- We wish to prove the identity $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \partial_i \varepsilon_{ijk} \partial_j F_k$$
$$= \varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j F_k$$
$$= \tfrac{1}{2} (\varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j F_k + \varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j F_k)$$
$$= \tfrac{1}{2} (\varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j F_k + \varepsilon_{jik} \partial_j \partial_i F_k)$$
$$= \tfrac{1}{2} (\varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j F_k + \varepsilon_{jik} \partial_i \partial_j F_k)$$
$$= \tfrac{1}{2} (\varepsilon_{ijk} - \varepsilon_{ijk}) \partial_i \partial_j F_k$$
$$= 0$$