

# 美國的即期市場利率與美元指數

李香儀

June 17, 2022

## 1 研究動機與背景

### 1.1 研究動機

從今年三月開始，美國聯準會 (Fed) 多次升息，並且許多專家預測未來將持續進行多次升息。因此，本研究欲探討與利率關係較為密切、同時也是全球最大的證券市場之一——美國國債市場中的短期利率，也就是即期市場利率的變化。

另外，在近年 Fed 多次較大動作地實行量化寬鬆以及量化緊縮政策，美元的波動幅度增加，可信程度也受到了質疑，所以本研究會嘗試將短期市場利率以及美元指數近期的變化率進行連結。

### 1.2 近期 Fed 貨幣政策概述

2020 年 3 月，美股受 covid-19 影響重挫，4 次熔断後啟動無限量 QE

2021 年 11 月左右，美國通膨壓力過大，Fed 開始進行縮債

今年 3 月，通膨上看 8%，正式宣布縮表、升息

## 2 資料概述

匯率一直是經濟學的熱門話題，許多文獻中也對於匯率相關因素進行了探討。Aloui (2021) 和 Kia (2013) 都曾提到利率與匯率之間的關係，Sanchez(2007) 也曾論述不同經濟體中利率與匯率的傳導性。

## 2.1 美國短債利率

雖然美國國債利率是由美國政府決定，但是在債券售出後，可以進行再次交易轉手，這時的利率將會依照市場機制走向均衡。並且，因為短期債券距離到期日時間較短，只有三個月，所以其價格受到利率影響更大。

因為近期（自三月以來）的利率變化較大，與之前趨勢明顯不同，所以選擇自 3 月 1 日至 6 月 16 日的資料進行分析。為了對近期的市場利率有一定了解，需要先將其時間序列圖畫出。將時間作為橫軸，即期利率作為縱軸畫出折線圖。在畫出之後，為了更清楚地看出利率的變化方向，不受極端值影響，將其每五日做平均後再次繪製於同一圖表之上。

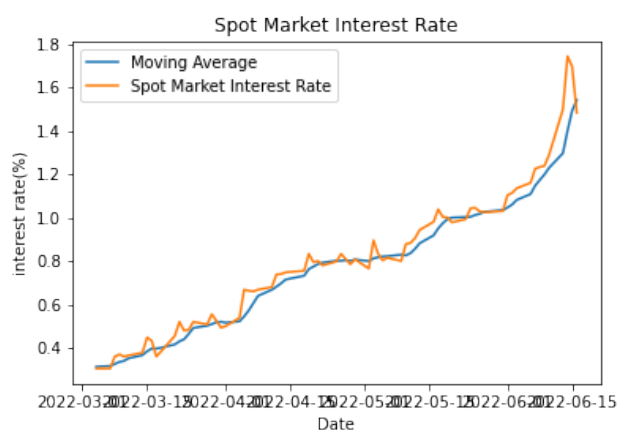


Figure 1: spot interest rate

從圖中可以觀察到，即期市場利率自 3 月以來一直在穩定上升中，在大約 6 月 5 日開始出現大幅增長。

## 2.2 美元指數

美元指數作為一個綜合美國與各個市場主流貨幣匯率的指數，可以反映出當下美元市場的趨勢，因為利率與匯率之間的關聯性，美元指數自然也會與利率有一定的關聯性。

與即期市場利率相對應，自 3 月以來，美元指數大多是在下跌，但是在 4 月底、6 月初分別出現回升，之後都再次回落。

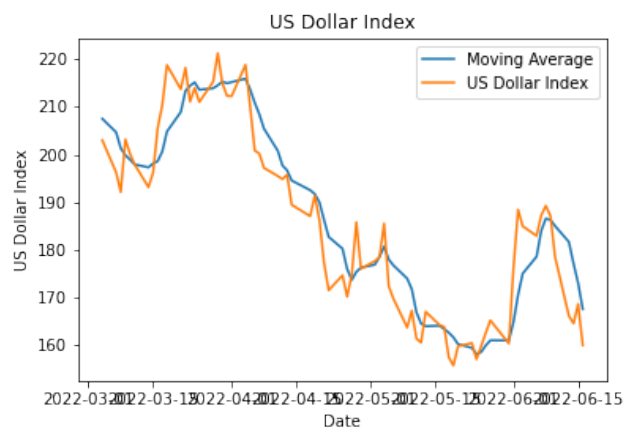


Figure 2: the USD index

### 2.3 美元指數與利率的關聯

在對美元指數與利率分別有了初步了解之後，想要探究其關聯，可以先畫出他們的散佈圖，如下圖。

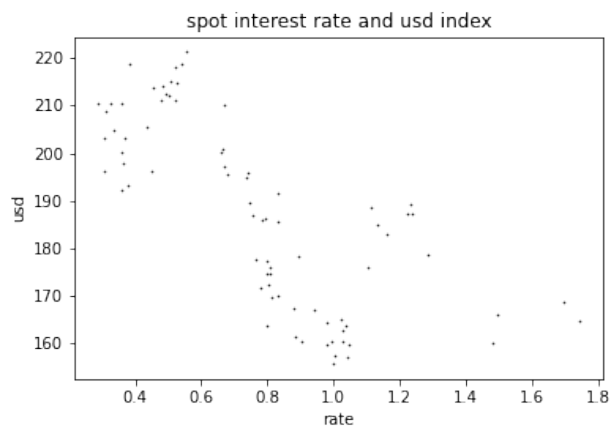


Figure 3: spot interest rate and the USD index

可以明顯看出，它們之間的關聯並非是線性，需要嘗試擬合非線性迴歸模型。接下來的分析中，主要會以兩種方法來進行非線性迴歸模型的參數估計。

### 3 分析方法

#### 3.1 Linear Regression

為了呈現出美元指數在近期與即期市場利率之關聯，嘗試做迴歸分析。由散佈圖可以直接得知，linear regression 並不合適，做出的結果如下：

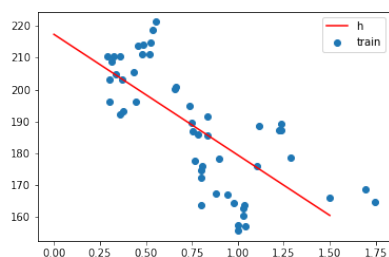


Figure 4: Linear regression model of spot interest rate and the USD index

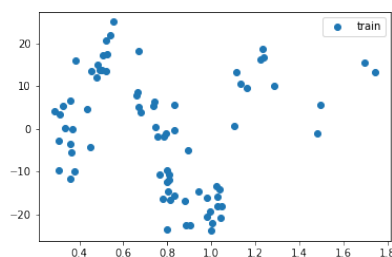


Figure 5: Residual

Figure 4 中相對並未明顯呈現模型不適配，但是由殘差圖 Figure 5 就可以明顯發現殘差不符合 independent and identity 的假設，因此可以下結論：linear regression model 不適用於描述美元指數在近期與即期市場利率之關聯。

但是，如果只討論美元指數每日報酬率時，用 linear regression 就相對合適，並且可以由圖明確看出，每日報酬率並無上升，但是波動增大，對應回歸直線為： $y = ax + b$ ，其中  $a, b$  如 Figure 6 中圖示。

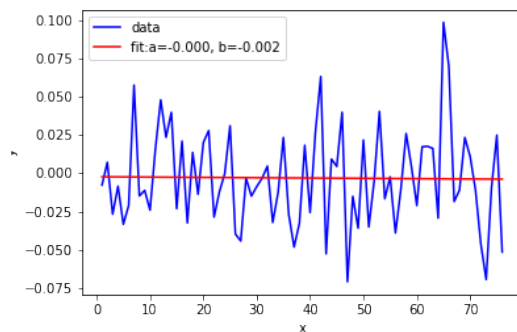


Figure 6: return of the USD index

## 3.2 Nonlinear Regression

接下來嘗試進行 nonlinear regression。在迴歸分析中，主要是使用最小平方方法或 MLE 進行參數估計，以分析出適配模型。但是有些 nonlinear regression model 的常態函數 (對最小平方方式偏微後使其等於 0) 是非線性的，因此沒有封閉解存在，只能用數值方法進行分析，這裡分別使用了兩種方法。

### 3.2.1 Nonlinear Regression Part1

第一種進行 nonlinear regression 估計的方法不限定模型的類型，對任何模型皆適用，是使用數值分析方法進行最小平方擬合。主要使用的數值方法有三種，其一為高斯牛頓法 (Gauss-Newton method)，其二為最速急降法 (method of steepest descent)，最後一種則是將前兩種整合的 Levenberg Marquardt 算法。

#### Gauss-Newton method

先針對參數給出對應起始值，再以起始值為中心做出泰勒展開式，將其轉換為 Jacobian 矩陣後如下：

$$J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + J(x)\Delta x$$

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x = x_k - (J(x_k)^T J(x_k))^{-1} J(x_k)^T f(x_k)$$

#### method of steepest descent

是直接利用梯度，找出函數下降最快速的方向，不斷迭代後找到可以使得常態函數有最小值的參數。即在給定起始點後，用  $u^{k+1} = u^k - h \frac{\nabla J(u^k)}{\|\nabla J(u^k)\|}$  進行迭代。

#### Levenberg Marquardt method

Levenberg Marquardt method 通常被視為 Gauss-Newton method 的修正，或著 Gauss-Newton method 和 method of steepest descent 的整合，可以解決 Gauss-Newton method 可能無法收斂的問題。

以 Gauss-Newton method 中的

$$\nabla x = -(J(x_k)^t J(x_k))^{-1} J(x_k)^t f(x_k)$$

做為基礎，進行一些變動，成為：

$$\nabla(J(x_k)^t J(x_k) + \mu I)x = -J(x_k)^t f(x_k)$$

在  $\mu$  過大時，將其變更為

$$\nabla x = \frac{-1}{\mu} J(x_k)^t f(x_k)$$

逼近 method of steepest descent。

擬合結果

因為在常用 nonlinear regression model 中，exponential 和 logistic 都與美元指數在近期與即期市場利率之關聯不太類似，因此此處採用的是四次多項式的 nonlinear regression model， $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

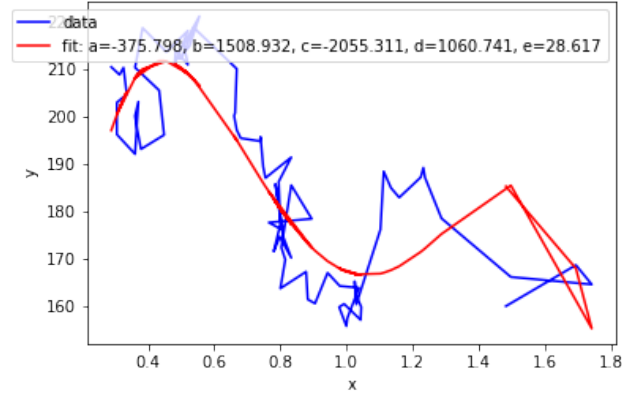


Figure 7: Nonlinear regression model of spot interest rate and the USD index - 1

可以看到，模型大致與實際資料相近，但是還是略有偏離

### 3.2.2 Nonlinear Regression Part2

第一種進行 nonlinear regression 估計的方法只有多項式迴歸可以適用，是直接將觀察值  $X$  的不同次方項儲存為新的變數，再加入 linear regression model 中，當作是複迴歸進行迴歸分析。這裡依據散佈圖，設定最高為四次項的 nonlinear regression model 如下， $y = 1009.9x^4 - 1975.7x^3 + 1462.4x^2 - 366.5x$

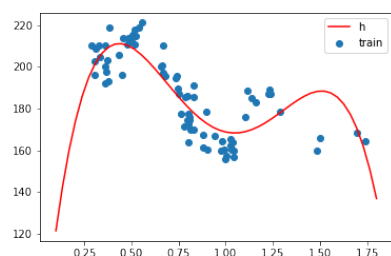


Figure 8: Nonlinear regression model of spot interest rate and the USD index - 2

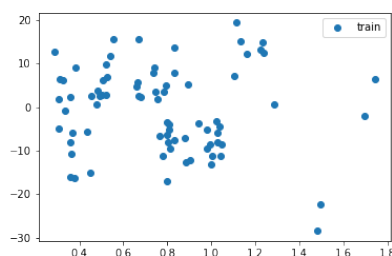


Figure 9: Residual

與用第一種方法估計出的結果不相同，但是依據殘差圖可以發現，這種估計方法相對更合適。

## References

- [1] Aloui, D. (2021). "The COVID-19 pandemic haunting the transmission of the quantitative easing to the exchange rate," Finance Research Letters, 43, 102025.
- [2] Kia, A. (2013). "Determinants of the real exchange rate in a small open economy: Evidence from Canada," Journal of International Financial Markets, Institutions and Money, 23, 163-178.
- [3] Sanchez, M. (2008). "The link between interest rates and exchange rates: do contractionary depreciations make a difference?" International Economic Journal, 22(1), 43-61.
- [4] K. Madsen, H.B. Nielsen, O. Tinglef. (2004). Method of non-linear least squares problems. (2nd. ed)
- [5] 資料來源：yahoo.finance