Nikolas Mavrogeneiadis - 161014
gravitorious
University Of West Attica
Department of Informatics and Computer Engineering
Professor: Panagiotis Rouvelas
June 14, 2022

Graph Theory-Exercise Set 3

1. (From Set 2 exercise 4)Let G be a simple graph. Prove that if $L(G)$ is Eulerian, then we can't conclude that G is Eulerian.

<u>Proof:</u> If $L(G)$ is Eulerian this means that each vertex degree of $L(G)$ is even number. This vertex will become an edge $e(v, u)$ on G with $deg(v) + deg(u) = even$. In this case, we can't deduce whether $deg(v)$ and $deg(u)$ are even or not. The line graph of K_4 (on the right in the following picture) is Eulerian but the K_4 is not Eulerian itself (all vertices have odd degree as we can see on the left). This completes the proof.

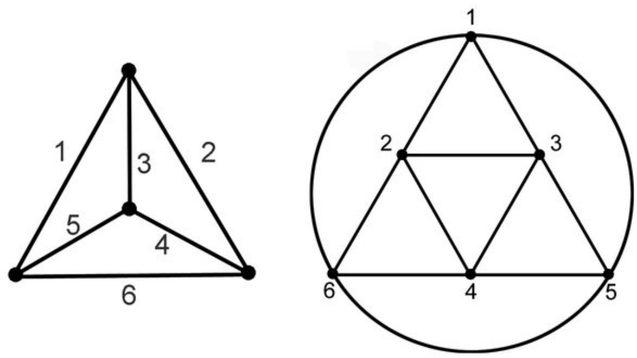

Figure 1: K_4 and its Line graph

2. (Ασκηση 5 από το σετ 2)Δείξτε ότι αν ένας γράφος με τουλάχιστον 3 κορυφές που έχει απομονωμένη ή εκκρεμή κορυφή, τότε έχει μη πλήρη κλειστότητα.

Εστω μια κορυφή v_k με $d(v_k) \leqslant 1$. Εστω v_i ο προς εξέταση κόμβος για το αν θα υπάρξει ακμή $e(v_k, v_i)$ στην κλειστότητα του γράφου. Προφανώς ο v_k δεν είναι γείτονας με τον v_i στον αρχικό γράφο. Για να υπάρξει ακμή θα πρέπει $d(v_i) + d(v_k) \geqslant n$, δηλαδή $d(v_i) \geqslant n - 1$. Αυτό όμως είναι αδύνατον γιατί αν ίσχυε ότι $d(v_i) = n - 1$ τότε οι δύο κόμβοι θα ήταν γειτονικοί στον αρχικό κόμβο, πράγμα άτοπο. Επομένως αυτοί οι δύο κόμβοι δεν θα γίνουν γειτονικοί στην κλειστότητα και άρα η κλειστότητα δεν είναι πλήρης.

3. (Ασκηση 8 από το σετ 2) Δείξτε ότι αν ένας διμερής γράφος είναι περιττής τάξης, τότε δεν είναι Ηαμιλτονιαν.

Εστω ο διμερής γράφος $K(n, m)$ για τον οποίο ισχύει ότι $n + m = odd$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $n > m$. Θέτουμε $S_1 = \{v_{11}, v_{12}, ..., v_{1n}\}$ το σύνολο με τις n κορυφές και $S_2 = \{v_{21}, v_{22}, ..., v_{2m}\}$ το σύνολο με τις m κορυφές του K. Αν υπάρχει Hamiltonian κύκλος, τότε αυτό θα πρέπει να περιέχει όλους τους κόμβους του S_1. Εστω ο v_{1k} και ο v_{1p} ο πρώτος και ο τελευταίος κόμβος που επισκεπτόματε από το S_1 με την προυπόθεση ότι έχουμε επισκεφθεί όλους τους κόμβους του. Το μονοπάτι αυτό είναι της μορφής $H = \{v_{1k}, ..., v_{1p}\}$. Ομως για κάθε ζευγάρι κόμβων $(v_{1i}, v_{1(i+1)})$ του S_1 πρέπει αναγκαστικά να επισκεφθούμε έναν κόμβο του S_2. Αυτό σημαίνει ότι το H περιλαμβάνει και όλους τους κόμβους του S_2 (αφού $n > m$). Για να είναι το H Hamiltonian κύκλος θα πρέπει ο v_{1p} να συνδέεται με τον v_{1k} κάτι το οποίο είναι αδύνατον αφού ο v_{1p} συνδέεται μόνο με κόμβους του S_2 που ήδη τους έχουμε επισκεφτεί. Επομένως ο γράφος δεν είναι Hamiltonian.

4. (Ασκηση 1 από το σετ 3 - όλες οι παρακάτω ασκήσεις αφορούν το σετ 3)Δείξτε ότι κάθε δέντρο είναι διμερής γράφος.

Εστω δύο σύνολα X και Y τα οποία κατασκευάζουμε ως εξής. Επιλέγουμε από το δέντρο μια ρίζα. Τοποθετούμε στο X την ρίζα και όλες τις κορυφές που απέχουν από αυτή απόσταση ίση με άρτιο αριθμό. Στο Y τοποθετούμε όσες κορυφές απέχουν απόσταση ίση με περιττό αριθμό. Θα δείξουμε ότι δεν υπάρχουν κορυφές που ενώνονται μεταξύ τους στο X, ούτε στο Y και άρα ο γράφος είναι διμερής. Εστω δύο κόμβοι x_1 και x_2 του X και έστω ότι ενώνονται. Εστω x_0 η ρίζα του δέντρου. Τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε το μονοπάτι $\{x_0, ..., x_1, x_2, ..., x_0\}$ το οποίο είναι κύκλος. Ατοπο. Παρόμοια μπορούμε να το δείξουμε και για το Y.

4. (Ασκηση 2) Δείξτε ότι κάθε δέντρο T έχει τουλάχιστον $D(T)$ εκκρεμείς κορυφές.

Εστω ότι υπάρχει δέντρο T με p εκκρεμείς κορυφές και ισχύει ότι $p < D(T)$. Επιλέγω μια ρίζα k για την οποία ισχύει ότι $d(k) = D(T)$. Εστω το σύνολο $X = \{v_1, v_2, ..., v_{D(T)}\}$ που περιέχει τους γείτονες του k. Κάθε εκκρεμής κορυφή έχει μοναδικό μονοπάτι ως προς τον k, όπου αναγκαστικά πρέπει να περάσει από κάποιο κόμβο του X. Ο κόμβος από τον οποίο μπορεί να περάσει είναι μοναδικός (αλλιώς θα υπήρχε κύκλος). Ομως επειδή οι εκκρεμείς κορυφές είναι λιγότερες από $D(T)$, υπάρχει κορυφή v_i του X που δεν χρησιμοποιείται ποτέ από μονοπάτι εκκρεμούς κορυφής ως προς τον k. Αυτό όμως σημαίνει ότι και η v_i είναι εκκρεμής κορυφή. Ατοπο.

5. (Ασκηση 3) Δείξτε ότι κάθε δένδρο χωρίς κορυφές βαθμού 2 έχει περισσότερες εκκρεμείς απ'ό,τι μη εκκρεμείς κορυφές.

Εστω k ο αριθμός των φύλλων (εκκρεμείς κορυφές) και p οι υπόλοιπες κορυφές. Γνωρίζουμε ότι $|E| = |V| - 1$. Είναι:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E| = 2|V| - 2 \tag{1}$$

Εστω τα σύνολα $F = \{f_1, f_2, ..., f_k\}$ και $V = \{v_1, v_2, ..., v_p\}$.
Είναι:

$$\begin{aligned} 2|V| - 2 &= \sum_{i=1}^{k} d(f_i) + \sum_{j=1}^{p} d(v_j) \\ &\geqslant k + 3p \end{aligned} \tag{2}$$

Αρα μπορούμε να γράψουμε ότι:

$$\begin{aligned} &2|V| - 2 \geqslant k + 3p \\ \Longrightarrow &2k + 2p - 2 \geqslant k + 3p \\ \Longrightarrow &k - p - 2 \geqslant 0 \\ \Longrightarrow &k \geqslant p + 2 \\ \Longrightarrow &k \geqslant p \end{aligned} \tag{3}$$