飞机质心平面运动的力学方程

宋秋红
空军长春飞行学院

提　要　根据理论力学自由刚体的动力学理论，建立了飞机在平面内飞行的质心动力学方程，并且讨论了有关简单解问题。

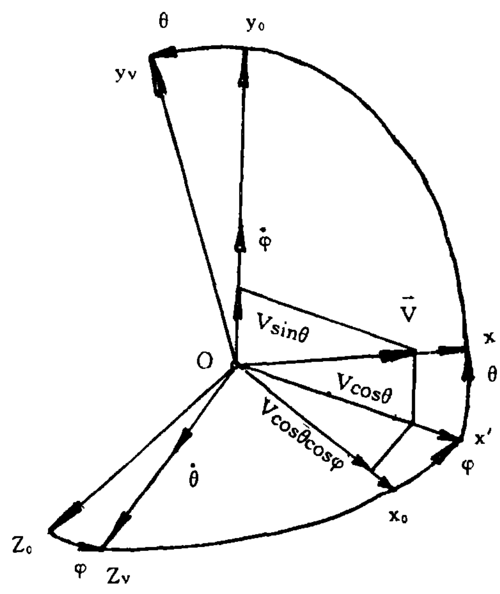
关键词　地面轴系　平面飞行　迎角　侧滑角

我们知道，飞机在空中的飞行是自由的，也是相当复杂的。本文依据力学的有关理论，试对飞机水平平面内飞行时质心的动力学方程的构建做一些研究。

当飞机沿水平平面内的航迹运动时，飞机高度 H＝常数，航迹对水平面的倾角 $\theta=0$。此时飞机受的力有：迎面阻力 X、升力 Y、侧向力 Z、发动机的推力 P、最后还有飞机的重力 G。此时发动机的工作状态用参数 K 表示。而飞机的姿态参数是，迎角 α、侧滑角 β、倾斜角 γ_G。

在建立动力学方程之前，为了尽可能地简化方程，有必要指明所用到的参考坐标系，主要有地面轴系 $OX_0Y_0Z_0$ 和半速度坐标系 OXY_VZ_V。

地面轴系的原点 O 选取在地球表面或空间某处，轴 OY_0 垂直向上，轴 OX_0 水平指向，轴 OZ_0 与 OX_0、OY_0 垂直，顺着 OX_0 的正方向指向右方为正。而半速度坐标轴系为活动坐标系，其中轴 OX 沿着相对于空气的、飞机质心的速度矢量 V，坐标系原点位于飞机质心，轴 OY_V、OZ_V 位于垂直于速度矢量 V 的平面内，轴 OZ_V 总是水平的。如图 1 所示，半速度坐标系相对于地面轴系的位置，只由轴 OX 的方向，也就是角 φ 和 θ 来确定，这是半速度坐标系的优点之一。



根据理论力学理论，自由刚体的一般运动微分方程，即飞机在空间的一般运动，可以分解为同其质心的平动以及相对质心的定点运动。质心的运动由质心运动定理得

$$Ma_{cx}=\Sigma F_X \qquad Ma_{cYV}=\Sigma F_{YV} \qquad Ma_{cZV}=\Sigma F_{ZV}$$

式中，ΣF_X、ΣF_{YV}、ΣF_{ZV}——作用在飞机上所有外力在相应半速度轴上投影之和。

上述方程的左边是飞机质心的加速度 a_c 在半速度坐标轴上的投影。关于加速度 a_c 在三轴投影由理论力学知识可得，此时，代入飞机在平面内飞行的具体条件，则加速度 a_c 在航迹切向 OX 轴的投影（切向加速度）为 $a_{cx}=dV/dt$，在 OY_V 轴上的投影为 0，在 OZ_V 轴上的投影为 a_{cZV}—$VCos\theta d\varphi/dt$。

综上所述，可得平面内飞行的飞机其质心的动力学方程

$(G/g)\ dV/dt = PCos\alpha Cos\beta - X$ (1)

$0 = (pSin\alpha + Y)\ Cos\gamma_C + (PSin\beta Cos\alpha - Z)\ Sin\gamma_B - G$ (2)

$(G/g)\ (-VCos\theta d\varphi/dt) = (PSin\alpha + Y)\ Sin\gamma_C - (PCos\alpha Sin\beta - Z)\ Cos\gamma_C$ (3)

方程中的重量G，是飞机的重量，它是随时间变化的量，所以还应有方程

$dG/dt = -G\ (t)$ (4)

如果是火箭发动机，这个方程就不需要，因为这时重量与时间的关系G (t) 是已知的。

逐一分析上述方程中各量，力P、X、Y、Z及燃料秒流量与飞行高度无关；P (V、κ)，X (V、α、β)，Y (V、α)，Z' (V、β)，G (V、κ)。因此，归纳得到在所写的四个方程中包含了七个未知数，即V、α、φ、G、β、γ_C、κ，如果再列出三个补充方程（约束方程），该方程组就是可解的了。

当然，飞机在水平面内飞行还包含了很多特殊情况，诸如，无倾斜飞行、无侧滑飞行、直线飞行、等速飞行等等。具体问题，具体分析，这些特殊条件都会大大简化原方程组的复杂程度，再采用微分方程的各种近似积分方法得解。求取的飞行速度、航程等运动量，可以说是决定了飞机该时的运动状态。

当飞机平面内飞行时，迎角及侧滑角不超过20°(0.349弧度)。因为$\sin 20° = 0.342$及$\cos 20° = 0.940$，则可以认为$\sin\alpha \approx \alpha/57.3$及$\sin\beta = \beta/57.3$，而所带来的误差不超过2%，以及$\cos\alpha \approx \cos\beta \approx 1$所带来的误差不超过6%。因此上面方程可写为如下形式

$dV/dt = g\ (P - X)\ /G$ (1′)

$0 = (P\alpha/57.3 + Y)\ Cos\gamma_C + (P\beta/57.3 - Z)\ Sin\gamma_C - G$ (2′)

$d\varphi/dt = g\ (GV\ [-(P\alpha/57.3 + Y)\ Sin\gamma_C + (P\beta/57.3 - Z)\ Cos\gamma_C]$ (3′)

$dG/dt = -G\ (t)$ (4′)

在水平平面内的曲线计划飞行通常决定于下列给定的条件：

(1) 飞行速度的方向

(2) 发动机的工作状态。

目前，由于计算机的引入，现代有关飞行动力学问题的计算，已相当准确，不但可以得到需要的精确结果，而且可以用计算机模拟飞行的全部过程，甚至在地面可以利用模拟机模仿控制全部过程，但无论科技如何发展，应用力学的分析求解方法，仍是最基本、最实用的方法。

(上接第107页)

四、结束语

通过以上分析可以看出，对弹性的正确理解和计算是非常重要的。如果一个销售者在一次交易中，发现当价格上升一个百分比时，需求量下降小于这个百分比，就盲目地认为自己商品的需求价格弹性小于1，于是就通过提高价格来增加收益，这未必是正确的，因为提高价格很可能导致相反的结果，即收益反而下降了。如果发现当价格上升一个百分比时，需求量下降大于这个百分比，就盲目地认为自己商品的需求价格弹性大于1，想通过降价促销来增加收益，也可能导致同样的错误。所以，当我们想利用弹性和收益理论促销增收时，一定要先准确计算好弹性系数，再进行操作。由此可见，在经济学中，一定要正确理解经济量的含义，特别是注意它在数学上的严密性，否则将会导致严重的错误，这必须引起我们每一个经济理论研究者和实际工作者的注意。