

Matematično modeliranje gibanja žerjava

Rok Andrejc, Gorazd Karer

Univerza v Ljubljani, Fakulteta za elektrotehniko, Tržaška cesta 25, 1000 Ljubljana

E-pošta: rok.andrejc@gmail.com, gorazd.karer@fe.uni-lj.si

Crane System Mathematical Modelling

The article is focused on crane system mathematical model development with the goal to be used for control system design. The work started using theoretical modelling approach and was in the next phase improved by experimental techniques and optimizations. In the first design phase, a nonlinear model was developed, and later on, it was linearized. Analysis and testing procedures proved that modelling results were not good enough. Imperfections were correspondingly corrected through the second design phase, during which new damping functions were added and parameters of the system were corrected to more suitable values.

1 Uvod

V pričujočem prispevku želimo predstaviti pristop k modeliranju in rezultate modeliranja pilotne naprave, kot je prikazana na sliki 1.

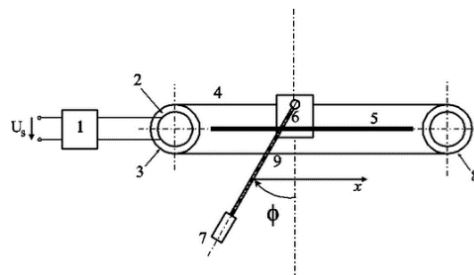


Slika 1. Obravnavana pilotna naprava - žerjav

Gre za sistem, ki je bil razvit za namene študija dinamičnih lastnosti kompleksnih procesov in za namene načrtovanja vodenja le-teh [1]. Osnovni sestavni deli naprave so (Slika 2):

- 1 - gonilnik servo motorja,
- 2 - enosmerni servo motor,
- 3 - pogonska jermenica,
- 4 - jermen povezan z vozičkom,
- 5 - vodilo vozička,
- 6 - voziček,
- 7, 9 - utež na togi palici,
- 8 - pomožna jermenica.

Napravo vzbuja en aktuator, to je enosmerni motor, ki ga krmilimo z ustreznim napetostnim signalom v območju $\pm 10V$. Ta napetostni signal predstavlja vhodni signal sistema. Motor vpliva neposredno na gibanje vozička in posredno tudi na gibanje palice, ki je obešena na voziček in se lahko vrti v območju 360° .



Slika 2. Sestavni deli naprave

Položaj vozička in zasuk palice iz navpičnega položaja je mogoče meriti s pomočjo vgrajenih senzorjev. Izhod senzorjev je napetostni signal v območju $\pm 10V$.

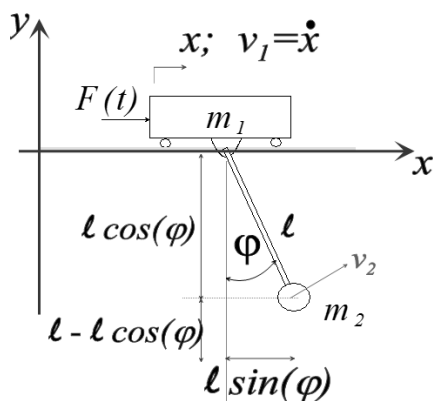
V naslednjem razdelku smo predstavili glavne korake prve faze modeliranja, ki je najprej rezultirala v izgradnjo nelinearnega modela ter nato še v njegovo linearizirano aproksimacijo, katere namen je bil dober opis dinamičnih lastnosti sistema v bližini delovne točke. Podrobna analiza je podala nekatere pomanjkljivosti, zato smo v naslednjem razdelku opisali vpeljavo nadaljnjih izboljšav. Prispevek končuje z nekaterimi sklepnimi ugotovitvami in idejami za nadaljnje raziskave.

2 Prva faza modeliranja

Teoretično modeliranje sistemov [2-4] temelji na dobrem poznavanju ravnotežnih zakonov, ki se jim opazovani proces podreja. Dvome pri načrtovanju pogosto vnašajo odločitve o tem, kaj je v določenem primeru mogoče zanemariti in česa ne. Ključno vodilo, ki je pri tem načrtovalcu v pomoč, je seveda namen uporabe modela oz. modelov. Za razvoj modela je potrebno poleg strukture, ki jo določimo na teoretični način, definirati tudi vrednosti parametrov. Kadar s sistemom lahko eksperimentiramo, se pri tem pogosto poslužujemo tudi optimizacije, s pomočjo katere vrednosti parametrov modela prilagajamo s ciljem doseganja čim boljše podobnosti odzivov modela odzivom sistema.

Pri obravnavani pilotni napravi smo se modeliranja lotili z uporabo tako imenovane Lagrange-jeve enačbe

[2-4], ki zahteva določitev posplošenih koordinat opisa sistema ter določitev kinetične in potencialne energije sistema. Poleg tega moramo ustrezno opisati tudi disipacijsko funkcijo, to je funkcijo, ki govori o porabi energije v sistemu. V ta namen vpeljemo oznake, kot so ilustrirane na sliki 3.



Slika 3. Shematski prikaz naprave

Če kot posplošeni koordinati za obravnavani primer izberemo spremenljivki $x(t)$ (premik vozička po tirnici) in $\varphi(t)$ (kot zasuka nihala iz ravnotežnega položaja), lahko ravnotežni enačbi predstavimo v naslednji obliki:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x} \right) + \frac{\partial P}{\partial \dot{x}} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial P}{\partial \dot{\varphi}} = F(t). \quad (2)$$

Pri čemer je $L = W_k - W_p$, P močnostna funkcija sistema in $F(t)$ vzbujanje vozička s silo motorja. Kinetična energija je določena z naslednjim izrazom:

$$W_k = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}. \quad (3)$$

kjer je m_1 masa vozička, m_2 masa nihala, v_1 hitrost gibanja vozička, v_2 hitrost nihala, l pa dolžina nihala. Kinetično energijo lahko izrazimo tudi kot [2, 4]:

$$W_k = \frac{(m_1 + m_2) \dot{x}^2}{2} + m_2 \dot{x} l \dot{\varphi} \cos(\varphi) + \frac{m_2 l^2 \dot{\varphi}^2}{2}. \quad (4)$$

Potencialna energija je:

$$W_p = m_2 g l (1 - \cos(\varphi)). \quad (5)$$

Močnostna funkcija sistema pa:

$$P = f_2 \dot{\varphi}^2 + f_1 \dot{x}^2, \quad (6)$$

kjer je f_2 konstanta dušenja ležajev nihala [1], φ kot zasuka, f_1 konstanta dušenja [1] in $v_1 = \dot{x}$ hitrost vozička.

Nelinearni model tako izrazimo v naslednji obliki:

$$m_2 \ddot{\varphi} l \cos(\varphi) = F(t), \quad (7)$$

$$J \ddot{\varphi} + f_2 \dot{\varphi} + m_2 l g \sin(\varphi) + m_2 \ddot{x} l \cos(\varphi) = 0, \quad (8)$$

pri čemer je

$$J = J_s + m_2 l^2, \quad (9)$$

vztrajnostni moment nihala, ki je definiran s strani proizvajalca [1]. J_s predstavlja vztrajnostni moment palice in člen $m_2 l^2$ opisuje vztrajnostni moment uteži kot točkastega telesa v težišču.

Za namene linearizacije smo kot delovno točko izbrali ravnotežni položaj nihala oz. odmik 0° od stabilne navpične lege. Pri izračunu pa upoštevamo majhne odmake od delovne točke 0° . Tako lahko vpeljemo naslednje poenostavitvene predpostavke:

$$\sin(\varphi) \cong \varphi, \quad (10)$$

$$\cos(\varphi) \cong 1, \quad (11)$$

$$\varphi \dot{\varphi}^2 \cong 0 \quad (12)$$

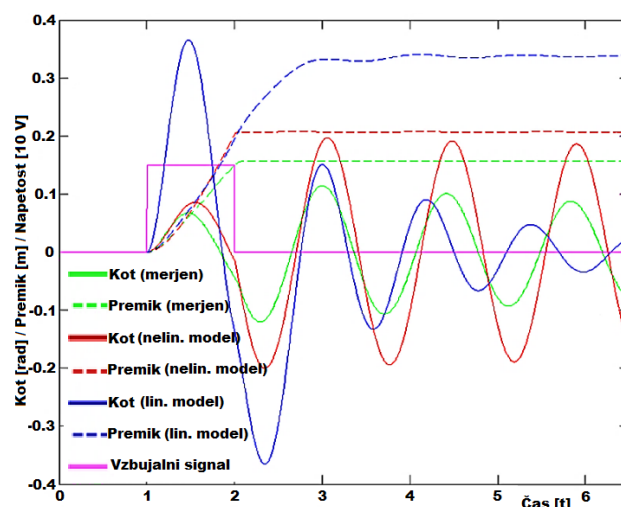
in dobimo linearizirano obliko modela:

$$(m_1 + m_2) \ddot{x} + f_1 \dot{x} + m_2 \ddot{\varphi} l = F(t), \quad (13)$$

$$J \ddot{\varphi} + f_2 \dot{\varphi} + m_2 l g \varphi + m_2 \ddot{x} l = 0. \quad (14)$$

Vrednosti parametrov, ki so uporabljeni v enačbah, so naslednje: $m_1 = 4$ kg, $m_2 = 0,36$ kg, $l = 0,451$ m, $f_1 = 10$ kg/s, $f_2 = 0,00145$ kg m²/s, $J = 0,08433$ kg m² in so definirane s strani proizvajalca [1].

Izvedemo simulacijo modela in primerjamo odzive na vzbujalni pulz z odzivi pilotne naprave, kot je ilustirano na sliki 4.



Slika 4. Primerjava odzivov obeh modelov z odzivom pilotne naprave pri prvotnih parametrih

Na sliki 4 je prikazan signal vzbujanja in vsi omenjeni odzivi. Očitno je, da se tako odzivi nelinearnega kot linearnega modela ne ujemajo z odzivom realne naprave, kar dokazuje njihovo neustreznost.

3 Druga faza modeliranja

Na osnovi prikazanih odzivov (Slika 4) smo ocenili, da bo izboljšava modela zahtevala uravnavanje dušenja pri gibanju vozička in dušenja pri gibanju nihala. Eksperimenti so potrdili, da staranje naprave močno vpliva na obe omenjeni lastnosti. Poleg tega pa smo podvomili tudi v korektnost ocene določene točkovne mase v težišču nihala m_2 .

Za lažje določanje ustreznih vrednosti parametrov razdelimo problem na dva dela, in sicer na ločeno opazovanje vozička ter nihala. Enačba (15) tako opisuje samo matematični model vozička:

$$\ddot{x}(t) = \frac{f_1 \dot{x} + U k_v}{m_1}, \quad (15)$$

pri čemer je U napetostno vzbujanje v voltih, k_v pa faktor pretvorbe iz napetosti v silo [1]. Enačba (16) opisuje matematični model samega nihala:

$$\ddot{\phi}(t) = \frac{-f_2 \dot{\phi} - m_2 g \sin(\phi)}{m_2 l}. \quad (16)$$

Ob upoštevanju poenostavitvene predpostavke v enačbi (10) dobimo linearni model nihala v obliki:

$$\ddot{\phi}(t) = \frac{-f_2 \dot{\phi} - m_2 g \phi}{m_2 l}. \quad (17)$$

Podobno kot pri celotnemu modelu, delna modela vzbujamo z različnimi vzbujalnimi signali in dobljene odzive primerjamo z odzivi na enaka vzbujanja na napravi. Tako lahko iz posameznih odzivov ocenimo, katere parametre modela moramo popraviti. S postopnim spreminjanjem parametrov ter večkratno simulacijo empirično ovrednotimo nove vrednosti parametrov.

Kot je znano, na frekvenco nihanja nihala vpliva predvsem njegova dolžina, oz. dolžina kjer se nahaja težišče točkaste mase. To dolžino smo ustrezno prilagodili. Dušenje f_1 je ključno za gibanje vozička, dušenje f_2 pa za iznihavanje nihala.

Torej s pomočjo začetnih odzivov (slika 4) popravimo parametre modelov na naslednje vrednosti: $l = 0,5$ m, $f_1 = 6,5$ kg/s, $f_2 = 0,022$ kg m²/s.

Ugotovili smo, da poleg viskoznega dušenja, ki povzroča silo prenosorazmerno hitrosti gibanja, igra pomembno vlogo pri gibanju vozička tudi lepenje in zaviranje enosmernega motorja. Vpliv lepenja je opazen pri mirovanju vozička. Tako je sila lepenja:

$$F_{lep}(\dot{x}) = \begin{cases} K_{lep} F_n, & \dot{x} = 0 \\ 0, & \dot{x} \neq 0 \end{cases} \quad (18)$$

Pri čemer je K_{lep} koeficient lepenja in $F_n[N]$ sila normale oz. sila zaradi težnosti, kar smo opisali z:

$$F_n = m_1 * g. \quad (19)$$

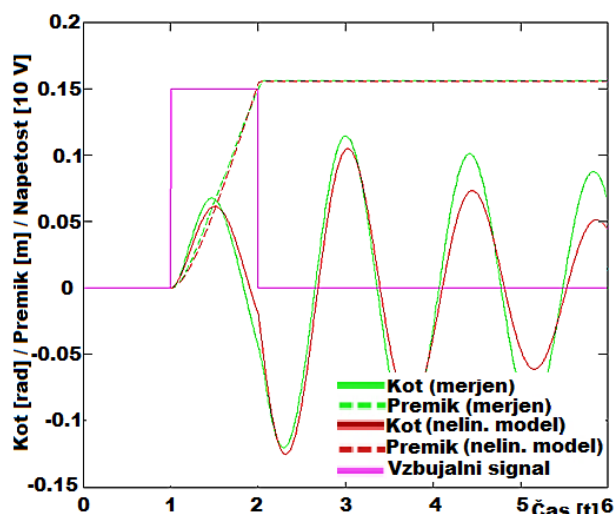
K_{lep} določimo empirično. V našem primeru 0,5.

Eksperimentiranje z napravo je potrdilo, da, ko voziček miruje in nihalo niha okrog ravnotežja, vozička praktično ne premakne, kar je posledica omenjenih vplivov.

Podrobnejše opazovanje je razkrilo, da ima na voziček naprave velik vpliv sam pogonski motor, ki ga premika. Ko vozička več ne premikamo (motorja ne vzbujamo) motor poskrbi, da nanj deluje še dodatna zaviralna sila zaradi ustavljanja motorja. Motor ustavljajo inducirani tokovi, lastno dušenje ležajev in drugi vplivi, zaradi katerih se voziček po prenehanem vzbujanju ustavi zelo hitro, za razliko od modela, kjer tovrstnih vplivov nismo upoštevali. Ti pojavi imajo velik vpliv na obnašanje celotnega sistema, saj bolj hitro ustavijo voziček kot smo predvidevali. Če torej dodamo še dodatni zaviralni člen v model, nadomestimo sedaj člen $f_1 \dot{x}$ s členom $f_1 \dot{x} f_{zav}(U) F_{lep}(\dot{x})$, pri čemer je:

$$f_{zav}(U) = \begin{cases} F_z, & U = 0 \\ 1, & U \neq 0 \end{cases}, \quad (20)$$

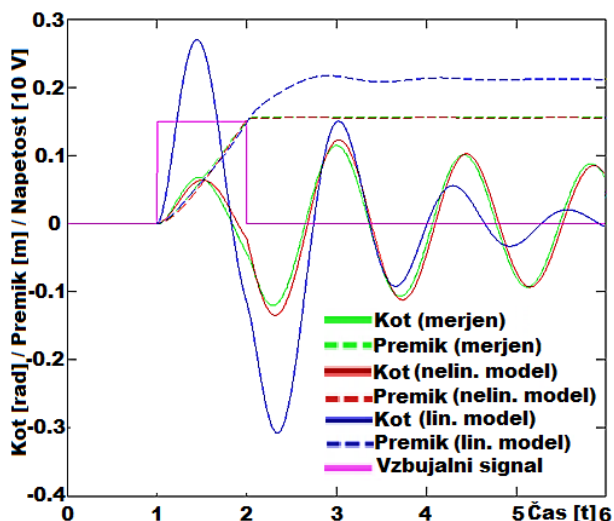
kjer je F_z korekcijski faktor trenja pri zaviranju, ki je enak 22 in U je vzbujanje v voltih. Konstanto zaviranja F_z smo prav tako določili izkustveno s pomočjo eksperimentov na napravi. Ko ta del lineariziramo, ga poenostavimo v $f_{zav}(U)=1$. Tako vpeljane spremembe smo testirali tudi simulacijsko, kot je ilustrirano na sliki 5.



Slika 5. Primerjava odzivov obeh modelov z odzivom pilotne naprave pri popravljenih parametrih

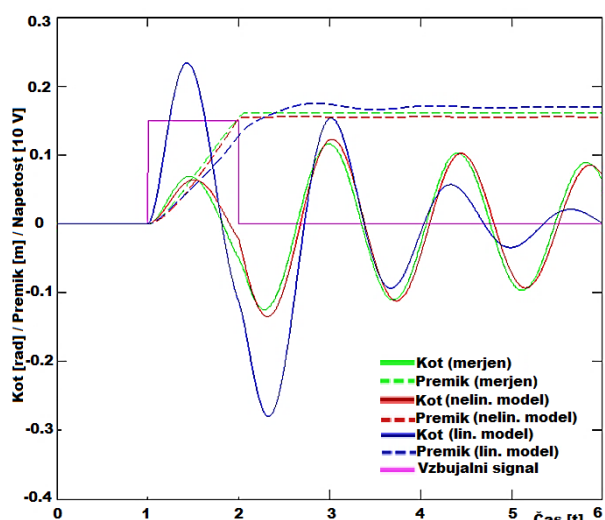
Očitno je, da se sedaj pomik vozička nelinearnega modela zelo dobro ujema z odzivom naprave. Medtem, ko je nihanje v fazi, vendar pa dušenje nihanja še ni ustrezno. Parameter dušenja smo po več iteracijah simulacije popravili na končno vrednost $f_2 = 0,018$ kg m²/s in ponovno izvedli simulacijsko testiranje, ki je ilustrirano na sliki 6 in 7. Odzivi dokazujejo, da so bile prilagoditve parametra ustrezne.

Na sliki 6 poleg sedaj že zelo dobro ujemajočega se nelinearnega modela vidimo dodatno odziv linearnega modela, katerega pomik in nihanje nihala še nista v željenih mejah odstopanja. Poudariti je potrebno, da je linearen model podvržen določenim poenostavitvam in velja le v bližnji okolici delovne točke.



Slika 6. Primerjava odzivov obeh modelov z odzivom pilotne naprave pri popravljenih parametrih

Na sliki 7 vidimo odzive modelov po še zadnjih iteracijah popravkov parametrov. Tako smo popravili še faktor $F_z = 30$ in izboljšali odziv linearnega modela.

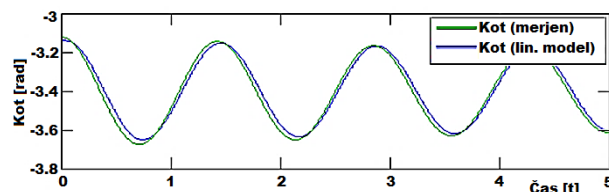


Slika 7. Primerjava odzivov obeh modelov z odzivom pilotne naprave pri popravljenih parametrih

Pri linearnem modelu vidimo, da se odziv vozička že dobro ujema z odzivom nelinearnega modela in odzivom naprave. Medtem ko odziv nihala še vedno precej odstopa od želenih vrednosti.

Razlog za to je, da so bili koti odmika nihala precej veliki pri vrednotenju celotnega sistema in daleč iz delovne točke, ki smo jo izbrali pri linearizaciji.

Na sliki 8 vidimo, da je odziv linearnega modela nihala dober v okolici delovne točke. Ta primerjava nam nazorno pokaže pomen in vpliv delovne točke, ki jo izberemo ob linearizaciji modelov.



Slika 8. Primerjava odzivov obeh modelov z odzivom pilotne naprave pri popravljenih parametrih

Na osnovi prikazanih rezultatov lahko sklepamo da so linearizirani modeli dobra aproksimacija sistemov le v okolici delovnih točk, ki si jih izberemo. Zato model dostikrat lineariziramo v več delovnih točkah, s tem dobimo več različnih modelov, ki jih moramo potem ustrezno uporabiti, glede na to blizu katere delovne točke se nahajamo.

Nasprotno pa so nelinearni modeli uporabni po vsem območju. Vendar so bolj zapleteni, velikokrat prezahtevni za regulacijo, posebno za hitre sisteme. Prav tako zahtevajo tudi večjo računsko moč in jih zato večinoma ne uporabljamo v majhnih vgradnih sistemih.

4 Zaključek

V prispevku smo opisali korake modeliranja pilotne naprave žerjav, kjer smo s postopnim izboljševanjem modela prišli do zadovoljivo dobrega rezultata, ki je primeren za namene načrtovanja vodenja tega sistema.

Zaenkrat smo se osredotočili predvsem na delovanje sistema, ko palica niha pod vozičkom, v nadaljevanju pa bi bilo potrebno raziskati ustreznost modela tudi za primer, ko se palica giblje v celotnem območju 360° .

Literatura

- [1] Amira GmbH, PS600 Laboratory Experiment Inverted Pendulum, Amira GmbH, Bismarckstrasse, Duisburg, 2000.
- [2] M. Atanasijević-Kunc: Metode modeliranja, Študijsko gradivo, Fakulteta za elektrotehniko, Univerza v Ljubljani, 2014.
- [3] R. Karba: Modeliranje procesov, Založba FE in FRI, Univerza v Ljubljani, 1999.
- [4] M. Atanasijević-Kunc: Modeliranje procesov, Zbirka primerov z ilustracijami v okolju Matlab - Simulink, Založba FE in FRI, Univerza v Ljubljani, 2010.