Nikolas Mavrogeneiadis - 161014
gravitorious
University Of West Attica
Department of Informatics and Computer Engineering
Professor: Panagiotis Rouvelas
June 7, 2022

Graph Theory-Exercise Set 3

1. (From Set 2 exercise 4)Let G be a simple graph. Prove that if $L(G)$ is Eulerian, then we can't conclude that G is Eulerian.

Proof: If $L(G)$ is Eulerian this means that each vertex degree of $L(G)$ is even number. This vertex will become an edge $e(v, u)$ on G with $deg(v) + deg(u) = even$. In this case, we can't deduce whether $deg(v)$ and $deg(u)$ are even or not. The line graph of K_4 (on the right in the following picture) is Eulerian but the K_4 is not Eulerian itself (all vertices have odd degree as we can see on the left). This completes the proof.

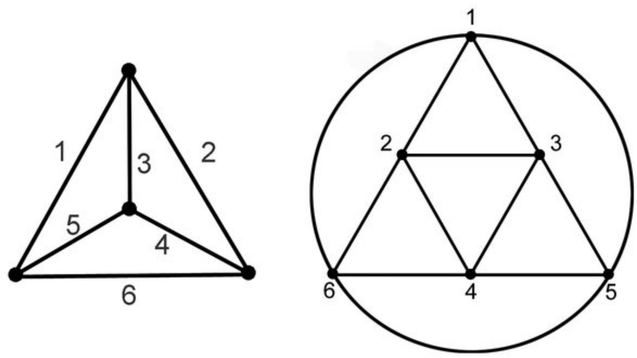

Figure 1: K_4 and its Line graph

2. (Ασκηση 5 από το σετ 2)Δείξτε ότι αν ένας γράφος με τουλάχιστον 3 κορυφές που έχει απομονωμένη ή εκκρεμή κορυφή, τότε έχει μη πλήρη κλειστότητα.

Εστω μια κορυφή v_k με $d(v_k) \leqslant 1$. Εστω v_i ο προς εξέταση κόμβος για το αν θα υπάρξει ακμή $e(v_k, v_i)$ στην κλειστότητα του γράφου. Προφανώς ο v_k δεν είναι γείτονας με τον v_i στον αρχικό γράφο. Για να υπάρξει ακμή θα πρέπει $d(v_i) + d(v_k) \geqslant n$, δηλαδή $d(v_i) \geqslant n - 1$. Αυτό όμως είναι αδύνατον γιατί αν ίσχυε ότι $d(v_i) = n - 1$ τότε οι δύο κόμβοι θα ήταν γειτονικοί στον αρχικό κόμβο, πράγμα άτοπο. Επομένως αυτοί οι δύο κόμβοι δεν θα γίνουν γειτονικοί στην κλειστότητα και άρα η κλειστότητα δεν είναι πλήρης.

3. (Ασκηση 8 από το σετ 2) Δείξτε ότι αν ένας διμερής γράφος είναι περιττής τάξης, τότε δεν είναι Ηαμιλτονιαν.

Εστω ο διμερής γράφος $K(n, m)$ για τον οποίο ισχύει ότι $n + m = odd$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $n > m$. Θέτουμε $S_1 = \{v_{11}, v_{12}, ..., v_{1n}\}$ το σύνολο με τις n κορυφές και $S_2 = \{v_{21}, v_{22}, ..., v_{2m}\}$ το σύνολο με τις m κορυφές του K. Αν υπάρχει Hamiltonian κύκλος, τότε αυτό θα πρέπει να περιέχει όλους τους κόμβους του S_1. Εστω ο v_{1k} και ο v_{1p} ο πρώτος και ο τελευταίος κόμβος που επισκεπτόματε από το S_1 με την προυπόθεση ότι έχουμε επισκεφθεί όλους τους κόμβους του. Το μονοπάτι αυτό είναι της μορφής $H = \{v_{1k}, ..., v_{1p}\}$. Ομως για κάθε ζευγάρι κόμβων $(v_{1i}, v_{1(i+1)})$ του S_1 πρέπει αναγκαστικά να επισκεφθούμε έναν κόμβο του S_2. Αυτό σημαίνει ότι το H περιλαμβάνει και όλους τους κόμβους του S_2 (αφού $n > m$). Για να είναι το H Hamiltonian κύκλος θα πρέπει ο v_{1p} να συνδέεται με τον v_{1k} κάτι το οποίο είναι αδύνατον αφού ο v_{1p} συνδέεται μόνο με κόμβους του S_2 που ήδη τους έχουμε επισκεφτεί. Επομένως ο γράφος δεν είναι Hamiltonian.