad (3.17)$$

介子泡沫图[图3.1(f)]对应的分裂函数

$$\begin{aligned} f_\phi^{(\text{bub})}(y) &= -\frac{iC_{\phi\phi^\dagger}}{f^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p) 2 \not{k} k^+ \left(\frac{i}{D_\phi}\right)^2 u(p) \\ &\quad \times \tilde{F}^2(k) \frac{M}{p^+} \delta\left(y - \frac{k^+}{p^+}\right), \end{aligned} \quad (3.18)$$

其中耦合常数 $C_{\phi\phi^\dagger}$ 列在表2.1中。最后计算蝌蚪规范连接图[图3.1(g)]的分裂函数, 其电磁顶角函数定义为

$$\delta \Gamma_\phi^\mu (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' - p) = \langle p' | \int d^4x \delta J_q^\mu(x) | p \rangle, \quad (3.19)$$

进一步化简后得到

$$\delta\Gamma_\phi^\mu = \frac{C_{\phi\phi^\dagger}}{f^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p) \not{k} \frac{i}{D_\phi} u(p) \left[\tilde{F}(-k) \frac{\partial \tilde{F}(k)}{\partial k^\mu} + \tilde{F}(k) \frac{\partial \tilde{F}(-k)}{\partial k^\mu} \right]. \quad (3.20)$$

根据分裂函数的定义, 得到蝌蚪规范连接图[图 3.1(g)] 的分裂函数

$$\delta f_\phi^{(\text{tad})}(y) = \frac{C_{\phi\phi^\dagger}}{f^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p) \not{k} \frac{i}{D_\phi} u(p) \frac{2\partial \tilde{F}^2(k)}{\partial k^-} \frac{M}{p^+} \delta\left(y - \frac{k^+}{p^+}\right). \quad (3.21)$$

由于十重态超子的质量大于八重态, 十重态对电磁结构函数的贡献压低。另一方面十重态传播子包含高阶动量项, 因此十重态分裂函数具有跟八重态的不一样的一些特点。正如参考文献 [29] 所示, 当系统趋于定域极限的时候 $y = 1$ 点成为奇点。实际上这种类型的分裂函数可表示为 $\delta(1 - y)$ 函数。跟八重态一样图, 3.1中 3.1(h) 和 3.1(i) 对应于定域拉氏量产生的领头阶圈图。除此之外非定域相互作用中还会出现的规范连接图 3.1(k)。类似于八重态, 图 3.1(h) 的电磁顶角算符定义为

$$\begin{aligned} \Gamma_{\phi T}^\mu (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - p) &= \langle p | i^2 \int d^4x d^4y d^4z \mathcal{L}_{\text{had}(T)}^{(\text{nonloc})}(x) J_{q,\text{em}}^\mu(y) \mathcal{L}_{\text{had}(T)}^{(\text{nonloc})}(z) | p \rangle \\ &= \frac{i^2 C_{T\phi}^2}{f^2} \langle p | \int d^4x d^4y d^4z \int d^4a F(a) \int d^4b F(b) \bar{p}(x) \Theta^{\alpha\beta} T_\beta(x) \partial_\alpha \phi(x + a) \\ &\quad \times \{ -i[\phi(y) \partial^\mu \phi^\dagger(y) - \phi^\dagger(y) \partial^\mu \phi(y)] \} \bar{T}_\rho(z) \Theta^{\rho\sigma} p(z) \partial_\sigma \phi^\dagger(z + b) | p \rangle, \end{aligned} \quad (3.22)$$

其中 $\mathcal{L}_{\text{had}(T)}^{(\text{nonloc})}$ 代表公式(2.41) 中的十重态非定域相互作用拉氏量, T 代表十重态场算符, $\Theta^{\alpha\beta}$ 代表八重态- 十重态相互作用顶角, 其表达式已定义在(4.16)中。

对 x, y, z 积分后得到

$$\begin{aligned} \Gamma_{\phi T}^\mu &= \frac{i^2 C_{T\phi}^2}{f^2} \bar{u}(p) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int d^4b F(b) \int d^4a F(a) k_\alpha \Theta^{\alpha\beta} \\ &\quad \frac{-i[(\not{p} - \not{k}) + M_T] P_{\beta\rho}(p - k)}{D_T} \frac{i}{D_\phi} 2k^\mu \frac{i}{D_\phi} \Theta^{\rho\sigma} k_\sigma u(p) \exp[-ik \cdot (a - b)], \end{aligned} \quad (3.23)$$

其中 D_T 的定义跟(3.6b) 式中的 D_B 一样并通过 $M_B \rightarrow M_T$ 替换而得到 D_T , $P_{\alpha\beta}$ 代表自旋为 $-3/2$ 态的投影算符。投影算符一般依赖于离壳参数 Z , 根

据参考文献 [93, 94] 中的观点, 计算中我们取 $Z = \frac{1}{2}$, 此时的投影算符 $P_{\alpha\beta}$ 可写为

$$P_{\alpha\beta}(p) = g_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\gamma_\alpha\gamma_\beta - \frac{\gamma_\alpha p_\beta - \gamma_\beta p_\alpha}{3M_T} - \frac{2p_\alpha p_\beta}{3M_T^2}. \quad (3.24)$$

积掉公式(3.23)中的时空坐标 a^μ 和 b^μ 后得到

$$\begin{aligned} \Gamma_{\phi T}^\mu &= \frac{i^2 C_{T\phi}^2}{f^2} \bar{u}(p) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} k_\alpha \Theta^{\alpha\beta} \tilde{F}(k) \frac{-i[(\not{p} - \not{k}) + M_T] P_{\beta\rho}(p - k)}{D_T} \\ &\quad \times \frac{i}{D_\phi} 2k^\mu \frac{i}{D_\phi} \Theta^{\rho\sigma} k_\sigma \tilde{F}(-k) u(p). \end{aligned} \quad (3.25)$$

根据定义, 八重态介子彩虹图的分裂函数可以写成

$$\begin{aligned} f_{\phi T}^{(\text{rbw})}(y) &= \frac{C_{T\phi}^2}{f^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p) k_\alpha \Theta^{\alpha\beta} \frac{-i[(\not{p} - \not{k}) + M_T] P_{\beta\rho}(p - k)}{D_T} \\ &\quad \times \frac{i}{D_\phi} 2k^+ \frac{i}{D_\phi} (-\Theta^{\rho\sigma} k_\sigma) u(p) \tilde{F}^2(k) \frac{M}{p^+} \delta\left(y - \frac{k^+}{p^+}\right). \end{aligned} \quad (3.26)$$

同样地, 十重态重子彩虹图[图 3.1(i)]和Kroll-Ruderman 图[图3.1(j)]的分裂函数分别可以写成

$$\begin{aligned} f_{T\phi}^{(\text{rbw})}(y) &= \frac{C_{T\phi}^2}{f^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p) k_\mu \Theta^{\mu\nu} \frac{-i[(\not{p} - \not{k}) + M_T] P_{\nu\alpha}(p - k)}{D_T} \gamma^{\alpha\beta+} \\ &\quad \times \frac{-i[(\not{p} - \not{k}) + M_T] P_{\beta\rho}(p - k)}{D_T} \frac{i}{D_\phi} (-\Theta^{\rho\sigma} k_\sigma) u(p) \\ &\quad \times \tilde{F}^2(k) \frac{M}{p^+} \delta\left(y - \frac{k^+}{p^+}\right) \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} f_{T\phi}^{(\text{KR})}(y) &= \frac{C_{T\phi}^2}{f^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p) \left\{ \frac{i}{D_\phi} (i\Theta^{+\nu}) \frac{-i[(\not{p} - \not{k}) + M_T] P_{\nu\alpha}(p - k)}{D_T} (-\Theta^{\alpha\sigma} k_\sigma) \right. \\ &\quad \left. + k_\mu \Theta^{\mu\nu} \frac{-i[(\not{p} - \not{k}) + M_T] P_{\nu\alpha}(p - k)}{D_T} (-i\Theta^{\alpha+}) \frac{i}{D_\phi} \right\} u(p) \\ &\quad \times \tilde{F}^2(k) \frac{M}{p^+} \delta\left(y - \frac{k^+}{p^+}\right), \end{aligned} \quad (3.28)$$

跟八重态一样, 非定域相互作用产生规范连接相互作用, 十重态Kroll-Ruderman类型的规范连接图[图 3.1(k)]对应的分裂函数定义为

$$\begin{aligned} \delta f_{T\phi}^{(\text{KR})}(y) &= \frac{2C_{T\phi}^2}{f^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p) (i k_\sigma \Theta^{\sigma\nu}) \frac{-i[(\not{p} - \not{k}) + M_T] P_{\nu\alpha}(p - k)}{D_T} \frac{i}{D_\phi} \\ &\quad \times (-\Theta^{\alpha\sigma} k_\sigma) u(p) \frac{\partial \tilde{F}^2(k)}{\partial k^-} \frac{M}{p^+} \delta\left(y - \frac{k^+}{p^+}\right). \end{aligned} \quad (3.29)$$

到此为止，我们给出了积分形式的分裂函数，但是具体计算过程我们还需要选择一个具体形式的非定域正规化因子 $\tilde{F}(k)$ 。显然当正规化因子 $\tilde{F}(k) = 1$ 的时候，所有的分裂函数回到定域框架中的结果。正如前面所述，计算中我们还可以直接对定域分裂函数进行正规化。作为一个比较，给出非定域分裂函数之前，下一节我们讨论在Pauli-Villars 正规化中的八重态分裂函数。

3.2 Pauli-Villars 正规化

为了更好的解释定域和非定域之间的区别，这一节我们首先讨论Pauli-Villars 正规化的分裂函数。作为一个例子，我们讨论质子分裂成赝标量介子+八重态重子以及介子蝌蚪和泡沫图的分裂函数。当 $F(k) = 1$ 时，我们回到定域框架中的分裂函数。从(3.10) 式得到介子彩虹图[图3.1(a)]对应的定域分裂函数

$$f_{\phi B}^{(\text{rbw})}(y) = M \frac{C_{B\phi}^2}{f_\phi^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p)(\not{k}\gamma_5) \frac{i(\not{p} - \not{k} + M_B)}{D_B} (\gamma_5 \not{k}) u(p) \frac{i}{D_\phi} \frac{i}{D_\phi} 2k^+ \delta(k^+ - yp^+), \quad (3.30)$$

计算中狄拉克旋子满足归一化条件 $\bar{u}u = 1$ ，因此 γ 矩阵的光锥分量满足 $\bar{u}\gamma^+u = \frac{p^+}{M}$ 。任意算符Q 的矩阵元由以下求迹公式求得

$$\bar{u}Qu = \text{Tr}[(\not{p} + M)Q] \quad (3.31)$$

其中Tr对 γ 矩阵求迹， p 代表核子四动量。分裂函数是介子动量比例 y 和横向动量 k_\perp^2 的函数，在光锥坐标中单元微分可以写为。

$$\int d^4 k = \frac{1}{2} \int dk^+ dk^- dk_\perp^2 \quad (3.32)$$

求迹后，(3.30) 式的积分可以分解为，

$$f_{\phi B}^{(\text{rbw})}(y) = -i \frac{C_{\phi B}^2}{f_\phi^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{\overline{M}^2(p \cdot k + M\Delta)}{D_\phi^2 D_B} + \frac{M\overline{M}}{D_\phi^2} + \frac{p \cdot k}{D_\phi^2} \right] 2y \delta\left(y - \frac{k^+}{p^+}\right), \quad (3.33)$$

其中八重态重子-核子质量之差和八重态重子-核子质量之和分别定义为

$$\overline{M} = M_B + M, \quad (3.34a)$$

$$\Delta = M_B - M, \quad (3.34b)$$

在光锥坐标中，重子和介子的传播子因子 D_B 和 D_ϕ 定义为

$$\begin{aligned} D_B &= (p^+ - k^+) \left(p^- - k^- - \frac{k_\perp^2 + M_B^2 - i\epsilon}{p^+ - k^+} \right), \\ D_\phi &= k^+ \left(k^- - \frac{k_\perp^2 + m_\phi^2 + i\epsilon}{k^+} \right). \end{aligned} \quad (3.35)$$

其中核子横向动量在无穷大动量框架(IMF)中可以取为零，即 $p_\perp^2 = 0$ (更多的讨论请参阅附录)。当 $0 < k^+ < p^+$ 时， D_ϕ 的奇点位于下半复数平面内， D_B 的奇点则位于上半复数平面内。我们很容易发现(3.33) 式的第一项($\sim 1/D_\phi^2 D_B$) 表示八重态在壳分裂函数，这项当 $y > 0$ 的时候有贡献并且它的贡献跟“Sullivan”过程有关 [95, 96]。通过计算第一项的留数，我们得到介子彩虹图的定域在壳分裂函数。然而 $f_{\phi B}$ 还包含 k_\perp^2 的积分，一般对 k_\perp^2 积分后在壳分裂函数是发散的，因此需要引入一个截断来消除发散。为此采用Pauli-Villars 正规化来处理 k_\perp^2 积分导致的紫外发散。Pauli-Villars 正规化中传播子替换为传播子与另一个质量为比较大的传播子之差。因此对(3.33) 式的第一项做如下替换，

$$\frac{1}{D_\phi^2} \rightarrow \frac{1}{D_\phi^2} - \frac{1}{D_{\mu 1}^2} \quad (3.36)$$

其中 $D_{\mu 1} = k^2 - \mu_1^2 + i\epsilon$ ， μ_1 代表截断参数。做这样替换后我们发现对 k_\perp^2 积分后得分裂函数是收敛的，但是这么做的代价是分裂函数中引入一个截断参数 μ_1 。第二项($\sim y/D_K^2$) 对 y 是奇函数，因此它的积分为零 [97]。根据光锥动量的特点，第三项可以写为 [98]

$$\int d^4k \frac{2y p \cdot k}{D_\phi^2} = \int d^4k \frac{1}{D_\phi}, \quad (3.37)$$

此外，(3.37) 式的光锥积分只有当 $k^+ \neq 0$ 的时候不为零，当 $k^+ = 0$ 的时候趋于无穷大，因此它的积分正比于 $\delta(k^+)$ [26, 97, 99]，即

$$\int dk^- \frac{1}{k^2 - m_\phi^2 + i\epsilon} = 2\pi i \log \left(\frac{k_\perp^2 + m_\phi^2}{\mu^2} \right) \delta(k^+). \quad (3.38)$$

其中 μ 是独立于横向动量 k_\perp^2 ，介子质量 m_ϕ^2 和介子动量比例 y 的常数。因此(3.33) 式的第三项的积分正比于 $\delta(y)$ ，但是 k_\perp^2 积分后最终结果还是发散的。因此对上式中的传播子因子 $\frac{1}{D_\phi}$ 再次做替换

$$\frac{1}{D_\phi} \rightarrow \frac{1}{D_\phi} - \frac{a_1}{D_{\mu_1}^2} - \frac{a_2}{D_{\mu_2}^2} \quad (3.39)$$

其中 $a_1 = \frac{\mu_2^2 - m_\phi^2}{\mu_2^2 - \mu_1^2}$, $a_2 = \frac{\mu_1^2 - m_\phi^2}{\mu_1^2 - \mu_2^2}$ 。上式中之所以引入两个有效传播子是因为一个传播子无法消除发散。这样介子彩虹图的分裂函数可写成在壳和 δ -函数贡献之和

$$f_{\phi B}^{(\text{rbw})}(y) = \frac{C_{B\phi}^2 \bar{M}^2}{(4\pi f_\phi)^2} \left[f_B^{(\text{on})}(y) + f_\phi^{(\delta)}(y) \right]. \quad (3.40)$$

其中在壳分裂函数定义为

$$f_B^{(\text{on})}(y) = y \int dk_\perp^2 \frac{k_\perp^2 + (My + \Delta)^2}{(1-y)^2 D_{\phi B}^2} F^{(\text{on})}, \quad (3.41)$$

其中 $D_{\phi B}$ 和 $F^{(\text{on})}$ 分别定义为

$$D_{\phi B} = - \left[\frac{k_\perp^2 + yM_B^2 + (1-y)m_\phi^2 - y(1-y)M^2}{1-y} \right] \quad (3.42)$$

$$F^{(\text{on})} = 1 - \frac{D_{\phi B}^2}{D_{\mu_1}^2}. \quad (3.43)$$

其中对 $D_{\phi B}$ 中的介子质量做替换 $m_\phi \rightarrow \mu_1$ 而得出 D_{μ_1} 。显然(3.44)中的在壳分裂函数不同于以前的Sullivan结果 [81, 83, 96], 但是在定域极限下 $\mu_1 \rightarrow \infty$ 回到定域在壳分裂函数 [89, 90, 120],

$$f_B^{(\text{on})}(y) \xrightarrow{\mu_1 \rightarrow \infty} y \int dk_\perp^2 \frac{k_\perp^2 + (My + \Delta)^2}{(1-y)^2 D_{\phi B}^2} \quad (3.44)$$

δ -函数 $f_\phi^{(\delta)}$ 来自介子光锥动量 $k^+ = 0$ 时候的贡献。Pauli-Villars 正规化后的结果是

$$f_\phi^{(\delta)}(y) = \frac{1}{\bar{M}^2} \int dk_\perp^2 \log \Omega_\phi \delta(y) F^{(\delta)}, \quad (3.45)$$

其中 $\Omega_\phi = k_\perp^2 + m_\phi^2$, $F^{(\delta)}$ 是 δ 函数的正规化函数,

$$F^{(\delta)} = 1 - \frac{a_1 \log \Omega_{\mu_1} + a_2 \log \Omega_{\mu_2}}{\log \Omega_\phi}, \quad (3.46)$$

其中 $\Omega_{\mu_i} = k_{\perp}^2 + \mu_i^2$ 。跟 $F^{(\delta)}$ 一起, δ 函数 k_{\perp}^2 积分后是收敛的。应当注意的是(3.44)式的分子跟介子质量无关, 而且只依赖于 M_B , 因此用下表 B 来标记在壳分裂函数。与此相比, δ -函数项只依赖于赝标量介子质量 m_{ϕ} 。最后值得强调的是, (3.40) 式不仅包含在壳分裂函数, 还包含 δ 函数。虽然我们不知道 δ 函数贡献的大小, 但它的出现跟重子-赝标量介子的赝矢量耦合有关, 更具体地说在线性 σ 模型中重子-赝标量介子赝标量耦合不能给出 δ 函数项。由(3.11) 式得到的重子彩虹图[图3.1(b)]对应的定域分裂函数为

$$f_{B\phi}^{(\text{rbw})}(y) = M \frac{C_{\phi B}^2}{f_{\phi}^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p)(\not{k}\gamma_5) \frac{i(\not{p} - \not{k} + M_B)}{D_B} \gamma^+ \frac{i(\not{p} - \not{k} + M_B)}{D_B} (\gamma_5 \not{k}) u(p) \times \frac{i}{D_{\phi}} \delta(k^+ - yp^+), \quad (3.47)$$

求迹后, (3.47) 可以分解为

$$f_{B\phi}^{(\text{rbw})}(y) = -i \frac{C_{B\phi}^2}{f_{\phi}^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{\overline{M}^2 (k^2 - 2y p \cdot k - 2y M \Delta - \Delta^2)}{D_{\phi} D_B^2} - \frac{2M \overline{M} y + 2\overline{M} \Delta}{D_{\phi} D_B} - \frac{1}{D_{\phi}} \right] \delta \left(y - \frac{k^+}{p^+} \right). \quad (3.48)$$

其中第一项 ($\sim 1/D_{\phi} D_B^2$) 代表在壳分裂函数, 它跟 (3.44) 式一样, 第二项 ($\sim 1/D_{\phi} D_B$) 是离壳分裂函数。应当注意的是跟在壳分裂函数一样, 离壳分裂函数也需要引入 Pauli-Villars 正规化因子, 因此做以下替换

$$\frac{1}{D_{\phi}} \rightarrow \frac{1}{D_{\phi}} - \frac{1}{D_{\mu 1}} \quad (3.49)$$

上式中我们之所以引入 $\frac{1}{D_{\mu 1}}$ 而不是 $\frac{1}{D_{\mu 1}^2}$ 是因为一次方项足够于消除离壳分裂函数的紫外发散。(3.48) 式的第三项 ($\sim 1/D_{\phi}$) 只包含一个介子传播子, 它只在 $k^+ = 0$ 处不为零。因此总分裂函数可写成在壳, 离壳和 δ 函数项之和

$$f_{B\phi}^{(\text{rbw})}(y) = \frac{C_{\phi B}^2 \overline{M}^2}{(4\pi f_{\phi})^2} \left[f_B^{(\text{on})}(y) + f_B^{(\text{off})}(y) - f_{\phi}^{(\delta)}(y) \right]. \quad (3.50)$$

其中在壳分裂函数 $f_B^{(\text{on})}$ 跟(3.44)式一样, δ -函数 $f_{\phi}^{(\delta)}$ 已在(3.45)式中被定义。离壳分裂函数 (3.50) 由下式给出

$$f_B^{(\text{off})}(y) = \frac{2}{\overline{M}} \int dk_{\perp}^2 \frac{My + \Delta}{(1-y)D_{\phi B}} F^{(\text{off})}, \quad (3.51)$$

其中 $F^{(\text{off})}$ 定义为

$$F^{(\text{off})} = 1 - \frac{D_{\phi B}}{D_{\mu_1}}. \quad (3.52)$$

同样地, 从(3.12)式可以得到Kroll-Rudermann 图对应的分裂函数

$$\begin{aligned} f_{\phi B}^{(\text{KR})}(y) = & -iM \frac{C_{\phi B}^2}{f_\phi^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p) \left[k \gamma_5 \frac{i(\not{p} - \not{k} + M_B)}{D_B} \gamma^+ \gamma_5 \right. \\ & \left. + \gamma^+ \gamma_5 \frac{i(\not{p} - \not{k} + M_B)}{D_B} k \gamma_5 \right] u(p) \frac{i}{D_\phi} \delta(k^+ - yp^+). \end{aligned} \quad (3.53)$$

求迹后上式可以分解为,

$$f_{\phi B}^{(\text{KR})}(y) = -2i\bar{M} \frac{C_{\phi B}^2}{f_\phi^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{My + \Delta}{D_\phi D_B} + \frac{1}{MD_\phi} \right] \delta\left(y - \frac{k^+}{p^+}\right). \quad (3.54)$$

第一和第二项分别跟 (3.51) 和 (3.45) 式中的离壳和 δ -函数贡献一样。因此对 k^- 积分后得到

$$f_{B\phi}^{(\text{KR})}(y) = \frac{C_{\phi B}^2 \bar{M}^2}{(4\pi f_\phi)^2} \left[-f_B^{(\text{off})}(y) + 2f_\phi^{(\delta)}(y) \right]. \quad (3.55)$$

经过比较(3.40) 和(3.50)式中的分裂函数, 我们得到

$$f_{\phi B}^{(\text{rbw})} = f_{B\phi}^{(\text{rbw})} + f_{B\phi}^{(\text{KR})}. \quad (3.56)$$

很明显这就是规范不变性要求的结果, 根据上式, 核子奇异夸克数为零。介子蝌蚪图[图3.1(e)]对应的分裂函数由下式给出

$$f_\phi^{(\text{tad})}(y) = -\frac{C_{\phi\phi^\dagger} M}{f_\phi^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p) \gamma^+ u(p) \frac{i}{D_\phi} \delta(k^+ - yp^+), \quad (3.57)$$

跟(3.39)式一样, 首先对上式中的介子传播子做替换并且对 k^- 积分后得到

$$f_\phi^{(\text{tad})}(y) = \frac{\bar{M}^2}{(4\pi f_\phi)^2} f_\phi^{(\delta)}(y), \quad (3.58)$$

与赝标量耦合不同的是(其中只有介子彩虹图出现), 赝矢量耦合包含Weinberg-Tomazawa 相互作用, 其包含两介子顶角。这种顶角给出介子泡沫图[图3.1(f)]。介子泡沫图的分裂函数由下式给出

$$f_\phi^{(\text{bub})}(y) = \frac{C_{\phi\phi^\dagger} M}{f_\phi^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p) (-i\not{k}) u(p) \frac{i}{D_\phi} \frac{i}{D_\phi} 2k^+ \delta(k^+ - yp^+). \quad (3.59)$$

求迹后得到

$$f_{\phi}^{(\text{bub})}(y) = \frac{iC_{\phi\phi^\dagger}}{f_{\phi}^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{p \cdot k}{D_{\phi}^2} 2y \delta\left(y - \frac{k^+}{p^+}\right). \quad (3.60)$$

对 k^- 积分后得到

$$f_{\phi}^{(\text{bub})}(y) = -\frac{C_{\phi\phi^\dagger} \overline{M}^2}{(4\pi f_{\phi})^2} f_{\phi}^{(\delta)}(y), \quad (3.61)$$

类似于彩虹图分裂函数，介子蝌蚪和泡沫图分裂函数满足另一个规范不变性条件 [98],

$$f_{\phi}^{(\text{bub})}(y) - f_{\phi}^{(\text{tad})}(y) = 0. \quad (3.62)$$

恒等式(3.56) 和(3.62) 一起保证核子奇异夸克数为零，这种关系当我们考虑核子奇异和反奇异夸克分布的卷积关系的时候显得更加明显。从以上内容可以看出，在Pauli-Villars 正规化中，八重态分裂函数仍然依赖于非物理截断参数 μ_1 和 μ_2 ，因此在数值计算中截断参数 μ_1 和 μ_2 由其他实验数据定出，这显然增加模型结果的不确定性，另一方面当我们对十重态分裂函数进行Pauli-Villars 正规化的时候可能需要引入更多的截断参数。因此我们去探索在非定域框架中是否存在以上问题。为了更直觉地了解非定域正规化的含义，下一节我们将给出在非定域框架中的分裂函数。

3.3 偶极子正规化因子

非定域分裂函数的计算过程中我们需要确定非定域正规化因子 $\tilde{F}(k)$ 的具体参数化形式。为了保证洛伦兹不变性 $\tilde{F}(k)$ 要么是 k^2 的函数要么是 $(p-k)^2$ 的函数，前者跟介子非定域性有关，后者跟重子非定域性有关，为了方便起见，计算中我们选择协变偶极子正规化因子 [33,34]

$$\tilde{F}(k) = \left(\frac{\overline{\Lambda}^2}{D_{\Lambda}} \right)^2, \quad (3.63)$$

其中 $D_{\Lambda} = k^2 - \Lambda^2 + i\varepsilon$ ， $\overline{\Lambda}^2$ 定义为 $\overline{\Lambda}^2 \equiv \Lambda^2 - m_{\phi}^2$ 。用(3.63)式中的偶极子正规化因子，公式(3.10)可以进一步化简为

$$f_{\phi B}^{(\text{rbw})}(y) = \frac{iC_{B\phi}^2 \bar{\Lambda}^8}{f^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{y \bar{M}^2 (\Delta^2 - m_\phi^2)}{D_\phi^2 D_B D_\Lambda^4} - \frac{y \bar{M}^2}{D_\phi D_B D_\Lambda^4} + \frac{y(\bar{M}\Delta - 2p \cdot k)}{D_\phi^2 D_\Lambda^4} \right] \times \delta \left(y - \frac{k^+}{p^+} \right), \quad (3.64)$$

其中 \bar{M} 和 Δ 分别定义在(3.34)式中。(3.64)式的第一和第二项在复数空间的上下半平面内都有奇点, 因此 k^- 的积分可以用留数定理来求得。至于第三项, D_Λ 和 D_ϕ 只在下半平面内有奇点, 而且当 $k^+ = 0$ 的时候, k^- 的积分是发散的。对它进行费曼参数化后, 第三项可以写成

$$\begin{aligned} \int d^4 k \frac{2y p \cdot k}{D_\phi^2 D_\Lambda^4} &= \frac{\partial^4}{6 \partial \Omega^4} \int_0^1 dz \int d^4 k \frac{2p \cdot k y(1-z)z^3}{(k^2 - \Omega + i\varepsilon)^2} \\ &= \frac{\partial^4}{6 \partial \Omega^4} \int_0^1 dz \int d^4 k \frac{(1-z)z^3}{(k^2 - \Omega + i\varepsilon)}, \end{aligned} \quad (3.65)$$

其中 Ω 定义为

$$\Omega \equiv (1-z)m_\phi^2 + z\Lambda^2. \quad (3.66)$$

其中第二行的积分, 我们利用(3.38)式中的恒等式。积分后把介子彩虹图分裂函数可以写成如下三项之和

$$f_{\phi B}^{(\text{rbw})}(y) = \frac{C_{B\phi}^2 \bar{M}^2}{(4\pi f)^2} \left[f_{\phi B}^{(\text{on})}(y) + f_\phi^{(\delta)}(y) - \delta f_\phi^{(\delta)}(y) \right]. \quad (3.67)$$

其中第一项叫做在壳分裂函数, 其表达式为

$$f_{\phi B}^{(\text{on})}(y) = \bar{\Lambda}^8 \int dk_\perp^2 \frac{y [k_\perp^2 + (yM + \Delta)^2]}{\bar{y}^2 D_{\phi B}^2 D_{\Lambda B}^4}, \quad (3.68)$$

其中 \bar{y} 表示重子动量比例并定义为 $\bar{y} = 1 - y$, $D_{\phi B}$ 和 $D_{\Lambda B}$ 分别定义为

$$D_{\phi B} = -\frac{k_\perp^2 + yM_B^2 - y\bar{y}M^2 + \bar{y}m_\phi^2}{\bar{y}}, \quad (3.69a)$$

$$D_{\Lambda B} = -\frac{k_\perp^2 + yM_B^2 - y\bar{y}M^2 + \bar{y}\Lambda^2}{\bar{y}}. \quad (3.69b)$$

在定域极限 $\Lambda \rightarrow \infty$ 下, 得到以前的定域在壳分裂函数

$$f_B^{(\text{on})}(y) \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} y \int dk_\perp^2 \frac{k_\perp^2 + (My + \Delta)^2}{(1-y)^2 D_{\phi B}^2} \quad (3.70)$$

这也跟Pauli-Villars 正规化结果的定域极限[3.44式]一样。(3.67) 式的第二项 $f_\phi^{(\delta)}(y)$ 定义为

$$\begin{aligned} f_\phi^{(\delta)}(y) &= -\frac{\bar{\Lambda}^8}{M^2} \int dk_\perp^2 \int_0^1 dz \frac{z^3}{(k_\perp^2 + \Omega)^4} \delta(y) \\ &= \frac{1}{M^2} \int dk_\perp^2 \left[\log \frac{\Omega_\phi}{\Omega_\Lambda} + \frac{\bar{\Lambda}^2 (11 \Omega_\Lambda^2 - 7 \Omega_\Lambda \Omega_\phi + 2 \Omega_\phi^2)}{6 \Omega_\Lambda^3} \right] \delta(y), \end{aligned} \quad (3.71)$$

其中 Ω_ϕ 和 Ω_Λ 定义为

$$\Omega_\phi = k_\perp^2 + m_\phi^2, \quad \Omega_\Lambda = k_\perp^2 + \Lambda^2. \quad (3.72)$$

(3.71) 式中的 $\log \Omega_\phi$ 对领头阶非解析项(LNA) 有贡献, LNA 不依赖于正规化方案, 也就是说维数正规化, Pauli-Villars 或非定域正规化方法所给出的LNA 是一样的。在定域极限下, 即当 $\Lambda \rightarrow \infty$ 时, (3.71) 式的第二项趋于常数, 根据维数重整化观点, 常数的积分为零, 第一项正比于 $\log \Omega_\phi$, 因此得到

$$f_\phi^{(\delta)}(y) \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{M^2} \int dk_\perp^2 \log \frac{\Omega_\phi}{\Omega_\Lambda} \delta(y), \quad (3.73)$$

(3.67) 式的最后一项 $\delta f_\phi^{(\delta)}(y)$ 定义为

$$\begin{aligned} \delta f_\phi^{(\delta)}(y) &= -\frac{\bar{\Lambda}^8}{M^2} \int dk_\perp^2 \int_0^1 dz \frac{z^4}{(k_\perp^2 + \Omega)^4} \delta(y) \\ &= \frac{1}{M^2} \int dk_\perp^2 \left[-4 \frac{\Omega_\phi}{\bar{\Lambda}^2} \log \frac{\Omega_\phi}{\Omega_\Lambda} - \frac{3 \Omega_\Lambda^3 + 13 \Omega_\Lambda^2 \Omega_\phi - 5 \Omega_\Lambda \Omega_\phi^2 + \Omega_\phi^3}{3 \Omega_\Lambda^3} \right] \delta(y). \end{aligned} \quad (3.74)$$

同样地, 在定域极限下 $\Lambda \rightarrow \infty$, (3.74)式的第一项等于零, 第二项对于横向动量来说是常数而且在二维空间中重整化后的常数可取为零, 所以此项可以忽略不计。总的来说在定域极限下 $\delta f_\phi^{(\delta)}(y)$ 项趋于零。从(3.67) 式可以看出非定域正规化的分裂函数只包含一个截断参数而且 k_\perp^2 积分后收敛的, 这明显不同于Pauli-Villars 正规化的分裂函数。Pauli-Villars正规化的分裂函数虽然 k_\perp^2 积分后给出一个有限值, 但是付出的代价是分裂函数中引入两个截断参数 μ_1 和 μ_2 。采用同样的方法, 从(3.11) 式可以得到八重态重子彩虹图[图3.1(b)] 对应的分裂

函数

$$f_{B\phi}^{(\text{rbw})}(y) = \frac{iC_{B\phi}^2 \bar{\Lambda}^8}{f^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{\bar{y} \bar{M}^2 (\Delta^2 - m_\phi^2)}{D_B^2 D_\phi D_\Lambda^4} - \frac{\bar{y} \bar{M}^2}{D_B^2 D_\Lambda^4} + \frac{(2-y) \bar{M} \Delta}{D_B D_\phi D_\Lambda^4} + \frac{1}{D_\phi D_\Lambda^4} \right] \delta\left(y - \frac{k^+}{p^+}\right). \quad (3.75)$$

对 k^- 积分后，八重态重子彩虹图对应的分裂函数可以写成如下四项之和

$$f_{B\phi}^{(\text{rbw})}(y) = \frac{C_{B\phi}^2 \bar{M}^2}{(4\pi f)^2} \left[f_{\phi B}^{(\text{on})}(y) + f_{B\phi}^{(\text{off})}(y) + 4\delta f_{B\phi}^{(\text{off})}(y) - f_\phi^{(\delta)}(y) \right]. \quad (3.76)$$

值得注意的是八重态重子彩虹图的在壳分裂函数与介子彩虹图的在壳分裂函数相等，即：

$$f_{B\phi}^{(\text{rbw, on})}(y) = f_{\phi B}^{(\text{rbw, on})}(y) \quad (3.77)$$

第四项 $f_\phi^{(\delta)}$ 是 δ -函数项并跟(3.71) 式中的 δ -函数项一样。(3.76) 式中的第二项叫做离壳分裂函数并定义为

$$f_{B\phi}^{(\text{off})}(y) = \frac{2\bar{\Lambda}^8}{\bar{M}} \int dk_\perp^2 \frac{(yM + \Delta)}{\bar{y} D_{\phi B} D_{\Lambda B}^4}, \quad (3.78)$$

在 $\Lambda \rightarrow \infty$ 定域极限下，非定域离壳分裂函数回到定域分裂函数

$$f_{B\phi}^{(\text{off})}(y) \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{2}{\bar{M}} \int dk_\perp^2 \frac{(yM + \Delta)}{\bar{y} D_{\phi B}}, \quad (3.79)$$

第三项叫做非定域离壳分裂函数，其表达式为

$$\delta f_{B\phi}^{(\text{off})}(y) = \bar{\Lambda}^8 \int dk_\perp^2 \frac{y[k_\perp^2 + (yM + \Delta)^2]}{\bar{y}^2 D_{\phi B} D_{\Lambda B}^5}. \quad (3.80)$$

在定域极限下 $\Lambda \rightarrow \infty$ ，非定域离壳分裂函数趋于零即 $\delta f_{B\phi}^{(\text{off})} \rightarrow 0$ 。对于八重态Kroll-Ruderman 图[图3.1(c)]，经过进一步化简，从(3.12) 式得到

$$f_{B\phi}^{(\text{KR})}(y) = -\frac{2iC_{B\phi}^2 \bar{\Lambda}^8}{f^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{(yM + \Delta) \bar{M}}{D_\phi D_B D_\Lambda^4} + \frac{1}{D_\phi D_\Lambda^4} \right] \times \delta\left(y - \frac{k^+}{p^+}\right), \quad (3.81)$$

k^- 积分后得到八重态Kroll-Ruderman 图的分裂函数

$$f_{B\phi}^{(\text{KR})}(y) = \frac{C_{B\phi}^2 \bar{M}^2}{(4\pi f)^2} \left[-f_{B\phi}^{(\text{off})}(y) + 2f_\phi^{(\delta)}(y) \right] \quad (3.82)$$

式中第一和第二项的定义跟(3.79) 和(3.71) 式一样。八重态重子Kroll-Ruderman规范连接图[图 3.1(d)]的分裂函数 $\delta f_{B\phi}^{(\text{KR})}$ 来自非定域规范链接流[(2.45) 式], 对表达式中的 γ 矩阵进行化简后得到

$$\begin{aligned} \delta f_{B\phi}^{(\text{KR})}(y) = & \frac{iC_{B\phi}^2 \bar{\Lambda}^8}{f^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[-\frac{4y \bar{M}^2 (\Delta^2 - m_\phi^2)}{D_\phi D_B D_\Lambda^5} + \frac{4y \bar{M}^2}{D_B D_\Lambda^5} \right. \\ & \left. - \frac{4y(\bar{M}\Delta - 2p \cdot k)}{D_\phi D_\Lambda^5} \right] \delta\left(y - \frac{k^+}{p^+}\right). \end{aligned} \quad (3.83)$$

积分后的非定域规范链接分裂函数 $\delta f_{B\phi}^{(\text{KR})}(y)$ 可以写成三项如下之和

$$\delta f_{B\phi}^{(\text{KR})}(y) = \frac{C_{B\phi}^2 \bar{M}^2}{(4\pi f)^2} \left[-4 \delta f_{B\phi}^{(\text{off})}(y) - \delta f_\phi^{(\delta)}(y) \right], \quad (3.84)$$

其中第一和第二项的具体表达式已被定义在 (3.80) 和(3.74) 式中。我们很容易验证分裂函数 (3.67), (3.76), (3.82) 和(3.84) 满足规范不变性

$$f_{\phi B}^{(\text{rbw})}(y) = f_{B\phi}^{(\text{rbw})}(y) + f_{B\phi}^{(\text{KR})}(y) + \delta f_{B\phi}^{(\text{KR})}(y), \quad (3.85)$$

(3.85)式是规范不变性的另一种表示方式。虽然非定域分裂函数的形式跟定域情况下的结果不一样, 但是最后的分裂函数仍然满足公式(3.85)。与(3.56)式相比, 在非定域正规化框架中, 出现额外规范连接分裂函数 $f_{B\phi}^{(\text{KR})}(y)$, 但它跟其他分裂函数一起满足(3.85) 式中的规范不变性条件。我们还可以验证在定域极限下 $\Lambda \rightarrow \infty$, 非定域分裂函数独有的分裂函数 $\delta f_{B\phi}^{(\text{off})}$ 和 $\delta f_\phi^{(\delta)}$ 消失, $f_{B\phi}^{(\text{on})}$, $f_\phi^{(\delta)}$ 则回到在定域情况下的结果。我们从公式 (3.17) 得到蝌蚪图对应的分裂函数

$$f_\phi^{(\text{tad})}(y) = -\frac{C_{\phi\phi^\dagger} \bar{M}^2}{(4\pi f)^2} f_\phi^{(\delta)}(y), \quad (3.86)$$

同样地, 由(3.18) 算出介子泡沫图的分裂函数

$$f_\phi^{(\text{bub})}(y) = -\frac{C_{\phi\phi^\dagger} \bar{M}^2}{(4\pi f)^2} \left[f_\phi^{(\delta)}(y) - \delta f_\phi^{(\delta)}(y) \right], \quad (3.87)$$

式中 $f_\phi^{(\delta)}$ 和 $\delta f_\phi^{(\delta)}$ 分别定义在(3.71) 和(3.74) 式中。最后给出蝌蚪类型规范连接图的分裂函数。

$$\delta f_\phi^{(\text{tad})}(y) = \frac{C_{\phi\phi^\dagger} \bar{M}^2}{(4\pi f)^2} \delta f_\phi^{(\delta)}(y). \quad (3.88)$$

经过比较发现，公式(3.86)，(3.87)和(3.88) 满足另一个规范不变性条件。

$$f_{\phi}^{(\text{bub})}(y) - f_{\phi}^{(\text{tad})}(y) - \delta f_{\phi}^{(\text{tad})}(y) = 0, \quad (3.89)$$

以上我们讨论了质子到八重态重子和介子的分裂函数，显然，所有的分裂函数只依赖于一个截断参数 Λ 。(3.26) 式化简后，十重态介子彩虹图[图 3.1(h)]可以写成

$$\begin{aligned} f_{\phi T}^{(\text{rbw})}(y) &= \frac{iC_{T\phi}^2 \bar{\Lambda}^8}{6M_T^2 f^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{y(\bar{M}_T^2 - m_{\phi}^2)^2 (\Delta_T^2 - m_{\phi}^2)}{D_{\phi}^2 D_T D_{\Lambda}^4} \right. \\ &\quad - \frac{y(\bar{M}_T^2 - m_{\phi}^2)(\bar{M}_T^2 + 2\Delta_T^2 - 3m_{\phi}^2)}{D_{\phi} D_T D_{\Lambda}^4} + \frac{y(2\bar{M}_T^2 + \Delta_T^2 - k^2 - 2m_{\phi}^2)}{D_T D_{\Lambda}^4} \\ &\quad + \frac{y}{D_{\phi}^2 D_{\Lambda}^4} \left[4(p \cdot k)^2 - 2(\bar{M}_T^2 - k^2)(p \cdot k) + M(2M_T^3 - M^3 - 2M^2 M_T) \right. \\ &\quad \left. \left. - 2Mk^2(2M + M_T) + (M_T^2 - k^2)^2 \right] \right\} \delta \left(y - \frac{k^+}{p^+} \right), \end{aligned} \quad (3.90)$$

其中 \bar{M}_T 代表十重态重子与核子质量之和， Δ_T 代表十重态重子与核子质量之差，

$$\bar{M}_T = M + M_T, \quad \Delta_T = M_T - M. \quad (3.91)$$

积分后得到十重态介子彩虹图[图 3.1(h)]分裂函数

$$\begin{aligned} f_{\phi T}^{(\text{rbw})}(y) &= \frac{C_{T\phi}^2 \bar{M}_T^2}{(4\pi f)^2} \left[f_T^{(\text{on})}(y) + f_T^{(\text{on end})}(y) - \frac{1}{18} f_T^{(\delta)}(y) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\bar{M}_T^2 (\bar{M}_T^2 - m_{\phi}^2)}{6M_T^2 \bar{M}_T^2} \left(f_{\phi}^{(\delta)}(y) - \delta f_{\phi}^{(\delta)}(y) \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.92)$$

其中第一项叫做十重态在壳分裂函数，其定义如下

$$\begin{aligned} f_T^{(\text{on})}(y) &= \frac{\bar{\Lambda}^8}{6M_T^2 \bar{M}_T^2} \int dk_{\perp}^2 \frac{y(\bar{M}_T^2 - m_{\phi}^2)}{\bar{y}} \left[\frac{(\bar{M}_T^2 - m_{\phi}^2)(\Delta_T^2 - m_{\phi}^2)}{D_{\phi T}^2 D_{\Lambda T}^4} \right. \\ &\quad \left. - \frac{3(\Delta_T^2 - m_{\phi}^2) + 4MM_T}{D_{\phi T} D_{\Lambda T}^4} \right], \end{aligned} \quad (3.93)$$

其中 $D_{\phi T}$ 和 $D_{\Lambda T}$ 的定义跟(3.69)式一样

$$D_{\phi T} = -\frac{k_{\perp}^2 + yM_T^2 - y\bar{y}M^2 + \bar{y}m_{\phi}^2}{\bar{y}}, \quad (3.94a)$$

$$D_{\Lambda T} = -\frac{k_{\perp}^2 + yM_T^2 - y\bar{y}M^2 + \bar{y}\Lambda^2}{\bar{y}}. \quad (3.94b)$$

因为在定域极限下 $\bar{\Lambda}^8/D_{\Lambda T}^4 \rightarrow 1$, 十重态在壳分裂函数[(3.93) 式] 回到 [29] 中的定域在分裂函数。公式(3.92) 中的在壳边界函数 $f_T^{(\text{on end})}$ 来自 $\frac{1}{D_{\Lambda T}^4}$ 项的积分。当截断参数 Λ 有限的时候, $f_T^{(\text{on end})}$ 由下式给出

$$\begin{aligned} f_T^{(\text{on end})}(y) &= \frac{\bar{\Lambda}^8}{6M_T^2 \bar{M}_T^2} \int dk_{\perp}^2 \frac{y}{\bar{y}^2 D_{\Lambda T}^4} \\ &\times \left[k_{\perp}^2 + y^2 M^2 - 2y(\bar{M}_T^2 - M\Delta_T) - 2\bar{y}m_{\phi}^2 + 3\bar{M}_T^2 - 4MM_T \right], \end{aligned} \quad (3.95)$$

显然, 当 $\Lambda \rightarrow \infty$ 的时候, $y = 1$ 成为奇点。另一方面在定域框架中这种类型的分裂函数正比于 $\delta(1 - y)$ 。为了解释定域和非定域结果之间的关联, 我们进一步研究 $f_T^{(\text{on end})}$ 的定域极限。首先把(3.94b)式写成 $\bar{y}D_{\Lambda T} = -(X_T + \bar{y}\Omega_{\Lambda})$, 其中 $X_T = y\Omega_T - y\bar{y}M^2$, $\Omega_T = k_{\perp}^2 + M_T^2$ 。在定域极限下 $1/D_{\Lambda T}^4$ 项可写为

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\Lambda}^8}{\bar{y}^4 D_{\Lambda T}^4} &\xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \lim_{\Omega_0 \rightarrow \infty} \int_{\Omega_0}^{\Omega_T} dt \frac{-4y\bar{\Lambda}^8}{(yt - y\bar{y}M^2 + \bar{y}\Omega_{\Lambda})^5} \Big|_{\Lambda \rightarrow \infty} \\ &= \frac{\bar{\Lambda}^6}{\bar{y}^3 \Omega_{\Lambda}^3} \lim_{\Omega_0 \rightarrow \infty} \left(\frac{\bar{\Lambda}^2 \bar{y}^3 \Omega_{\Lambda}^3}{\bar{y}^4 D_{\Lambda T}^4} - \frac{\bar{\Lambda}^2 \bar{y}^3 \Omega_{\Lambda}^3}{\bar{y}^4 D_0^4} \right)_{\Lambda \rightarrow \infty}, \end{aligned} \quad (3.96)$$

其中 $\bar{y}D_0 = -(X_0 + \bar{y}\Omega_{\Lambda})$, $X_0 = y\Omega_0 - y\bar{y}M^2$, Ω_0 是与 Λ 无关的常数并且 Λ 有限的时候 D_0 项消失, 但是当 $\Lambda \rightarrow \infty$ 的时候, (3.96) 式的第一和第二项中的 $\bar{y}\Omega_{\Lambda}$ 分别可以替换为 $(-\bar{y}D_{\Lambda T} - X_T)$ 和 $(-\bar{y}D_0 - X_0)$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\Lambda}^8}{\bar{y}^4 D_{\Lambda T}^4} &\xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} -\frac{\bar{\Lambda}^6}{\bar{y}^3 \Omega_{\Lambda}^3} \lim_{\Omega_0 \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{\bar{\Lambda}^2}{\bar{y}D_{\Lambda T}} - \frac{\bar{\Lambda}^2}{\bar{y}D_0} \right) + 3 \left(\frac{\bar{\Lambda}^2 X_T}{\bar{y}^2 D_{\Lambda T}^2} - \frac{\bar{\Lambda}^2 X_0}{\bar{y}^2 D_0^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + 3 \left(\frac{\bar{\Lambda}^2 X_T^2}{\bar{y}^3 D_{\Lambda T}^3} - \frac{\bar{\Lambda}^2 X_0^2}{\bar{y}^3 D_0^3} \right) + \left(\frac{\bar{\Lambda}^2 X_T^3}{\bar{y}^4 D_{\Lambda T}^4} - \frac{\bar{\Lambda}^2 X_0^3}{\bar{y}^4 D_0^4} \right) \right]_{\Lambda \rightarrow \infty}. \end{aligned} \quad (3.97)$$

(3.97) 式的第一和第二项进一步化简后得到

$$\left(\frac{\bar{\Lambda}^2}{\bar{y}D_{\Lambda T}} - \frac{\bar{\Lambda}^2}{\bar{y}D_0} \right)_{\Lambda \rightarrow \infty} = - \left(\frac{1}{\bar{y} + X_T/\Omega_\Lambda} - \frac{1}{\bar{y} + X_0/\Omega_\Lambda} \right)_{\Lambda \rightarrow \infty}, \quad (3.98)$$

式中我们假设 $\Omega_0 \ll \Lambda^2$ 。公式(3.98) 的右边在定域极限下，当 $y \neq 1$ 的时候等于零，当 $y = 1$ 的时候发散。另一方面(3.98)式对 y 的积分等于 $\log(X_T/X_0)$ 。因此在定域极限下此项可以写成 δ 函数的形式

$$\left(\frac{\bar{\Lambda}^2}{\bar{y}D_{\Lambda T}} - \frac{\bar{\Lambda}^2}{\bar{y}D_0} \right)_{\Lambda \rightarrow \infty} = \delta(\bar{y}) \log \frac{X_T}{X_0}. \quad (3.99)$$

同样地，(3.96)式中的高阶项 $1/(\bar{y}D_{\Lambda T})^n (n \geq 2)$ 的极限等于

$$\left. \frac{\bar{\Lambda}^2 X_T^{n-1}}{(-\bar{y})^n D_{\Lambda T}^n} \right|_{\Lambda \rightarrow \infty} = \left. \frac{(X_T/\Lambda^2)^{n-1}}{(\bar{y} + X_T/\Omega_\Lambda)^n} \right|_{\Lambda \rightarrow \infty} = \frac{\delta(\bar{y})}{n-1}, \quad n \geq 2. \quad (3.100)$$

(3.100)式同样对任意 X_0 有效，这样 $1/(\bar{y}D_{\Lambda T})^n$ 和 $1/(\bar{y}D_0)^n$ 项相互抵消就剩下 $1/(\bar{y}D_{\Lambda T})$ 和 $1/(\bar{y}D_0)$ 的贡献。总结这些结论最终得到

$$\frac{\bar{\Lambda}^8}{\bar{y}^4 D_{\Lambda T}^4} \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} -\frac{1}{\bar{y}^3} \log \frac{\Omega_T}{\Omega_0} \delta(\bar{y}) = -\frac{1}{\bar{y}^3} \left(\log \frac{\Omega_T}{\mu^2} - 1 \right) \delta(\bar{y}), \quad (3.101)$$

其中截断参数 μ 通过关系式 $\log(\Omega_T/\mu^2) = \log(\Omega_T/\Omega_0) + 1$ 关联到 Ω_0 。利用公式(3.101)，最后得到 $f_T^{(\text{on end})}(y)$ 的定域极限

$$f_T^{(\text{on end})}(y) \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{6M_T^2 \bar{M}_T^2} \int dk_\perp^2 \left\{ \left[\Omega_T - 2(\Delta_T^2 - m_\phi^2) - 6MM_T \right] \log \frac{\Omega_T}{\mu^2} - \Omega_T + 2(\Delta_T^2 - m_\phi^2) + 6MM_T \right\} \delta(\bar{y}). \quad (3.102)$$

除了最后三项，(3.102) 式跟 [29] 中的定域结果一样。至于最后三项由于它们是常数，在二维空间中重整化后此项的贡献为零。跟八重态一样，十重态积分中有些项正比于 $\delta(y)$ 。(3.92) 式中第一个 δ 函数项 $f_\phi^{(\delta)}(y)$ 的定义跟八重态一样，第二个 δ 函数项 $f_T^{(\delta)}(y)$ 的定义如下

$$\begin{aligned} f_T^{(\delta)}(y) &= \frac{\bar{\Lambda}^8}{M_T^2 \bar{M}_T^2} \int dk_\perp^2 \int_0^1 dz \frac{z^3}{(k_\perp^2 + \Omega)^3} \delta(y) \\ &= \frac{1}{M_T^2 \bar{M}_T^2} \int dk_\perp^2 \frac{1}{2\Omega_\Lambda^2} \left[6\Omega_\Lambda^2 \Omega_\phi \log \frac{\Omega_\phi}{\Omega_\Lambda} + (\Omega_\phi - \Omega_\Lambda)(\Omega_\phi^2 - 5\Omega_\phi \Omega_\Lambda - 2\Omega_\Lambda^2) \right] \delta(y), \end{aligned} \quad (3.103)$$

其中 Ω_ϕ 和 Ω_Λ 已经在(3.72)式中被定义。在定域极限 $\Lambda \rightarrow \infty$ 下,只剩下(3.103)式的第一项,因此定域十重态分裂函数 δ 函数项 $f_T^{(\delta)}$ 可写为

$$f_T^{(\delta)}(y) \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{3}{M_T^2 \overline{M}_T^2} \int dk_\perp^2 \left[\Omega_\phi \log \frac{\Omega_\phi}{\mu^2} - \Omega_\phi \right] \delta(y), \quad (3.104)$$

其中截断参数 μ 定义为 $\log(\Omega_\phi/\mu^2) = \log(\Omega_\phi/\Omega_\Lambda) + 17/6$ 。(3.92)式中剩下的 δ 函数项 $f_\phi^{(\delta)}$ 和 $\delta f_\phi^{(\delta)}$ 已经分别被定义在(3.71)和(3.74)式中。总结以上几个结论得到十重态介子彩虹图分裂函数 $f_{\phi T}^{(\text{rbw})}$ 的 δ 函数部分的定域极限

$$\begin{aligned} & \frac{1}{18} \left[\frac{3\overline{M}^2(\overline{M}_T^2 - m_\phi^2)}{M_T^2 \overline{M}_T^2} f_\phi^{(\delta)} - f_T^{(\delta)} \right] \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \\ & \frac{1}{6M_T^2 \overline{M}_T^2} \int dk_\perp^2 \left[\Omega_\phi + (\overline{M}_T^2 - m_\phi^2 - \Omega_\phi) \log \frac{\Omega_\phi}{\mu^2} \right] \delta(y). \end{aligned} \quad (3.105)$$

值得注意的是,此结论不同于[29]中的 $\delta(y)$ 函数项,因为十重态-八重态重子相互作用顶角张量 $\Theta^{\mu\nu}$ 依赖于离壳参数 Z ,结果十重态分裂函数中只有 $\delta(y)$ 函数的系数跟 Z 有关,其他项独立于 Z ,另一方面正如前面所述,物理量对 Z 的依赖性可以忽略不计。显然[29]中的离壳参数 Z 不同于本文所取的 $Z = \frac{1}{2}$ 。此外我们还可以从(3.92)可以看出,非定域正规化的分裂函数仍然依赖于截断参数 Λ 而且对 k_\perp^2 的积分收敛的。对(3.27)式进行化简后得到十重态重子彩虹图[图3.1(i)]对应的分裂

$$\begin{aligned}
f_{T\phi}^{(\text{rbw})}(y) = & \frac{iC_{T\phi}^2 \bar{\Lambda}^8}{6M_T^2 f^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{\bar{y}(\bar{M}_T^2 - m_\phi^2)^2 (\Delta_T^2 - m_\phi^2)}{D_\phi D_T^2 D_\Lambda^4} \right. \\
& + \frac{\bar{y}[(k^2 + m_\phi^2)(2\bar{M}_T^2 + \Delta_T^2 - m_\phi^2) - (\bar{M}_T^4 + 2\bar{M}_T^2 \Delta_T^2 + k^4)]}{D_T^2 D_\Lambda^4} \\
& - \frac{(\bar{M}_T^2 - m_\phi^2)[(y-2)M_T^2 - 2yM M_T + (M^2 - m_\phi^2)(y+2)]}{D_T D_\phi D_\Lambda^4} \\
& + \frac{(2M^2 - m_\phi^2 - k^2)(y+2) + 2M_T(yM_T + 2M)}{D_T D_\Lambda^4} \\
& \left. + \frac{[-2(p \cdot k)y - 3k^2 + \bar{M}_T^2 + 2\bar{M}_T M M_T y]}{D_\phi^2 D_\Lambda^4} \right\} \times \delta\left(y - \frac{k^+}{p^+}\right).
\end{aligned} \tag{3.106}$$

对 k^- 积分后得到

$$\begin{aligned}
f_{T\phi}^{(\text{rbw})}(y) = & \frac{C_{T\phi}^2 \bar{M}_T^2}{(4\pi f)^2} \left[f_T^{(\text{on})}(y) + f_T^{(\text{on end})}(y) - 2 \left(f_T^{(\text{off})}(y) + f_T^{(\text{off end})}(y) - 2\delta f_T^{(\text{off})}(y) \right) \right. \\
& \left. + \frac{1}{18} \left(f_T^{(\delta)}(y) - 3\delta f_T^{(\delta)}(y) \right) - \frac{\bar{M}^2(\bar{M}_T^2 + 3m_\phi^2)}{6M_T^2 \bar{M}_T^2} f_\phi^{(\delta)}(y) \right].
\end{aligned} \tag{3.107}$$

(3.3)式中的第一项叫做十重态彩虹图在壳分裂函数，类似于八重态，十重态重子彩虹图在壳分裂函数等于十重态介子彩虹图在壳分裂函数，即

$$f_{T\phi}^{(\text{rbw, on})}(y) = f_{\phi T}^{(\text{rbw, on})}(y). \tag{3.108}$$

式中的第二项叫做十重态离壳分裂函数，其表达式如下

$$f_T^{(\text{off})}(y) = \frac{\bar{\Lambda}^8}{6M_T^2 \bar{M}_T^2} \int dk_\perp^2 \frac{(\bar{M}_T^2 - m_\phi^2) [\bar{y}(M^2 - m_\phi^2) - (1+y)M_T^2]}{\bar{y} D_{\phi T} D_{\Lambda T}^4}, \tag{3.109}$$

第三项叫做离壳边界贡献，其表达式为

$$f_T^{(\text{off end})}(y) = -\frac{\bar{\Lambda}^8}{6M_T^2 \bar{M}_T^2} \int dk_\perp^2 \frac{[k_\perp^2 + \bar{y}^2 M^2 + \bar{y}(\bar{M}_T^2 - m_\phi^2) - M_T^2]}{\bar{y} D_{\Lambda T}^4}. \tag{3.110}$$

在定域极限下

$$f_T^{(\text{off end})}(y) \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{6M_T^2 \overline{M}_T^2} \int dk_\perp^2 \left\{ [\Omega_T - 2M_T^2] \log \frac{\Omega_T}{\mu^2} - \Omega_T \right\} \delta(\bar{y}). \quad (3.111)$$

跟八重态一样，十重态分裂函数包括十重态非定域离壳项并由下式给出

$$\delta f_T^{(\text{off})}(y) = \frac{\overline{\Lambda}^8}{6M_T^2 \overline{M}_T^2} \int dk_\perp^2 \frac{y [k_\perp^2 + (yM - \overline{M}_T)^2]^2 [k_\perp^2 + (yM + \Delta_T)^2]}{\bar{y}^4 D_{\phi T} D_{\Lambda T}^5}, \quad (3.112)$$

(3.107)式的最后一项很显然正比于 δ 函数，其定义为

$$\delta f_{T\phi}^{(\delta)}(y) = \frac{\overline{\Lambda}^8}{M_T^2 \overline{M}_T^2} \int dk_\perp^2 \frac{1}{\Omega_\Lambda^3} \delta(y). \quad (3.113)$$

类似于八重态，在定域极限 $\Lambda \rightarrow \infty$ 下， $\delta f_{T\phi}^{(\text{off})}$ 和 $\delta f_{T\phi}^{(\delta)}$ 趋于零。化简(3.28)式后得到十重态Kroll-Ruderman 图[图3.1(j)]分裂函数

$$\begin{aligned} f_{T\phi}^{(\text{KR})}(y) = & \frac{-iC_{T\phi}^2 \overline{\Lambda}^8}{3M_T^2 f^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{(\overline{M}_T^2 - m_\phi^2)^2 [(1+y)M_T^2 - (m^2 - m_\phi^2)\bar{y}]}{D_\phi D_T D_\Lambda^4} \right. \\ & - \frac{(k^2 + m_\phi^2)\bar{y} + 2M\overline{M}_T\bar{y} - 2yM_T^2}{D_T D_\Lambda^4} \\ & + \frac{1}{D_\phi D_\Lambda^4} [-2(1+y)(p \cdot k) + (M^2 + 2M\overline{M}_T)y \\ & + 2M\overline{M}_T\bar{y} - k^2 y + (M_T^2 - 2M_T M)y + k^2 + \overline{M}_T^2] \left. \right\} \\ & \delta\left(y - \frac{k^+}{p^+}\right). \end{aligned} \quad (3.114)$$

积分后得到十重态Kroll-Ruderman 图对应的分裂函数

$$\begin{aligned} f_T^{(\text{KR})}(y) = & \frac{C_{T\phi}^2 \overline{M}_T^2}{(4\pi f)^2} \left[2 \left(f_T^{(\text{off})}(y) + f_T^{(\text{off end})}(y) \right) - \frac{1}{9} \left(f_T^{(\delta)}(y) - \delta f_T^{(\delta)}(y) \right) \right. \\ & \left. + \frac{\overline{M}^2 (\overline{M}_T^2 + m_\phi^2)}{3M_T^2 \overline{M}_T^2} f_\phi^{(\delta)}(y) \right], \end{aligned} \quad (3.115)$$

最终来计算十重态规范链接图[图3.1(k)] 对应的分裂函数。对(3.29)式进行化简后得到

$$\begin{aligned}
\delta f_{T\phi}^{(\text{KR})}(y) = & \frac{-2iC_{T\phi}^2 \bar{\Lambda}^8}{3M_T^2 f^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{y (\bar{M}_T^2 - m_\phi^2)^2 (\Delta_T^2 - m_\phi^2)}{D_\phi D_T D_\Lambda^5} \right. \\
& + \frac{[(k^2 + m_\phi^2) (2\bar{M}_T^2 + \Delta_T^2 - m_\phi^2) - (\bar{M}_T^2 - 2\Delta_T^2) \bar{M}_T^2 - k^4] y}{D_T D_\Lambda^5} \\
& + \frac{y}{D_\phi D_\Lambda^5} \left[4(p \cdot k)^2 + (\bar{M}_T \Delta_T + \frac{1}{2} \Delta_T^2 - \frac{3}{2} \bar{M}_T^2 - k^2) m_\phi^2 + k^4 \right. \\
& + (2m_\phi^2 - 4k^2) p \cdot k + 2m_\phi^4 + 2(-k^2 + \bar{M}_T \Delta_T - \bar{M}_T^2) m_\phi^2 \\
& + 4m_\phi^2 p \cdot k + m_\phi^4 - 2(p \cdot k) \bar{M}_T^2 + \frac{1}{2} (-4\bar{M}_T \Delta_T + \bar{M}_T^2 \\
& - 3\Delta_T^2) m_\phi^2 + \bar{M}_T^3 \Delta_T + k^2 \bar{M}_T^2 \left. \right] - \frac{4y}{D_\Lambda^5} \left[-\frac{3}{2} (p \cdot k) + \frac{1}{4} (\frac{3}{2} \bar{M}_T^2 \right. \\
& + \bar{M}_T \Delta_T - \frac{1}{2} \Delta_T^2 + k^2) + \frac{1}{2} (\bar{M}_T^2 - \bar{M}_T \Delta_T - m_\phi^2) - \frac{1}{8} \bar{M}_T^2 \\
& \left. \left. + \frac{3}{8} \Delta_T^2 + \frac{1}{2} \bar{M}_T \Delta_T - \frac{1}{4} k^2 - \frac{1}{4} m_\phi^2 \right] \right\} \delta \left(y - \frac{k^+}{p^+} \right). \tag{3.116}
\end{aligned}$$

对 k^- 积分后得到

$$\delta f_T^{(\text{KR})}(y) = \frac{C_{T\phi}^2 \bar{M}_T^2}{(4\pi f)^2} \left[-4 \delta f_T^{(\text{off})}(y) + \frac{1}{18} \delta f_T^{(\delta)}(y) - \frac{\bar{M}^2 (\bar{M}_T^2 - m_\phi^2)}{6M_T^2 \bar{M}_T^2} \delta f_\phi^{(\delta)}(y) \right]. \tag{3.117}$$

类似于八重态，十重态分裂函数满足另一个规范不变性条件，即

$$f_{\phi T}^{(\text{rbw})}(y) = f_{T\phi}^{(\text{rbw})}(y) + f_{T\phi}^{(\text{KR})}(y) + \delta f_{T\phi}^{(\text{KR})}(y), \tag{3.118}$$

这一节我们主要计算了质子分裂成赧标量介子(ϕ) 和SU(3) 八重态重子(B) 或十重态重子(T)的分裂函数及其定域极限。虽然正规化方法改变介子圈图的紫外端的行为，但是红外端的行为跟正规化方案无关。圈图红外结构跟一个叫做零头阶非解析项(LNA)的量有关。作为验证，下一节我们推导各分裂函数的领头阶非解析项(LNA)。

3.3.1 领头阶非解析项

如果夸克质量（或者赝标量介子质量）不为零，手征对称性明显破缺，这种效应以非解析的形式被物理观测量体现出来，换句话说，对圈图贡献进行手征展开，结果一般包含夸克（介子）质量的非解析函数 [21–25, 100]。这里所说的非解析函数指正比于夸克质量的奇次幂或对数的函数。非解析项在重重子和协变手征微扰理论中一样并且不依赖于正规化方案，比如介子圈图对核子电磁形状因子在 $Q^2 = 0$ 处的修正完全跟 LNA 有关。显然，作为一个正规化方法，非定域或 Pauli-Villars 正规化不会改变圈图修正的非解析项。从上一节的结果可以看出，费曼图(3.1)对应的分裂函数由八个定域基础函数， $\{f_B^{(\text{on})}, f_B^{(\text{off})}, f_T^{(\text{on})}, f_T^{(\text{on end})}, f_T^{(\text{off})}, f_T^{(\text{off end})}, f_T^{(\delta)}, f_\phi^{(\delta)}\}$ 和四个非定域基础函数 $\{\delta f_B^{(\text{off})}, \delta f_T^{(\text{off})}, \delta f_T^{(\delta)}, \delta f_\phi^{(\delta)}\}$ 组成。其中最后四个非定域函数跟非定域性有关，因此在定域极限下趋于零。给出偶极子正规化因子[(3.63)式]分裂函数的数值结果之前，我们首先讨论八个组成函数的独立于正规化方案的一些特点。因为这些特点跟手征圈图的红外端的行为有关，因此它们不依赖于处理紫外发散的正规化方案。分裂函数的最低阶 Mellin 矩定义为，

$$\langle f_i \rangle = \int_0^1 dy f_i(y), \quad (3.119)$$

进行泰勒展开后得到赝标量介子质量 m_ϕ 的级数。那些对于 m_ϕ^2 来说非解析的系数(要么介子质量的 m_ϕ 奇幂次方要么介子质量 m_ϕ 的对数) 完全由重子的低能运动特点确定而且不依赖于紫外发散的正规化方法，尤其是，在壳分裂函数和离壳分裂函数 $f_B^{(\text{on})}, f_B^{(\text{off})}, f_T^{(\text{on})}, f_T^{(\text{off})}, \delta$ - 函数项 $f_\phi^{(\delta)}$ 和 $f_T^{(\delta)}$ 的 Mellin 矩都获得非解析项，纯非定域规范连接项 $\delta f_B^{(\text{off})}, \delta f_T^{(\text{off})}, \delta f_T^{(\delta)}, \delta f_\phi^{(\delta)}$ 和十重态边界项 $f_T^{(\text{on end})}$ 和 $f_T^{(\text{off end})}$ 对于介子质量完全是解析的。对于八重重子，在壳分裂函数 $\langle f_B^{(\text{on})} \rangle$ 的非解析项由下式给出

$$\overline{M}^2 \langle f_B^{(\text{on})} \rangle \Big|_{\text{NA}} = \begin{cases} (4m_\phi^2 - 6\Delta^2) \log m_\phi^2 + 6R \Delta \log \frac{\Delta - R}{\Delta + R}, & \Delta > m_\phi, \\ (4m_\phi^2 - 6\Delta^2) \log m_\phi^2 + 6\overline{R} \Delta \left(\pi - 2 \arctan \frac{\Delta}{\overline{R}} \right), & \Delta < m_\phi, \end{cases} \quad (3.120)$$

其中 $R = \sqrt{\Delta^2 - m_\phi^2}$, $\overline{R} = \sqrt{m_\phi^2 - \Delta^2}$ 。这跟以前定域结果一样 [29]。尤其是，当 $\Delta < m_\phi$ 时，十重态重子-核子质量之差 Δ 在手征极限下趋于零，所

以 $m_\phi \rightarrow 0$ 。因此非领头阶解析项等于 $4m_\phi^2 \log m_\phi^2$ 而且跟参考文献 [22–25, 29, 101] 中的结果一样。当 $\Delta > m_\phi$ 时, 对 R 进行展开得到 $R = \Delta - m_\phi^2/2\Delta + \mathcal{O}(m_\phi^4)$, 这样 $\Delta^2 \log m_\phi^2$ 项抵消, 就剩下 $\sim m_\phi^2 \log m_\phi^2$, 为此总的八重态在壳领头阶非解析项(LNA)等于

$$\begin{aligned} \overline{M}^2 \langle f_B^{(\text{on})} \rangle \Big|_{\text{LNA}} &= (4m_\phi^2 - 6\Delta^2) \log m_\phi^2 + 6\Delta^2 \log m_\phi^2 - 3m_\phi^2 \log m_\phi^2 \\ &= m_\phi^2 \log m_\phi^2, \quad \Delta > m_\phi. \end{aligned} \quad (3.121)$$

很明显, 这时候的LNA 小于4 倍的当 $\Delta < m_\phi$ 的LNA。八重态离壳分裂函数 $\langle f_B^{(\text{off})} \rangle$ 给出的LNA,

$$\overline{M}^2 \langle f_B^{(\text{off})} \rangle \Big|_{\text{NA}} = \begin{cases} -2m_\phi^2 \log m_\phi^2 - \frac{2R^3}{M_B} \log \frac{\Delta - R}{\Delta + R}, & \Delta > m_\phi, \\ -2m_\phi^2 \log m_\phi^2 + \frac{2\bar{R}^3}{M_B} \left(\pi - 2 \arctan \frac{\Delta}{\bar{R}} \right), & \Delta < m_\phi. \end{cases} \quad (3.122)$$

八重态 δ -函数项 $\langle f_\phi^{(\delta)} \rangle$ 的LNA等于

$$\overline{M}^2 \langle f_\phi^{(\delta)} \rangle \Big|_{\text{LNA}} = -m_\phi^2 \log m_\phi^2. \quad (3.123)$$

十重态在壳分裂函数 $\langle f_T^{(\text{on})} \rangle$ 的非解析项,

$$\overline{M}_T^2 \langle f_T^{(\text{on})} \rangle \Big|_{\text{NA}} = \begin{cases} \frac{(8m_\phi^2 - 12\Delta_T^2)}{3} \log m_\phi^2 + 4R_T \Delta_T \log \frac{\Delta_T - R_T}{\Delta_T + R_T}, & \Delta_T > m_\phi, \\ \frac{(8m_\phi^2 - 12\Delta_T^2)}{3} \log m_\phi^2 + 4\bar{R}_T \Delta_T \left(\pi - 2 \arctan \frac{\Delta_T}{\bar{R}_T} \right), & \Delta_T < m_\phi, \end{cases} \quad (3.124)$$

其中 $R_T = \sqrt{\Delta_T^2 - m_\phi^2}$, $\bar{R}_T = \sqrt{m_\phi^2 - \Delta_T^2}$ 。当 $\Delta_T < m_\phi$ 时, 在极限 $\Delta_T \rightarrow 0$ 下得到 $\frac{8}{3} m_\phi^2 \log m_\phi^2$ 。当 $\Delta_T > m_\phi$ 时。对 R_T 进行展开后得到 $R_T = \Delta_T - m_\phi^2/2\Delta_T +$

$\mathcal{O}(m_\phi^4)$ 。展开式中正比于 $\Delta_T^2 \log m_\phi^2$ 的项抵消，最终LNA 只保留 $\sim m_\phi^2 \log m_\phi^2$

$$\begin{aligned} \overline{M}_T^2 \langle f_T^{(\text{on})} \rangle \Big|_{\text{LNA}} &= \frac{(8m_\phi^2 - 12\Delta_T^2)}{3} \log m_\phi^2 + 4\Delta_T^2 \log m_\phi^2 - 2m_\phi^2 \log m_\phi^2 \\ &= \frac{2}{3} m_\phi^2 \log m_\phi^2, \quad \Delta_T > m_\phi. \end{aligned} \quad (3.125)$$

因此在两种情况下LNA 项都正比于 $m_\phi^2 \log m_\phi^2$ ，但是 $\Delta_T > m_\phi$ 的系数小于4倍的当 $\Delta_T < m_\phi$ 时的LNA。十重态离壳分裂函数 $\langle f_T^{(\text{off})} \rangle$ 的LNA 如下

$$\overline{M}_T^2 \langle f_T^{(\text{off})} \rangle \Big|_{\text{NA}} = \begin{cases} \frac{2}{3} m_\phi^2 \log m_\phi^2 + \frac{4R_T^3}{3M_T} \log \frac{\Delta_T - R_T}{\Delta_T + R_T}, & \Delta_T > m_\phi, \\ \frac{2}{3} m_\phi^2 \log m_\phi^2 - \frac{4\overline{R}_T^3}{3M_T} \left(\pi - 2 \arctan \frac{\Delta_T}{\overline{R}_T} \right), & \Delta_T < m_\phi. \end{cases} \quad (3.126)$$

十重态 δ -函数项对非领头解析项没贡献，但是对高阶非解析项有贡献，因为对它进行展开后得到正比于高阶 m_ϕ 的项。

$$\overline{M}_T^2 \langle f_T^{(\delta)} \rangle \Big|_{\text{LNA}} = 0. \quad (3.127)$$

如果 π 介子–核子– Δ 重子的SU(2) 耦合常数 $g_{\pi N \Delta}$ 折合到(2.17)式中的SU(3) 赝标量介子– 八重态重子–十重态重子常数 \mathcal{C} ，得到 $g_{\pi N \Delta}^2 = \mathcal{C}^2 / (2f^2)$ 并且领头阶非解析项LNA跟 [29] 中的 $\pi\Delta$ 中间态结果一样。值得强调的是，圈图的领头阶非解析项是固定的，换句话说它们只依赖于由手征对称性匹配的介子圈图的红外特点。除此之外，领头阶非解析项独立于模型依赖的短距离贡献。因此通过计算一个模型的LNA 来验证模型结果是否跟QCD 特性一致。

3.3.2 分裂函数的数值分析

这一节我们讨论当截断参数 Λ 取一个有限值的时候赝标量介子–重子分裂函数在 $y > 0$ 内的分布特点。作为一个例子，我们选取核子，最轻的 Λ 超子， Δ 重子和 Σ^* 重子分裂函数，计算中非定域截断参数我们选取了典型的强子能标 $\Lambda = 1 \text{ GeV}$ 。

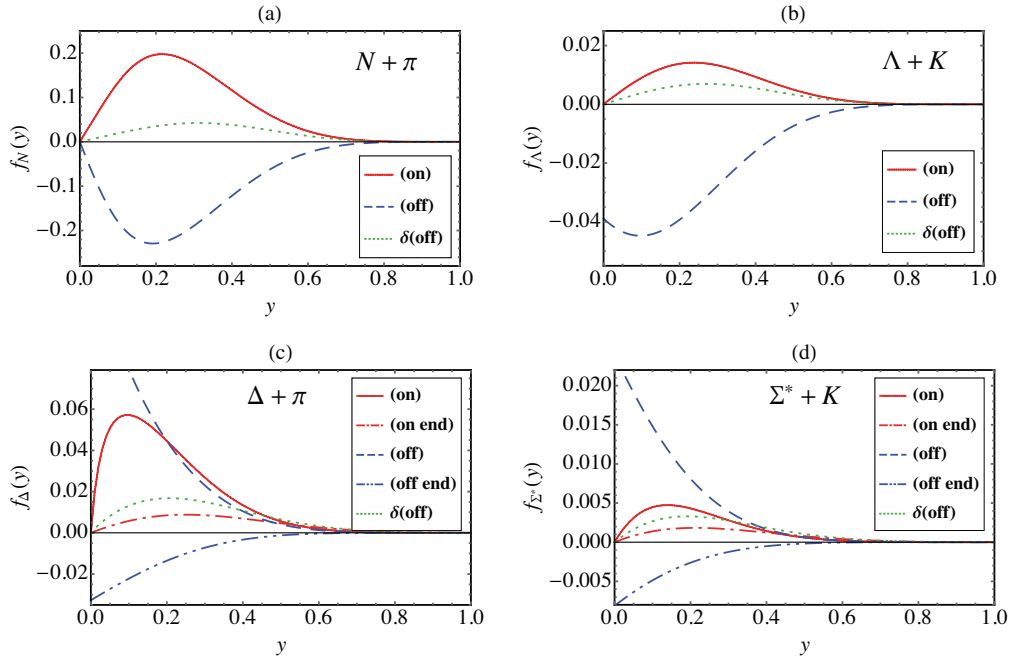


图 3.2: 从质子到(a) $N + \pi$, (b) $\Lambda + K$, (c) $\Delta + \pi$, 和(d) $\Sigma^* + K$ 的在壳分裂函数 $f^{(\text{on})}$ (红实线), 离壳分裂函数 $f^{(\text{off})}$ (蓝虚线) 和非定域离壳分裂函数 $\delta f^{(\text{off})}$ (黑点线) 随 y 分布。对于十重态重子 Δ 和 Σ^* 的额外贡献的在壳边界贡献 $f^{(\text{on end})}$ (红点-虚线) 和离壳边界贡献 $f^{(\text{off end})}$ (蓝点-点-虚线) 被考虑。所有的数值结果对应于(3.63)式中的偶极子正规化因子和它的截断参数 $\Lambda = 1 \text{ GeV}$ 。

图3.2中, 我们展示了八重态重子和十重态重子在壳分裂函数 $f_{B,T}^{(\text{on})}$, 离壳分裂函数 $f_{B,T}^{(\text{off})}$ 和非定域离壳 $\delta f_{B,T}^{(\text{off})}$ 分裂函数以及十重态重子 Δ 和 Σ^* 的在壳和离壳边界分裂函数 $f_T^{(\text{on end})}$ 和 $f_T^{(\text{off end})}$ 随 y 的分布。对于所有的重子中间态 B, T , 在壳分裂函数 $f_{B,T}^{(\text{on})}$ 随 y 的分布在 $0 < y < 1$ 内正的, 并且根据它们的质量分裂函数在 $y = 0.1 - 0.2$ 内取最大值。不同重子的在壳分裂函数的主要区别在于超子分裂函数普遍小于非奇异重子分裂函数。对于离壳分裂函数 $f_{B,T}^{(\text{off})}$, 八重态离壳分裂函数是负的并且它的大小几乎跟在壳分裂函数一样大。除此之外由于重子-核子之间的质量差 Δ 不为零, 超子和十重态离壳分裂函数在 $y = 0$ 处不为零。十重态离壳分裂函数随 y 的增加而增加而且随 y 的分布主要集中在 y 比较小的区域内并且在 $y = 0$ 处等于零。非定域离壳分裂函数 $f_{B,T}^{(\text{off})}$ 的正负号与在壳分裂函数的相反并且它的大小明显小于在壳分裂函数。定义式(3.95) 和(3.110)

中的额外十重态在壳和离壳边界分裂函数 $f_T^{(\text{on end})}$ 和 $f^{(\text{off end})}$ 在整个分布区域内相反的。此外，在壳边界分裂函数在 $y = 0$ 处等于零，离壳边界分裂函数则在 $y = 0$ 处不为零并且相反地随 y 的减小而增加。另一方面正如前一章所述，边界分裂函数在定域极限下趋于 $\delta(1 - y)$ ，但是从它们的数值分布中看不出任何 δ 函数的迹象。

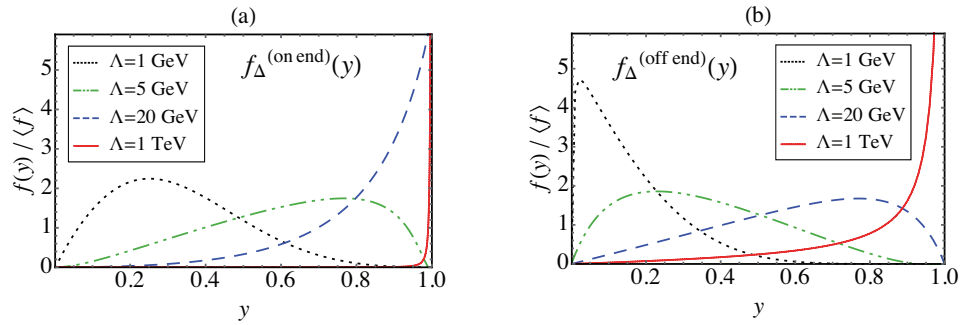


图 3.3: $\Delta + \pi$ 中间态分裂函数的(a) 在壳边界贡献和(b) 离壳边界贡献的归一化函数 $f_i(y)/\langle f_i \rangle$ 。图对应于截断参数 Λ (1 GeV 至 1 TeV) 和常数 $\Omega_0 = 100 \text{ GeV}^2$ 。

有趣的是，当 $\Lambda = 1 \text{ GeV}$ 的时候在壳和离壳边界分裂函数随 y 的分布在非常小的 y 处取最大值，当 $\Lambda \rightarrow \infty$ 时，它们在 $y = 1$ 处的分布趋势渐渐趋于 δ -函数。图 3.3 中我们展示了边界函数分布随截断参数 Λ 的变化趋势，其中演示了当截断参数从 1 GeV 变到 1 TeV 的时候在壳离壳分布函数随 y 的分布。当然，相关唯象学研究中截断参数 Λ 基本上都在强子能标 $\sim 1 \text{ GeV}$ 左右。图 3.3 中之所以取很大的 Λ 是因为我们要观察分裂函数的定域极限趋势。应当注意的是，当推导边界分裂函数的定域极限时，如 (3.96) 式所示，我们需要考虑 D_0 项的贡献，虽然对于有限截断参数 Λ ， D_0 的贡献可以忽略不计，但对非常大的 Λ ，它的贡献是不能忽略的[请见 (3.98) 式]。为了观察 D_0 项的贡献，我们选取了非常大的 $\Omega_0 = 100 \text{ GeV}^2$ 。如 3.3 图所示，当 Λ 远小于 Ω_0 的时候， D_0 项的贡献可以忽略不计，因此当 $\Lambda = 1 \text{ GeV}$ 的时候在壳和离壳分裂函数跟图 3.2(c) 中的结果一致。(边界函数的大小在 $y < 1$ 内随 Λ 的减小而减小的，为了更好地观察它们的渐进趋势我们展示了归一化分裂函数在 y 内的部分。因此图 3.3(b) 中归一化的分布是正的，图 3.2(c) 中非归一化分布反而是负的)。总而言之，当截断参数取有限值的时候，边界分裂函数中的 D_0 项可以忽略不计。另一方面，如图 3.3 所示，当 $\Lambda \rightarrow \infty$ 的时候，边界分裂函数的峰往 y 大的方向移动，其大小随 Λ 的值

增大而无限增大而且形状与 $\delta(1-y)$ 的形状相似。

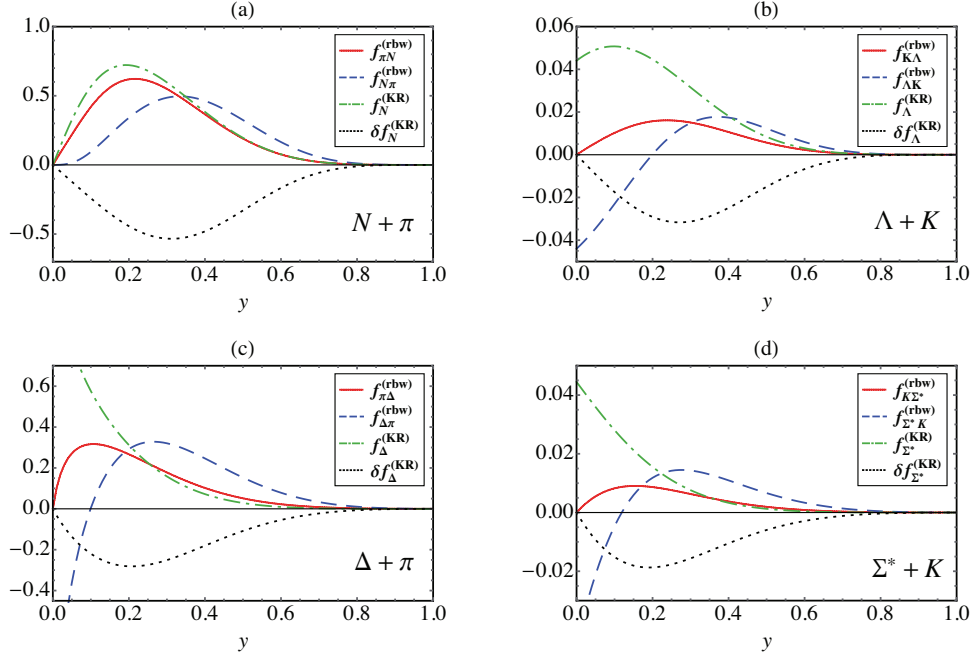


图 3.4: 不同的分裂函数随介子动量比例 y 的分布, 介子彩虹图[图3.1(a) 和(h)] (红实线), 重子彩虹图[图. 3.1(b) 和(i)] (蓝虚线), Kroll-Ruderman 图[图. 3.1(c) 和(j)] (绿点-虚线), 非定域Kroll-Ruderman图[图 3.1(d) 和(k)] (黑点线)。图中蝌蚪和泡沫图[图 3.1(e)–(g)]在 $y = 0$ 处为零因此没有被展示。

12个基础函数的线性组合构成费曼图3.1对应的所有分裂函数, 在图 3.4 中展示了它们的贡献。同样地, 奇异和非奇异重子分裂函数的主要区别在于它们的大小, 具体的说奇异重子(超子)的贡献被压低。如图3.2所示, 八重态和十重态介子彩虹图对应的分裂函数 $f_{\phi B}^{(rbw)}$ 和 $f_{\phi T}^{(rbw)}$ 的分布具有相似的形状。重子彩虹图的分裂函数 $f_{B\phi}^{(rbw)}$ 和 $f_{T\phi}^{(rbw)}$ 的大小大致相同并且在 y 较大的区域内正的, 当 $y \rightarrow 0$ 的时候, 分裂函数的分布改变符号。后者在小的 y 处与Kroll-Ruderman分布 $f_{B,T}^{(KR)}$ 的贡献相互抵消, 尤其是十重态贡献, 这样介子圈图之和满足规范不变性条件(3.85) 和(3.118)式。在非定域Kroll-Redurman 图的分裂函数中, 八重态和十重态非定域离壳分裂函数 $\delta f_{B,T}^{(KR)}$ 等于-4 倍的离壳分裂函数[图(3.84) 和(3.117)], 因此其分布在 y 内负的。这样定域 $f_{B,T}^{(KR)}$ 和非定域分裂函数 $f_{B,T}^{(KR)}$ 一定程度上相互抵消。

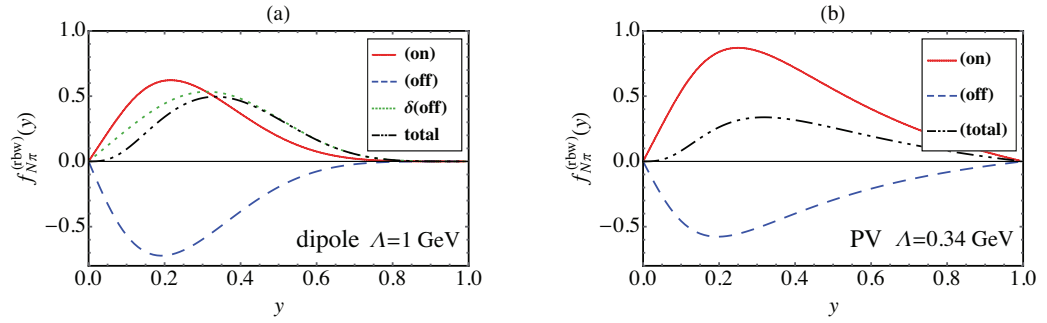


图 3.5: 重子彩虹图[图3.1(b)]在(a) 非定域正规化 (采用偶极子正规化因子), 和(b) P-V正规化框架中的分布。P-V正规化的截断参数 Λ 由归一化的分裂函数 $\langle y \rangle = \int_0^1 dy y f(y)$ 给出, 偶极子截断参数取 $\Lambda = 1 \text{ GeV}$ 。

在非定域正规框架中, 不同基础函数的贡献相互抵消, 这图景被画在图 3.5 中。从图中可以看出, 非定域正化的八重态重子分裂函数 $f_{N\pi}^{(rbw)}$ 的各分量分布的大小和形状。当协变偶极子正规化因子截断参数 $\Lambda = 1 \text{ GeV}$ 的时候, 从图 3.5(a)我们能发现, 在壳和离壳分裂函数基本上抵消并且总结果几乎跟规范连接分裂函数 $\delta f^{(off)}$ 的分布一样。这对于初看者来说是一个令人费解的问题。如果我们打算解释这问题的话, 介子彩虹图分裂函数在定域极限下可能非常小的, 其中 $\delta f^{(off)}$ 项可能消失。实际上在壳分裂函数很大程度上不同于离壳分裂函数, 因此分裂函数之间的抵消依赖于截断参数。这过程被解释在图 3.5(b)中, 其中 $f_{N\pi}^{(rbw)}$ 是Pauli-Villars 正规化的分裂函数, 它满足理论应有的对称性条件。在这种情况下不存在规范连接图而且总的结果就等于在壳, 离壳和 δ 函数项之和。Pauli-Villars正规化的在壳分裂函数 $f_N^{(on)}$ 等于定域在壳分裂函数与正规化因子 $F_{PV}^{(on)}(k)$ 之乘, 其中Pauli-Villars在壳正规化因子 $F_{PV}^{(on)}(k)$ 已被定义在(3.43)式中。为了做一个直接地比较, 我们取Pauli-Villars 正规化的八重态分裂函数 $f_{N\pi}^{(rbw)}$ 的2阶Melli矩 $\langle y \rangle = \int_0^1 dy y f(y)$, 它使得分裂函数的2阶Mellin矩等于非定域结果, 从这约束我们得到的Pauli-Villars正规化截断参数为 $\Lambda_{PV} = 0.34 \text{ GeV}$, 这样Pauli-Villars与非定域分裂函数具有相同的特征。虽然非定域和Pauli-Villars 正规化的在壳和离壳分裂函数的贡献之间的误差比较小, 但是总结果还保留比较大的差别。实际上截断参数也可以由实验数据定出, 下一章我们更详细地讨论由实验数据定出的非定域和Pauli-Villars 截断参数对应的在壳分裂函数之间的区别。

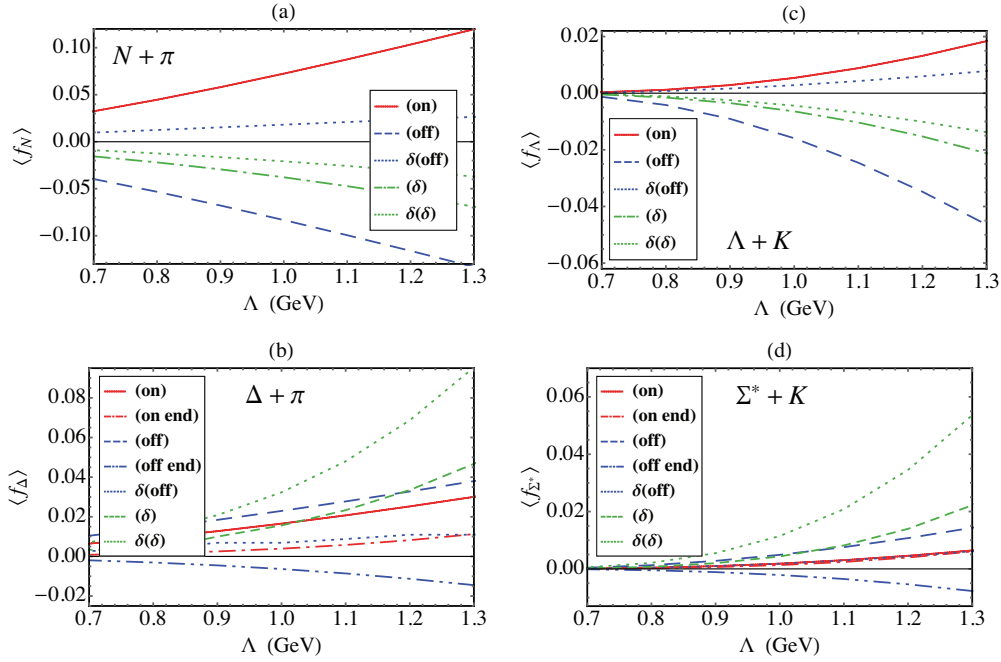


图 3.6: 质子到(a) $N + \pi$, (b) $\Lambda + K$, (c) $\Delta + \pi$ 和(d) $\Sigma^* + K$ 的分裂函数的1阶Mellin矩 $\langle f \rangle$ 随 Λ 的变化。图中展示了在壳(红实线), 离壳(蓝实线), 非定域离壳(蓝点线), 定域 δ -函数(绿点-虚线)和非定域 δ -函数(绿点线)贡献。十重态分裂函数的贡献还包括在壳边界(红点-点-虚线)和离壳边界(蓝点-点-虚线)贡献。所有的结果对应于(3.63) 式中的偶极子因子。

八重态分裂函数和十重态分裂函数的11个基础函数在 $y > 0$ 内的分布分别被展示在图 3.2 和3.4 中, 图 3.6中我们画了它们的积分值随截断参数 Λ 的演化, 因为以上图中无法展示八重态分裂函数和十重态分裂函数的 δ 函数项随 y 的分布。果然当更多的短距离贡献被包括的时候, 每个分裂函数的积分值大小随 Λ 的增大而减少。如图 3.2所示, 对于相同的截断 $\Lambda = 1\text{GeV}$, π 介子-核子分裂函数的积分值小于超子和十重态贡献。当截断参数变大或 $\Lambda \gtrsim 1.2\text{ GeV}$ 时, 图景跟以前不一样, 这时候 $\pi\Delta$ 的贡献跟 πN 一样大。当然, 单圈图计算中出现很大的截断参数本身有问题的因为那个时候高阶项的贡献变得更重要。有趣的是, 对于八重态分裂函数, 只有在壳和非定域离壳贡献是正的, 离壳和非定域 δ 贡献反而是负的, 除此之外与其他贡献相比离壳贡献对截断参数 Λ 的依赖性比较强。对于十重态分裂函数, 如图 3.2 所示, 除了离壳边界贡献之外, 其他

的图的贡献是正的。此外，十重态 δ 函数贡献随 Λ 的变化速度快于其他项的贡献。

3.3.3 本章总结

以上我们讨论了在Pauli-Vallars 和非定域正规化中的分裂函数以及它们的定域极限，领头阶非解析项和数值分布。虽然Pauli-Vallars正规化的八重态分裂函数对 k_\perp^2 积分后是有限的，但它们仍然包含两个阶段参数 μ_1 和 μ_2 。非定域正规化中，由于洛伦兹不变性，在动量空间中的正规化因子 $\tilde{F}(k)$ 必须是介子四动量平方 k^2 的函数并且有效理论中可以选取任意参数化形式的函数。为了方便起见，计算中选取了包含一个截断参数 Λ 的偶极子正规化因子。此外规范连接算符的出现引入额外的规范连接图例如，. 3.1(f)，3.1(i) 和 3.1(k)。我们的计算还包括八重态重子和十重态重子的贡献。我们还给出了两种正规化方案中的领头阶非解析项(LNA)，显然它们的LNA 是一样的。此外12个基础函数中，除了八重态(十重态)在壳，离壳和 δ -函数之外，其他分裂函数对LNA 没有贡献。最后我们展示了各分裂函数的数值分布，尤其是12个基础函数的贡献。在定域极限下，边界贡献随 Λ 的变化显示出更明显的图景。利用这些分裂函数，下一节我们开始讨论核子奇异夸克分布和它们的对称性破缺。

第四章 核子奇异夸克对称性破缺

到目前为止，我们给出了核子分裂成重子-赝标量介子的分裂函数及其领头阶非解析项。根据介子云模型，核子夸克分布通过分裂函数关联到中间态赝标量介子(π, K, η) 介子或中间态重子($\Lambda, \Sigma, \Delta, \Sigma^*$) 的价夸克分布。为此进行数值计算之前，首先讨论各中间态重子和介子的价夸克分布函数。目前实验中无法确定所有重子和介子的夸克分布，因此根据SU(3) 对称性，用质子和 π 夸克分布来表示出其他重子和赝标量介子的夸克分布。

4.1 中间态强子夸克分布

利用非极化夸克分布的对称性 $q(-x) = -\bar{q}(x)$ ，味道为 q 的夸克分布的 n 阶Mellin 矩($n \geq 1, q = u, d, s, \dots$) 定义为

$$\langle x^{n-1} \rangle_q = \int_0^1 dx x^{n-1} \left(q(x) + (-1)^n \bar{q}(x) \right). \quad (4.1)$$

对算符进行算符乘积展开后，夸克算符 $\mathcal{O}_q^{\mu_1 \dots \mu_n}$ 的矩阵元可以参数化为

$$\langle N(p) | \mathcal{O}_q^{\mu_1 \dots \mu_n} | N(p) \rangle = 2 \langle x^{n-1} \rangle_q p^{\mu_1} \dots p^{\mu_n}, \quad (4.2)$$

其中算符定义为

$$\mathcal{O}_q^{\mu_1 \dots \mu_n} = i^{n-1} \bar{q} \gamma^{\{\mu_1} \overleftrightarrow{D}^{\mu_2} \dots \overleftrightarrow{D}^{\mu_n\}} q, \quad (4.3)$$

其中算符 $\overleftrightarrow{D} = \frac{1}{2}(\vec{D} - \overleftarrow{D})$ ，大括号 $\{\dots\}$ 表示洛伦兹指标的对称化。有效理论中夸克算符 \mathcal{O}_q 可以匹配到具有相同量子数的强子算符 \mathcal{O}_j [24] 中，

$$\mathcal{O}_q^{\mu_1 \dots \mu_n} = \sum_j c_{q/j}^{(n)} \mathcal{O}_j^{\mu_1 \dots \mu_n}, \quad (4.4)$$

其中系数 $c_{q/j}^{(n)}$ 代表夸克分布 $q_j(x)$ 的 n 阶Mellin矩， j 代表强子态，

$$c_{q/j}^{(n)} = \int_{-1}^1 dx x^{n-1} q_j(x) \equiv \langle x^{n-1} \rangle_{q/j}, \quad (4.5)$$

此外，强子算符的矩阵元 $\mathcal{O}_j^{\mu_1 \cdots \mu_n}$ 可以参数化为

$$\langle N(p) | \mathcal{O}_j^{\mu_1 \cdots \mu_n} | N(p) \rangle = 2 f_j^{(n)} p^{\{\mu_1 \cdots \mu_n\}}, \quad (4.6)$$

其中 f_j 代表分裂函数 $f_j(y)$ 的 n 阶Mellin矩

$$f_j^{(n)} = \int_{-1}^1 dy y^{n-1} f_j(y), \quad (4.7)$$

其中 y 代表介子动量比例。(4.4)式给出下面的卷积关系 [24]

$$q(x) = \sum_j (f_j \otimes q_j^v)(x) \equiv \sum_j \int_0^1 dy \int_0^1 dz \delta(x - yz) f_j(y) q_j^v(z), \quad (4.8)$$

式中 $q_j^v \equiv q_j - \bar{q}_j$ 是在强子 j 中的价夸克分布， $f_j(y)$ 是八重态和十重态分裂函数并已被给出在第三章中。下一步更明显的写出核子夸克分布与分裂函数以及中间态强子夸克分布之间的卷积关系。比如，用八重态介子彩虹图[图3.1(a)]，介子泡沫图[图3.1(f)]以及十重态介子彩虹图[3.1(h)]分裂函数与对应的 π 介子价夸克 $\bar{q}_\pi(x)$ 的卷积积分来表示出质子反奇异夸克分布，

$$\bar{q}(x) = \sum_{B,T,\phi} \left[f_{\phi B}^{(\text{rbw})}(y) + f_{\phi T}^{(\text{rbw})}(y) + f_{\phi}^{(\text{bub})}(y) \right] \otimes \bar{q}_\phi(x), \quad (4.9)$$

其中 B 和 T 分别代表八重态重子 N ， Σ ， Λ 和十重态中间态重子 Σ^* ， Δ ， ϕ 代表赝标量介子 π 和 K ， $f_{\phi B}^{(\text{rbw})}(y)$ 和 $f_{\phi T}^{(\text{rbw})}(y)$ 分别是八重态和十重态介子彩虹图[图3.1(a)，3.1(h)]的分裂函数， $f_{\phi}^{(\text{bub})}(y)$ 是介子泡沫图[图3.1(f)]的分裂函数， $\bar{q}_\phi(x)$ 是介子价夸克分布。比如，根据(4.9)式，质子反上下夸克分布可以表示为

$$\bar{d}(x) = [f_{\pi^+ n}(y) + f_{bub, \pi^+}(y) + f_{\pi^+ \Delta^0}(y)] \otimes \bar{q}_\pi(x), \quad (4.10)$$

$$\bar{u}(x) = f_{\pi^- \Delta^{++}}(y) \otimes \bar{q}_\pi(x), \quad (4.11)$$

对于质子反奇异夸克分布可以得到类似的关系。同样地，用图3.1中的介子彩虹图，重子彩虹图，Kroll-Ruderman图，Kroll-Ruderman规范连接图，蝌蚪图，介子泡沫图以及蝌蚪规范连接图分裂函数与中间态重子夸克分布的卷

积积分来表示出质子夸克分布

$$\begin{aligned}
q(x) = & Z q^{(0)}(x) + \sum_{B,T,\phi} \left\{ [(f_{\phi B}^{(\text{rbw})} + f_{\phi T}^{(\text{rbw})} + f_{\phi}^{(\text{bub})}) \otimes q_{\phi}](x) \right. \\
& + [f_{B\phi}^{(\text{rbw})} \otimes q_B](x) + [f_B^{(\text{KR})} \otimes q_B^{(\text{KR})}](x) + [\delta f_B^{(\text{KR})} \otimes q_B^{(\delta)}](x) \\
& + [f_{T\phi}^{(\text{rbw})} \otimes q_T](x) + [f_T^{(\text{KR})} \otimes q_T^{(\text{KR})}](x) + [\delta f_T^{(\text{KR})} \otimes q_T^{(\delta)}](x) \\
& \left. + [f_{\phi}^{(\text{tad})} \otimes q_{\phi}^{(\text{tad})}](x) + [\delta f_{\phi}^{(\text{tad})} \otimes q_{\phi}^{(\delta)}](x) \right\}, \quad (4.12)
\end{aligned}$$

其中11个分裂函数已在第三章中被定义， $q^{(0)}$ 是裸核子夸克分布， Z 波函数重整化常数， q_{ϕ} 是介子价夸克分布， q_B 和 q_T 分别是八重态和十重态夸克分布， $q_T^{(\text{KR})}$ 和 $q_B^{(\text{KR})}$ 分别是八重态和十重态Kroll-Ruderman夸克分布， $q_{\phi}^{(\text{tad})}$ 是蝌蚪图夸克分布， $q_B^{(\delta)}$ 和 $q_T^{(\delta)}$ 是八重态和十重态Kroll-Ruderman规范连接图的夸克分布， $q_{\phi}^{(\delta)}$ 是蝌蚪规范连接图的夸克分布。因为我们无法得知这些中间态夸克分布，只能根据对称性用质子夸克分布来表示以上的8个中间态夸克分布。

4.2 输入部分分子分布函数

有效理论中，夸克算符匹配到强子层次上的算符，如(4.6)式所示，它们的矩阵元[(4.4)式]由分裂函数的 n 阶Mellin矩给出。强子层次上的夸克算符包括一切可能的八重态和十重态重子的贡献并且在矢量变换下不变的矢量算符由下式给出 $\mathcal{O}_q^{\mu_1 \dots \mu_n}$ [102]，

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_q^{\mu_1 \dots \mu_n} = & a^{(n)} i^n \frac{f_{\phi}^2}{4} \left\{ \text{Tr} [U^{\dagger} \lambda^q \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} U] + \text{Tr} [U \lambda^q \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} U^{\dagger}] \right\} \\
& + \left[\alpha^{(n)} (\bar{\mathcal{B}} \gamma^{\mu_1} \mathcal{B} \lambda_+^q) + \beta^{(n)} (\bar{\mathcal{B}} \gamma^{\mu_1} \lambda_+^q \mathcal{B}) + \sigma^{(n)} (\bar{\mathcal{B}} \gamma^{\mu_1} \mathcal{B}) \text{Tr} [\lambda_+^q] \right] p^{\mu_2} \dots p^{\mu_n} \\
& + \left[\bar{\alpha}^{(n)} (\bar{\mathcal{B}} \gamma^{\mu_1} \gamma_5 \mathcal{B} \lambda_-^q) + \bar{\beta}^{(n)} (\bar{\mathcal{B}} \gamma^{\mu_1} \gamma_5 \lambda_-^q \mathcal{B}) + \bar{\sigma}^{(n)} (\bar{\mathcal{B}} \gamma^{\mu_1} \gamma_5 \mathcal{B}) \text{Tr} [\lambda_-^q] \right] p^{\mu_2} \dots p^{\mu_n} \\
& + \left[\theta^{(n)} (\bar{\mathcal{T}}_{\alpha} \gamma^{\alpha \beta \mu_1} \lambda_+^q \mathcal{T}_{\beta}) + \rho^{(n)} (\bar{\mathcal{T}}_{\alpha} \gamma^{\alpha \beta \mu_1} \mathcal{T}_{\beta}) \text{Tr} [\lambda_+^q] \right] p^{\mu_2} \dots p^{\mu_n} \\
& + \bar{\rho}^{(n)} (\bar{\mathcal{T}}_{\alpha} \gamma^{\mu_1} \gamma_5 \lambda_-^q \mathcal{T}^{\alpha}) + \bar{\rho}^{(n)} (\bar{\mathcal{T}}_{\alpha} \gamma^{\mu_1} \gamma_5 \mathcal{T}^{\alpha} \text{Tr} [\lambda_-^q]) p^{\mu_2} \dots p^{\mu_n} \\
& - \sqrt{\frac{3}{2}} \bar{\omega}^{(n)} \left[(\bar{\mathcal{B}} \Theta^{\mu_1 \mu} \lambda_-^q \mathcal{T}_{\mu}) + (\bar{\mathcal{T}}_{\mu} \Theta^{\mu \mu_1} \lambda_-^q \mathcal{B}) \right] p^{\mu_2} \dots p^{\mu_n} \\
& + \text{permutations} - \text{Tr}, \quad (4.13)
\end{aligned}$$

其中“Trace”代表对味道空间求迹。(4.13)式的第一项中，算符 U 代表赝标量介子 ϕ ,

$$U = \exp \left(i \frac{\sqrt{2} \phi}{f_\phi} \right), \quad (4.14)$$

其中 f_ϕ 是赝标量介子衰变常数，系数 $a^{(n)}$ 是赝标量介子夸克分布的 n 阶Mellin矩。味道算符 λ_\pm^q 定义为

$$\lambda_\pm^q = \frac{1}{2} (u \lambda^q u^\dagger \pm u^\dagger \lambda^q u), \quad (4.15)$$

其中 $\lambda^q = \text{diag}(\delta_{qu}, \delta_{qd}, \delta_{qs})$ 是 3×3 夸克味道矩阵， \mathcal{B} 和 \mathcal{T}_α 分别是八重和十重态重子算符，应当强调的是，算符 \mathcal{B} 和 \mathcal{T}_α 是八重态和十重态重子的三阶张量表示。狄拉克算符 $\gamma^{\alpha\beta\rho} = \frac{1}{2} \{\gamma^{\mu\nu}, \gamma^\alpha\}$ ， $\gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ 已被定义在(4.13)式中， $\{\bar{\alpha}^{(n)}, \bar{\beta}^{(n)}, \bar{\sigma}^{(n)}\}$ ， $\{\alpha^{(n)}, \beta^{(n)}, \sigma^{(n)}\}$ ， $\{\theta^{(n)}, \rho^{(n)}\}$ 和 $\{\bar{\theta}^{(n)}, \bar{\rho}^{(n)}\}$ 是一组未知系数，它们的物理含义在下一步分析中得到解释。 $\bar{\omega}^{(n)}$ 是另一个系数， $\Theta^{\mu\nu}$ 是八重态-十重态轴矢量跃迁张量算符并定义为，

$$\Theta^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - (Z + \frac{1}{2}) \gamma^\mu \gamma^\nu. \quad (4.16)$$

其中 Z 是十重态重子的离壳参数。正如前面所述，一般物理量不依赖于 Z ，所以为了方便我们选取 $Z = 1/2$ ，这使得十重态传播子变得更简单 [93, 94]。

费曼图 3.1(e), 3.1(f), 3.1(h)和3.1(i)中，赝标量介子跟光子一起与重子轴矢量算符耦合。为此我们需要确定重子极化夸克分布与质子夸克分布之间的关系。跟轴矢量外场耦合的夸克轴矢量算符可以写为

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\Delta q}^{\mu_1 \dots \mu_n} = & \left[\bar{\alpha}^{(n)} (\bar{\mathcal{B}} \gamma^{\mu_1} \gamma_5 \mathcal{B} \lambda_+^q) + \bar{\beta}^{(n)} (\bar{\mathcal{B}} \gamma^{\mu_1} \gamma_5 \lambda_+^q \mathcal{B}) + \bar{\sigma}^{(n)} (\bar{\mathcal{B}} \gamma^{\mu_1} \gamma_5 \mathcal{B}) \text{Tr}[\lambda_+^q] \right] p^{\mu_2} \dots p^{\mu_n} \\ & + \left[\alpha^{(n)} (\bar{\mathcal{B}} \gamma^{\mu_1} \mathcal{B} \lambda_-^q) + \beta^{(n)} (\bar{\mathcal{B}} \gamma^{\mu_1} \lambda_-^q \mathcal{B}) + \sigma^{(n)} (\bar{\mathcal{B}} \gamma^{\mu_1} \mathcal{B}) \text{Tr}[\lambda_-^q] \right] p^{\mu_2} \dots p^{\mu_n} \\ & + \left[\bar{\theta}^{(n)} (\bar{\mathcal{T}}_\alpha \gamma^{\mu_1} \gamma_5 \lambda_+^q \mathcal{T}^\alpha) + \bar{\rho}^{(n)} (\bar{\mathcal{T}}_\alpha \gamma^{\mu_1} \gamma_5 \mathcal{T}^\alpha) \text{Tr}[\lambda_+^q] \right] p^{\mu_2} \dots p^{\mu_n} \\ & + \left[\theta^{(n)} (\bar{\mathcal{T}}_\alpha \gamma^{\alpha\beta\mu_1} \lambda_-^q \mathcal{T}_\beta) + \rho^{(n)} (\bar{\mathcal{T}}_\alpha \gamma^{\alpha\beta\mu_1} \mathcal{T}_\beta) \text{Tr}[\lambda_-^q] \right] p^{\mu_2} \dots p^{\mu_n} \\ & - \sqrt{\frac{3}{2}} \bar{\omega}^{(n)} \left[(\bar{\mathcal{B}} \Theta^{\mu_1\mu} \lambda_+^q \mathcal{T}_\mu) + (\bar{\mathcal{T}}_\mu \Theta^{\mu\mu_1} \lambda_+^q \mathcal{B}) \right] p^{\mu_2} \dots p^{\mu_n} \\ & + \text{permutations} - \text{Tr}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

由 $\mathcal{O}_q^{\mu_1 \cdots \mu_n}$ 和 $\mathcal{O}_{\Delta q}^{\mu_1 \cdots \mu_n}$ 的字称变换特性, 我们可以看出(4.17) 式中的系数 $\{\alpha^{(n)}, \beta^{(n)}, \sigma^{(n)}, \theta^{(n)}, \rho^{(n)}\}$ 和 $\{\bar{\alpha}^{(n)}, \bar{\beta}^{(n)}, \bar{\sigma}^{(n)}, \bar{\theta}^{(n)}, \bar{\rho}^{(n)}\}$ 的集合跟(4.13) 式中的一样 [103]。把(4.13) 和(4.17) 式中的场算符 \mathcal{B} 和 \mathcal{T}_α 转换成普通SU(3) 八重态场算符 B^{ij} (包括八重态重子 N, Λ, Σ, Ξ) 和十重态场算符 T_α^{ijk} (包括十重态重子 $\Delta, \Sigma^*, \Xi^*, \Omega$)

$$(\bar{\mathcal{B}} \mathcal{B}) = \text{Tr}[\bar{B} B], \quad (4.18a)$$

$$(\bar{\mathcal{B}} \mathcal{B} A) = -\frac{1}{6} \text{Tr}[\bar{B} B A] + \frac{2}{3} \text{Tr}[\bar{B} A B] + \frac{1}{6} \text{Tr}[\bar{B} B] \text{Tr}[A], \quad (4.18b)$$

$$(\bar{\mathcal{B}} A \mathcal{B}) = -\frac{2}{3} \text{Tr}[\bar{B} B A] - \frac{1}{3} \text{Tr}[\bar{B} A B] + \frac{2}{3} \text{Tr}[\bar{B} B] \text{Tr}[A], \quad (4.18c)$$

十重态

$$(\bar{\mathcal{T}}_\alpha \mathcal{T}_\beta) = \bar{T}_\alpha^{kji} T_\beta^{ijk}, \quad (4.19a)$$

$$(\bar{\mathcal{T}}_\alpha A \mathcal{T}_\beta) = \bar{T}_\alpha^{kji} A^{il} T_\beta^{ljk}, \quad (4.19b)$$

$$(\bar{\mathcal{T}}_\alpha A \mathcal{B}) = -\sqrt{\frac{2}{3}} \bar{T}_\alpha^{ijk} A^{il} B^{jm} \varepsilon^{klm}, \quad (4.19c)$$

其中 ε^{klm} 是反对称张量。利用关系式(4.18), (4.19)和(4.13) 式中的矢量算符 $\mathcal{O}_q^{\mu_1 \cdots \mu_n}$ 可以写成如下通式的形式

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_q^{\mu_1 \cdots \mu_n} = & Q_\phi^{(n-1)} \mathcal{O}_\phi^{\mu_1 \cdots \mu_n} + Q_B^{(n-1)} \mathcal{O}_{BB'}^{\mu_1 \cdots \mu_n} + Q_T^{(n-1)} \mathcal{O}_{TT'}^{\mu_1 \cdots \mu_n} \\ & + Q_{(\text{tad})B\phi\phi}^{(n-1)} \mathcal{O}_{B\phi\phi}^{\mu_1 \cdots \mu_n} + Q_{(\text{KR})B}^{(n-1)} \mathcal{O}_{BB'\phi}^{\mu_1 \cdots \mu_n} + Q_{(\text{KR})T}^{(n-1)} \mathcal{O}_{BT\phi}^{\mu_1 \cdots \mu_n}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

上式中, 单个矢量算符的定义如下

$$\mathcal{O}_\phi^{\mu_1 \cdots \mu_n} = i^n (\bar{\phi} \partial^{\mu_1} \cdots \partial^{\mu_n} \phi - \phi \partial^{\mu_1} \cdots \partial^{\mu_n} \bar{\phi}), \quad (4.21a)$$

$$\mathcal{O}_{BB'}^{\mu_1 \cdots \mu_n} = (\bar{B}' \gamma^{\mu_1} B) p^{\mu_2} \cdots p^{\mu_n}, \quad (4.21b)$$

$$\mathcal{O}_{TT'}^{\mu_1 \cdots \mu_n} = (\bar{T}'_\alpha \gamma^{\alpha\beta\mu_1} T_\beta) p^{\mu_2} \cdots p^{\mu_n}, \quad (4.21c)$$

$$\mathcal{O}_{B\phi\phi}^{\mu_1 \cdots \mu_n} = \frac{1}{f_\phi^2} (\bar{B} \gamma^{\mu_1} B \bar{\phi} \phi) p^{\mu_2} \cdots p^{\mu_n}, \quad (4.21d)$$

$$\mathcal{O}_{BB'\phi}^{\mu_1 \cdots \mu_n} = \frac{i}{f_\phi} (\bar{B}' \gamma^{\mu_1} \gamma_5 B \phi - \bar{B} \gamma^{\mu_1} \gamma_5 B' \bar{\phi}) p^{\mu_2} \cdots p^{\mu_n}, \quad (4.21e)$$

$$\mathcal{O}_{BT\phi}^{\mu_1 \cdots \mu_n} = \frac{i}{f_\phi} (\bar{B} \Theta^{\mu_1\nu} T_\nu \bar{\phi} - \bar{T}_\nu \Theta^{\nu\mu_1} B \phi) p^{\mu_2} \cdots p^{\mu_n}, \quad (4.21f)$$

这些算符对应于费曼图3.1, 3.1(d), 3.1(g), 3.1(j), 3.1(e)和3.1(h)的相互作用顶角。以上算符的系数 $Q_j^{(n-1)}$ 由相应中间态重子和介子夸克分布的 n 阶Mellin 矩给出, 即

$$Q_\phi^{(n-1)} = \int_{-1}^1 dx x^{n-1} q_\phi(x), \quad (4.22a)$$

$$Q_B^{(n-1)} = \int_{-1}^1 dx x^{n-1} q_B(x), \quad (4.22b)$$

$$Q_T^{(n-1)} = \int_{-1}^1 dx x^{n-1} q_T(x), \quad (4.22c)$$

$$Q_{(\text{tad})B\phi\phi}^{(n-1)} = \int_{-1}^1 dx x^{n-1} q_\phi^{(\text{tad})}, \quad (4.22d)$$

$$Q_{(\text{KR})B}^{(n-1)} = \int_{-1}^1 dx x^{n-1} q_B^{(\text{KR})}, \quad (4.22e)$$

$$Q_{(\text{KR})T}^{(n-1)} = \int_{-1}^1 dx x^{n-1} q_T^{(\text{KR})}, \quad (4.22f)$$

上式中的夸克分布代表在卷积积分(4.9) 和(4.12)中的夸克分布。夸克分布的 n 阶Mellin矩 $Q_j^{(n-1)}$ 以 $\{a^{(n)}; \alpha^{(n)}, \beta^{(n)}, \sigma^{(n)}; \theta^{(n)}, \rho^{(n)}\}$ 的线性组合形式出现在(4.13)式中。比如, 赝标量介子 $\phi = \pi^+, K^+$ 和 K^0 的 n 阶Mellin 矩 $U_\phi^{(n-1)}$, $D_\phi^{(n-1)}$ 和 $S_\phi^{(n-1)}$ 列在表4.1 中。当 $n = 1$ 的时候, 价夸克数的守恒给出如下归一化条件,

$$a^{(1)} = 2. \quad (4.23)$$

值得注意的是在SU(3) 对称极限下, π^+ 和 K^+ 中的 u 夸克分布的 n 阶Mellin 矩是相等的, 同样地, K^+ 和 K^0 中的 s 夸克分布的 n 阶Mellin矩在数量上相等但是符号相反, 即

$$U_{\pi^+}^{(n-1)} = -D_{\pi^+}^{(n-1)} = U_{K^+}^{(n-1)} = -S_{K^+}^{(n-1)} = D_{K^0}^{(n-1)} = -S_{K^0}^{(n-1)} = \frac{1}{2}a^{(n)}. \quad (4.24)$$

其他赝标量介子(π^-, π^0, K^- 和 \bar{K}^0)的夸克分布根据电荷对称性可以从表 4.1 求得。跟重子不同的是, 介子海夸克分布是味道对称的。价夸克模型中 π 和 K 介子的海夸克分布为零。

中间态重子夸克分布 $q = u, d$ 和 s 的 n 阶Mellin 矩 $Q_B^{(n-1)}$ 可以用 $\{\alpha^{(n)}, \beta^{(n)}, \sigma^{(n)}\}$ 的线性组合来表示并且列在表 4.2 中。由表中可以看出八重态重子 $B = p, n, \Sigma^{\pm,0}, \Lambda, \Xi^{\pm,0}$ 以及 $\Lambda - \Sigma^0$ 干涉的夸克分布都跟三个系数 $\{\alpha^{(n)}, \beta^{(n)}, \sigma^{(n)}\}$ 有关。我们假设质

表 4.1: 赝标量介子 π^+ , K^+ 和 K^0 夸克分布 $q(= u, d, s)$ 的 n 阶Mellin矩 $Q_\phi^{(n-1)}$ 。当 $n=1$ 的时候, 满足 $a^{(1)} = 2$ 。

ϕ	$U_\phi^{(n-1)}$	$D_\phi^{(n-1)}$	$S_\phi^{(n-1)}$
π^+	$\frac{1}{2}a^{(n)}$	$-\frac{1}{2}a^{(n)}$	0
K^+	$\frac{1}{2}a^{(n)}$	0	$-\frac{1}{2}a^{(n)}$
K^0	0	$\frac{1}{2}a^{(n)}$	$-\frac{1}{2}a^{(n)}$

表 4.2: 八重态重子夸克分布 $q = u, d$ 和 s 的 n 阶Mellin矩 $Q_B^{(n-1)}$ 。同样地, 通过替换 $\{\alpha^{(n)} \rightarrow \bar{\alpha}^{(n)}, \beta^{(n)} \rightarrow \bar{\beta}^{(n)}, \sigma^{(n)} \rightarrow \bar{\sigma}^{(n)}\}$ 可以得到八重态重子极化夸克分布的 n 阶Mellin矩之间的关系。

B	$U_B^{(n-1)}$	$D_B^{(n-1)}$	$S_B^{(n-1)}$
p	$\frac{5}{6}\alpha^{(n)} + \frac{1}{3}\beta^{(n)} + \sigma^{(n)}$	$\frac{1}{6}\alpha^{(n)} + \frac{2}{3}\beta^{(n)} + \sigma^{(n)}$	$\sigma^{(n)}$
n	$\frac{1}{6}\alpha^{(n)} + \frac{2}{3}\beta^{(n)} + \sigma^{(n)}$	$\frac{5}{6}\alpha^{(n)} + \frac{1}{3}\beta^{(n)} + \sigma^{(n)}$	$\sigma^{(n)}$
Σ^+	$\frac{5}{6}\alpha^{(n)} + \frac{1}{3}\beta^{(n)} + \sigma^{(n)}$	$\sigma^{(n)}$	$\frac{1}{6}\alpha^{(n)} + \frac{2}{3}\beta^{(n)} + \sigma^{(n)}$
Σ^0	$\frac{5}{12}\alpha^{(n)} + \frac{1}{6}\beta^{(n)} + \sigma^{(n)}$	$\frac{5}{12}\alpha^{(n)} + \frac{1}{6}\beta^{(n)} + \sigma^{(n)}$	$\frac{1}{6}\alpha^{(n)} + \frac{2}{3}\beta^{(n)} + \sigma^{(n)}$
Σ^-	$\sigma^{(n)}$	$\frac{5}{6}\alpha^{(n)} + \frac{1}{3}\beta^{(n)} + \sigma^{(n)}$	$\frac{1}{6}\alpha^{(n)} + \frac{2}{3}\beta^{(n)} + \sigma^{(n)}$
Λ	$\frac{1}{4}\alpha^{(n)} + \frac{1}{2}\beta^{(n)} + \sigma^{(n)}$	$\frac{1}{4}\alpha^{(n)} + \frac{1}{2}\beta^{(n)} + \sigma^{(n)}$	$\frac{1}{2}\alpha^{(n)} + \sigma^{(n)}$
$\Lambda\Sigma^0$	$\frac{\sqrt{3}}{12}[\alpha^{(n)} - 2\beta^{(n)}]$	$-\frac{\sqrt{3}}{12}[\alpha^{(n)} - 2\beta^{(n)}]$	0
Ξ^0	$\frac{1}{6}\alpha^{(n)} + \frac{2}{3}\beta^{(n)} + \sigma^{(n)}$	$\sigma^{(n)}$	$\frac{5}{6}\alpha^{(n)} + \frac{1}{3}\beta^{(n)} + \sigma^{(n)}$
Ξ^-	$\sigma^{(n)}$	$\frac{1}{6}\alpha^{(n)} + \frac{2}{3}\beta^{(n)} + \sigma^{(n)}$	$\frac{5}{6}\alpha^{(n)} + \frac{1}{3}\beta^{(n)} + \sigma^{(n)}$

子夸克分布的 n 阶Mellin 矩已知因而反推出 u , d 和 s 分布的 n 阶矩和 $\{\alpha^{(n)}, \beta^{(n)}, \sigma^{(n)}\}$ 的关系,

$$\alpha^{(n)} = \frac{4}{3}U_p^{(n-1)} - \frac{2}{3}D_p^{(n-1)} - \frac{2}{3}S_p^{(n-1)}, \quad (4.25a)$$

$$\beta^{(n)} = -\frac{1}{3}U_p^{(n-1)} + \frac{5}{3}D_p^{(n-1)} - \frac{4}{3}S_p^{(n-1)}, \quad (4.25b)$$

$$\sigma^{(n)} = S_p^{(n-1)}. \quad (4.25c)$$

如果假设质子海中奇异数为零, 或者 Σ^- 超子上夸克数为零, 当 $n=1$ 的时候质

表 4.3: 十重态夸克分布 $q = u, d$ 和 s 的 n 阶矩 $Q_T^{(n-1)}$ 。同样地, 通过替换 $\{\theta^{(n)} \rightarrow \bar{\theta}^{(n)}, \rho^{(n)} \rightarrow \bar{\rho}^{(n)}\}$ 可以得到十重态极化夸克分布的 n 阶Mellin矩之间的关系。

T	$U_T^{(n-1)}$	$D_T^{(n-1)}$	$S_T^{(n-1)}$
Δ^{++}	$\theta^{(n)} + \rho^{(n)}$	$\rho^{(n)}$	$\rho^{(n)}$
Δ^+	$\frac{2}{3}\theta^{(n)} + \rho^{(n)}$	$\frac{1}{3}\theta^{(n)} + \rho^{(n)}$	$\rho^{(n)}$
Δ^0	$\frac{1}{3}\theta^{(n)} + \rho^{(n)}$	$\frac{2}{3}\theta^{(n)} + \rho^{(n)}$	$\rho^{(n)}$
Δ^-	$\rho^{(n)}$	$\theta^{(n)} + \rho^{(n)}$	$\rho^{(n)}$
Σ^{*+}	$\frac{2}{3}\theta^{(n)} + \rho^{(n)}$	$\rho^{(n)}$	$\frac{1}{3}\theta^{(n)} + \rho^{(n)}$
Σ^{*0}	$\frac{1}{3}\theta^{(n)} + \rho^{(n)}$	$\frac{1}{3}\theta^{(n)} + \rho^{(n)}$	$\frac{1}{3}\theta^{(n)} + \rho^{(n)}$
Σ^{*-}	$\rho^{(n)}$	$\frac{2}{3}\theta^{(n)} + \rho^{(n)}$	$\frac{1}{3}\theta^{(n)} + \rho^{(n)}$
Ξ^{*0}	$\frac{1}{3}\theta^{(n)} + \rho^{(n)}$	$\rho^{(n)}$	$\frac{2}{3}\theta^{(n)} + \rho^{(n)}$
Ξ^{*-}	$\rho^{(n)}$	$\frac{1}{3}\theta^{(n)} + \rho^{(n)}$	$\frac{2}{3}\theta^{(n)} + \rho^{(n)}$
Ω^-	$\rho^{(n)}$	$\rho^{(n)}$	$\theta^{(n)} + \rho^{(n)}$

子夸克分布满足归一化条件 $U_p^{(0)}=2$, $D_p^{(0)}=1$, $D_p^{(0)}=0$, 由此得出

$$\alpha^{(1)} = 2, \quad \beta^{(1)} = 1, \quad \sigma^{(1)} = 0. \quad (4.26)$$

至于十重态 T 的夸克分布函数, 单个夸克味道 u , d 和 s 的 n 阶Mellin 矩 $Q_T^{(n-1)}$ 由系数 $\{\theta^{(n)}, \rho^{(n)}\}$ 的线性组合给出。十重态重子 $T = \Delta, \Sigma^*, \Xi^*$ 和 Ω^- 夸克分布的 n 阶Mellin 矩被列在表4.3 中。通过解方程得到十重态系数 $\theta^{(n)}$, $\rho^{(n)}$ 与 Δ^+ 夸克分布的 n 阶Mellin 矩之间的关系

$$\theta^{(n)} = 3(D_{\Delta^+}^{(n-1)} - S_{\Delta^+}^{(n-1)}) = \frac{3}{2}(U_{\Delta^+}^{(n-1)} - S_{\Delta^+}^{(n-1)}), \quad (4.27a)$$

$$\rho^{(n)} = S_{\Delta^+}^{(n-1)}. \quad (4.27b)$$

假设当 $n=1$ 的时候, Δ^+ 重子夸克分布的 n 阶矩满足 $U_{\Delta^+}^{(0)}=2$, $D_{\Delta^+}^{(0)}=1$, $S_{\Delta^+}^{(0)}=0$, 由此得出

$$\theta^{(1)} = 3, \quad \rho^{(1)} = 0. \quad (4.28)$$

蝌蚪图[图3.1(j)]对应的夸克分布函数的 n 阶Mellin矩列在表4.5中。表中我们列出了八重态重子 B 的蝌蚪顶角对应的夸克分布 u , d 和 s 的 n 阶Mellin矩 $Q_{(\text{tad})B\phi\phi}^{(n-1)}$ 。显然, 蝌蚪顶角的夸克分布的Mellin矩跟八重态重子夸克分布的Mellin 矩 $\{\alpha^{(n)}, \beta^{(n)}, \sigma^{(n)}\}$ 有

表 4.4: 八重态-十重态跃迁夸克分布 u, d 和 s 的 n 阶Mellin 矩。

BT	$\Delta U_{BT}^{(n-1)}$	$\Delta D_{BT}^{(n-1)}$	$\Delta S_{BT}^{(n-1)}$
$n\Delta^0$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}\bar{\omega}^{(n)}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}\bar{\omega}^{(n)}$	0
$p\Delta^+$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}\bar{\omega}^{(n)}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}\bar{\omega}^{(n)}$	0
$\Sigma^0\Sigma^{*0}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}\bar{\omega}^{(n)}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}\bar{\omega}^{(n)}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}\bar{\omega}^{(n)}$
$\Sigma^+\Sigma^{*+}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}\bar{\omega}^{(n)}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}\bar{\omega}^{(n)}$
$\Sigma^-\Sigma^{*-}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}\bar{\omega}^{(n)}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}\bar{\omega}^{(n)}$
$\Lambda\Sigma^{*0}$	$\frac{1}{2}\bar{\omega}^{(n)}$	$-\frac{1}{2}\bar{\omega}^{(n)}$	0

关，这说明蝌蚪顶角的夸克分布跟质子夸克分布有关。从表中我们可以看出包含 $K^0\bar{K}^0$ 的顶角对 u 夸克分布的Mellin 矩没有贡献， K^+K^- 和 $\pi^+\pi^-$ 对 d 和 s 奇异夸克分布的贡献分别为零。最终，在表4.6 中我们列出了费曼图 3.1(e) 和(h)中的八重态和十重态Kroll-Ruderman顶角的非极化夸克分布的 n 阶Mellin矩 $Q_{(KR)B}^{(n-1)}$ 和 $Q_{(KR)T}^{(n-1)}$ 。 (对于其他初态重子能得到类似的关系，本文中我们不做这方面的讨论) 应当注意的是，跟3.1 图中的夸克分布不一样的是，Kroll-Ruderman顶角的夸克分布的 n 阶Mellin 矩 $Q_{(KR)B}^{(n-1)}$ 和 $Q_{(KR)T}^{(n-1)}$ 正比于 $\bar{\alpha}^{(n)}$, $\bar{\beta}^{(n)}$ 和 $\bar{\omega}^{(n)}$ ，换句话说它们与极化夸克分布的 n 阶Mellin 矩有关。对后者，极化夸克分布跟(4.17) 式中的轴矢量流的矩阵元 $\mathcal{O}_{\Delta q}^{\mu_1\cdots\mu_n}$ 有关，利用关系式(4.18) 和(4.19)，强子层次上轴矢量流算符可以参数化为相应的极化夸克分布的 n 阶Mellin 矩 $\Delta Q_j^{(n-1)}$ 与轴矢量算符之积。跟 (4.20) 式一样，将轴矢量算符可写成

$$\mathcal{O}_{\Delta q}^{\mu_1\cdots\mu_n} = \Delta Q_B^{(n-1)} \tilde{\mathcal{O}}_{BB'}^{\mu_1\cdots\mu_n} + \Delta Q_T^{(n-1)} \tilde{\mathcal{O}}_{TT'}^{\mu_1\cdots\mu_n} + \Delta Q_{BT}^{(n-1)} \tilde{\mathcal{O}}_{BT}^{\mu_1\cdots\mu_n} + \cdots, \quad (4.29)$$

上式中，我们只列出了与本文计算有关的非极化夸克分布，更明确地说，(4.29) 式中的轴矢量强子流由下式给出

$$\tilde{\mathcal{O}}_{BB'}^{\mu_1\cdots\mu_n} = (\bar{B}' \gamma^{\mu_1} \gamma_5 B) p^{\mu_2} \cdots p^{\mu_n}, \quad (4.30a)$$

$$\tilde{\mathcal{O}}_{TT'}^{\mu_1\cdots\mu_n} = (\bar{T}'_\alpha \gamma^{\mu_1} \gamma_5 T^\alpha) p^{\mu_2} \cdots p^{\mu_n}, \quad (4.30b)$$

$$\tilde{\mathcal{O}}_{BT}^{\mu_1\cdots\mu_n} = (\bar{B} \Theta^{\mu_1\nu} T_\nu + \bar{T}_\nu \Theta^{\nu\mu_1} B) p^{\mu_2} \cdots p^{\mu_n}, \quad (4.30c)$$

表 4.5: 介子蝌蚪图[图3.1(j)]顶角的夸克分布 u , d 和 s 的 n 阶Mellin矩。其他态的 n 阶Mellin 矩 $U_{(\text{tad})BK^0\bar{K}^0}^{(n-1)}$, $D_{(\text{tad})BK^+K^-}^{(n-1)}$ 和 $S_{(\text{tad})B\pi^+\pi^-}^{(n-1)}$ 没被展示。

B	$U_{(\text{tad})B\phi\phi}^{(n-1)}$		$D_{(\text{tad})B\phi\phi}^{(n-1)}$		$S_{(\text{tad})B\phi\phi}^{(n-1)}$	
	$\pi^+\pi^-$	K^+K^-	$\pi^+\pi^-$	$K^0\bar{K}^0$	$K^0\bar{K}^0$	K^+K^-
p	$-\frac{1}{3}\alpha^{(n)} + \frac{1}{6}\beta^{(n)}$	$-\frac{5}{12}\alpha^{(n)} - \frac{1}{6}\beta^{(n)}$	$\frac{1}{3}\alpha^{(n)} - \frac{1}{6}\beta^{(n)}$	$-\frac{1}{12}\alpha^{(n)} - \frac{1}{3}\beta^{(n)}$	$\frac{1}{12}\alpha^{(n)} + \frac{1}{3}\beta^{(n)}$	$\frac{5}{12}\alpha^{(n)} + \frac{1}{6}\beta^{(n)}$
n	$\frac{1}{3}\alpha^{(n)} - \frac{1}{6}\beta^{(n)}$	$-\frac{1}{12}\alpha^{(n)} - \frac{1}{3}\beta^{(n)}$	$-\frac{1}{3}\alpha^{(n)} + \frac{1}{6}\beta^{(n)}$	$-\frac{5}{12}\alpha^{(n)} - \frac{1}{6}\beta^{(n)}$	$\frac{5}{12}\alpha^{(n)} + \frac{1}{6}\beta^{(n)}$	$\frac{1}{12}\alpha^{(n)} + \frac{1}{3}\beta^{(n)}$
Σ^+	$-\frac{5}{12}\alpha^{(n)} - \frac{1}{6}\beta^{(n)}$	$-\frac{1}{3}\alpha^{(n)} + \frac{1}{6}\beta^{(n)}$	$\frac{5}{12}\alpha^{(n)} + \frac{1}{6}\beta^{(n)}$	$\frac{1}{12}\alpha^{(n)} + \frac{1}{3}\beta^{(n)}$	$-\frac{1}{12}\alpha^{(n)} - \frac{1}{3}\beta^{(n)}$	$\frac{1}{3}\alpha^{(n)} - \frac{1}{6}\beta^{(n)}$
Σ^0	0	$-\frac{1}{8}\alpha^{(n)} + \frac{1}{4}\beta^{(n)}$	0	$-\frac{1}{8}\alpha^{(n)} + \frac{1}{4}\beta^{(n)}$	$\frac{1}{8}\alpha^{(n)} - \frac{1}{4}\beta^{(n)}$	$\frac{1}{8}\alpha^{(n)} - \frac{1}{4}\beta^{(n)}$
Σ^-	$\frac{5}{12}\alpha^{(n)} + \frac{1}{6}\beta^{(n)}$	$\frac{1}{12}\alpha^{(n)} + \frac{1}{3}\beta^{(n)}$	$-\frac{5}{12}\alpha^{(n)} - \frac{1}{6}\beta^{(n)}$	$-\frac{1}{3}\alpha^{(n)} + \frac{1}{6}\beta^{(n)}$	$\frac{1}{3}\alpha^{(n)} - \frac{1}{6}\beta^{(n)}$	$-\frac{1}{12}\alpha^{(n)} - \frac{1}{3}\beta^{(n)}$
Λ	0	$\frac{1}{8}\alpha^{(n)} - \frac{1}{4}\beta^{(n)}$	0	$\frac{1}{8}\alpha^{(n)} - \frac{1}{4}\beta^{(n)}$	$-\frac{1}{8}\alpha^{(n)} + \frac{1}{4}\beta^{(n)}$	$-\frac{1}{8}\alpha^{(n)} + \frac{1}{4}\beta^{(n)}$
Ξ^0	$-\frac{1}{12}\alpha^{(n)} - \frac{1}{3}\beta^{(n)}$	$\frac{1}{3}\alpha^{(n)} - \frac{1}{6}\beta^{(n)}$	$\frac{1}{12}\alpha^{(n)} + \frac{1}{3}\beta^{(n)}$	$\frac{5}{12}\alpha^{(n)} + \frac{1}{6}\beta^{(n)}$	$-\frac{5}{12}\alpha^{(n)} - \frac{1}{6}\beta^{(n)}$	$-\frac{1}{3}\alpha^{(n)} + \frac{1}{6}\beta^{(n)}$
Ξ^-	$\frac{1}{12}\alpha^{(n)} + \frac{1}{3}\beta^{(n)}$	$\frac{5}{12}\alpha^{(n)} + \frac{1}{6}\beta^{(n)}$	$-\frac{1}{12}\alpha^{(n)} - \frac{1}{3}\beta^{(n)}$	$\frac{1}{3}\alpha^{(n)} - \frac{1}{6}\beta^{(n)}$	$-\frac{1}{3}\alpha^{(n)} + \frac{1}{6}\beta^{(n)}$	$-\frac{5}{12}\alpha^{(n)} - \frac{1}{6}\beta^{(n)}$

对应的极化夸克分布的 n 阶Mellin矩 $\Delta Q_j^{(n-1)}$ 定义为

$$\Delta Q_B^{(n-1)} = \int_{-1}^1 dx x^{n-1} \Delta q_B(x), \quad (4.31a)$$

$$\Delta Q_T^{(n-1)} = \int_{-1}^1 dx x^{n-1} \Delta q_T(x), \quad (4.31b)$$

$$\Delta Q_{BT}^{(n-1)} = \int_{-1}^1 dx x^{n-1} \Delta q_{BT}(x). \quad (4.31c)$$

为了简单起见, 这里我们只讨论(4.31) 式中的八重态和十重态对角重子($B = B'$) 和($T = T'$) 的非极化夸克分布 $\Delta q_B(x)$ 和 $\Delta q_T(x)$ 以及八重态-十重态轴矢量夸克分布 $\Delta q_{BT}(x)$ 。特别是, 八重态极化夸克分布的 n 阶Mellin矩 $\Delta Q_B^{(n-1)}$ 直接通过替换 $\{\alpha^{(n)} \rightarrow \bar{\alpha}^{(n)}, \beta^{(n)} \rightarrow \bar{\beta}^{(n)}, \sigma^{(n)} \rightarrow \bar{\sigma}^{(n)}\}$ 可以从表 4.2 求得, 十重态极化夸克分布的Mellin矩 $\Delta Q_T^{(n-1)}$ 也可以通过替换 $\{\theta^{(n)} \rightarrow \bar{\theta}^{(n)}, \rho^{(n)} \rightarrow \bar{\rho}^{(n)}\}$ 可以从表 4.3 求得。八重态-十重态轴矢量跃迁分布的 n 阶矩 $\Delta Q_{BT}^{(n-1)}$ 列在表4.4中。类似于(4.25) 式, 从质子极化夸克的 n 阶Mellin矩得出以下关系

$$\bar{\alpha}^{(n)} = \frac{4}{3}\Delta U_p^{(n-1)} - \frac{2}{3}\Delta D_p^{(n-1)} - \frac{2}{3}\Delta S_p^{(n-1)}, \quad (4.32a)$$

$$\bar{\beta}^{(n)} = -\frac{1}{3}\Delta U_p^{(n-1)} + \frac{5}{3}\Delta D_p^{(n-1)} - \frac{4}{3}\Delta S_p^{(n-1)}, \quad (4.32b)$$

$$\bar{\sigma}^{(n)} = \Delta S_p^{(n-1)}. \quad (4.32c)$$

表 4.6: 八重态和十重态Kroll-Ruderman顶角[图3.1(e) 和(h)]夸克分布 u , d 和 s 的 n 阶Mellin矩。

$B\phi$	$U_{(\text{KR})B}^{(n-1)}$	$D_{(\text{KR})B}^{(n-1)}$	$S_{(\text{KR})B}^{(n-1)}$
$n\pi^+$	$-\frac{\sqrt{2}}{3}\bar{\alpha}^{(n)} + \frac{\sqrt{2}}{6}\bar{\beta}^{(n)}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}\bar{\alpha}^{(n)} - \frac{\sqrt{2}}{6}\bar{\beta}^{(n)}$	0
$\Sigma^0 K^+$	$\frac{1}{12}\bar{\alpha}^{(n)} + \frac{1}{3}\bar{\beta}^{(n)}$	0	$-\frac{1}{12}\bar{\alpha}^{(n)} - \frac{1}{3}\bar{\beta}^{(n)}$
$\Sigma^+ K^0$	0	$\frac{\sqrt{2}}{12}\bar{\alpha}^{(n)} + \frac{\sqrt{2}}{3}\bar{\beta}^{(n)}$	$-\frac{1}{12}\bar{\alpha}^{(n)} - \frac{1}{3}\bar{\beta}^{(n)}$
$\Lambda^0 K^+$	$\frac{\sqrt{3}}{4}\bar{\alpha}^{(n)}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{4}\bar{\alpha}^{(n)}$
$T\phi$	$U_{(\text{KR})T}^{(n-1)}$	$D_{(\text{KR})T}^{(n-1)}$	$S_{(\text{KR})T}^{(n-1)}$
$\Delta^0 \pi^+$	$\frac{1}{\sqrt{6}}\bar{\omega}^{(n)}$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}\bar{\omega}^{(n)}$	0
$\Delta^{++} \pi^-$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\omega}^{(n)}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\omega}^{(n)}$	0
$\Sigma^{*0} K^+$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}\bar{\omega}^{(n)}$	0	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}\bar{\omega}^{(n)}$
$\Sigma^{*+} K^0$	0	$-\frac{1}{\sqrt{6}}\bar{\omega}^{(n)}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}\bar{\omega}^{(n)}$

类似于非极化夸克分布，当 $n = 1$ 的时候质子极化夸克分布满足以下归一化条件 $\Delta U_p^{(0)} = 2F$, $\Delta D_p^{(0)} = D - F$, $\Delta S_p^{(0)} = 0$ ，由此得到

$$\bar{\alpha}^{(1)} = \frac{2}{3}(3F + D), \quad \bar{\beta}^{(1)} = \frac{1}{3}(3F - 5D), \quad \bar{\sigma}^{(1)} = 0. \quad (4.33)$$

同样地，在十重态情况下，用 Δ^+ 重子极化夸克分布的 n 阶矩来表示出系数 $\bar{\theta}^{(n)}$ 和 $\bar{\rho}^{(n)}$ ，

$$\bar{\theta}^{(n)} = 3(\Delta D_{\Delta^+}^{(n-1)} - \Delta S_{\Delta^+}^{(n-1)}) = \frac{3}{2}(\Delta U_{\Delta^+}^{(n-1)} - \Delta S_{\Delta^+}^{(n-1)}), \quad (4.34a)$$

$$\bar{\rho}^{(n)} = \Delta S_{\Delta^+}^{(n-1)}. \quad (4.34b)$$

当 $n = 1$ 的时候，八重态—十重态轴矢量跃迁夸克分布的 n 阶矩我们无法直接从质子夸克分布表示出来。所以利用跃迁夸克分布与质子极化夸克分布之间的对称性关系。当 $n = 1$ 时，根据SU(3) 对称性，可以把八重态—十重态跃迁分布的1阶Mellin矩 $\bar{\omega}^{(1)}$ 关联到质子夸克分布 [102]，

$$\bar{\omega}^{(1)} = -\Delta U_p^{(0)} + 2\Delta D_p^{(0)} - \Delta S_p^{(0)}, \quad (4.35)$$

上式进一步化简后得到 $\mathcal{C} = -2D$ [69]。这一节我们主要讨论了中间态重子和介子夸克分布的 n 阶Mellin矩以及它们跟 π 介子和 p 夸克分布的 n 阶Mellin矩之间的关系，下一节我们利用这些关系式推导出各项角夸克分布函数。

4.2.1 重子和介子的夸克分布

上一节我们推导了夸克算符 $\mathcal{O}_q^{\mu_1 \cdots \mu_n}$ 和 $\mathcal{O}_{\Delta q}^{\mu_1 \cdots \mu_n}$ 的系数以及(4.24)-(4.28)和(4.32)-(4.35)式中的夸克分布的 n 阶Mellin矩之间的关系。由于这些关系式对所有的 n 有效,因此我们由它们能推导出以无标度标量 x 为函数的夸克分布函数之间的关系。对于 K 和 π 介子夸克分布函数来说,从(4.24)式和表4.1得出以下夸克分布函数之间的关系,

$$\begin{aligned} \bar{q}_\pi(x) &\equiv u_{\pi^+}(x) = \bar{d}_{\pi^+}(x) = d_{\pi^-}(x) = \bar{u}_{\pi^-}(x) \\ &= u_{K^+}(x) = \bar{s}_{K^+}(x) = d_{K^0}(x) = \bar{s}_{K^0}(x), \end{aligned} \quad (4.36)$$

上式对所有的 x 有效。至于重子夸克分布函数 $q_B(x)$,为了简洁,分析当中我们用 $q(x) \equiv q_p(x)$, $q_\Delta(x) \equiv q_{\Delta^+}(x)$ 来表示裸质子和 Δ^+ 重子中的夸克分布。把在上节所给出的 α^n , β^n 和 σ^n 的值代入表4.2得到SU(3)八重态重子的夸克分布 u -, d -和 s 与质子 u -, d -和 s 之间的关系,

$$u_n(x) = d(x), \quad d_n(x) = u(x), \quad s_n(x) = s(x), \quad (4.37a)$$

$$u_{\Sigma^+}(x) = u(x), \quad d_{\Sigma^+}(x) = s(x), \quad s_{\Sigma^+}(x) = d(x), \quad (4.37b)$$

$$u_{\Sigma^0}(x) = \frac{1}{2}[u(x) + s(x)], \quad d_{\Sigma^0}(x) = u_{\Sigma^0}(x), \quad s_{\Sigma^0}(x) = d(x), \quad (4.37c)$$

$$u_{\Sigma^-}(x) = s(x), \quad d_{\Sigma^-}(x) = u(x), \quad s_{\Sigma^-}(x) = d(x), \quad (4.37d)$$

$$u_\Lambda(x) = \frac{1}{6}[4d(x) + u(x) + s(x)], \quad d_\Lambda(x) = u_\Lambda(x), \quad s_\Lambda(x) = \frac{1}{3}[2u(x) - d(x) + 2s(x)]. \quad (4.37e)$$

同样地,根据表(4.3),用 Δ^+ 夸克分布函数来表示出SU(3)十重态重子夸克分布函数

$$u_{\Delta^{++}}(x) = u_{\Delta}(x) + d_{\Delta}(x) - s_{\Delta}(x), \quad d_{\Delta^{++}}(x) = s_{\Delta}(x), \quad s_{\Delta^{++}}(x) = s_{\Delta}(x), \quad (4.38a)$$

$$u_{\Delta^0}(x) = d_{\Delta}(x), \quad d_{\Delta^0}(x) = u_{\Delta}(x), \quad s_{\Delta^0}(x) = s_{\Delta}(x), \quad (4.38b)$$

$$u_{\Delta^-}(x) = s_{\Delta}(x), \quad d_{\Delta^-}(x) = u_{\Delta^{++}}(x), \quad s_{\Delta^-}(x) = s_{\Delta}(x), \quad (4.38c)$$

$$u_{\Sigma^{*+}}(x) = u_{\Delta}(x), \quad d_{\Sigma^{*+}}(x) = s_{\Delta}(x), \quad s_{\Sigma^{*+}}(x) = d_{\Delta}(x), \quad (4.38d)$$

$$u_{\Sigma^{*0}}(x) = d_{\Delta}(x), \quad d_{\Sigma^{*0}}(x) = d_{\Delta}(x), \quad s_{\Sigma^{*0}}(x) = d_{\Delta}(x), \quad (4.38e)$$

$$u_{\Sigma^{*-}}(x) = s_{\Delta}(x), \quad d_{\Sigma^{*-}}(x) = u_{\Delta}(x), \quad s_{\Sigma^{*-}}(x) = d_{\Delta}(x). \quad (4.38f)$$

数值计算中, 为了方便起见, 做近似 $q_{\Delta}(x) \approx q(x)$, 并假设裸重子海中, 价夸克分布占主导地位, 因此 Δ^+ 重子奇异夸克分布设为 $s(x) \approx s_{\Delta}(x) \approx 0$ 。从表4.5 得到介子蝌蚪图[图3.1(j)]对应的夸克分布 u -, d -和 s 。用质子夸克分布的 n 阶Mellin 矩表示出表4.5中的系数 α^n , β^n 和 σ^n , 由此得出

$$u_{\pi^+}^{(\text{tad})}(x) = d_{\pi^+}^{(\text{tad})}(x) = u(x) - d(x), \quad s_{\pi^+}^{(\text{tad})}(x) = 0, \quad (4.39a)$$

$$u_{K^+}^{(\text{tad})}(x) = s_{K^+}^{(\text{tad})}(x) = \frac{1}{2}[u(x) - s(x)], \quad d_{K^+}^{(\text{tad})}(x) = 0, \quad (4.39b)$$

$$d_{K^0}^{(\text{tad})}(x) = s_{K^0}^{(\text{tad})}(x) = d(x) - s(x), \quad u_{K^0}^{(\text{tad})}(x) = 0. \quad (4.39c)$$

上一节我们没有推导介子蝌蚪规范连接图[图(3.1)]夸克分布的Mellin矩, 因为蝌蚪规范连接图的顶角的洛伦兹结构跟正常的蝌蚪图一样, 因此规范连接蝌蚪图的夸克分布跟蝌蚪图一样, 即

$$q_{\phi}^{(\delta)}(x) = q_{\phi}^{(\text{tad})}(x). \quad (4.40)$$

至于Kroll-Ruderman 图[图 3.1(e)和图 3.1(h)] 的夸克分布, 它们的顶角跟八重态重子和八重态-十重态轴矢量跃迁轴矢量耦合常数有关, 因此用质子

极化夸克分布 $\Delta q(x) \equiv \Delta q_p(x)$ 来表示它们的夸克分布。从表 4.6中可以得到Kroll-Ruderman顶角的有效夸克分布为

$$u_n^{(\text{KR})}(x) = d_n^{(\text{KR})}(x) = \frac{\Delta u(x) - \Delta d(x)}{F + D}, \quad s_n^{(\text{KR})}(x) = 0, \quad (4.41a)$$

$$d_{\Sigma^+}^{(\text{KR})}(x) = s_{\Sigma^+}^{(\text{KR})}(x) = \frac{\Delta d(x) - \Delta s(x)}{F - D}, \quad u_{\Sigma^+}^{(\text{KR})}(x) = 0, \quad (4.41b)$$

$$u_{\Sigma^0}^{(\text{KR})}(x) = s_{\Sigma^0}^{(\text{KR})}(x) = \frac{\Delta d(x) - \Delta s(x)}{F - D}, \quad d_{\Sigma^0}^{(\text{KR})}(x) = 0, \quad (4.41c)$$

$$u_{\Lambda}^{(\text{KR})}(x) = s_{\Lambda}^{(\text{KR})}(x) = \frac{2\Delta u(x) - \Delta d(x) - \Delta s(x)}{3F + D}, \quad d_{\Lambda}^{(\text{KR})}(x) = 0. \quad (4.41d)$$

同样地，十重态Kroll-Ruderman 图的夸克分布为

$$u_{\Delta^{++}}^{(\text{KR})}(x) = d_{\Delta^{++}}^{(\text{KR})}(x) = \frac{\Delta u(x) - 2\Delta d(x) + \Delta s(x)}{2D}, \quad s_{\Delta^{++}}^{(\text{KR})}(x) = 0, \quad (4.42a)$$

$$u_{\Delta^0}^{(\text{KR})}(x) = d_{\Delta^0}^{(\text{KR})}(x) = \frac{\Delta u(x) - 2\Delta d(x) + \Delta s(x)}{2D}, \quad s_{\Delta^0}^{(\text{KR})}(x) = 0, \quad (4.42b)$$

$$d_{\Sigma^{*+}}^{(\text{KR})}(x) = s_{\Sigma^{*+}}^{(\text{KR})}(x) = \frac{\Delta u(x) - 2\Delta d(x) + \Delta s(x)}{2D}, \quad u_{\Sigma^{*+}}^{(\text{KR})}(x) = 0, \quad (4.42c)$$

$$u_{\Sigma^{*0}}^{(\text{KR})}(x) = s_{\Sigma^{*0}}^{(\text{KR})}(x) = \frac{\Delta u(x) - 2\Delta d(x) + \Delta s(x)}{2D}, \quad d_{\Sigma^{*0}}^{(\text{KR})}(x) = 0. \quad (4.42d)$$

跟规范连接蝌蚪图一样，八重态和十重态规范连接Kroll-Ruderman 图[图3.1(f)和3.1(i)]的夸克分布跟相应的Kroll-Ruderman 图的夸克分布一样，即

$$q_B^{(\delta)}(x) = q_B^{(\text{KR})}(x), \quad (4.43a)$$

$$q_T^{(\delta)}(x) = q_T^{(\text{KR})}(x). \quad (4.43b)$$

利用赝标量介子和SU(3) 八重态，十重态重子夸克夸克分布，跟前面所给出的分裂函数一起，我们最终能得出赝标量介子圈图对(4.9) 和(4.12) 式中的质子夸克分布的贡献。数值计算中我们为 π 介子夸克分布选取 [105] 中的参数化的分布函数，至于质子极化和非极化价夸克分布，我们选取 [106, 107] 中的分布。根据(4.9) 和(4.12) 式，跟 (4.36)-(4.43) 式中的输入夸克分布函数一起，我们发现质子海中的奇异数为零，即，

$$\int_0^1 dx [s_p(x) - \bar{s}_p(x)] = 0. \quad (4.44)$$

上式是U(1)规范变换的另一种表现形式。但是上式不能保证质子海中的奇异夸克和反奇异夸克分布满足 $s_p(x) = \bar{s}_p(x)$ ，因为从卷积积分可以看出，奇异夸克

和反奇异夸克获取介子圈图贡献的方式不一样，因此质子海中的 $s_p(x) - \bar{s}_p(x)$ 分布的2阶Mellin矩不为零，这叫做奇异夸克对称性破缺。

4.3 Pauli-Villars 数值计算

到此为止，我们分别研究了在Pauli-Villars和非定域正规化中的核子到赝标量介子+SU(3)八重态(或十重态)重子的分裂函数以及中间态强子夸克分布。如(4.9)和(4.12)式所示，物理核子的夸克分布通过卷积积分关联到中间态介子或重子的价夸克分布。这一节我们具体地讨论在Pauli-Villars正规化中的核子奇异夸克对称性破缺。

4.3.1 截断参数 μ_1 和 μ_2 的约束

Pauli-Villars正规化的八重态分裂函数包含两个非物理参数 μ_1 和 μ_2 ，因此进行数值计算之前需要确定截断参数这些参数。在数值计算中为介子和重子质量，选取它们的物理质量，八重态SU(3)耦合常数我们取 $D = 0.85$ 和 $F = 0.41$ ($D + F = 1.26$)，至于八重态-十重态耦合常数 C ，SU(6)对称关系给出 $C = -2D = -1.716$ 。在唯象学上用质子-质子到重子单举产生过程的微分截面来约束截断参数。如果 pp 散射在相对低的能标下进行，可以假设在散射过程中最多发生一个玻色子交换并产生 n 和 Λ 超子，这种假设叫做单玻色子交换机制(OBE)。对于核子奇异和反奇异夸克分布，由于它们跟超子单举产生和 K 介子交换有关，需要用 K 交换机制来确定在壳截断参数 μ_1 。在较大的重子动量比例($1 - y \gtrsim 0.7$)和较小横向动量的 $k_\perp \lesssim 100$ MeV区域内的散射过程中， K 介子交换占主导地位。在介子动量比例 y 很大(比较小的 $1 - y$)的区域内，多介子，重介子以及重子交换成为重要因素 [81, 108]。

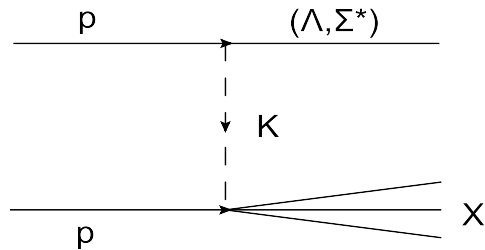


图 4.1: pp 到 Λ 和 Σ^* 单举产生的过程中的 K 介子交换演示图。

在单玻色子交换机制中, 如图4.1 所示, 以 K^+ 介子为交换粒子, Λ 单举产生过程 $pp \rightarrow \Lambda X$ 的不变双微分截面由下式给出 [81, 82]

$$E \frac{d^3\sigma(pp \rightarrow \Lambda X)}{d^3p} = \frac{1-y}{\pi} F_{\Lambda K^+}^{(\text{rw}, \text{on})}(y, k_\perp^2) \sigma_{\text{total}}^{K^+p}(s(1-y)) \quad (4.45)$$

其中 $F_{\Lambda K^+}^{(\text{on})}(y, k_\perp^2)$ 是 k_\perp^2 积分之前的Pauli-Villars 正规化的在壳分裂函数并以已被定义在(3.50)式中, s 是 pp 的总四动量, $\sigma_{\text{tot}}^{pK^+}$ 是当能标 sy 的时候的 pK^+ 总散射截面, 其值为 $\sigma_{\text{tot}}^{pK^+} = (19.9 \pm 0.1) \text{ mb}$ [109]。

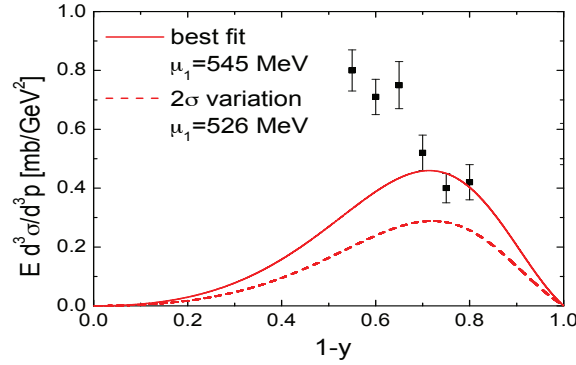


图 4.2: $pp \rightarrow \Lambda X$ 单举产生过程的双微分截面(其中 $k_\perp = 75 \text{ MeV}$ [110]) 随 $1-y$ 的分布。曲线拟合到 $1-y > 0.7$ 区域内数据。实线和虚线分别对应于最佳拟合参数 $\mu_1 = 545 \text{ MeV}$ 和它的 2σ 置信度区域的下限 $\mu_1 = 526 \text{ MeV}$ 。

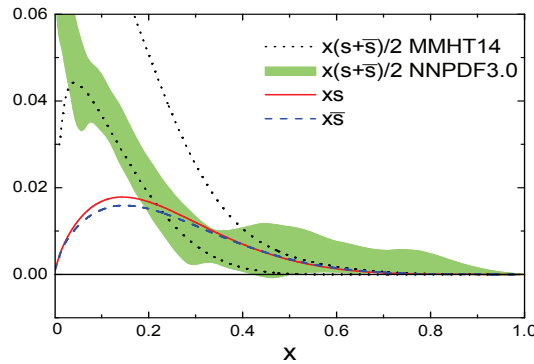


图 4.3: 在Pauli-Villars 正规化中的奇异夸克 $x s$ (红实线) 和反奇异夸克 $x \bar{s}$ (蓝虚线)分布。最佳拟合参数 $\mu_1 = 545 \text{ MeV}$ 和 $\mu_2 = 600 \text{ MeV}$ 对应的数值结果与实验数据(取自NNPDF3.0 [111](黑点线)和MMHT14 [112](绿虚线))的比较。

图(4.2) 中的 Λ 单举产生过程的数据来自 [110], 图中我们展示了当横向动量取 $k_{\perp} = 75$ MeV的时候的微分截面随超子动量比例 $1 - y$ 的分布。通过对数据进行 χ^2 拟合我们发现在 $y < 0.3$ 区域内的最佳拟合截断参数为 $\mu_1 = 545$ MeV, 这时候的最小 χ^2 为 $\chi^2 = 1.06$ 。如果我们取在 $y < 0.4$ 区域内的数据, 得到的最小 χ^2 为 $\chi^2 \approx 3.7$ 。这说明在 $y < 0.4$ 区域内其他非 K 介子贡献开始起作用 [81, 108]。如果考虑额外的非 K 介子贡献, 它们本质上减小 K 介子的贡献并给出比较大的截断参数, 因此我们把最佳拟合参数当成截断参数的上限。另一方面, 介子彩虹图[图3.1(a)]分裂函数的 δ 函数项和介子泡沫图[图3.1(f)]对 $x\bar{s}(x)$ 没有贡献, 这样奇异夸克分布 $xs(x)$ 仍然依赖于来自八重态重子彩虹图[图3.1(b)], Kroll-Ruderman 图[图3.1(c)]和蝌蚪图[图3.1(e)]的非物理截断参数 μ_2 。实际上模型计算不能给出全部的 $x[s(x) + \bar{s}(x)]$ 分布因为它还包含微扰QCD的贡献。所以假设存在一个截断参数 μ_2 它使得总的 $x(s + \bar{s})$ 满足约束条件 $(s + \bar{s})_{\text{loops}} \leq (s + \bar{s})_{\text{tot}}$ 。如图4.3 所示, 当截断参数取最佳拟合参数 $\mu_1 = 545$ MeV 的时候, 我们能自由的调整 μ_2 使得 $x[s + \bar{s}]$ 分布不能超出NNPDF3.0 和MMHT14中的奇异夸克分布, 这给出 $\mu_2 = 600$ MeV。当我们选取截断参数 μ_1 的 1σ 下限 $\mu_1 = 526$ MeV的时候, 上述约束条件给出 $\mu_2 = 894$ MeV。显然, 拟合过程中截断参数 μ_1 和 μ_2 的贡献相互抵消因而使得非微扰分布总 $x[s + \bar{s}]$ 限制在由实验给出的区域内。

4.3.2 质子奇异夸克对称性破缺

利用这些截断参数 (μ_1, μ_2) , 这一节我们给出质子奇异夸克分布以及它的2阶Mellin矩。我们分别考虑截断参数 (μ_1, μ_2) 的上下限 $(\mu_1, \mu_2) = (545, 600)$ MeV 和 $(\mu_1, \mu_2) = (526, 894)$ MeV。截断参数 (μ_1, μ_2) 的取值范围约束质子正反奇异夸克分布的形状和大小。我们首先定义质子奇异和反奇异夸克的 n 阶Mellin矩

$$S^{(n-1)} = \int_0^1 dx x^{(n-1)} s(x), \quad \bar{S}^{(n-1)} = \int_0^1 dx x^{(n-1)} \bar{s}(x). \quad (4.46)$$

由上式进一步定义正反奇异夸克分布之差和之和的 n 阶矩,

$$S^{(n-1)+} = S^{(n-1)} + \bar{S}^{(n-1)}, \quad S^{(n-1)-} = S^{(n-1)} - \bar{S}^{(n-1)} \quad (4.47)$$

分析当中我们更注重在Pauli-Villars 正规化中介子圈图对质子奇异夸克对称性破缺的贡献。根据(1.7)式中的定义, 奇异夸克对称性破缺 S^- 和总奇异夸

克 S^+ 分别满足 $S^- \equiv S^{(1)-}$, $S^+ \equiv S^{(1)+}$ 。为了说明截断参的变化, 图3.2 中我们画了在壳分裂函数, 离壳分裂函数和 δ 函数对 $xs(x)$ 的贡献。如图所示, 在壳分裂函数对 $xs(x)$ 分布的贡献具有独特的分布形状并在 $y \approx 0.3 - 0.4$ 左右取最大值, 当截断参数取最大值 $\mu_1 = 545$ MeV 的时候 $xs(x)$ 的分布非常大。有趣的是, 离壳分裂函数的贡献是负的并在 $y \approx 0.2$ 处取最大值。后者从离壳分裂函数 $f_B^{(\text{off})}$ 的特点可以看出, 因为离壳分裂函数当 $y = 0$ 时候不为零, 在壳分裂函数[(3.44) 式] $y \rightarrow 0$ 的时候反而为零。如果把各种八重态费曼图[图3.1] 对异夸克分布及其Mellin矩的贡献量化, 这有助于我们的理解。如图(4.3)所示, $xs(x)$ 和 $x\bar{s}(x)$ 在 $x > 0$ 内的分布的形状和大小几乎一样。正反奇异夸克分布 $xs(x)$ 和 $x\bar{s}(x)$ 的最大值点是在 $x \approx 0.15$ 左右, 奇异夸克分布稍微大于反奇异夸克分布。对于最佳截断参数 $(\mu_1, \mu_2) = (545, 600)$ MeV [图4.4上半平面], 与重子彩虹图和蝌蚪图相比, Kroll-Ruderman图对 $xs(x)$ 的贡献比较大。通过仔细地观察我们发现, 重子彩虹图, Kroll-Ruderman图和蝌蚪图的离壳函数和 δ 函数项互相抵消。很明显, 总奇异夸克分布可以视为在壳分裂函数的贡献而且离壳和 δ 函数的贡献相对小。这还能解释由相互作用拉氏量导出的Kroll-Ruderman图和蝌蚪图的重要作用, 还能进一步解释以前的在壳运动学框架中的圈图对部分子分布的修正。

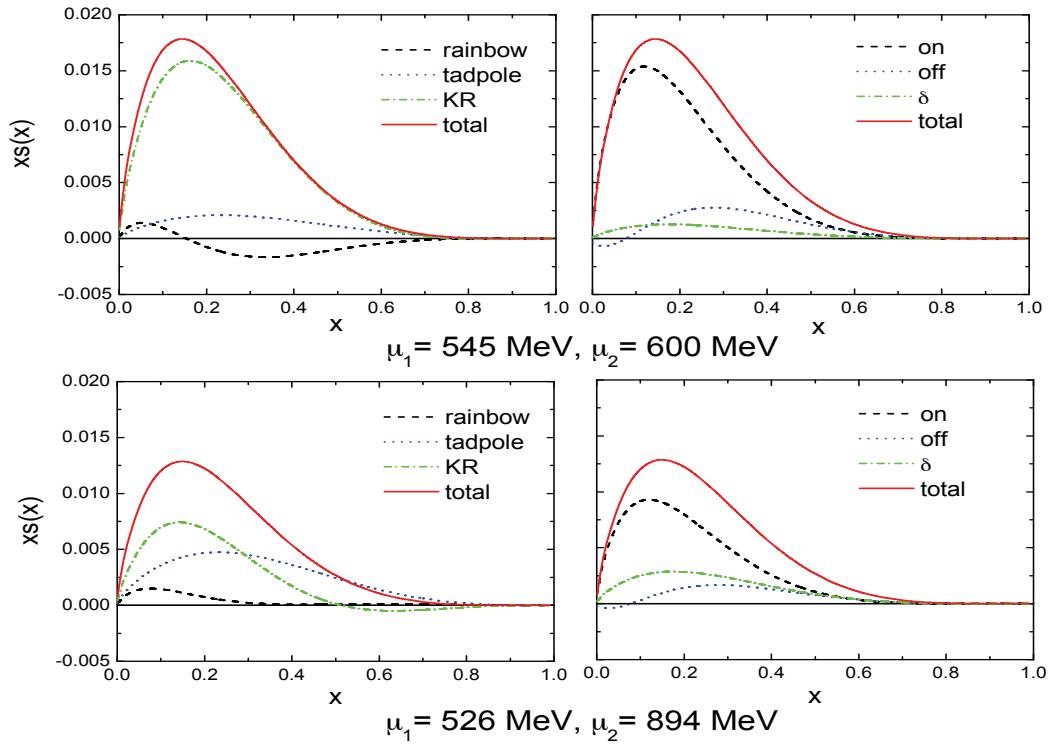


图 4.4: 八重态重子彩虹图[图 3.1(b)], Kroll-Ruderman 图[图 3.1(c)]和蝌蚪图[图 3.1(e)]以及它们的在壳, 离壳和 δ - 函数部分对奇异夸克分布 $x s(x)$ 的贡献, 图中截断参数选取最佳拟合参数 $(\mu_1, \mu_2) = (545, 600) \text{ MeV}$ (上半图) 和 $(\mu_1, \mu_2) = (526, 894) \text{ MeV}$ (下半图)。

对于最佳截断参数 $(\mu_1, \mu_2) = (526, 894) \text{ MeV}$ (图 4.4 下半平面), 总奇异夸克分布的数值点有点小并且 δ -函数项和离壳分裂函数之间的抵消不是那么明显。虽然在壳分裂函数的贡献无法解释总的奇异夸克, 但是它的形状跟总奇异夸克分布类似。当截断参数取 $(\mu_1, \mu_2) = (545, 600) \text{ MeV}$ 的时候, 质子奇异夸克对称性破缺 $x(s - \bar{s})$ 分布在 $x \approx 0.1$ 左右取最大值并且 $x \approx 0.45$ 处改变符号, 这导致在 x 很大和 x 很小的区域内夸克分布的相互抵消。有趣的是, 当截断参数 $(\mu_1, \mu_2) = (526, 894) \text{ MeV}$ 的时候, 质子奇异夸克对称性破缺分布在整个区域内是正的, 这跟以前的在壳分裂函数的结果不一样。手征微扰理论给出的在壳, 离壳和 δ 函数项分别相互抵消, 这导致质子奇异数为零。但是 δ 函数对 $x \bar{s}(x)$ 的贡献为零, 所以正反夸克分布无法完全抵消。在基于数据的PDF分析结果中不存在这样的分布特点。同样地, 由截断参数 (μ_1, μ_2) 得

出的质子奇异夸克对称性破缺为 $0.42 \times 10^{-3} < S^- < 1.12 \times 10^{-3}$ ，这跟实验数据 $-0.001 < S^- < 0.004$ 一致 [113, 114]。这时候的质子总奇异夸克分布为 $7.84 \times 10^{-3} < S^+ < 11.78 \times 10^{-3}$ ，这占实验数据的(30-44)%，其中实验值为 $0.018 < S^+ < 0.04$ [115, 116]。如前面所述，核子总奇异夸克由微扰和非微扰部分组成，大部分奇异夸克分布在微扰过程中产生的，因此非微扰模型计算给出的结果小于实验值。

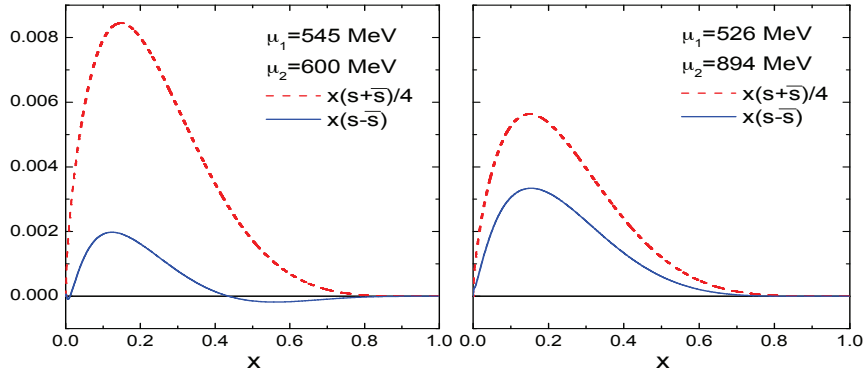


图 4.5: P-V 正规化给出的总奇异夸克 $x(s + \bar{s})$ (分布按1/4比例缩小)和奇异夸克对称性破缺 $x(s - \bar{s})$ 分布。截断参数取最佳拟合参数 $(\mu_1, \mu_2) = (545, 600)$ MeV (左边) 和 $(\mu_1, \mu_2) = (526, 894)$ MeV (右边)。

4.4 非定域数值计算

从上一节的内容可以看出，在Pauli-Villars 正规化中，奇异夸克对称性破缺仍然依赖于两个参数，从本质上看，这跟定域情况下的结果一样 [29]。在非定域框架中，正如前面所述，所有的分裂函数的形状和大小只依赖于一个截断参数 Λ 。我们除了对非定域正规化的数值结果感兴趣之外，更关心的是在各种正规化框架中的结果是否一致。所以作为一个比较，首先考虑在非定域框架中的核子海夸克味道对称破缺。

4.4.1 核子味道对称性破缺 $\bar{d} - \bar{u}$

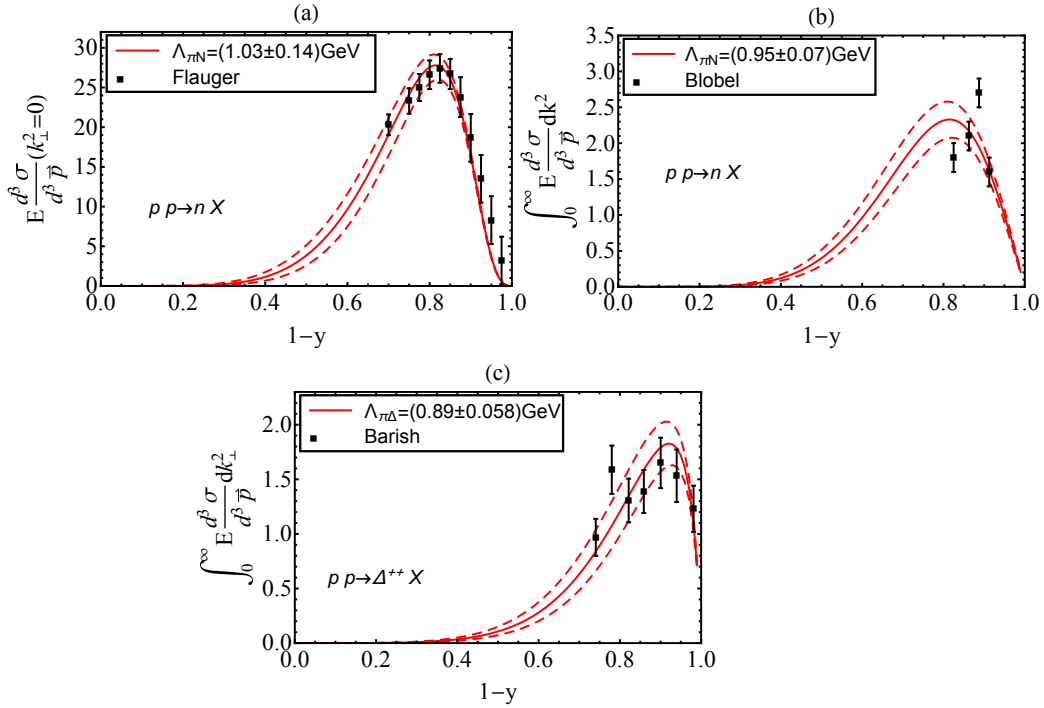


图 4.6: $pp \rightarrow nX$ 双微分截面(其中 $k_{\perp}^2 = 0$)随 $1-y$ 的分布 (a), $pp \rightarrow nX$ 单微分截面随 $1-y$ 的分布(b), $pp \rightarrow \Delta^+ + X$ 单微分截面随 $1-y$ 的分布(c)。红实和虚线分别代表最佳拟合参数和它的 1σ 置信度区域。数据来自 [117–119]。

核子味道对称性破缺 $\bar{d} - \bar{u}$ 以前在不同的正规化方案中被研究过，比如锐截断和有效顶角形状因子 [29, 90, 120]。为了完整性，我们计算在非定域模型中的核子味道对称性破缺。根据(4.9)式，费曼图3.1 中只有 π 介子彩虹图[图3.1(a)]

,(h)]和泡沫图[图3.1(f)]对核子海夸克分布有贡献,但是反夸克的味道由交换介子的类型决定,比如,借鉴(4.48)和(4.49)式,核子海中的反上下夸克分布分别定义为

$$\bar{d}(x) = [(f_{\pi^+n} + f_{bub,\pi^+} + f_{\pi^+\Delta^0}) \otimes \bar{q}_\pi](x), \quad (4.48)$$

$$\bar{u}(x) = [f_{\pi^-\Delta^{++}} \otimes \bar{q}_\pi](x), \quad (4.49)$$

另外我们还需要确定截断参数 Λ ,它随正规化因子 $F(k)$ 的不同而有所区别。跟以前的锐截断或Pauli–Villars 正规化方案相比,非定域模型中所有的分裂函数只依赖一个非物理量-正规化因子的截断参数 Λ 而且这样一个有限的截断参数使得所有的圈图贡献收敛,因此我们只需要确定一个截断参数。另一方面,重子单举产生过程中的微分散射截面通过相应的分裂函数关联到质子–介子总散射截面 [90]。这样我们由微分散射数据定出截断参数 Λ 。类似于4.45 式,中子单举产生过程的微分截面等于 $pp \rightarrow nX$ 的在壳分裂函数和质子 π 介子总散射截面之积,即

$$E \frac{d^3\sigma(pp \rightarrow nX)}{d^3p} = \frac{1-y}{\pi} F_{n\pi^+}^{(rbw,on)}(y, k_\perp^2) \sigma_{tot}^{\pi^+p}(s\bar{y}), \quad (4.50)$$

其中 $F_{n\pi^+}^{(on)}(y, k_\perp^2)$ 是 k_\perp^2 积分之前的在壳分裂函数,它由(3.67) $f_{n\pi^+}^{(on)}(y) = \int dk_\perp^2 F_{n\pi^+}^{(on)}(y, k_\perp^2)$ 式给出,其中 X 包括所有的末态粒子之和。 $\sigma_{tot}^{\pi^+p}(s\bar{y})$ 是质子 π 介子总散射截面,其值为 $\sigma_{tot}^{\pi^+p} = (23.8 \pm 0.1) \text{ mb}$ [121]。类似于八重态重子, Δ 共振态的微分截面由下式给出

$$E \frac{d^3\sigma(pp \rightarrow \Delta^{++}X)}{d^3p} = \frac{\bar{y}}{\pi} [F_{\Delta^{++}\pi^-}^{(rbw,on)}(y, k_\perp^2) + F_{\Delta^{++}\pi^-}^{(rbw,on,end)}(y, k_\perp^2)] \sigma_{tot}^{\pi^-p}(s\bar{y}), \quad (4.51)$$

其中 $F_{\Delta^{++}\pi^-}^{(on)}(y, k_\perp^2)$ 和 $F_{\Delta^{++}\pi^-}^{(on,end)}(y, k_\perp^2)$ 分别代表 k_\perp^2 -积分之前的十重态在壳和在壳边界分裂函数,它们已在(3.93)和(3.95)式中被定义。 $\sigma_{tot}^{\pi^-p}(s\bar{y})$ 是 π^-p 的散射总截面并且假设散射截面满足对称性 $\sigma_{tot}^{\pi^-p}(s\bar{y}) = \sigma_{tot}^{\pi^+p}(s\bar{y})$ 。

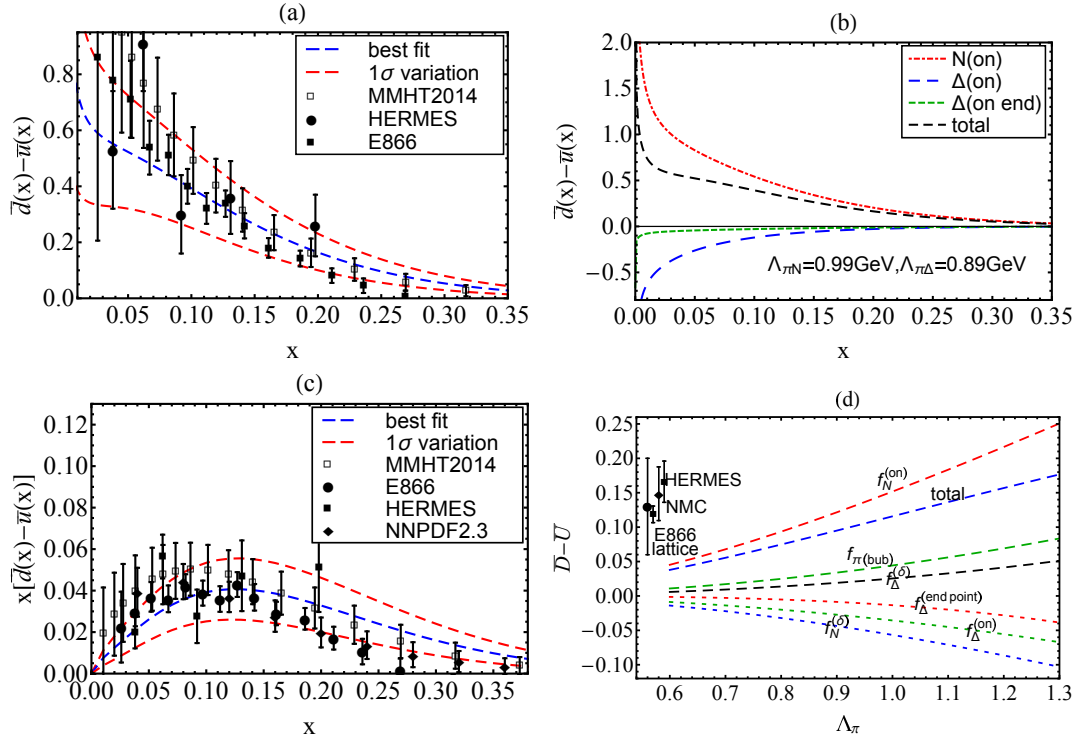


图 4.7: 质子味道对称性破缺 $\bar{d}(x) - \bar{u}(x)$ 随 x 的分布[截断参数取最佳拟合值 $(\Lambda_{\pi N}, \Lambda_{\pi \Delta}) = (0.99 \pm 0.1, 0.89 \pm 0.058)$ GeV] 与实验数据比较(a), 八重态在壳, 十重态在壳和十重态在壳边界分布对 $\bar{d}(x) - \bar{u}(x)$ 分布的贡献[截断参数取最佳拟合值 $(\Lambda_{\pi N}, \Lambda_{\pi \Delta}) = (0.99 \pm 0.1, 0.89 \pm 0.058)$ GeV] (b), 质子 $x[\bar{d}(x) - \bar{u}(x)]$ 分布[截断参数取最佳拟合值 $(\Lambda_{\pi N}, \Lambda_{\pi \Delta}) = (0.99 \pm 0.1, 0.89 \pm 0.058)$ GeV] 与实验数据比较(c)。八重态和十重态在壳, 在壳边界和 δ 函数对味道对称性破缺的1阶矩Mellin随截断参数 Λ_π 的变化(d)。数据来自 [122–126, 138]。

我们首先分析中子单举产生过程 $pp \rightarrow nX$ 的双微分截面(横向动量取 $k_\perp^2 = 0$)随质子动量比例 $1 - y$ 的分布。对数据进行 χ^2 -拟合得到的最佳截断参数为 $\Lambda_{\pi N} = 1.03$ GeV, 这时候的 χ^2 的最小值等于 $\chi^2_{\min} = 7.99$ 。如图4.6(a) 所示, 红色实线和虚线分别代表最佳拟合参数 $\Lambda_{\pi N}$ 和它的 1σ 置信度区域 $\Lambda_{\pi N} = 1.03 \pm 0.14$ GeV。应当注意的是 π 介子交换过程主要在 $1 - y > 0.6$ 区域内占主导地位, 因此我们可以忽略 $1 - y$ 比较小的区域内的数据。同样地, $pp \rightarrow nX$ 单微分截面给出的最佳截断参数为 $\Lambda_{\pi N} = 0.95 \pm 0.07$ GeV, 显然这稍微小于由双微分截面定出的结果。图4.6(b) 中我们画了单微分截面和最佳拟合截断参数及其 1σ 置信

度区域。因为我们没有 Δ^{++} 单举产生过程 $pp \rightarrow \Delta^{++} X$ 的双微分截面数据，因此在图4.6(c)中，我们对 k_{\perp}^2 -积分后的微分截面与数据进行了比较。用同样的方法， Δ^{++} 单举产生过程的最佳拟合参数及其误差定出为 $\Lambda_{\pi\Delta} = 0.89 \pm 0.058$ GeV。对于八重态断参数 $\Lambda_{\pi N}$ ，结合由双微分截面和单微分截面定出的最佳拟合参数 $\Lambda_{\pi N}$ 我们选取一个平均拟合参数 $\Lambda_{\pi N} = 0.99 \pm 0.1$ GeV。利用这些截断参数 $\Lambda_{\pi N}$ 和 $\Lambda_{\pi\Delta}$ ，我们能确定核子味道对称性破缺。根据卷积积分(4.48)和(4.49)，只有图3.1(a)，3.1(b)和3.1(c)对质子海夸克分布 \bar{d} 和 \bar{u} 有贡献。另一方面，除了 $x = 0$ 点之外，分裂函数中的 δ 函数项部分对味道对称性破缺的贡献为零，但是，它对味道对称性破缺的1阶Mellin矩 $\bar{D} - \bar{U} \equiv \int_0^1 dx [\bar{d}(x) - \bar{u}(x)]$ 有贡献。因此最佳拟合参数 $(\Lambda_{\pi N}, \Lambda_{\pi\Delta}) = (0.99, 0.89)$ GeV给出的味道对称性破缺的中心值为 $\bar{D} - \bar{U} = 0.125$ ，截断参数 $\Lambda_{\pi N}$ 和 $\Lambda_{\pi\Delta}$ 的 1σ 置信度区域给出 $0.087 < (\bar{D} - \bar{U}) < 0.165$ ，如表4.7所示，模型结果跟实验数据和PDF拟合组给出的结果吻合。味道对称性破缺在 $0 < x < 0.35$ 内的分布 $\bar{d}(x) - \bar{u}(x)$ 和 $x[\bar{d}(x) - \bar{u}(x)]$ 展示在图4.7(a)和(b)中。红线和绿线分别对应于最佳拟合截断参数 $\Lambda_{\pi N}$ 和 $\Lambda_{\pi\Delta}$ 和它们的 1σ 置信区域。图4.7(c)中，我们画了在壳分裂函数，离壳分裂函数和边界分裂函数对味道对称性破缺分布的贡献。从图可以看出味道对称破缺中八重态重子贡献占主导地位，十重态分裂函数的贡献反而被严重压低而且符号与八重态贡献相反，这种特点从以前的定域手征理论给出的结果中也可以看出[29]。此外，由于在壳边界项对 $\bar{d}(x) - \bar{u}(x)$ 分布的贡献比较小，非定域在壳十重态贡献几乎跟在壳运动学框架中的结果一样。图4.7(d)中，各基础函数以及总的对称性破缺随截断参数 $\Lambda_{\pi} = \Lambda_{\pi N} = \Lambda_{\pi\Delta}$ 的演化。从图中我们可以看出在 $0.6\text{GeV} < \Lambda_{\pi} < 1.3\text{GeV}$ 内总味道对称性破缺 $\bar{D} - \bar{U}$ 从0.0378变到0.178。除此之外，八重态在壳分裂函数的贡献对 Λ_{π} 的依赖性比其他部分强。此外，非定域模型给出的 $\bar{d}(x) - \bar{u}(x)$ 分布和 $\bar{D} - \bar{U}$ 随截断参数 Λ_{π} 的演化跟以前的定域模型给出的结果一致而且很大程度上减小了截断参数的个数。另一方面，非定域计算中考虑了赝矢量耦合给出的所有可能的贡献，包括在壳分裂函数和 δ 函数。从图4.7(d)中可以看出，虽然各分裂函数中的 δ 项对核子海夸克分布有可观的贡献，但是最终各种 δ 函数项的贡献相互抵消因而显示出在壳贡献占主导地位的图景。

表 4.7: 不同PDF拟合组和实验组给出的质子味道对称性破缺 $\bar{d}(x) - \bar{u}(x)$ 的1阶Mellin 矩 $\bar{D} - \bar{U}$ 。(表取自 [129])。

$\langle Q^2 \rangle$	CT10 [136]	MSTW2008 [137]	NNPDF2.3 [138]	Experiment
2.3 GeV ²	0.129(1)	0.079(1)	0.137(3)	0.16(3) (HERMES [123])
4 GeV ²	0.129(1)	0.079(1)	0.138(3)	0.148(39) (NMC [124])
54 GeV ²	0.130(1)	0.080(1)	0.139(3)	0.118(12) (E866 [122])

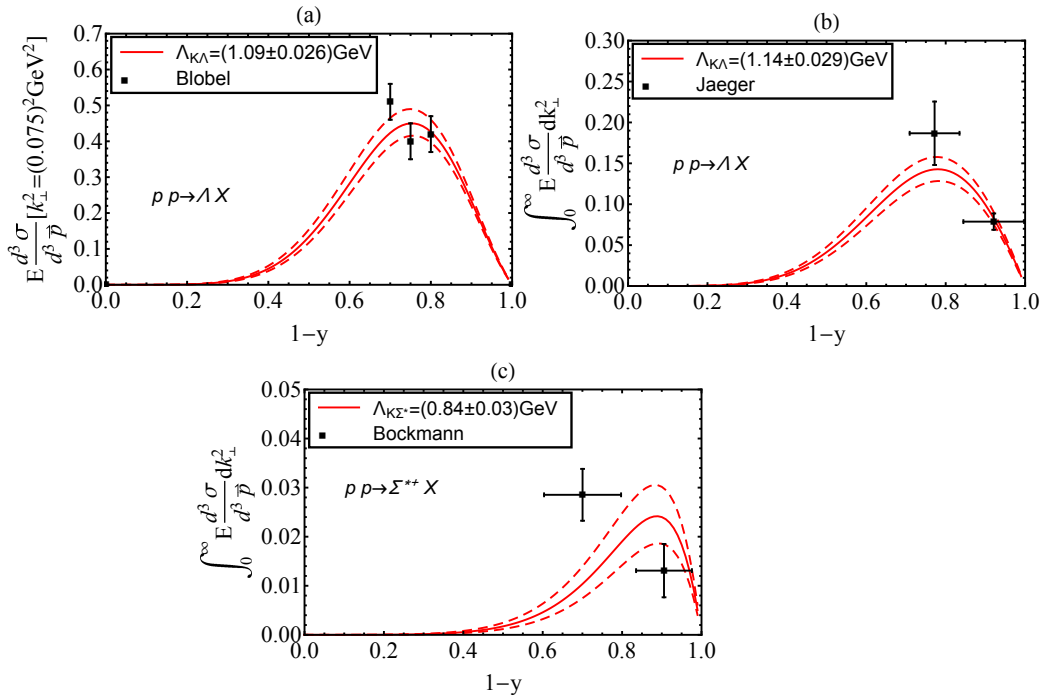


图 4.8: $pp \rightarrow \Lambda X$ 双微分截面随(其中 $k_{\perp}^2 = 0.075^2 \text{ GeV}^2$) $1 - y$ 的分布 (a), $pp \rightarrow \Lambda X$ 单微分截面随 $1 - y$ 的分布(b), $pp \rightarrow \Sigma^{*+} X$ 单微分截面(其中 k_{\perp}^2 被积掉)随 $1 - y$ 的分布(c)。红实线与红虚线分别代表最佳拟合参数和它的 1σ 置信度区域, 数据来自 [118, 130, 131]

4.4.2 奇异夸克对称性破缺 $s - \bar{s}$

质子海中的奇异夸克分布可以归纳为中间态超子和 K 介子的贡献, 为此需要确定 K 介子交换过程中的截断参数 Λ_K 。根据(4.45)式, 质子-质子散射到八重态 Λ 超子, 十重态超子 Σ^{*+} 单举产生过程的微分截面与对应的分裂函数关系

可以写为

$$E \frac{d^3\sigma(pp \rightarrow \Lambda X)}{d^3p} = \frac{1-y}{\pi} F_{\Lambda K^+}^{(\text{rbw, on})}(y, k_\perp^2) \sigma_{total}^{K^+p}(s(1-y)) \quad (4.52)$$

和

$$E \frac{d^3\sigma(pp \rightarrow \Sigma^{*+} X)}{d^3p} = \frac{1-y}{\pi} [F_{\Sigma^{*+} K^0}^{(\text{rbw, on})}(y, k_\perp^2) + F_{\Sigma^{*+} K^0}^{(\text{rbw, on end})}(y, k_\perp^2)] \sigma_{total}^{K^0p}(s(1-y)), \quad (4.53)$$

其中 $F_{\Lambda K^+}^{(\text{rbw, on})}(y, k_\perp^2)$, $F_{\Sigma^{*+} K^+}^{(\text{rbw, on})}(y, k_\perp^2)$ 和 $F_{\Sigma^{*+} K^+}^{(\text{rbw, on end})}(y, k_\perp^2)$ 分别是 Λ 和 Σ^* 超子积分之前的在壳和在壳边界分裂函数, 它们已经被定义在(3.92) 和(3.67)式中, $\sigma_{total}^{K^+p}[s(1-y)]$ 是质子- K 介子散射总截面, 其实验值为 $\sigma_{total}^{K^+p} = (19.9 \pm 0.1)$ mb [121]。至于 K^0 介子-质子总散射截面 $\sigma_{total}^{K^0p}(s(1-y))$, 我们假设 K^0p 总散射截面满足电荷对称性, 即 $\sigma_{total}^{K^0p}(s(1-y)) = \sigma_{total}^{K^+n}(s(1-y))$, 因此 K^+n 总散射截面的实验值为 $\sigma_{total}^{K^+n}(s(1-y)) = 19.72 \pm 0.11$ mb [132]。采用拟合 π 介子截断参数过程中的方法, 由 Λ 超子单举产生过程 $pp \rightarrow \Lambda X$ 的双微分截面得出的最佳拟合参数为 $\Lambda_{K\Lambda} = 1.09 \pm 0.026$, 这对应于 χ^2 的最小值 $\chi_{\min}^2 = 4.01$ 。图4.8(a) 中我们对最佳拟合参数对应散射截面分布以及其误差和数据进行了比较。图4.8(b)和4.8(c)中我们展示了当截断参数 $\Lambda_{K\Lambda} = 1.14 \pm 0.029$ GeV 和 $\Lambda_{K\Sigma^*} = 0.84 \pm 0.03$ GeV 的时候, 单举产生过程 $pp \rightarrow \Lambda X$ 和 $pp \rightarrow \Sigma^* X$ 的微分截面随重子动量比例 $(1-y)$ 的分布。由 Λ 超子产生过程 $pp \rightarrow \Lambda X$ 定出的双微分和单微分截面截断参数 $\Lambda_{K\Lambda}$, 我们选取一个平均的 Λ 超子截断参数 $\Lambda_{K\Lambda} = 1.12 \pm 0.0275$ GeV。利用这些截断参数 $\Lambda_{K\Lambda}$ 和 $\Lambda_{K\Sigma^*}$, 我们能确定质子奇异夸克分布。根据卷积积分(4.12) 和(4.9)式, 费曼图3.1 (a), 3.1 (b) 和3.1 (c)对质子反奇异夸克分布 $\bar{s}(x)$ 有贡献, 其他费曼图对奇异夸克分布 $s(x)$ 有贡献。

表 4.8: 各费曼图对奇异夸克/反奇异的贡献($\times 10^{-2}$)。 $S_{oct}^{(0)}$ 和 $S_{dec}^{(0)}$ 分别是八重态和八重态对总奇异夸克的贡献。

$(\Lambda_{K\Lambda}, \Lambda_{K\Sigma^*})$ (GeV)	a	b	c	d	e	f	g	$S_{oct}^{(0)}$	h	i	j	k	$S_{dec}^{(0)}$	$S^{(0)+}$
(1.15, 0.87)	1.03	2.13	0.75	-1.85	5.89	1.96	-3.93	2.99	0.59	1.54	0.34	-1.30	0.59	7.16
(1.15, 0.81)	1.03	2.13	0.75	-1.85	5.89	1.96	-3.93	2.99	0.46	1.18	0.33	-1.05	0.46	6.90
(1.09, 0.87)	0.82	1.68	0.69	-1.55	4.70	1.53	-3.17	2.35	0.59	1.54	0.34	-1.30	0.59	5.88
(1.09, 0.81)	0.82	1.68	0.69	-1.55	4.70	1.53	-3.17	2.35	0.46	1.18	0.33	-1.05	0.46	5.63

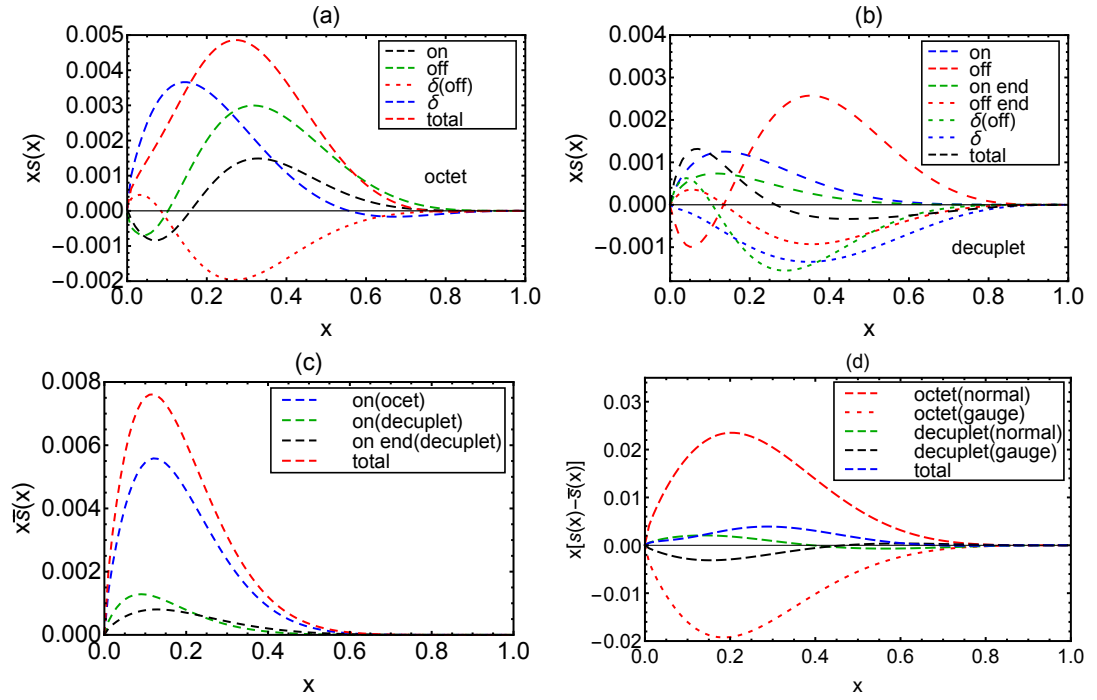


图 4.9: 奇异和反奇异夸克当截断参数 $(\Lambda_{K\Lambda}, \Lambda_{K\Sigma^*}) = (1.12, 0.84)$ GeV 的时候随 x 的分布。八重态在壳, 离壳, 规范连接, δ 函数和总分裂函数对奇异夸克分布的贡献(a), 十重态在壳, 离壳, 在壳边界, 离壳, 规范连接和 δ 函数和总贡献对奇异夸克的分布的贡献(b) 八重态在壳, 十重态在壳和十重态在壳边界对反奇异夸克分布的贡献(c), 八重态正常项, 八重态规范连接, 十重态正常项, 十重态规范连接和总贡献对 $x[s(x) - \bar{s}(x)]$ 的贡献(d)。

每个费曼图对正反奇异夸克的1阶Mellin矩 $S^{(0)}$ 和 $\bar{S}^{(0)}$ 在最佳拟合参数 $(\Lambda_{K\Lambda}, \Lambda_{K\Sigma^*})$ 及其 1σ 置信度区域内的贡献列在表4.8中。根据规范不变性条件(3.85), (3.89) 和(3.118)式, 八重态彩虹图[图3.1(a-d)], 蝌蚪-泡沫图[图3.1(e-g)]和十重态彩虹图[图3.1(h-k)]对奇异数的贡献分别为零, 这意味着跟规范连接图的贡献一起总的奇异数为零。此外, 介子彩虹图(包括八重和十重重子中间态)和泡沫图的贡献等于所有的其他图的贡献。值得注意的是, 蝌蚪图[图3.1(e)]和蝌蚪规范连接图[图3.1(g)]对奇异夸克分布的1 阶Mellin 矩的贡献比较大甚至超出八重态和十重态彩虹图的贡献。这主要是因为八重态超子彩虹图的有效耦合常数小于对应的 K 介子蝌蚪图, 介子泡沫图和蝌蚪规范连接图的有效耦合常数。此外如果考虑单个费曼图的贡献, 八重态和十重态彩虹图的贡献几乎一样大。这可

能是因为，一方面十重态耦合常数比较大，另一方面，与核子- Δ 共振态耦合相比，八重态超子-核子质量差 Δ 和十重态超子-核子质量差 Δ_T 之间的差别不大。

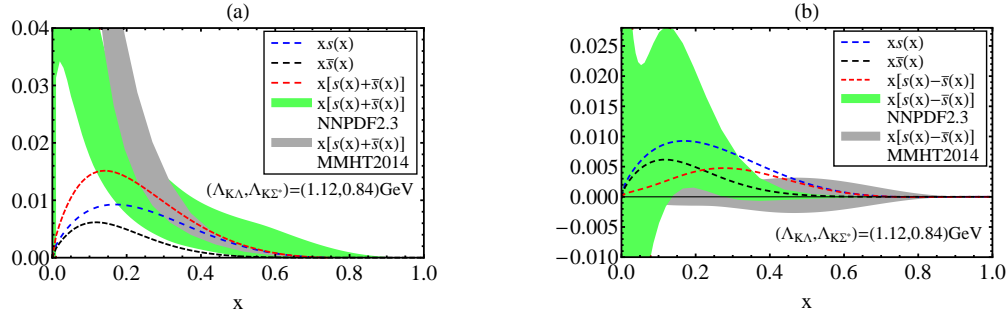


图 4.10: 质子总奇异夸克分布 $x[s(x) + \bar{s}(x)]$ (a)和奇异夸克对称性破缺分布 $x[s(x) - \bar{s}(x)]$ (b)。截断参数取最佳拟合值 $(\Lambda_{K\Lambda}, \Lambda_{K\Sigma^*}) = (1.12, 0.84)$ GeV。数据来自 [126, 138]。

在壳分裂函数，离壳分裂函数，规范连接分裂函数和 δ 函数对 $xs(x)$ 的贡献以及总的 $xs(x)$ 被画在图4.9(a)中。虽然在壳分裂函数，离壳分裂函数和规范连接函数对 $xs(x)$ 的贡献随 x 增大而改变符号，但是总结果一直是正的并且在 $x = 0.3$ 处左右取最大值。跟Pauli-Villars正规化给出的结果相比，非定域离壳分裂函数，规范连接分裂函数和 δ 函数的贡献比较大，虽然离壳和规范连接图的贡献抵消的很多，但是 δ 函数的贡献不能抵消。同样地，十重态在壳分裂函数，离壳分裂函数，在壳边界分裂函数，离壳分裂函数，规范连接分裂函数和 δ 函数对 $xs(x)$ 的贡献展示在图4.9(b)中。除此之外，八重态和十重态对反奇异夸克分布的贡献被演示在图4.9(c)中。图4.9(d)中我们展示了八重态正常，和规范连接，十重态正常图和规范连接以及总的奇异夸克分布。这里正常费曼图指的是图3.1中从定域守恒流有关的图，额外图则指的是跟额外规范连接流有关的费曼图3.1(f)，3.1(i)和3.1(k)。从图中可以看出规范连接图和正常图贡献的大小几乎一样符号相反，因此它们的贡献互相抵消。 $x[s(x) + \bar{s}(x)]$ 和 $x[s(x) - \bar{s}(x)]$ 的理论值以及来自NNPDF2.3和MMHT2014的实验数据被展示在图中。图4.10(a)和(b)中，我们发现模型计算给出的 $x[s(x) + \bar{s}(x)]$ 分布明显地小于总的 $x[\bar{s}(x) + s(x)]$ 分布的上限。这符合跟以前的非微扰假设即非微扰奇异夸克分布必须小于总的夸克分布。跟以前的Pauli-Villars正规化结果

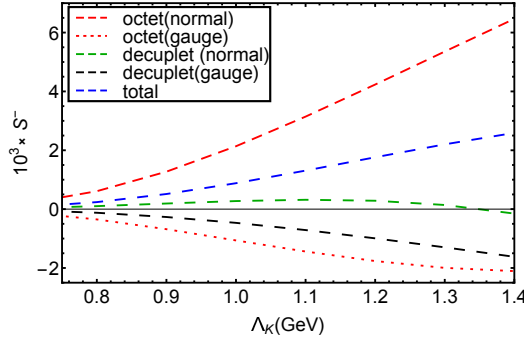


图 4.11: 质子奇异夸克对称性破缺 S^- 随截断参数 Λ_K 的变化。曲线分别代表八重态正常图, 八重态规范连接图, 十重态连接图和十重态规范连接图的贡献。

相比, $xs(x)$ 和 $x\bar{s}(x)$ 分布它们集中在 $0.1 < x < 0.2$ 内。图 4.11 中, 各种费曼图对 S^- 的贡献以及总的 S^- 随截断参数 $\Lambda_K = \Lambda_{K\Lambda} = \Lambda_{K\Sigma^*}$ 的演化。我们发现当截断参数 Λ_K 从 0.7 GeV 变到 1.4 GeV 的时候 $S^- = S^{(1)} - \bar{S}^{(1)}$ 从 0.07×10^{-3} 变到 0.74×10^{-3} 。

表 4.9: 各费曼图对奇异和反奇异夸克 2 阶 Mellin 矩的贡献 ($\times 10^{-3}$), 其中 $S_{oct}^{(1)}$ 和 $S_{dec}^{(1)}$ 分别表示八重态和十重态贡献。

$(\Lambda_{K\Lambda}, \Lambda_{K\Sigma^*})$ (GeV)	a	b	c	d	e	g	$S_{oct}^{(1)}$	h	i	j	k	$S_{dec}^{(1)}$	S^-	S^+
(1.15, 0.87)	1.66	2.78	-0.65	-1.60	9.56	-6.38	3.71	0.81	1.41	0.046	-1.31	0.14	1.38	6.33
(1.15, 0.81)	1.66	2.78	-0.65	-1.60	9.56	-6.38	3.71	0.62	1.08	0.13	-1.09	0.13	1.56	6.12
(1.09, 0.87)	1.28	2.19	-0.33	-1.41	7.62	-5.14	2.93	0.81	1.41	0.046	-1.31	0.14	0.98	5.17
(1.09, 0.81)	1.28	2.19	-0.33	-1.41	7.62	-5.14	2.93	0.62	1.08	0.13	-1.09	0.13	1.16	4.97

各图对奇异夸克分布 2 阶 Mellin 矩在最佳拟合参数 $(\Lambda_{K\Lambda}, \Lambda_{K\Sigma^*})$ 及其 1σ 置信度区域内的贡献列在表 4.9 中。因为介子泡沫图 3.1(c) 正比于 $\delta(y)$, 因此它对 $xs(x)$ 没有贡献。从图中可以看出, 与奇异夸克的 1 阶 Mellin 矩相比 2 阶 Mellin 矩小一个量级, 八重态贡献大概 3 倍小于十重态图的贡献。如图 4.9 所示, 十重态图对 S^- 贡献与八重态贡献相比小的很多而且其符号与八重态相反, 这对 1 阶 Mellin 矩和 2 阶 Mellin 矩同样成立。由最佳拟合参数 $\Lambda_{K\Lambda}$ 和 $\Lambda_{K\Sigma^*}$ 及其误差限制的总奇异夸克对称性破缺 S^- 在 $0.98 \times 10^{-3} < S^- < 1.56 \times 10^{-3}$ 范围之内, 这跟由实验数据定出的范围 $-0.001 < S^- < 0.004$ 一致 [113, 114]。另一方面, 奇异夸克对称性破缺跟核子非微扰结构有关因此它几乎不依赖于 Q^2 , 这样的特性也可以从 4.10 表中能看出来。非定域模型给出的 S^+ 在截断参数 $\Lambda_{K\Lambda}$ 和 $\Lambda_{K\Sigma^*}$ 的

置信区域内等于 $4.97 \times 10^{-3} < S^+ < 6.33 \times 10^{-3}$, 这能解释实验值的(16–27)%, 而且非定域结果稍微小于Pauli-Villars正规化给出的值。Pauli-Villars 正规化结果之所以大于非定域结果, 一方面Pauli-Villars 正规化结果不包含十重态结果, 因为在非定域正规化中十重态重子贡献与八重态贡献相反, 这显然减小总奇异夸克分布。另一方面我们无法辨别截断参数的不确定性所引起的效应, 因为截断参数越多拟合需要的物理量的不确定性越多。

表 4.10: 来自不同的PDF拟合组的奇异夸克对称性破缺 $[S^-](Q^2)$ 和它们的误差, 其中误差对应于68% 置信区域。 $[S^-](Q_{\text{ref}}^2 = 20 \text{ GeV}^2) \cdot 10^3$ 代表NLO 微扰演化 $Q^2 = 20 \text{ GeV}^2$ (表格来自. [139])。

Analysis	Reference	$[S^-](Q^2) \cdot 10^3$	$Q^2 [\text{GeV}^2]$	$[S^-](Q_{\text{ref}}^2 = 20 \text{ GeV}^2) \cdot 10^3$
NNPDF1.2	[139]	0.5 ± 8.6	20	0.5 ± 8.6
MSTW08	[137]	2.4 ± 2.0	1	1.7 ± 1.4
CTEQ6.5s	[115]	2.0 ± 1.8	1.69	1.6 ± 1.4
CTEQ6.1s	[114]	1.5 ± 1.5	1.69	1.2 ± 1.2
AKP08	[140]	1.0 ± 1.3	20	1.0 ± 1.3
NuTeV07	[141]	2.2 ± 1.3	16	2.2 ± 1.3
BPPZ03	[142]	1.8 ± 3.8	20	1.8 ± 3.8

4.4.3 非定域和Pauli-Villars 正规化的比较

一般, 在不同正规化方案中算出来的物理量的解析表达式不一样, 比如电磁形状因子和分裂函数随正规因子 $F(k)$ 的不同而不同。但是最终给出的结果可能一样因为它们还依赖于另一组未知参数, 比如 Λ 或 μ_1 。 Λ 随正规化方案的不同而不同, 因此这些截断参数在某种程度上减弱模型结果对正规化方案的依赖性。这一节我们通过观察, 对非定域和Pauli-Villars 正规化的单举过程的微分截面分布进行一个简单的比较。跟非定域正规化一样, 根据(4.50-4.53) 式, 得到微分截面与Pauli-Villars 正规化的在壳分裂函数的关系。Pauli-Villars 正规化的八重态在壳分裂函数被给出在(3.50)式中, 十重态在壳分裂函数由下式给出 [133],

$$f_{\phi T}^{(\text{rbw, on})}(y) = \int dk_{\perp}^2 \frac{C_{T\phi}^2 \bar{\Lambda}^8}{(4\pi f_{\phi})^2} \frac{y [k_{\perp}^2 + (yM - \bar{M}_T)^2]^2 [k_{\perp}^2 + (yM + \Delta_T)^2]}{6M_T^2 D_{\phi T}^2 D_{\Lambda T}^4 \bar{y}^4} \left(1 + 4 \frac{D_{\phi T}}{D_{\Lambda T}}\right),$$

其中符号已定义在第三章中。如图. 4.12 (a), (c)所示, 如果我们采用非定域正规化方案, 中子和 Λ 超子单微分截面给出的最佳拟合参数 Λ 几乎一样, 十重态

重子截断参数 Λ 也基本上相等。但是在Pauli-Villars正规化中,中子单举产生过程给出比较小的拟合参数 Λ ,而且中子和 Λ 超子的截断参数之间的差别较大。另一方面两种正规化方法给出的微分截面 $1-y$ 分布在 $0.85 < 1-y < 1$ 区域内几乎重叠。对于十重态来说[图. 4.12 (b) 和(d)],在两种情况下, Δ^{++} 和 Σ^{*+} 的截断参数比较接近。这些特点也可以从八重态和十重态在壳分裂函数的解析表达式中看出来。比如,在Pauli-Villars正规化中,如果忽略十重态在壳分裂函数(4.54)式的最后一项,它跟非定域正规化结果一样。但是P-V正规化的八重态分裂函数不能回到非定域情况因为传播子因子 $\frac{1}{D_{\Lambda T}^2}$ 只能在 $F(k)$ 为单极矩正规化因子的情况下出现。

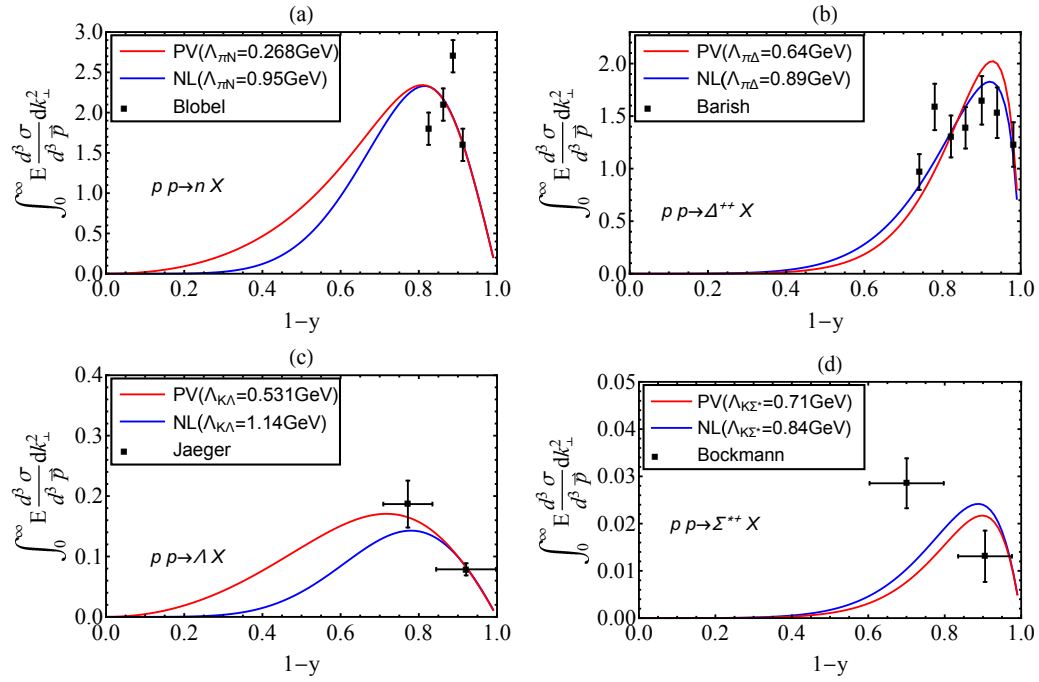


图 4.12: 单举过程(a) $pp \rightarrow nX$, (b) $pp \rightarrow \Delta^{++}X$, (c) $pp \rightarrow \Lambda X$ 和(d) $pp \rightarrow \Sigma^{*+}X$ 的单微分截面(其中 k_\perp^2 被积掉)随 $1-y$ 的分布, 其中非定域和Pauli-Villars 正规截断参数取它们的最佳拟合参数。

4.4.4 本章总结

数值计算中,首先需要确定分裂函数中的截断参数 Λ 和 (μ_1, μ_2) 。在Pauli-Villars正规化中,分裂函数依赖于 (μ_1, μ_2) ,它们由 Λ 超子单举产生的微分截面定出。通过拟合得到的截断参数为 $(\mu_1, \mu_2) = (545, 600) \text{ MeV}$ 和 $(\mu_1, \mu_2) =$

(526, 894) MeV, 对应的核子奇异夸克对称性破缺为 $0.42 \times 10^{-3} < S^- < 1.12 \times 10^{-3}$ 。在非定域正规化中, 所有的分裂函数包含一个截断参数 Λ 。理论上截断参数 Λ 依赖于非定域的介子类型和质量。对质子味道对称性来说, 正如前面所述, 反上下夸克分布可以归纳为 π 介子的贡献, 反奇异夸克分布则来自于 K 介子的贡献。对于这样的 π 和 K 介子中间态, 它们的截断参数拟合到质子- 质子到重子单举产生过程的微分散射截面。 π 介子交换有关的单举产生的过程 $pp \rightarrow nX$ 和 $pp \rightarrow \Delta X$ 给出的 π 介子截断参数为 $\Lambda_{\pi N} = 0.99 \pm 0.1$ GeV, $\Lambda_{\pi \Delta} = 0.89 \pm 0.058$ GeV, 同样地从 $pp \rightarrow \Lambda X$ 和 $pp \rightarrow \Sigma^* X$ 散射截面得出 $\Lambda_{K\Lambda} = 1.12 \pm 0.0275$ GeV and $\Lambda_{K\Sigma^*} = 1.05 \pm 0.022$ GeV。 π 介子截断参数给出的质子味道对称性破缺的值为 $0.087 < (\bar{D} - \bar{U}) < 0.165$ 。味道对称性破缺分布 $\bar{d}(x) - \bar{u}(x)$ 和它的1阶矩与实验和格点数据吻合。显然, 八重态在壳分裂函数对质子味道对称性破缺以及它的1阶Mellin矩的贡献占很大比例, 同时十重态的贡献是较小的而且跟八重态贡献相反。对质子奇异和反奇异夸克分布, 它们在整个 x 内是正的而且八重态贡献占很大比例。 $x[s(x) + \bar{s}(x)]$ 的理论值的上限在所有区域内 x 小于由实验限制的范围, 这跟低能微扰理论所描述的物理图景相符合因为模型计算中只能给出总奇异夸克分布的非微扰成分, 这时候的质子总奇异夸克的2阶Mellin矩 S^+ 为 $4.97 \times 10^{-3} < S^+ < 6.33 \times 10^{-3}$ 。质子奇异夸克对称性破缺分布 $x[s(x) - \bar{s}(x)]$ 基本上跟实验数据一致, 质子奇异夸克的2阶Mellin矩 S^- 位于 $0.98 \times 10^{-3} < S^- < 1.56 \times 10^{-3}$, 这跟以前的模型计算结果和实验约束一致。

第五章 总结与评价

跟核子味道对称性破缺一样，核子奇异夸克对称性破缺跟核子的非微扰结构有关。根据介子云模型，核子周围的介子云改变核子原有的结构并且它的贡献在被深度非弹性实验中展示出来。在唯象学研究中核子分裂成赝标量介子(π, K)和重子(比如 $\Sigma, \Lambda, \Delta, \Sigma^*$)的概率用分裂函数来描述。分裂函数由控制介子-重子相互作用的手征微扰理论给出。另一方面，在定域框架中，分裂函数仍然包括 k_\perp^2 的积分和反映光锥积分边界贡献的 δ - 函数的截断参数 μ ，但是定域分裂函数 k_\perp^2 积分后发散的，为此我们引入两种正规化方案：Pauli -Villars 和非定域正规化。在Pauli -Villars 正规化中，介子传播子 $\frac{1}{D_\phi}$ 被替换为 $\frac{1}{D_\phi} - \frac{1}{D_{\mu_1}}$ ，其中 μ_1 是截断参数。Pauli -Villars正规化中八重态分裂函数仍然依赖于截断参数 μ_1 和 μ_2 。跟Pauli -Villars 正规化或其他正规化方案不一样的，在非定域正规化中，通过拉氏量的非定域化来实现正规化。非定域化的拉氏量满足原来的规范不变性并且引入规范连接算符和正规化因子。非定域SU(3) 手征拉氏量给出的分裂函数只依赖于一个截断参数 Λ 而且 k_\perp^2 积分后收敛的。我们利用非定域SU(3)拉氏量给出了质子到八重态重子+ 赝标量介子和十重态重子+赝标量介子的分裂函数，有趣的是非定域框架中出现额外的费曼图，它们来自规范连接算符，这样所有的分裂函数由八重态在壳，八重态离壳，八重态规范连接，八重态 δ - 函数，十重态在壳，十重态离壳，十重态规范连接，十重态 δ - 函数等12 个独立函数的线性叠加组成。随后我们给出了分裂函数的领头阶非解析项(LNA)，正如我们假设，它们完全独立于正规化方案而且结果是唯一的。因为非解析项反映核子圈图贡献的红外端行为，换句话说，无论引入什么样的正规化方案(比如Pauli-Villars 或非定域正规化)都不改变LAN。根据介子云模型，中间态强子价夸克分布通过其与对应的分裂函数的卷积积分关联到核子海夸克分布。由此可以看出，八重态和十重态介子彩虹图和泡沫图对核子反夸克分布有贡献。反夸克的味道跟赝标量介子的类型有关，比如核子味道对称破缺 $\bar{d} - \bar{u}$ 跟 π 介子有关。作为输入参数，我们还需要确定中间态介子和重子夸克分布，因此根据对称性用质子和 π 介子夸克分布来写出其他八重态和十重态重子以及赝标介子的夸克分布。数值计算中，截断参数拟合到 pp 到八重态重子(n, Λ, Σ) 和十重态重子(Δ, Σ^*) 的单举产生过程的微分截面。因为两种正规化中的在壳分裂函数

不一样, 因此拟合出的截断参数不一样。

1.所有的Pauli-Villars 正规化的八重态分裂函数包含两个截断参数 μ_1 和 μ_2 , 对于 K 介子交换过程, 截断参数 μ_1 由 $pp \rightarrow \Lambda X$ 单举散射过程微分截面拟合出。对实验数据和模型结果进行 χ^2 拟合后得到的最佳参数为 $\mu_1 = 545\text{MeV}$, 它的 2σ 下限是 $\mu_1 = 526\text{MeV}$ 。另一个截断参数 μ_2 的大小由核子总奇异夸克分布 $x[s(x) + \bar{s}(x)]$ 的上限来限制, 因为我们假设非微扰模型给出的总奇异夸克 $x[s(x) + \bar{s}(x)]$ 无法解释所有的微扰奇异夸克分布。通过比较得到的最佳截断参数为 $\mu_1 = 545\text{MeV}$, 对应的截断参数 μ_2 为 $\mu_2 = 600\text{MeV}$ 。同样地, 当 $\mu_1 = 526\text{MeV}$ 的时候得到 $\mu_2 = 894\text{MeV}$ 。这时候的核子奇异夸克对称性破缺为 $0.42 \times 10^{-3} < S^- < 1.12 \times 10^{-3}$, 总奇异夸克分布为 $7.84 \times 10^{-3} < S^+ < 11.78 \times 10^{-3}$ 。

2.在非定域框架中, π 介子交换有关的单举产生的过程 $pp \rightarrow nX$ 和 $pp \rightarrow \Delta X$ 给出的 π 介子截断参数分别为 $\Lambda_{\pi N} = 0.99 \pm 0.1 \text{ GeV}$, $\Lambda_{\pi \Delta} = 0.89 \pm 0.058 \text{ GeV}$ 。同样地, 由 K 介子交换过程 $pp \rightarrow \Lambda X$ 和 $pp \rightarrow \Sigma^* X$ 的散射截面拟合出的截断参数分别为 $\Lambda_{K\Lambda} = 1.12 \pm 0.0275 \text{ GeV}$, $\Lambda_{K\Sigma^*} = 0.84 \pm 0.03 \text{ GeV}$ 。利用 π 介子交换过程给出的截断参数, 根据卷积积分可以确定质子味道对称性破缺, 截断参数 $\Lambda_{\pi N}$ 和 $\Lambda_{\pi \Delta}$ 限制的质子味道对称性破缺为 $0.087 < (\bar{D} - \bar{U}) < 0.165$ 。味道对称性破缺分布 $\bar{d}(x) - \bar{u}(x)$ 和它的积分值跟实验和格点数据吻合。显然, 八重态在壳分裂函数对质子味道对称性的1阶Mellin矩的贡献占很大比例, 同时十重态贡献是较小的而且跟八重态贡献相反。对质子奇异和反奇异夸克分布, 它们在整个 x 内是正的而且八重态贡献占很大比例。模型计算给出的 $x[s(x) + \bar{s}(x)]$ 分布的上限在所有的 x 区域内小于由实验数据限制的范围, 这是合理的因为我们的计算只能给出总奇异夸克的非微扰部分。质子奇异夸克对称性破缺的分布 $x[s(x) - \bar{s}(x)]$ 基本上跟实验数据吻合, 质子奇异夸克的2阶Mellin矩 $s - \bar{s}$ 位于 $0.98 \times 10^{-3} < S^- < 1.56 \times 10^{-3}$ 内, 这跟以前的模型计算结果和实验约束一致, 质子总奇异夸克的2阶Mellin 矩 S^+ 等于 $4.97 \times 10^{-3} < S^+ < 6.33 \times 10^{-3}$ 。

3.如图4.12所示, 在非定域框架中, 十重态截断参数普遍小于八重态截断参数, 但是它们之间的偏离不大而且基本在 $\Lambda = 1\text{GeV}$ 左右。但是在Pauli-Villars 正规化中, 每个分裂过程的截断参数之间的偏离比较大。在两种正规化中, 十重态截断参数互相接近, 但是八重态截断参数之间的偏离还是比较大。

4.与Pauli-Villars 正规化相比, 非定域正规化以更通用的方式来处理紫外

发散，只有非定域相互作用被定义，圈图的发散系统的消除掉，不需要对圈图贡献做特殊处理。因此非定域正规化可以用在计算质子海中的极化夸克分布 $\Delta u(x), \Delta d(x), \Delta s(x), \bar{s}(x)$ 和重夸克对称性破缺 $c(x) - \bar{c}(x)$ 。

附录 A 光锥动量和留数积分

1.光锥动量:在光锥坐标中，动量的各分量定义为，

$$\begin{aligned} k^\pm &= k_0 \pm k_3, k_\perp^2 = k_1^2 + k_2^2, \\ k^2 &= k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2 = k^+ k^- - k_\perp^2, \\ p^+ p^- &= M^2, p_\perp^2 = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

上式最后一行中我们假设核子在 z 方向快速运动，因此 $p_\perp^2 = 0$ 。

2.符号约定:介子和重子传播子因子 $D_\phi(k)$ 和 $D_B(k)$ 定义为

$$\begin{aligned} D_\phi &= k^2 - m_\phi^2 + i\epsilon = k^+ k^- - k_\perp^2 - m_\phi^2 + i\epsilon = k^+ k^- - \Omega_\phi + i\epsilon, \\ D_B &= (p - k)^2 - M_B^2 + i\epsilon = (p - k)^+ (p - k)^- - k_\perp^2 - m_B^2 + i\epsilon \\ &= (p - k)^+ (p - k)^- - \Omega_B + i\epsilon. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

3.光锥积分：如(3.33)式所示，被积函数化简后变为 $\frac{1}{D_\phi^n D_B^m}$ (n 和 m 为自然数) 类型的积分。这种类型的积分可以通过计算它们的留数而得，

$$\begin{aligned} \int dk^- \frac{1}{D_\phi D_B} &= -\frac{2i\pi p^+ \bar{y}}{D_{\phi B}}, \\ \int dk^- \frac{1}{D_\phi^2 D_B} &= \frac{\partial}{\partial m_\phi^2} \int dk^- \frac{1}{D_\phi D_B} = \frac{-2\pi i}{p^+ D_{\phi B}^2 \bar{y}}, \\ \int dk^- \frac{1}{D_\phi D_B^2} &= \frac{\partial}{\partial M_B^2} \int dk^- \frac{1}{D_\phi D_B} = \frac{-2\pi i y}{p^+ D_{\phi B}^2 \bar{y}^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

作为一个例子，演示第一个积分的计算过程，根据留数定理：

$$\begin{aligned}
\int dk^- \frac{1}{D_\phi D_B} &= -2\pi i \text{Res} \left[\frac{1}{D_\phi D_B} \right]_{\text{lower half plane}} \\
&= -2\pi i \lim_{k^- \rightarrow \frac{\Omega_\phi}{k^+}} \frac{(k^- - \frac{\Omega_\phi}{k^+})}{(k^+ k^- - \Omega_\phi + i\varepsilon) [(p^+ - k^+)(p^- - k^-) - \Omega_B + i\varepsilon]} \\
&= -2\pi i \lim_{k^- \rightarrow \frac{\Omega_\phi}{k^+}} \frac{(k^- - \frac{\Omega_\phi}{k^+})}{(p^+ - k^+) k^+ (k^- - \frac{\Omega_\phi}{k^+} + \frac{i\varepsilon}{k^+}) \left[(p^- - k^-) - \frac{\Omega_B}{(p^+ - k^+)} + \frac{i\varepsilon}{(p^+ - k^+)} \right]} \\
&= \frac{-2\pi i}{(p^+ - k^+) k^+ \left[(p^- - \frac{\Omega_\phi}{k^+}) - \frac{\Omega_B}{(p^+ - k^+)} \right]} \\
&= \frac{2\pi i}{p^+ [k_\perp^2 + (1-y)m_\phi^2 + y(1-y)M^2 + yM_B^2]} \\
&= \frac{-2\pi i}{p^+ D_{\phi B} \bar{y}}. \tag{A.4}
\end{aligned}$$

4. δ 函数项的积分： $\frac{1}{D_\phi^n}$ 和 $\frac{k^+ k^-}{D_\phi^n}$ (n 为自然数)类型的积分由下式给出，

$$\begin{aligned}
\int dk^- \frac{1}{D_\phi} &= 2\pi i \log\left(\frac{\Omega_\phi}{\mu^2}\right) \frac{\delta(y)}{p^+}, \\
\int dk^- \frac{1}{D_\phi^2} &= \frac{\partial}{\partial \Omega_\phi} \int dk^- \frac{1}{D_\phi} = \frac{2\pi i}{p^+ \Omega_\phi} \delta(y), \\
\int dk^- \frac{k^+ k^-}{D_\phi} &= 2\pi i \delta(y) \frac{\Omega_\phi}{p^+} [\log\left(\frac{\Omega_\phi}{\mu^2}\right) - 1], \\
\int dk^- \frac{k^+ k^-}{D_\phi^2} &= \frac{\partial}{\partial \Omega_\phi} \int dk^- \frac{k^+ k^-}{D_\phi} = 2\pi i \log\left(\frac{\Omega_\phi}{\mu^2}\right) \frac{\delta(y)}{p^+}, \tag{A.5}
\end{aligned}$$

上述积分只有一个奇点，因此首先用一般的留数定理来计算 $\frac{1}{D_\phi}$ 积分。当 $k^+ > 0$ 时，

$$\begin{aligned}
\int dk^- \frac{1}{D_\phi} &= \int dk^- \frac{1}{k^+ \left(k^- - \frac{\Omega_\pi}{k^+} + \frac{i\varepsilon}{k^+} \right)} \\
&= -2\pi i \text{Res} \left[\frac{1}{k^+ \left(k^- - \frac{\Omega_\phi}{k^+} + \frac{i\varepsilon}{k^+} \right)} \right]_{\text{lower half plane}} - \int_{\text{arc}} dk^- \frac{1}{k^+ k^- - \Omega_\phi + i\varepsilon} \\
&= -2\pi i \frac{1}{k^+} - \int_0^{-\pi} d\theta \frac{e^{i\theta} R i}{k^+ \left(\text{Re}^{i\theta} - \frac{\Omega_\phi}{k^+} + \frac{i\varepsilon}{k^+} \right)} \\
&= -2\pi i \frac{1}{k^+} + \frac{i\pi}{k^+} = -\frac{i\pi}{k^+}, k^+ > 0, R \rightarrow \infty,
\end{aligned} \tag{A.6}$$

当 $k^+ = 0$ 时,

$$\int dk^- \frac{1}{-\Omega_\phi + i\varepsilon} = \frac{1}{-\Omega_\phi + i\varepsilon} \int dk^- = \infty, k^+ = 0, \tag{A.7}$$

当 $k^+ < 0$ 时,

$$\begin{aligned}
\int dk^- \frac{1}{D_\phi} &= \int dk^- \frac{1}{k^+ \left(k^- - \frac{\Omega_\pi}{k^+} + \frac{i\varepsilon}{k^+} \right)} \\
&= 2\pi i \text{Res} \left[\frac{1}{k^+ \left(k^- - \frac{\Omega_\phi}{k^+} + \frac{i\varepsilon}{k^+} \right)} \right]_{\text{lower half plane}} - \int_{\text{arc}} dk^- \frac{1}{k^+ k^- - \Omega_\phi + i\varepsilon} \\
&= - \int_0^{-\pi} d\theta \frac{i e^{i\theta} R}{k^+ \left(\text{Re}^{i\theta} - \frac{\Omega_\phi}{k^+} + \frac{i\varepsilon}{k^+} \right)} \\
&= \frac{i\pi}{k^+}, k^+ < 0, R \rightarrow \infty.
\end{aligned} \tag{A.8}$$

结合 A.5, A.6 和 A.7, $\frac{1}{D_\phi}$ 的积分可以写成为

$$\int \frac{dk^-}{D_\phi} = \frac{-i\pi\theta(k^+)}{k^+ + i\delta\Omega_\phi} + \frac{i\pi\theta(-k^+)}{k^+ - i\delta\Omega_\phi}, \delta \rightarrow 0, \tag{A.9}$$

其中 $\theta(k^+)$ 是符号函数。A.9 式跟在参考文献 [134] 中的结果一致, 值得注意的是, $\frac{1}{D_\phi}$ 跟 $\frac{1}{D_\phi^n D_B^m}$ 不一样的是, 对于 $\frac{1}{D_\phi}$ 来说在大圆弧上的积分值不为零, 另一方面圆弧半径不是固定的。以上计算中, 我们忽略了奇点的不稳定性,

即 $k^- = \frac{\Omega_M}{k^+} - \frac{i\varepsilon}{k^+}$ 中 k^- 的奇点随 k^+ 的变化而变化, 所以不能用Cauchy 留数定理求出其积分值 [135]。为了得到 $\frac{1}{D_\pi}$ 的积分值, 我们观察以下积分:

$$\int dk^+ dk^- \frac{1}{D_\phi^2} = \frac{2\pi i}{\Omega_\phi}, \quad (\text{A.10})$$

另一方面, 当 $(k^+ \neq 0)$ 的时候协变积分满足 [99]:

$$\int dk^- \frac{1}{D_\phi^2} = 0, \quad (\text{A.11})$$

总的来说 $\frac{1}{D_\phi^2}$ 的光锥积分:

$$\int dk^- \frac{1}{D_\phi^2} = \frac{2\pi i \delta(y)}{p^+ \Omega_\phi}, \quad (\text{A.12})$$

进一步, 从根据上式得出 $\frac{1}{D_\phi}$ 的积分:

$$\int \frac{dk^-}{D_\phi} = 2\pi i \log\left(\frac{\Omega_\phi}{\mu^2}\right) \frac{\delta(y)}{p^+}. \quad (\text{A.13})$$

参考文献

- [1] P. Amaudruz *et al.* , Phys. Rev. Lett. **66**, 2712 (1991).
- [2] K. Ackerstaff *et al.*, Phys. Rev. Lett. **81**, 5519 (1998).
- [3] A. Baldit *et al.*, Phys. Lett. B **332**, 244 (1994).
- [4] R. S. Towell *et al.*, Phys. Rev. D **64**, 052002 (2001).
- [5] K. Hagiwara *et al.* [Particle Data Group], Phys. Rev. D **66**, 010001 (2002).
- [6] G. P. Zeller *et al.*, Phys. Rev. Lett. **88**, 091802 (2002) Phys. Rev. Lett. **88**, 091802 (2002) Erratum: [Phys. Rev. Lett. **90**,
- [7] T. J. Hobbs, J. T. Londergan and W. Melnitchouk, Phys. Rev. D **89**, no. 7, 074008 (2014)
- [8] A. I. Signal and A. W. Thomas, Phys. Lett. B **211**, 481 (1988).
- [9] A. I. Signal and A. W. Thomas, Phys. Rev. D **40**, 2832 (1989).
- [10] A. W. Thomas, Phys. Lett. **126B**, 97 (1983).
- [11] J. D. Sullivan, Phys. Rev. D **5**, 1732 (1972).
- [12] J. J. Ethier, N. Sato and W. Melnitchouk, arXiv:1705.05889v1 [hep-ph].
- [13] A. I. Signal and A. W. Thomas, Phys. Lett. B **191**, 205 (1987).
- [14] A. W. Schreiber, A. I. Signal and A. W. Thomas, Phys. Rev. D **44**, 2653 (1991).
- [15] W. Melnitchouk and A. W. Thomas, Z. Phys. A **353**, 311 (1995).
- [16] F. M. Steffens, H. Holtmann and A. W. Thomas, Phys. Lett. B **358**, 139 (1995).

- [17] D. Diakonov, V. Petrov, P. Pobylitsa, M. V. Polyakov and C. Weiss, Nucl. Phys. **B480**, 341 (1996).
- [18] W. Melnitchouk and M. Malheiro, Phys. Rev. C **55**, 431 (1997).
- [19] W. Melnitchouk and M. Malheiro, Phys. Lett. B **451**, 224 (1999).
- [20] F. Myhrer and A. W. Thomas, Phys. Lett. B **663**, 302 (2008).
- [21] A. W. Thomas, W. Melnitchouk and F. M. Steffens, Phys. Rev. Lett. **85**, 2892 (2000).
- [22] D. Arndt and M. J. Savage, Nucl. Phys. **A697**, 429 (2002).
- [23] J. W. Chen and X. Ji, Phys. Lett. B **523**, 107 (2001).
- [24] J.-W. Chen and X. Ji, Phys. Rev. Lett. **87**, 152002 (2001); **88**, 249901(E) (2002).
- [25] W. Detmold, W. Melnitchouk, J. W. Negele, D. B. Renner and A. W. Thomas, Phys. Rev. Lett. **87**, 172001 (2001).
- [26] M. Burkardt, K. S. Hendricks, C. R. Ji, W. Melnitchouk and A. W. Thomas, Phys. Rev. D **87**, 056009 (2013).
- [27] C.-R. Ji, W. Melnitchouk and A. W. Thomas, Phys. Rev. D **88**, 076005 (2013).
- [28] A. M. Moiseeva and A. A. Vladimirov, Eur. Phys. J. A **49**, 23 (2013).
- [29] Y. Salamu, C.-R. Ji, W. Melnitchouk and P. Wang, Phys. Rev. Lett. **114**, 122001 (2015).
- [30] J. Terning, Phys. Rev. D **44**, 887 (1991).
- [31] K. Wilson, Phys. Rev. D **10**, 2445 (1974).
- [32] C. Bloch, K. Dan. Vidensk. Selsk. Mat. Fys. Medd. **26**, 1 (1950).

-
- [33] H. Forkel, M. Nielsen, X.-M. Jin and T. D. Cohen, Phys. Rev. C **50**, 3108 (1994).
- [34] M. J. Musolf and M. Burkardt, Z. Phys. C **61**, 433 (1994).
- [35] S. Wang and M. K. Banerjee, Phys. Rev. C **54**, 2883 (1996).
- [36] G. Kleppe and R. P. Woodard, Nucl. Phys. B **388**, 81 (1992)
- [37] J. W. Moffat, Phys. Rev. D **39**, 3654 (1989).
- [38] D. Evens, J. W. Moffat, G. Kleppe and R. P. Woodard, Phys. Rev. D **43** (1991) no.2, 499.
- [39] H. Yukawa, Phys. Rev. **80**, 1047 (1950).
- [40] H. Yukawa, Phys. Rev. **77**, 219 (1950).
- [41] G. V. Efimov, Annals Phys. **71**, no. 2, 466 (1972).
- [42] D. A. Kirzhnits, Sov. Phys. Usp. **9**, 692 (1967)
- [43] V. A. Alebastrov and G. V. Efimov, Commun. Math. Phys. **31**, no. 1, 1 (1973).
- [44] C. Bloch, Kong. Dan. Vid. Sel. Mat. Fys. Med. **27N8**, no. 8, 1 (1952).
- [45] J. W. Bos, J. H. Koch and H. W. L. Naus, Phys. Rev. C **44**. 1, 485 (1991).
- [46] R. Marnelius, Phys. Rev. D **8**, 2472 (1973).
- [47] B. Holdom, Phys. Lett. B **292**, 150 (1992)
- [48] X. Y. Li and Y. Liao, Phys. Lett. B **318**, 537 (1993).
- [49] J. W. Moffat, Phys. Rev. D **39**, 3654 (1989).
- [50] P. Wang, Can. J. Phys. **92**, 25 (2014).
- [51] M. A. Ivanov, M. P. Locher and V. E. Lyubovitskij, Few Body Syst. **21**, 131 (1996)

- [52] E. T. Tomboulis, Phys. Rev. D **92**, no. 12, 125037 (2015)
- [53] S. Nojiri, S. D. Odintsov, M. Sasaki and Y. I. Zhang, Phys. Lett. B **696**, 278 (2011)
- [54] V. Koch, Int. J. Mod. Phys. E **6**, 203 (1997)
- [55] M. Jaccard, M. Maggiore and E. Mitsou, Phys. Rev. D **88**, no. 4, 044033 (2013)
- [56] J. Gasser, M. E. Sainio and A. Svarc, Nucl. Phys. B **307**, 779 (1988).
- [57] J. Gasser and H. Leutwyler, Nucl. Phys. B **250**, 465 (1985).
- [58] J. Gasser and H. Leutwyler, Annals Phys. **158**, 142 (1984).
- [59] A. Krause, Helv. Phys. Acta **63**, 3 (1990).
- [60] S. L. Adler, Phys. Rev. **177**, 2426 (1969).
- [61] S. L. Adler and W. A. Bardeen, Phys. Rev. **182** (1969) 1517.
- [62] W. A. Bardeen, Phys. Rev. **184**, 1848 (1969).
- [63] J. S. Bell and R. Jackiw, Nuovo Cim. A **60**, 47 (1969).
- [64] J. Goldstone, Nuovo Cim. **19**, 154 (1961).
- [65] S. R. Coleman, J. Wess and B. Zumino, Phys. Rev. **177** (1969) 2239.
- [66] C. G. Callan, Jr., S. R. Coleman, J. Wess and B. Zumino, Phys. Rev. **177** (1969) 2247.
- [67] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **16**, no. 19, 879 (1966).
- [68] G. Ecker, Prog. Part. Nucl. Phys. **35**, 1 (1995)
- [69] E. E. Jenkins, Nucl. Phys. **B368**, 190 (1992).
- [70] T. Ledwig, J. Martin Camalich, L. S. Geng and M. J. Vicente Vacas, Phys. Rev. D **90**, no. 5, 054502 (2014)

-
- [71] N. Wies, J. Gegelia and S. Scherer, Phys. Rev. D **73**, 094012 (2006)
- [72] T. R. Hemmert, B. Kubis and U.-G. Meissner, Phys. Rev. C **60**, 045501 (1999).
- [73] T. R. Hemmert, U.-G. Meissner and S. Steininger, Phys. Lett. B **437**, 184 (1998).
- [74] T. Fuchs, J. Gegelia, G. Japaridze and S. Scherer, Phys. Rev. D **68**, 056005 (2003)
- [75] J. Speth and A. W. Thomas, Adv. Nucl. Phys. **24**, 83 (1998).
- [76] A. W. Thomas, Phys. Lett. **126B**, 97 (1983).
- [77] S. Kumano, Phys. Rev. D **43**, 59 (1991).
- [78] W. Melnitchouk, A. W. Thomas and A. I. Signal, Z. Phys. A **340**, 85 (1991).
- [79] W. Melnitchouk, A. W. Schreiber and A. W. Thomas, Phys. Rev. D **49**, 1183 (1994).
- [80] S. Kumano, Phys. Rep. **303**, 183 (1998).
- [81] H. Holtmann, A. Szczurek and J. Speth, Nucl. Phys. **A569**, 631 (1996).
- [82] V. R. Zoller, Z. Phys. C **53**, 443 (1992).
- [83] W. Melnitchouk and M. Malheiro, Phys. Rev. C **55**, 431 (1997).
- [84] V. R. Zoller, Z. Phys. C **53**, 443 (1992).
- [85] W. Melnitchouk and A. W. Thomas, Phys. Rev. D **47**, 3794 (1993).
- [86] A. Jain and S. D. Joglekar, Int. J. Mod. Phys. A **19**, 3409 (2004)
- [87] G. V. Efimov, Commun. Math. Phys. **7** (1968) no.2, 138.
- [88] B. Pasquini and S. Boffi, Phys. Rev. D **73** (2006) 094001
- [89] J. Speth and A. W. Thomas, Adv. Nucl. Phys. **24**, 83 (1997).

- [90] H. Holtmann, A. Szczurek and J. Speth, Nucl. Phys. **A596**, 631 (1996).
- [91] V. R. Zoller, Z. Phys. C **60**, 141 (1993).
- [92] R. Tegen and W. Weise, Z. Phys. A **314**, 357 (1983).
- [93] C. Hacker, N. Wies, J. Gegelia and S. Scherer, Phys. Rev. C **72**, 055203 (2005)
- [94] L. M. Nath, B. Etemadi and J. D. Kimel, Phys. Rev. D **3**, 2153 (1971).
- [95] J. D. Sullivan, Phys. Rev. D **5**, 1732 (1972).
- [96] A. I. Signal and A. W. Thomas, Phys. Lett. B **191**, 205 (1987).
- [97] M. Burkardt, K. S. Hendricks, C.-R. Ji, W. Melnitchouk and A. W. Thomas, Phys. Rev. D **87**, 056009 (2013).
- [98] C.-R. Ji, W. Melnitchouk and A. W. Thomas, Phys. Rev. D **88**, 076005 (2013).
- [99] M. Burkardt and Y. Koike, Nucl. Phys. **B632**, 311 (2002).
- [100] L. F. Li and H. Pagels, Phys. Rev. Lett. **26**, 1204 (1971).
- [101] M. Burkardt, K. S. Hendricks, C.-R. Ji, W. Melnitchouk and A. W. Thomas, Phys. Rev. D **87**, 056009 (2013).
- [102] P. E. Shanahan, A. W. Thomas and R. D. Young, Phys. Rev. D **87**, 114515 (2013).
- [103] A. M. Moiseeva and A. A. Vladimirov, Eur. Phys. J. A **49**, 23 (2013).
- [104] J. N. Labrenz and S. R. Sharpe, Phys. Rev. D **54**, 4595 (1996)
- [105] M. Aicher, A. Schäfer and W. Vogelsang, Phys. Rev. Lett. **105**, 252003 (2010).
- [106] A. D. Martin, R. G. Roberts, W. J. Stirling and R. S. Thorne, Eur. Phys. J. C **4**, 463 (1998).

-
- [107] E. Leader, A. V. Sidorov and D. B. Stamenov, Phys. Rev. D **82**, 114018 (2010).
- [108] B. Z. Kopeliovich, I. K. Potashnikova, B. Povh and I. Schmidt, Phys. Rev. D **85**, 114025 (2012).
- [109] B. Povh and J. Hüfner, Phys. Rev. D **46**, 990 (1992).
- [110] V. Blobel *et al.*, Nucl. Phys. **B135**, 379 (1978).
- [111] R. D. Ball *et al.*, JHEP **04** (2015) 040.
- [112] L. A. Harland-Lang, A. D. Martin, P. Motylinski and R. S. Thorne, Eur. Phys. J. C **75**, 204 (2015).
- [113] A. Vega, I. Schmidt, T. Gutsche and V. E. Lyubovitskij, Phys. Rev. D **93**, 056001 (2016).
- [114] F. Olness *et al.*, Eur. Phys. J. C **40**, 145 (2005).
- [115] H. L. Lai, P. M. Nadolsky, J. Pumplin, D. Stump, W.-K. Tung and C.-P. Yuan, JHEP **0704**, 089 (2007).
- [116] R. D. Ball *et al.* [NNPDF Collaboration], Nucl. Phys. B **855**, 153 (2012)
- [117] W. Flauger and F. Monnig, Nucl. Phys. B **109**, 347 (1976).
- [118] V. Blobel *et al.* Nucl. Phys. **B135**, 379 (1978).
- [119] S. J. Barish *et al.*, Phys. Rev. D **12**, 1260 (1975).
- [120] W. Melnitchouk, J. Speth and A. W. Thomas, Phys. Rev. D **59**, 014033 (1998).
- [121] J. Hufner and B. Povh, Phys. Rev. D **46**, 990 (1992).
- [122] R. S. Towell *et al.* [NuSea Collaboration], Phys. Rev. D **64**, 052002 (2001)
- [123] K. Ackerstaff *et al.* [HERMES Collaboration], Phys. Rev. Lett. **81**, 5519 (1998)

- [124] M. Arneodo *et al.* [New Muon Collaboration], Phys. Rev. D **50**, R1 (1994).
- [125] H. W. Lin, J. W. Chen, S. D. Cohen and X. Ji, Phys. Rev. D **91**, 054510 (2015)
- [126] L. A. Harland-Lang, A. D. Martin, P. Motylinski and R. S. Thorne, Eur. Phys. J. C **75**, no. 5, 204 (2015)
- [127] R. D. Ball *et al.*, Nucl. Phys. B **867**, 244 (2013)
- [128] R. D. Ball *et al.* Nucl. Phys. **B867**, 244 (2013).
- [129] W. C. Chang and J. C. Peng, Prog. Part. Nucl. Phys. **79**, 95 (2014).
- [130] K. Jaeger *et al.*, Phys. Rev. D **11**, 1756 (1975).
- [131] K. Bockmann *et al.* [Bonn-Hamburg-Munich Collaboration], Nucl. Phys. B **143**, 395 (1978).
- [132] A. S. Carroll *et al.*, Phys. Lett. **80B**, 423 (1979).
- [133] X. G. Wang, (private talk),
- [134] B. L. G. Bakker, M. A. DeWitt, C. R. Ji and Y. Mishchenko, Phys. Rev. D **72**, 076005 (2005).
- [135] C. R. Ji, Few Body Syst. **52**, 421 (2012).
- [136] J. Gao *et al.* Phys. Rev. D **89**, 033009 (2014).
- [137] A. D. Martin, W. J. Stirling, R. S. Thorne and G. Watt, Eur. Phys. J. C **63**, 189 (2009).
- [138] R. D. Ball *et al.*, Nucl. Phys. B **867**, 244 (2013)
- [139] R. D. Ball *et al.* [NNPDF Collaboration], Nucl. Phys. B **823**, 195 (2009)
- [140] S. Alekhin, S. A. Kulagin and R. Petti, Phys. Lett. B **675**, 433 (2009)
- [141] D. Mason *et al.* [NuTeV Collaboration], Phys. Rev. Lett. **99**, 192001 (2007).

-
- [142] V. Barone, C. Pascaud, B. Portheault and F. Zomer, JHEP **0601**, 006 (2006).

发表文章目录

- [1] Strange quark asymmetry in the proton in chiral effective theory, X. G. Wang, C. R. Ji, W. Melnitchouk, Y. Salamu, A. W. Thomas and P. Wang, Phys. Rev. D **94**, no. 9, 094035 (2016).

- [2] Constraints on $s - \bar{s}$ asymmetry of the proton in chiral effective theory X. G. Wang, C. R. Ji, W. Melnitchouk, Y. Salamu, A. W. Thomas and P. Wang, Phys. Lett. B **762**, 52 (2016).

- [3] Parton distributions from nonlocal chiral SU(3) effective theory: Splitting functions, Y. Salamu, C. R. Ji, W. Melnitchouk, A. W. Thomas and P. Wang, Phys. Rev. D **99**, no. 1, 014041 (2019).

致 谢

博士学习期间，我获得了很多的帮助和支持，收获很多，值此论文完成之际，谨在此向多年来给予我关心和帮助的老师、同学、朋友和家人表示衷心的感谢！本文所含的工作在我的导师王平老师的悉心指导下完成的，王老师的渊博的学识和敏锐的见解极大地提升了我的科研素养，与他的无数次的讨论使我终生受益！他耐心的修正我犯的每个错误，虽然我的专业基础不是那么好，但在王老师的指导下顺利的完成了我的工作，这四年期间，实际上我从王老师学到了很多，什么是耐心，什么是细心，什么是科研，他丰富的指导经验让我少走了很多弯路，相信我之后的工作会因此而轻松。与他人多多交流。伴随着成长，但王老师总是直接表达我们研究工作中他不满意的诸多地方，这可以更快地提高工作质量和个人能力。每次找他，他都能抽出时间与我细致耐心地讨论，在此向他表达我最真挚的感谢。我还感谢我们组的合作者W. Melnitchouk, Chueng-Ryong Ji, A.W. Thomas和王轩弓，从跟他们的讨论中学会了很多东西。

最后，感谢我的父母、兄弟姐妹对我的支持和关爱！感谢我父母对我的养育之恩以及对我学业的支持！他们的关怀与爱是我前进力，他们的付出历历在目。

谨把本文献给我最敬爱的父母！